ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А. КЛЯЧИН, А.Г. ЛОСЕВ, В.М. МИКЛЮКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
В КРАТКОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Учебное пособие для студентов и преподавателей

Волгоград 2009

УДК 517.1
ББК 22.161.0я73
К

Рецензенты:
доктор физико-математических наук Е.А.Щербаков;
кандидат физико-математических наук А.Ю. Игумнов.

Клячин А.А., Лосев А.Г., Миклюков В.М.
Математический анализ в кратком изложении: Учебное пособие. – Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2009.– 750 с.

Настоящее пособие составлено в соответствии с программой курса "Математический анализ" — важнейшего базового курса, целью изучения которого является закладка фундамента математического образования. Пособие содержит основные понятия и факты, изучаемые на первых курсах специальностей "Математика", "Прикладная математика и информатика", "Математическое обеспечение и администрирование информационных сетей", "Физика", "Математические методы в экономике", а также других специальностей, предполагающих углубленное изучение математики.

Содержание

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие готовилось в течение нескольких лет, и в результате первая его часть является третьим изданием, вторая часть - вторым изданием, а последняя издается впервые. Мы попытались в максимально "мягком режиме" дать сжатое изложение введения в анализ, построенное по "концентрическому принципу" и предполагающее обращение к одним и тем же базовым понятиям (функция, производная, интеграл и т.п.) по несколько раз по мере того, как усложняется излагаемый материал. Тем самым существенно расширяется круг потенциальных читателей, которыми могут быть как студенты математического факультета, так и студенты, желающие получить инженерно-техническое и инженерно-экономическое образование.

Как обычно, теоретические тексты снабжены упражнениями, тестирующими уровень усвоения. Вместе с тем некоторые из упражнений требуют от читателя выхода за пределы материала, а в некоторых случаях и даже за пределы математики. Научиться давать мотивированные ответы на недостаточно точно (с точки зрения формальной логики) формулируемые вопросы — важная составная часть университетского математического образования.

Мы снабжаем основной курс математического анализа несколькими добавлениями. Во-первых, это — раздел, посвященный элементам теории множеств и метрических пространств. Для студентов-математиков важно познакомиться (пусть поверхностно!) с данными понятиями как можно ранее, чтобы быть готовым к встрече с (весьма формализованным) функциональным анализом. Студентам нематематических специальностей полезно хотя бы "краем уха" услышать о таких фундаментальных понятиях математики, как "счетные множества", "мощность континуума", "канторовы множества", "фракталы". Во-вторых, это — весьма часто встречающиеся в различных разделах математики неравенства Юнга, Гельдера и Минковского. В третьих, это — раздел, посвященный расходящимся рядам, обвертывающим рядам, разложениям по собственным функциям и вэйвлетам. В четвертых, это — раздел, посвященный обработке результатов экспериментов. Также это — практикум по вычислению неопределенных интегралов, полезный при выполнении домашних заданий, примеры и контрпримеры из теории рядов и интегралов, а также примерная рабочая программа курса.

Мы пытались изложить необходимый материал весьма сжато, в частности, широко используя логические символы $\forall$, $\exists$, $\to$. Хотя, кажется, не без издержек и иногда в ущерб эстетическим принципам оформления текста. Вместе с тем сделать пособие приемлемым по цене — весьма непростая задача.

Авторы благодарны коллегам по Волгоградскому государственному университету, прочитавшим учебник в рукописи и сделавшим ряд замечаний, способствовавших улучшению текста. Также авторы считают своим долгом выразить благодарность студентам математического факультета ВолГУ, которые своими замечаниями способствовали улучшению качества второго издания пособия.

