Квазиоднородные уравнения

Квазиоднородными называют уравнения, которые сводятся к однородным с помощью замены $y(x) = z^m(x)$, где m заранее не известно.

Пример. (122)

$$2x^2y' = y^3 + xy. \tag{1}$$

Решение.

Шаг 1. Определим сначала значение m (и, вообще, проверим тот факт, что ДУ является квазиоднородным). Выполним замену $y = z^m$. Поскольку

$$y' = (z^m)' = mz^{m-1}z',$$

то исходное уравнение примет вид:

$$2x^2 \cdot mz^{m-1}z' = (z^m)^3 + xz^m,$$

$$2m \cdot x^2z^{m-1} \cdot z' = z^{3m} + xz^m. \tag{2}$$

Далее, для того чтобы найти m, выписываем совокупные степени каждого слагаемого и приравниваем друг другу (константы и производные в подсчете не участвуют):

$$2 + (m-1) = 3m = 1 + m, \quad \text{то есть} \quad 1 + m = 3m = 1 + m.$$

Отсюда находим, что $m = 1/2$, а значит, $y = \sqrt{z}$. Отметим сразу, что такая замена приводит к потере решения $y = 0$. Поскольку значение m нашлось, то данное уравнение квазиоднородно. Если бы равенство совокупных степеней не имело бы единственного решения, то тогда ДУ не могло бы быть сведено к однородному подобной заменой.

Шаг 2. Найденное m подставляем в уравнение (2):

$$\frac{x^2}{\sqrt{z}}z' = z\sqrt{z} + x\sqrt{z}, \Big| \cdot \sqrt{z}$$

$$x^2z' = z^2 + xz. \tag{3}$$

Уравнение (3) — однородное ДУ 1-го порядка. Решаем его с помощью замены $z(x) = xt(x)$, пересчитав предварительно производную:

$$z' = t + xt' \;\Rightarrow\; x^2(t + xt') = x^2t^2 + x^2t.$$

Последнее уравнение — с ределяющимися переменными, то есть

$$x^3\frac{dt}{dx} = x^2t^2, \;\Big|\; : \; x^3t^2 \neq 0,$$

$$\frac{dt}{t^2} = \frac{dx}{x}, \;\Rightarrow\; \int\frac{dt}{t^2} = \int\frac{dx}{x} + \ln C.$$

$$-\frac{1}{t} = \ln Cx.$$

Выполняем обратную замену $t = z/x = y^2/x$:

$$-\frac{x}{y^2} = \ln Cx. \tag{4}$$

Шаг 3. Проверяем потенциально потерянные решения: $y = 0$ из шага 1, и $x = 0$, $t = 0$ из шага 2. Легко убедиться, подставляя в исходное ДУ (1), что $y = 0$ является особым решением, т.к. не входит в общее решение (4), а $x = 0$ не является. Кроме того, согласно замене, $t = 0$ соответствует $y = 0$.

Ответ: $-\frac{x}{y^2} = \ln Cx$, $y = 0$.

Задание на самостоятельную работу

Часть 1. Сдать в конце пары на листочках. Для всех уравнений подписать тип (как в примере выше).

Вариант 1.

1. $x^3(y' - x) = y^2$;
2. $ydx + x(2xy + 1)dy = 0$;
3. $2y + (x^2y + 1)xy' = 0$.

Вариант 2.

1. $2y' + x = 4\sqrt{y}$;
2. $2xdy + (x^2y^4 + 1)ydx$;
3. $2y + (x^2y + 1)xy' = 0$.

Часть 2. Доделать ИДЗ-2, сдать обе 29.09.2023.

Подсказка ко второму заданию. Для нахождения m подставляем $y = z^m$ в дифференциал:

$$d(z^m) = (z^m)'_z dz = mz^{m-1}dz.$$

При сравнении совокупных степеней степени дифференциалов (и dz, и dx) не учитывается, так же как производная в примере.