7 Случайные величины. Распределение случайных величин

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — некоторое вероятностное пространство.

Определение 7.1. *Функция* $\xi(\cdot) : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ *называется* случайной величиной, *если* $\{\xi \leqslant x\} \in \mathcal{F}$ *для любого* $x \in \mathbb{R}$.

Определение 7.2. *Если* X *— конечное или счетное подмножество* $\mathbb{R}$, ξ *— случайная величина и* $\mathsf{P}(\xi \in X) = 1$ *(т. е. множество значений* ξ *не более чем счетно), то* ξ *называется* дискретной случайной величиной, *а набор вероятностей*

$$p_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi = x), \quad x \in X,$$

называется дискретным распределением ξ.

Теорема 7.1. *Пусть* X *— конечное или счетное подмножество* $\mathbb{R}$. *Набор вещественных чисел* $\{p(x)\}_{x \in X}$ *является дискретным распределением некоторой случайной величины тогда и только тогда, когда* $\{p(x)\}_{x \in X}$ *удовлетворяет следующим условиям: 1)* $p(x) \geqslant 0$ $\forall x \in X$; *2)* $\sum\limits_{x \in X} p(x) = 1$.

Определение 7.3. Функцией распределения случайной величины ξ *называется* $F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi \leqslant x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 7.2. *Функция распределения случайной величины обладает следующими свойствами:*

1) если $-\infty < a < b < +\infty$, *то*

$$F_\xi(a) \leqslant F_\xi(b), \quad \mathsf{P}(a < \xi \leqslant b) = F_\xi(b) - F_\xi(a);$$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$;

3) функция $F_\xi(x)$ *непрерывна справа;*

4) $\mathsf{P}(\xi < x) = F_\xi(x - 0)$, *где* $F_\xi(x - 0) = \lim\limits_{y \uparrow x} F_\xi(y)$ *— предел слева функции* F_ξ *в точке* x;

5) $\mathsf{P}(\xi = x) = F_\xi(x) - F_\xi(x - 0)$.

Теорема 7.3. *Если* ξ *— дискретная случайная величина и* Y *— конечное или счетное множество ее значений, то* $F_\xi(x) = \sum\limits_{y \in Y,\, y \leqslant x} \mathsf{P}(\xi = y)$ *— кусочно-постоянная возрастающая непрерывная справа функция со скачками величины* $\mathsf{P}(\xi = y)$ *в точках* $y \in Y$.

Теорема 7.4. *Функция* $F\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *является функцией распределения некоторой случайной величины тогда и только тогда, когда* F *— возрастающая непрерывная справа функция и* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

7.1. Пусть $\mathsf{P}(\xi = k) = 1/5$ при $k = 0, \pm 1, \pm 2$. Найти распределения случайной величины $\eta = |\xi|$.

7.2. Стрелок делает 3 выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку засчитывается 5 очков. Найдите закон распределения случайной величины ξ, где ξ число набранных очков, и постройте график функции распределения.

7.3. Среди 10 лотерейных билетов имеется 4 билета с выигрышем. Наудачу покупают 2 билета. Пусть случайная величина ξ число выигрышных билетов среди купленных. Найдите закон распределения случайной величины ξ.

7.4. Дискретная случайная величина ξ имеет закон распределения:

ξ	0	$\pi/6$	$\pi/2$	$5\pi/6$	π
P	$1/10$	$3/10$	$1/10$	$2/10$	$3/10$

Найдите закон распределения случайной величины $\eta = \sin \xi$ и постройте график функции распределения.

7.5. При приеме на работу проводится три этапа собеседования. Вероятность успешного прохождения первого этапа — 0,6, второго — 0,4, третьего — 0,2. К следующему этапу претенденты допускаются только в случае успешной сдачи предыдущего. Составьте закон распределения числа этапов, пройденных претендентом.

7.6. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — функции распределения некоторых случайных величин. Определить условия, которым должны удовлетворять неотрицательные константы c_1 и c_2, чтобы функция $F(x) = c_1 F_1(x) + c_2 F_2(x)$ также являлась функцией распределения.