Глава 1

Предел последовательности

§1. Множества и операции над ними

Строго говоря, множеству нельзя дать точного определения. Обычно говорят, что множество — это собрание, совокупность, класс вещей, объединенных по какому-либо признаку. Однако, сказанное не может служить строгим математическим определением, поскольку опирается на понятия, не определенные ранее.[1]

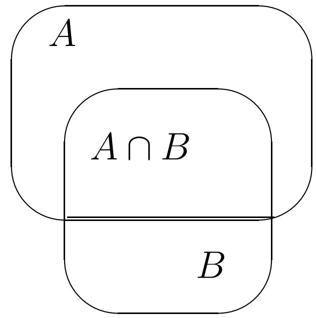
Предметы, составляющие данное множество, называются его элементами. Запись $a \in A$ означает, что a – элемент множества A. Множество, состоящее из конечного числа элементов, называется конечным. В противном случае – бесконечным. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\emptyset$.

Будем говорить, что два множества A и B совпадают (равны), и писать $A = B$, если они содержат одни и те же элементы, т.е. если каждый элемент $x \in A$ является одновременно элементом множества B, и обратно, каждый элемент $x \in B$ является одновременно элементом множества A.

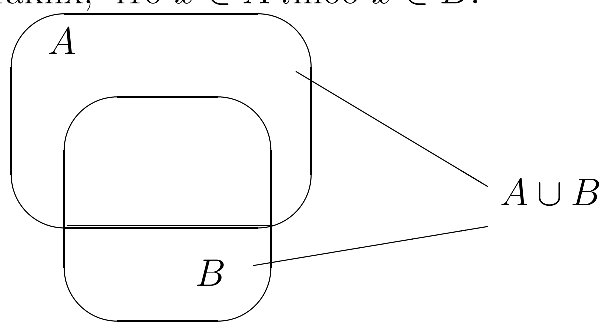
Будем говорить, что множество A содержится в множестве B, и писать $A \subset B$, если каждый элемент $x \in A$ является одновременно элементом множества B. Множество A называется в этом случае подмножеством B.

Пересечение множеств A и B — это множество $A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{и} \quad x \in B\}$, т.е. множество всех x таких, что x принадлежит A и, одновременно, x принадлежит B.

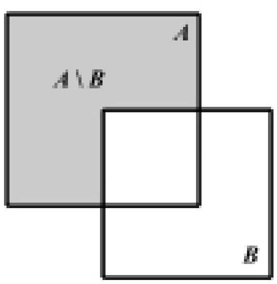
[1] Действительно, в свою очередь, «собрание» — это «множество, совокупность, класс» вещей ... и т.д.



Объединением (суммой) двух множеств A и B называется множество $A\bigcup B = \{x : x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\}$, т.е. множество всевозможных x, таких, что $x \in A$ либо $x \in B$.



Разностью множеств A и B называется множество $A\backslash B = \{x \in A : \text{ и } \quad x \notin B\}$.



Разность между множеством M и содержащимся в нем подмножеством A называют *дополнением* A в M и обозначают $C_M A$ или CA.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите следующие соотношения (так называемые правила де Моргана[2]):

$$C_M(A \cup B) = C_M A \cap C_M B,$$

[2]Морган де Огастес (27.6.1806–18.3.1871) – шотландский математик и логик. Первый президент Лондонского математического общества. Он был одним из основателей формальной алгебры.
(Здесь и ниже, биографические данные взяты авторами из книги: А.И.Бородин, А.С.Бугай "Биографический словарь деятелей в области математики", К.: Радяньска школа, 1979.)

$$C_M(A \cap B) = C_M A \cup C_M B.$$

§2. Множества на числовой прямой

Множество элементов $\mathbf{R}$ называется множеством действительных чисел, если оно обладает перечисленными ниже свойствами.

I. *Аксиомы сложения.*

Для каждой пары $a, b \in \mathbf{R}$ существует элемент $c \in \mathbf{R}$, называемый их суммой и обозначаемый $a + b$. При этом операция сложения такова, что:

1. $a + b = b + a$ *(коммутативность)*;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ *(ассоциативность)*;
3. в множестве $\mathbf{R}$ существует элемент, обозначаемый символом 0 и такой, что для всякого элемента $a \in \mathbf{R}$ выполнено $a + 0 = a$ *(аксиома существования нуля)*;
4. для любого $a \in \mathbf{R}$ найдется $b \in \mathbf{R}$, для которого $a + b = 0$; этот элемент обозначается символом $-a$ и называется элементом, противоположным a.

