9 Числовые характеристики величин

Определение 9.1. *Пусть* ξ *— дискретная случайная величина, принимающая значения из* $X_\xi = \{x_1, \ldots, x_m\}$, $\mathcal{D}_\xi = \{D_1, \ldots, D_m\}$ *— разбиение, порожденное этой величиной. Тогда под* математическим ожиданием *будем понимать:*

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{m} x_k \mathsf{P}(D_k). \tag{1}$$

Отметим некоторые свойства математического ожидания.
1. Если c — некоторое число, то $\mathbb{E}(c) = c$.
2. Если $\xi \leqslant \eta$, то $\mathbb{E}\xi \leqslant \mathbb{E}\eta$.
3. Если c — число, то $\mathbb{E}(c\xi) = c\mathbb{E}\xi$.
4. $\mathbb{E}(\xi + \eta) = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$.
5. $|\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$.
6. Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}\xi = 0$, то $\xi = 0$ п.н.

Определение 9.2. *Величина* $\nu_k = \mathbb{E}(\xi^k)$ *называется* k-м моментом *величины* ξ; $\mu_k = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^k$ *называется* k-м центральным моментом *величины* ξ; k*-й момент случайной величины* $|\xi|$ *называется* абсолютным k-м моментом *величины* ξ.

Определение 9.3. *Второй центральный момент величины* ξ *называется* дисперсией *и обозначается* $\mathbb{D}\xi$, *то есть*

$$\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^2.$$

$\sqrt{\mathbb{D}\xi}$ *называется* средним квадратическим отклонением *величины* ξ *и обозначается* σ_ξ.

Перечислим некоторые свойства дисперсии.
1. $0 \leqslant \mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 \leqslant \mathbb{E}\xi^2$.
2. Для любого числа c $\mathbb{D}(c\xi) = c^2\mathbb{D}\xi$.
3. $\mathbb{D}(\xi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = \mathrm{const}$ п.н.
4. Для любого числа c справедливо $\mathbb{D}(\xi + c) = \mathbb{D}\xi$.

Для вычисления центральных моментов можно использовать следующие формулы, которые связывают центральные и начальные моменты

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2, \quad \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3, \quad \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

Наряду с основными числовыми характеристиками, перечисленными выше, вводят и другие, которые отражают те или иные геометрические особенности распределений. К таким характеристикам относятся *мода* $\mathsf{Mo}\,\xi$, *медиана* $\mathsf{Me}\,\xi$, *коэффициент асимметрии* γ_1 *и эксцесс* γ_2.

Определение 9.4. *Под* модой случайной величины *понимают наиболее вероятные значения для дискретной случайной величины.*

Определение 9.5. *Под* медианой *случайной величины понимают такое ее значение* $\mathsf{Me}\,\xi$, *для которого выполнено*

$$\mathsf{P}(\xi \leqslant \mathsf{Me}\,\xi) \geqslant \frac{1}{2} \quad и \quad \mathsf{P}(\xi \geqslant \mathsf{Me}\,\xi) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Определение 9.6. Коэффициент асимметрии *определяется из соотношения*

$$\gamma_1 = \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^3}{\sigma^3}$$

и характеризует асимметрию распределения относительно математического ожидания.

Определение 9.7. Эксцессом *случайной величины называется число*

$$\gamma_2 = \frac{\mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)^4}{\sigma^4} - 3.$$

9.1. Вычислить математическое ожидание и дисперсию бернуллиевской случайной величины: $\mathsf{P}(\xi = 1) = p$, $\mathsf{P}(\xi = 0) = q = 1 - p$.

9.2. Вычислить математическое ожидание и дисперсию биномиальной случайной величины.

9.3. При бросании трех игральных костей игрок выигрывает: 1800 р., если выпало 3 шестерки, 140 р., если выпало 2 шестерки и 20 р., если одна. Какова должна быть ставка за участие в игре, чтобы игра была безобидной?