7.7. Подбрасывается три монеты достоинством 1, 2 и 5 рублей. Пусть ξ — случайная величина, равная сумме выпавших цифр. Если на монете выпадает орел, то считается, что на монете выпала цифра 0. Записать распределение данной случайной величины. Найти функцию распределения этой случайной величины и построить ее график.

7.8. Подбрасывается три монеты достоинством 1, 2 и 5 рублей. Пусть ξ — случайная величина, равная произведению выпавших цифр. Если на монете выпадает орел, то считается, что на монете выпала цифра 0. Записать распределение данной случайной величины. Найти функцию распределения этой случайной величины и построить ее график.

7.9. Является ли распределением некоторой дискретной случайной величины последовательность: а) $p^k(1-p)^2$, $k = 1, 2, \ldots$, $0 < p < 1$; б) $\frac{1}{n(n+1)}$, $n = 1, 2, \ldots$; в) $p(1-p)^{n-1}$, $n = 1, \ldots$, $0 < p < 1$; г) $\frac{2^k}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$?

Решение. Пусть сначала $p_k = p^k(1-p)^2$. Ясно, что в условиях задачи $0 < p_k < 1$. Проверим выполнение условия $\sum\limits_k p_k = 1$.

$$\sum_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} p^k(1-p)^2 = (1-p)^2 \sum_{k=1}^{\infty} p^k = \frac{p(1-p)^2}{1-p} = p(1-p) < 1.$$

Требуемое условие не выполнено, значит данная последовательность не может задавать распределение дискретной случайной величины.

Далее пусть $p_k = \frac{1}{k(k+1)}$. Условие $0 < p_k < 1$ выполнено. Проверим выполнение второго условия

$$\sum_k p_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = 1.$$

Второе условие также выполнено. Значит, вторая последовательность является распределением некоторой дискретной случайной величины.

Решение оставшихся пунктов рекомендуется провести самостоятельно.

7.10. Подбрасывается симметричная монета. Обозначим через ξ бросок, при котором герб выпадет второй раз. Найдите закон распределения случайной величины ξ.

8 Случайные векторы. Независимость величин

Определение 8.1. *Пусть $X_\xi = \{x_1, \dots, x_n\}$ множество значений дискретной случайной величины ξ. Обозначим через $A_k = \{\omega \in \Omega\colon \xi(\omega) = x_k\}$, $k = 1, \dots, n$, подмножество исходов Ω, благоприятствующих значению x_k.*

Тогда $\mathcal{D}_\xi = \{A_1, \dots, A_n\}$ называется разбиением, *порожденным дискретной случайной величиной ξ, а события A_k —* атомами *разбиения.*

Определение 8.2. *Будем говорить, что разбиения $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ независимы, если для произвольных $i \in \{1, 2, \dots m\}$ и $j \in \{1, 2, \dots n\}$ независимы атомы разбиений:*

$$\mathsf{P}\left(D_i^{(1)} \cap D_j^{(2)}\right) = \mathsf{P}\left(D_i^{(1)}\right) \cdot \mathsf{P}\left(D_j^{(2)}\right),$$

где $D_i^{(1)} \in \mathcal{D}_1$, $D_j^{(2)} \in \mathcal{D}_2$.

Определение 8.3. *Дискретные случайные величины $\xi_1, \dots, \xi_n$ называются* независимыми, *если независимы порожденные ими разбиения $\mathcal{D}_{\xi_1}, \dots, \mathcal{D}_{\xi_n}$.*

Определение 8.4. Случайным вектором *называется вектор* $(\xi_1, \dots, \xi_n)$, *состоящий из случайных величин* $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Определение 8.5. *Совместным распределением пары случайных величин* ξ *и* η *называется:*

$\xi \diagdown \eta$	y_1	y_2	$\dots$	y_n	$\mathsf{P}(\xi = x_k)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2n}	p_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mn}	p_m
$\mathsf{P}(\eta = y_j)$	q_1	q_2	$\dots$	q_n	*1*

где $X_\xi = \{x_1, \dots, x_m\}$, $X_\eta = \{y_1, \dots, y_n\}$, $p_{ij} = \mathsf{P}(\xi = x_i, \eta = y_j)$.