II. *Аксиомы умножения.*

Для каждой пары $a, b \in \mathbf{R}$ определен элемент $c \in \mathbf{R}$, называемый их произведением и обозначаемый $a \cdot b$ (или ab). При этом операция умножения такова, что:

1. $a \cdot b = b \cdot a$ *(коммутативность)*;
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *(ассоциативность)*;
3. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *(дистрибутивность)*;
4. в множестве $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ существует элемент, обозначаемый символом 1, такой, что $\forall a \in \mathbf{R}$ выполнено $a \cdot 1 = a$;
5. для всякого $a \in \mathbf{R},\ a \neq 0$, найдется $b \in \mathbf{R}$ такой, что $a \cdot b = 1$. Этот элемент обозначается $\frac{1}{a}$ (или a^{-1}) и называется обратным к элементу a.

III. *Аксиомы порядка.*

В множестве $\mathbf{R}$ определено понятие неравенства так, что для любых двух различных элементов $a, b \in \mathbf{R}$ выполнено одно и только одно из соотношений: либо $a < b$, либо $b < a$. При этом отношение неравенства обладает следующими свойствами:

1. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ *(транзитивность)*.
2. Если $a < b$, то $a + c < b + c,\ \forall\, c \in \mathbf{R}$.
3. Если $0 < a$ и $0 < b$, то $0 < ab$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $a < b$ или $a = b$, т.е. если элемент a не превосходит элемента b, то пишут $a \leq b$.

IV. *Аксиома полноты.*
Зададим произвольно два непустых множества A и B из $\mathbf{R}$. Если для любых двух элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполнено $a \leq b$, то существует элемент $c \in \mathbf{R}$ такой, что

$$a \leq c \leq b, \ \forall\, a \in A, \ \forall\, b \in B\,.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел удовлетворяет всем перечисленным аксиомам, кроме аксиомы полноты, называемой также аксиомой непрерывности, или аксиомой отделимости.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите следующие утверждения:
1. В множестве действительных чисел имеется только один нуль.
2. В множестве действительных чисел у каждого элемента имеется единственный противоположный элемент.
3. В множестве действительных чисел имеется только одна единица.
4. В множестве действительных чисел для каждого $x \neq 0$ имеется только один обратный элемент x^{-1}.

Как известно из курса средней школы, множество вещественных чисел $\mathbf{R}$ можно отождествить с множеством точек на прямой. Поэтому часто мы будем называть элементы множества $\mathbf{R}$ точками, а также прибегать к другой геометрической терминологии.

Если a и b произвольные действительные числа и $a < b$, то множество

$$\{x \in \mathbf{R} : \ a < x < b\}$$

называется интервалом (или открытым промежутком) и обозначается символом (a, b). Множество

$$\{x \in \mathbf{R} : \ a \leq x \leq b\}$$

называется отрезком (или замкнутым промежутком) и обозначается $[a, b]$. Рассматриваются также и полуоткрытые промежутки (полуинтервалы):

$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : \ a \leq x < b\};$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} : \ a < x \leq b\}.$$

Всевозможные промежутки (открытые, замкнутые, полуоткрытые) будем обозначать символом $\langle a, b\rangle$. Длиной промежутка $\langle a, b\rangle$ называется число, равное $b - a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть A из $\mathbf{R}$ ($A \subset \mathbf{R}$) – произвольное множество. Элемент $a' \in A$ называется максимальным или наибольшим (минимальным или наименьшим) элементом в множестве A, если для любого $a \in A$ выполнено $a \leq a' \quad (a \geq a')$. Запись: $a' = \max\limits_{a \in A}\{a\} \quad (a' = \min\limits_{a \in A}\{a\})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом,

$$a' = \max_{a \in A}\{a\}$$

тогда и только тогда, когда максимальный элемент $a' \in A$ и для всех элементов $a \in A$ выполнено $a \leq a'$.