9.4. Дискретная случайная величина ξ имеет два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что ξ примет значение x_1, равна 0,6. Найдите закон распределения величины ξ, если известны математическое ожидание и дисперсия: $\mathbb{E}\xi = 1,4$, $\mathbb{D}\xi = 0,24$. По цели стреляют 20 раз. Попадания при отдельных выстрелах — независимые события. Вероятность попадания при каждом выстреле равна $3/5$. Пусть ξ — число попаданий при n выстрелах. Найти распределение ξ, $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{D}\xi$, наиболее вероятное число попаданий.

9.5. Среди 100 изделий содержится 10 дефектных. С целью проверки качества отбирают 5 изделий. Найти математическое ожидание числа дефектных изделий в выборке.

9.6. Пусть случайные величины ξ и η независимы и $\mathbb{E}\xi = \mathbb{D}\xi = 1$, $\mathbb{E}\eta = 2$, $\mathbb{D}\eta = 4$. Найти математические ожидания случайных величин:

а) $\xi^2 + 2\eta^2 - \xi\eta - 4\xi + \eta + 4$;

б) $(\xi+\eta+1)^2$.

9.7. Случайные величины ξ и η независимы и имеют одно и то же дискретное распределение $\mathsf{P}(\xi = x_k) = \mathsf{P}(\eta = x_k) = p_k$, $k = 1, \ldots, n$. Найти $\mathsf{P}(\xi = \eta)$.

9.8. Случайная величина ξ принимает значения $1, 2, \ldots n$ с вероятностями p_1, $p_2, \ldots$, p_n. Доказать, что справедлива следующая формула для математического ожидания

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{P}(\xi \geqslant j).$$

9.9. Сколько раз в среднем надо бросать кость до появления шестерки?

9.10. Доказать, что

$$\mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\max\{\xi,\eta\} + \mathbb{E}\min\{\xi,\eta\},$$
$$\max\{\mathbb{E}\xi_1, \ldots, \mathbb{E}\xi_n\} \leqslant \mathbb{E}\max\{\xi_1, \ldots, \xi_n\},$$
$$\mathbb{E}\min\{\xi_1, \ldots, \xi_n\} \leqslant \min\{\mathbb{E}\xi_1, \ldots, \mathbb{E}\xi_n\}.$$

9.11. Показать, что $\inf\limits_{-\infty<a<\infty} \mathbb{E}(\xi-a)^2 = \mathbb{D}\xi$.

9.12. Доказать, что для любых случайных величин ξ и η справедливы неравенства

$$\left(\sqrt{\mathbb{D}\xi} - \sqrt{\mathbb{D}\eta}\right)^2 \leqslant \mathbb{D}(\xi+\eta) \leqslant \left(\sqrt{\mathbb{D}\xi} + \sqrt{\mathbb{D}\eta}\right)^2.$$

9.13. Дискретная случайная величина принимает значения $x_k = \frac{1}{2^k}$ с вероятностью $p_k = \frac{1}{2^k}$, где $k = 1, 2, 3, \ldots$. Найти моду, коэффициент асимметрии, эксцесс.

Указание. Воспользоваться формулой для вычисления $\mathbb{E}g(\xi)$ для $g(\xi) = \xi^k$ и соотношениями между центральными и начальными моментами.

9.14. Пусть $\mathsf{P}(\xi = k) = 1/N$, $k = 1, \ldots, N$. Найти $\mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{D}\xi$.

9.15. В урне N шаров, среди которых n белых. Делается выборка объема k. Пусть ξ – число белых шаров в выборке. Определить $\mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{D}\xi$.

9.16. Написаны n писем, предназначенные разным адресатам. Имеется n конвертов с соответствующими адресами. Письма случайным образом вложены в конверты. Пусть ξ – число писем, которые попали своим адресатам. Найти $\mathbb{E}\xi$ и $\mathbb{D}\xi$.

9.17. Пусть ν – число появления события A в серии из n независимых испытаний, в каждом из которых $\mathsf{P}(A) = p$. Пусть ξ – величина, принимающая значения 0 и 1 в зависимости от того, оказалось ν четным или нечетным. Найти $\mathbb{E}\xi$.