Определение 8.6. Функцией распределения случайного вектора $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ *или (*совместной функцией распределения*) называется*

$$F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathsf{P}(\xi_1 \leqslant x_1, \dots, \xi_n \leqslant x_n).$$

Определение 8.7. *Случайные величины* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *называются* независимыми*, если функция распределения случайного вектора* $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ *равна произведению функций распределений случайных величин* $\xi_1, \dots, \xi_n$*:*

$$F_{\xi_1,\dots,\xi_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_n}(x_n).$$

8.1. Задан закон распределения двумерного случайного вектора (ξ, η)

$y_j \diagdown x_i$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Найти законы распределений каждой случайной величины.

Решение. Найдем вероятности возможных значений случайной величины ξ, сложив вероятности "по столбцам":

$$p_1 = \mathsf{P}\{\xi = 3\} = 0,17 + 0,10 = 0,27;$$

$$p_2 = \mathsf{P}\{\xi = 10\} = 0,13 + 0,30 = 0,43;$$

$$p_3 = \mathsf{P}\{\xi = 12\} = 0,25 + 0,05 = 0,30.$$

Запишем закон распределения случайной величины ξ:

x_i	3	10	12
p_i	0,27	0,43	0,30

Легко проверить, что сумма вероятностей возможных значений равна 1.

Складывая вероятности "по строкам", найдем вероятности возможных значений случайной величины η:

$$q_1 = \mathsf{P}\{\eta = 4\} = 0,17 + 0,13 + 0,25 = 0,55;$$

$$q_2 = \mathsf{P}\{\eta = 5\} = 0,1 + 0,3 + 0,05 = 0,45.$$

Запишем закон распределения случайной величины η:

y_j	4	5
q_j	0,55	0,45

Проверяем, что сумма вероятностей возможных значений также равна 1.

8.2. Задан закон распределения двумерного случайного вектора (ξ, η)

$\eta \diagdown \xi$	-1	0	1
1	0,15	0,3	0,35
2	0,05	0,05	0,1

Найти законы распределений каждой случайной величины. Выяснить зависимость случайных величин.

8.3. Даны законы распределения двух независимых случайных величин ξ и η:

$\xi_i = x_i$	3	4	5
p_i	1/3	1/3	1/3

$\eta_i = y_i$	1	2
p_i	1/2	1/2

Найдите закон распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.

8.4. Даны законы распределения двух независимых случайных величин ξ и η:

ξ	0	2	4
P	0,5	0,2	0,3

η	-2	0	2
P	0,1	0,6	0,3

Найдите законы распределения случайных величин:
а) $\zeta_1 = \xi + \eta$;
б) $\zeta_2 = \xi - \eta$;
в) $\zeta_3 = \xi \cdot \eta$.

8.5. Доказать, что случайная величина ξ не зависит от ξ в том и только в том случае, когда ξ является константой.

8.6. Пусть ξ и η – случайные величины. Обязаны ли они быть независимыми, если независимы ξ^2 и η^2?

8.7. $\mathsf{P}(\omega_1) = \mathsf{P}(\omega_2) = \mathsf{P}(\omega_3) = 1/3$. Доказать, что на $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ нельзя определить две независимые случайные величины, не равные с вероятностью 1 постоянным.

8.8. Пусть ξ и η – независимые случайные величины. Доказать, что случайные величины $\min\{\xi, 1\}$ и $\min\{\eta, 1\}$ также независимы.

8.9. $\mathsf{P}(\omega_1) = \ldots = \mathsf{P}(\omega_4) = 1/4$. Построить на $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_4\}$ две независимые случайные величины, не равные с вероятностью 1 постоянным.

8.10. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $\mathsf{P}(\xi_i = 1) = \mathsf{P}(\xi_i = -1) = 1/2$. Найти распределение случайной величины $\eta = \prod_{i=1}^{n} \xi_i$. Указание: следует воспользоваться индукцией.