ПРИМЕР 1. Множество $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} : \ a \leq x < b\}$ имеет минимальный элемент, равный a, но не имеет максимального элемента. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Число $|a| = \max\{a, -a\}$ называется абсолютной величиной (модулем) числа a.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Пользуясь аксиомой порядка, доказать, что если в числовом множестве A имеется максимальный (минимальный) элемент, то этот элемент единственный (методом от противного).

УПРАЖНЕНИЕ 3. Доказать следующие свойства абсолютной величины:

a. $\forall\, a \in \mathbf{R} : \ |a| \geq 0$ и $|a| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.

b. $|ab| = |a|\,|b|$.

c. $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(неравенство треугольника)*.

d. $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

e. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Тогда для любого $x \in \mathbf{R}$ следующие высказывания эквивалентны: $|x| < \varepsilon$ и $-\varepsilon < x < \varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Говорят, что множество $A \subset \mathbf{R}$ ограничено сверху (снизу), если существует число $M \in \mathbf{R}$ такое, что для любого $a \in A$ выполнено $a \leq M$ ($a \geq M$). Число M называется в этом случае верхней (нижней) гранью множества A.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим множество $A = [0; 1)$. Всякое число $M \geq 1$ является верхней гранью этого множества, а всякое число $M \leq 0$ является нижней гранью множества A. □

УПРАЖНЕНИЕ 4. Сформулировать, что означает неограниченность сверху (снизу) множества A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Множество $A \subset \mathbf{R}$ называется ограниченным, если существует $M \in \mathbf{R}$ такое, что $\forall\, a \in A$ выполнено $|a| \leq M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Множество A неограничено, если для любой постоянной $M \in \mathbf{R}$ найдется число $a' \in A$ такое, что $|a'| > M$.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Доказать, что множество A ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено и сверху, и снизу.

ПРИМЕР 3. Множество $A = \{x \in \mathbf{R} : \ x \geq 5\}$ является ограниченным снизу и неограниченным сверху, и, следовательно, является неограниченным. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Наименьшее из чисел, ограничивающих множество A сверху, называется его точной верхней гранью (supremum, "супремум" от латинского "наивысшее"). Наибольшее из чисел, ограничивающих множество A снизу, называется точной нижней гранью множества A (infimum, "инфимум" от латинского "наинизшее"). Обозначения:

$$\sup_{a \in A} a = \sup A$$

– точная верхняя грань,

$$\inf_{a \in A} a = \inf A$$

– точная нижняя грань.

На "языке" неравенств последнее определение записывается в следующем виде:

Говорят, что число $a' \in \mathbf{R}$ является точной верхней (точной нижней) гранью множества A, если:

а) $\forall\, a \in A$ выполнено $a \leq a' \quad (a \geq a')$;
б) $\forall\, \varepsilon > 0$ существует число
$a \in A$ такое, что $a > a' - \varepsilon \quad (a < a' + \varepsilon)$.

УПРАЖНЕНИЕ 6. Доказать, что если множество имеет максимальный (минимальный) элемент, то этот же элемент и является точной верхней (точной нижней) гранью данного множества.

ТЕОРЕМА 2.1 (о существовании точных граней). *Всякое непустое, ограниченное сверху (снизу) множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань и притом единственную.*

Доказательство. Поскольку минимальный элемент в множестве является единственным (см. упражнение выше), нам достаточно показать, что ограниченное сверху множество действительных чисел A *имеет* точную верхнюю грань. Рассмотрим два множества: первое – само множество A, второе – множество M его верхних граней. Оба эти множества не пусты. По определению верхней грани для любой пары элементов $a \in A,\ m \in M$ выполнено $a \le m$. Следовательно, данная пара множеств A и M удовлетворяет условиям аксиомы полноты, и поэтому существует вещественное число $c \in \mathbf{R}:\ a \le c \le m\ \forall a \in A, \forall m \in M$. Элемент $c \in M$, поскольку он является верхней гранью для A. Элемент c является наименьшим в множестве M. Тем самым по определению точной верхней грани: $c = \sup\limits_{a \in A} a$.