9.18. Случайные величины ξ и η независимы и имеют одинаковые распределения $\mathsf{P}(\xi = k) = \mathsf{P}(\eta = k) = 1/N$, $k = 1, \ldots, N$. Положим $\nu = \min\{\xi, \eta\}$, $\mu = \max\{\xi, \eta\}$, $\lambda = \mu - \nu$. Найти распределения случайных величин ν, μ и λ Найти математические ожидания и дисперсии для случайных величин ν, μ, λ.

9.19. Купоны в коробках занумерованы цифрами от 1 до 5, и для того чтобы выиграть, надо набрать комплект из пяти купонов с разными номерами. Если из коробки вынимается один купон, то сколько коробок в среднем надо испытать, чтобы получить полный комплект?

9.20. Докажите, что если сумма двух независимых случайных величин почти наверное постоянна, то и каждое из слагаемых постоянно.

10 Числовые характеристики векторов

Определение 10.1. *Число* $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)$ *называется* ковариацией *случайных величин* ξ *и* η.

Определение 10.2. *Число*

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi \mathbb{D}\eta}}$$

называется коэффициентом корреляции *случайных величин* ξ *и* η.

Определение 10.3. *Если случайные величины* ξ *и* η *таковы, что* $\rho(\xi, \eta) = 0$, *то они называются* некоррелированными.

Для непосредственных вычислений часто используют следующие формулы:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi \cdot \eta) - \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\eta;$$

$$\mathbb{D}(\xi + \eta) = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta + 2\operatorname{cov}(\xi, \eta).$$

Определение 10.4. Линейной регрессией случайной величины ξ_2 по случайной величине ξ_1 *называется линейная функция* $\varphi(\xi_1) = a\xi_1 + b$ *такая, что величина* $\mathbb{E}[\xi_2 - \varphi(\xi_1)]^2$ *минимальна.*

Последнее условие выполнено тогда и только тогда, когда

$$a = \frac{\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\mathbb{D}\xi_1} = \rho(\xi_1, \xi_2)\sqrt{\frac{\mathbb{D}\xi_2}{\mathbb{D}\xi_1}},$$

$$b = \mathbb{E}\xi_2 - a\mathbb{E}\xi_1.$$

Определение 10.5. *Коэффициент a называют* коэффициентом линейной регрессии *случайной величины ξ_2 по случайной величине ξ_1, величина $\mathbb{E}[\xi_2-\varphi(\xi_1)]^2 = \mathbb{D}\xi_2(1-\rho^2(\xi_1,\xi_2))$ и называется* остаточной дисперсией, *а прямая вида $y = \mathbb{E}\xi_2 + a(x - \mathbb{E}\xi_1)$ называется* прямой линейной регрессией *случайной величины ξ_2 по случайной величине ξ_1. Эта прямая всегда проходит через точку $(\mathbb{E}\xi_1, \mathbb{E}\xi_2)$.*

10.1. Дано совместное распределение случайных величин ξ и η:

ξ \ η	0	1	2	3
-1	0,02	0,03	0,09	0,01
0	0,04	0,2	0,16	0,1
1	0,05	0,1	0,15	0,05

1) Найдите законы распределения случайных величин ξ и η.
2) Вычислите математические ожидания и дисперсии: $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{E}\eta$, $\mathbb{D}\xi$, $\mathbb{D}\eta$, $\mathbb{E}\xi\eta$.

10.2. Совместное распределение случайных величин ξ и η определяется формулами:

$$\mathsf{P}(\xi = 0,\, \eta = 1) = \mathsf{P}(\xi = 0,\, \eta = -1) = 1/4,$$

$$\mathsf{P}(\xi = 1,\, \eta = 0) = \mathsf{P}(\xi = -1,\, \eta = 0) = 1/4.$$

Найдите:
а) математические ожидания $\mathbb{E}\xi$, $\mathbb{E}\eta$;
б) дисперсии $\mathbb{D}\xi$, $\mathbb{D}\eta$;
в) ковариацию $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$;
г) коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$.