$\square$

УПРАЖНЕНИЕ 7. Привести доказательство существования точной нижней грани.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Пусть $a \in \mathbf{R}$ – некоторая точка. Зададим произвольно положительное число $\varepsilon > 0$. Множество

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}:\ |x-a| < \varepsilon\}$$

называется ε-окрестностью точки a.

Иногда ε-окрестность точки a будем обозначать $U_\varepsilon(a)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Пусть $A \subset \mathbf{R}$ – произвольное множество. Точка $x_0 \in \mathbf{R}$ называется точкой сгущения множества A (или предельной точкой множества A), если всякая её ε-окрестность содержит точку $a \in A,\ a \ne x_0$. Другими словами,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, a \in A: \quad a \ne x_0,\ |a - x_0| < \varepsilon.$$

Подчеркнем, что точка сгущения множества A может как принадлежать множеству A, так и не принадлежать ему.

ПРИМЕР 4. Пусть $A = [0;1)$ – полуинтервал. Множество точек сгущения есть отрезок $[0;1]$. $\square$

ПРИМЕР 5. $A = [0;1) \cup 2$. Множество точек сгущения есть отрезок $[0;1]$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Множество $A \subset \mathbf{R}$ называется открытым в $\mathbf{R}$, если всякая точка $a \in A$ содержится в A вместе с некоторой своей окрестностью.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пустое множество считают открытым по определению.

ПРИМЕР 6. Пусть $A = (0;1) \cup (1;3)$. Множество A – открытое. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Множество $A \subset \mathbf{R}$ называется замкнутым в $\mathbf{R}$, если оно содержит все свои точки сгущения.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно доказать (обязательно попробуйте!), что только два множества являются одновременно и замкнутым и открытым в $\mathbf{R}$ – это пустое множество и вся числовая прямая $\mathbf{R}$.

Удобно расширить числовую прямую $\mathbf{R}$, добавив к ней два "идеальных" элемента $-\infty$ и $+\infty$. При этом мы имеем

$$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$$

и

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Запись $x \in \overline{\mathbf{R}}$ означает, что либо $x \in \mathbf{R}$, либо x является символом $+\infty$, либо x является символом $-\infty$. Дальнейшие обозначения:

$$(a; +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : \ a < x\},$$
$$[a; +\infty) = \{x \in \mathbf{R} : \ a \le x\},$$
$$(-\infty; a) = \{x \in \mathbf{R} : \ x < a\},$$
$$(-\infty; a] = \{x \in \mathbf{R} : \ x \le a\}.$$

Пусть ε – произвольное число. Множества $(\varepsilon; +\infty)$ и $(-\infty; \varepsilon)$ называются ε-окрестностями точек $+\infty$ и $-\infty$ соответственно.

§3. Понятия последовательности и ее предела

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Говорят, что задана числовая последовательность $\{a_n\}_{n=k}^{+\infty}$ (часто обозначают $\{a_n\}$), если каждому натуральному числу $n \ge k$ поставлено в соответствие некоторое вещественное число a_n.

ПРИМЕР 1. $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{+\infty} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ $\square$

ПРИМЕР 2. $\{(-1)^n\}_{n=2}^{+\infty} = 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$. $\square$

ПРИМЕР 3. $\{1 + (-1)^{2n}\}_{n=10}^{+\infty} = 2, 2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Не всегда для данной последовательности можно указать явную формулу, задающую выражение для общего члена a_n через порядковый номер n. Например, еще Евклид[3] доказал, что простых чисел бесконечно много. Тем самым, за каждым простым числом имеется следующее, т.е. простые числа образуют последовательность. Однако формулы, выражающей общий член этой последовательности через номер n, до сих пор не найдено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=k}^{+\infty}$ задается рекуррентной формулой, если известно правило, с помощью которого общий член этой последовательности $\{a_n\}$ выражается через предыдущие члены, т.е.

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-p}),\ p \le n - k.$$

ПРИМЕР 4. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Ясно, что для задания всей последовательности $\{a_n\}$ необходимо задать еще a_1 и a_2. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Пусть $a_{n+1} = 0,3a_{n-1} - 1,4a_n^2 + 1$. Попробуйте проследить на компьютере (или калькуляторе) за поведением этой последовательности.

ПРИМЕР 5. При вычислениях на ЭВМ очень часто используются рекуррентные последовательности вида: $a_{n+1} = f(a_n)$. Ясно, что для задания всей последовательности необходимо задать один член, например, a_1. Эти последовательности называются итерационными. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть

$$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

– произвольная последовательность и $a \in \mathbf{R}$ – некоторое число. Будем говорить, что a есть предел последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ при $n \to \infty$ и писать $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, если
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists$ число $N(\varepsilon)$ такое, что $\forall\, n > N(\varepsilon)$ выполнено:

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

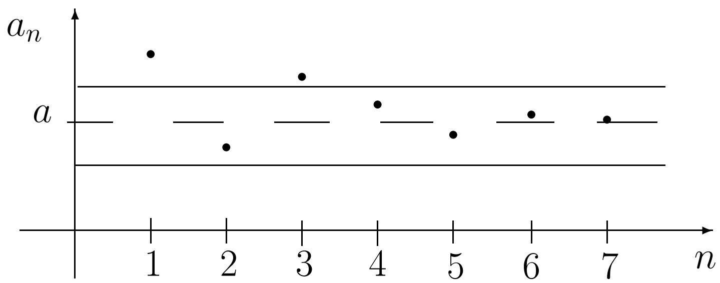
ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда тот факт, что предел $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ обозначается по-другому: $a_n \to a$ при $n \to +\infty$

[3] Евклид (ок. 365– ок. 300 до н.э.) – древнегреческий математик, автор первых дошедших до нас теоретических трактатов по математике. Род. в Афинах. Научная деятельность протекала в Александрии, где он создал математическую школу. Главный труд Евклида ("Начала") содержит изложение планиметрии, стереометрии, ряда вопросов теории чисел, алгебры, общей теории отношений, метода определений площадей и объемов, включающего метод исчерпывания.

(или $\{a_n\} \to a$) и говорят, что последовательность $\{a_n\}$ стремится к a, либо, что последовательность $\{a_n\}$ сходится к a.

Неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ означает, что все a_n расположены в ε-окрестности точки a. Поэтому определение предела последовательности $\{a_n\}$ может быть переформулировано следующим образом:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Говорят, что a есть предел последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если всякая ε-окрестность точки a содержит все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера (см. рисунок ниже).



ПРИМЕР 6. Докажем, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^5}{n^5+n+1} = 1$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и будем искать $N(\varepsilon)$ такое, чтобы при всех $n > N(\varepsilon)$ выполнялось $|\frac{n^5}{n^5+n+1} - 1| < \varepsilon$ или

$$\frac{n+1}{n^5+n+1} < \varepsilon. \tag{1}$$

Данное неравенство в точном виде мы решить не можем. (Алгебраистами доказано, что общей формулы для корней уравнения выше четвертой степени в природе не существует, а в получающемся конкретном уравнении может быть и можно найти корни точно, но как именно мы не знаем.) Поэтому поступим следующим образом:

$$\frac{n+1}{n^5+n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{n^4+1+\frac{1}{n}} \le \frac{2}{n^4+1+\frac{1}{n}} < \frac{2}{n^4} < \varepsilon. \tag{2}$$

Если теперь в качестве $N(\varepsilon)$ взять $\sqrt[4]{\frac{2}{\varepsilon}}$, то

$$\forall\, n > N(\varepsilon) = \sqrt[4]{\frac{2}{\varepsilon}} \quad \text{имеем: } n^4 > \frac{2}{\varepsilon}, \text{ т.е. } \varepsilon > \frac{2}{n^4}.$$

Таким образом, из неравенства (2) следует, что

$$\varepsilon > \frac{n+1}{n^5+n+1},$$

т.е. число

$$N(\varepsilon) = \sqrt[4]{\frac{2}{\varepsilon}}$$

является искомым. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Безусловно, найденное число $N(\varepsilon)$ оказалось больше, чем то, которое мы нашли бы, решив неравенство (1). Однако, в определении предела точного значения $N(\varepsilon)$ не требуется.