10.3. Случайные величины ξ и η связаны соотношением $\eta = 2 - 3\xi$. Известно, что $\mathbb{E}\xi = -1$, $\mathbb{D}\xi = 4$. Определить математическое ожидание $\mathbb{E}\eta$, дисперсию $\mathbb{D}\eta$, ковариацию $\operatorname{cov}(\xi,\eta)$ и коэффициент корреляции $\rho(\xi,\eta)$.

10.4. Случайные величины ξ и η независимы и имеют одинаковое распределение с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2. Найти коэффициент корреляции случайных величин $\zeta_1 = \alpha\xi + \beta\eta$ и $\zeta_2 = \alpha\xi - \beta\eta$.

10.5. Сумму независимых равномерно распределенных на $\{0,\ldots,9\}$ однозначных чисел ξ и η можно записать в виде

$$\xi + \eta = \zeta_1 + 10\zeta_2.$$

Найти законы распределения ζ_1 и ζ_2. Зависимы ли ζ_1 и ζ_2.

10.6. Подбрасываются три игральные кости. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 количество очков, выпавших соответственно на 1, 2 и 3-й костях. Найдите ковариацию $\operatorname{cov}(\xi_1+\xi_2, \xi_2+\xi_3)$.

10.7. Дана ковариационная матрица:

$$C = \begin{pmatrix} 16 & -14 & 12 \\ -14 & 49 & -21 \\ 12 & -21 & 36 \end{pmatrix}$$

Найдите корреляционную матрицу.

10.8. Задан закон распределения случайного вектора:

ξ \ η	2	3	5
1	0,1	0,2	0,15
3	0,05	0,14	0,11
4	0,12	0,08	0,05

Найдите:
а) коэффициент корреляции между ξ и η;
б) уравнение линейной регрессии η по ξ.

10.9. Дважды бросается игральная кость. Случайные величины: ξ — число появлений шестерки, η — число появлений четной цифры.
а) Найдите совместное распределение вектора $(\xi;\eta)$.
б) Исследуйте ξ и η на независимость.
в) Вычислите вероятность $\mathsf{P}(\xi \leqslant \eta)$.

10.10. В условии предыдущего номера
а) найдите функцию распределения $F(x;y)$ вектора $(\xi;\eta)$,
б) вычислите ковариационную матрицу вектора $(\xi;\eta)$,
в) уравнение линейной регрессии η по ξ.

10.11. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу без возвращения извлекают 2 шара. Случайные величины: ξ — число белых шаров в выборке, η — число черных шаров в выборке. Описать закон распределения вектора $(\xi;\eta)$ и найти коэффициент корреляции между ξ и η.

10.12. Два игрока наудачу без возвращения извлекают по одному шару из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара. Случайные величины: ξ — число белых шаров у игрока, начинающего игру, η — число белых шаров у второго. Описать закон распределения вектора $(\xi;\eta)$ и найти уравнение линейной регрессии η по ξ.

10.13. Пусть доходности ценных бумаг являются независимыми случайными величинами. Найдите ожидаемую доходность и риск портфелей, которые в равных долях распределены между: а) двумя первыми;

б) тремя первыми; в) всеми шестью ценными бумагами. Ожидаемые доходности и риск ценных бумаг представлены в таблице:

№ акции	1	2	3	4	5	6
r	11	10	9	8	7	6
σ	4	3	1	0,8	0,7	0,7

10.14. Инвестор может сформировать портфель из ценных бумаг, нормы прибыли по которым являются независимыми случайными величинами R_1, R_2, R_3 с ожидаемыми доходностями и рисками, представленными в таблице:

	R_1	R_2	R_3
r	11	10	9
σ	4	3	1

Найдите доли вложения капитала в различные ценные бумаги, обеспечивающие среднюю норму $r = 10$ и минимизирующие риск.

10.15. Инвестор может сформировать портфель из ценных бумаг с доходностями R_1 и R_2. Ожидаемые доходности и риски активов, представлены в таблице:

	R_1	R_2
r	9	12
σ	2	3

Найдите структуру, ожидаемую доходность и риск портфеля, имеющего минимальный риск, если известен коэффициент корреляции $\rho(R_1; R_2) = -1/6$.