Сформулируем, что означает выражение “число a не является пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ при $n \to \infty$”:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \text{ такое, что } \forall\, N \in \mathbf{R}\ \exists\, n(N) > N, \quad \text{для которого}$$

$$|a_{n(N)} - a| \geq \varepsilon_0.$$

ПРИМЕР 7. Проверим, что последовательность

$$\{a_n\} = \{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$$

не имеет пределом число 1. Выберем $\varepsilon_0 = 1$. Тогда какое бы N мы ни брали, всегда найдется нечетное $n > N$, для которого

$$|(-1)^n - 1| = |2| \geq 1.$$

□

§4. Простейшие свойства предела последовательности

ТЕОРЕМА 4.1. *Никакая последовательность не может иметь двух неравных между собой пределов.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существуют последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и числа $a' \neq a''$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a', \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a''. \tag{2}$$

Т.к. $a' \neq a''$, то $|a' - a''| > 0$. Выберем

$$\varepsilon_0 = \frac{|a' - a''|}{3} > 0.$$

Из (1), по определению предела, следует существование $N_1(\varepsilon_0)$ такого, что $\forall\, n > N_1(\varepsilon_0)$ выполнено

$$|a_n - a'| < \varepsilon_0 = \frac{|a' - a''|}{3}. \tag{3}$$

Из (2), по определению предела, следует существование $N_2(\varepsilon_0)$ такого, что $\forall\, n > N_2(\varepsilon_0)$ выполнено

$$|a_n - a''| < \varepsilon_0 = \frac{|a' - a''|}{3}. \qquad (4)$$

Положим $N(\varepsilon_0) = \max\{N_1(\varepsilon_0), N_2(\varepsilon_0)\}$. Тогда при $n > N(\varepsilon_0)$ неравенства (3) и (4) выполняются одновременно. Поэтому

$$|a' - a''| = |a' - a_n + a_n - a''| \le |a' - a_n| + |a_n - a''| < \frac{2}{3}|a' - a''|.$$

Противоречие.

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется ограниченной, если существует число M такое, что $|a_n| \le M \;\forall\, n = 1, 2, \ldots$

ТЕОРЕМА 4.2. *Всякая сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ – произвольная сходящаяся последовательность и пусть a – ее предел. По $\varepsilon = 1$ найдется $N(1)$ такое, что $\forall n > N(1)$ выполнено $|a_n - a| < 1$. Тогда

$$|a_n| - |a| \le ||a_n| - |a|| \le |a_n - a| < 1.$$

Отсюда следует

$$|a_n| < |a| + 1, \quad \forall\, n > N(1). \qquad (5)$$

Положим $L = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_k|\}$, где k – наибольшее целое число, меньшее либо равное $N(1)$. Тогда для любого $n = 1, 2, \ldots$ выполнено

$$|a_n| \le |a| + 1 + L. \qquad (6)$$

Действительно, если $n \le N(1)$, то $|a_n| \le L$ и, следовательно, выполнено (6). Если $n > N(1)$, то справедливо соотношение (5) и, следовательно, соотношение (6).

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. Описать неограниченные (неограниченные сверху, снизу) последовательности $\{a_n\}$. Привести примеры таких последовательностей. Привести пример расходящейся (т.е. не имеющей предела), но ограниченной последовательности.

§5. Предельный переход и неравенства

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– произвольные последовательности, сходящиеся к* a *и* b *соответственно. Предположим, что*

$$a_n \le b_n \ \forall n = 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Тогда

$$a \le b. \tag{2}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Т.к. $a_n \to a$ при $n \to \infty$, то по $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ найдется $N_1(\varepsilon_1)$ такое, что $|a_n - a| < \varepsilon_1 \ \forall\, n > N_1(\varepsilon_1)$. В частности выполнено

$$a - a_n < \varepsilon_1 \quad \forall\, n > N_1(\varepsilon_1). \tag{3}$$

Аналогично, т.к. $b_n \to b$ при $n \to \infty$, то по $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ существует $N_2(\varepsilon_1)$ такое, что $|b_n - b| < \varepsilon_1$ при любом $n > N_2(\varepsilon_1)$ и, в частности,

$$b_n - b < \varepsilon_1. \tag{4}$$

Пусть $N = \max\{N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_1)\}$. Тогда при всех $n > N$ неравенства (3) и (4) выполняются одновременно. Поэтому в силу неравенств (1), (3) и (4) имеем:

$$a < a_n + \varepsilon_1 \le b_n + \varepsilon_1 < b + 2\varepsilon_1 = b + \varepsilon,$$

т.е. $a < b + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Ясно, что данное свойство справедливо тогда и только тогда, когда $a \le b$ (докажите это самостоятельно!).

$\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Выяснить остается ли теорема 5.1 верной, если каждое из неравенств заменить строгим, т.е. из $a_n < b_n$ следует ли $a < b$.

ТЕОРЕМА 5.2 (теорема об устойчивости неравенств). *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *– произвольные последовательности, сходящиеся к* a *и* b *соответственно. Тогда, если* $a < b$, *то* $\exists\, N$ *такое, что*

$$a_n < b_n \quad \forall\, n > N. \tag{5}$$

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы ε-окрестности $U_\varepsilon(a)$, $U_\varepsilon(b)$ точек a и b не пересекались. Ясно, что

$$\forall\, x \in U_\varepsilon(a), \ \forall\, y \in U_\varepsilon(b) \text{ выполнено } x < y. \tag{6}$$

Т.к. $a_n \to a$ при $n \to \infty$, то

$$\exists\, N_1(\varepsilon) : \; a_n \in U_\varepsilon(a) \;\forall\, n > N_1(\varepsilon). \tag{7}$$

Т.к. $b_n \to b$ при $n \to \infty$, то

$$\exists\, N_2(\varepsilon) : \; b_n \in U_\varepsilon(b) \;\forall\, n > N_2(\varepsilon). \tag{8}$$

Пусть $N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Тогда при $n > N$ одновременно выполняются оба неравенства (7) и (8). Поэтому при $n > N$ из (6) выводим $a_n < b_n$. Т.е. неравенство (5) действительно справедливо.

□

ТЕОРЕМА 5.3 (принцип "сжатой" последовательности). *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательности, сходящиеся к одному и тому же числу a. Предположим, что для третьей последовательности $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ выполнено*

$$a_n \le c_n \le b_n \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

Тогда последовательность $\{c_n\}$ сходится, и притом к числу a.

Доказательство. Покажем, что предел $\{c_n\}$ существует и равен a. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и обозначим через $U_\varepsilon(a)$ ε-окрестность точки a. Т.к. $\{a_n\}$ сходится к a, то существует $N_1(\varepsilon) : \;\forall\, n > N_1(\varepsilon)$ выполнено

$$a_n \in U_\varepsilon(a). \tag{10}$$

Аналогично существует $N_2(\varepsilon) : \forall\, n > N_2(\varepsilon)$ выполнено

$$b_n \in U_\varepsilon(a). \tag{11}$$

При любом $n > N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ свойства (10) и (11) выполняются одновременно. Пользуясь соотношением (9), заключаем, что при $n > N$ выполнено

$$-\varepsilon < a_n - a \le c_n - a \le b_n - a < \varepsilon,$$

$$\text{т.е.} \;\; c_n \in U_\varepsilon(a) \quad \forall n > N,$$

т.е. последовательность $\{c_n\}$ сходится к a.

□

§6. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Говорят, что последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ является бесконечно малой, если $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

ПРИМЕР 1. $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$– бесконечно малая. $\square$

ПРИМЕР 2. $\{\log_2(1+\frac{1}{3n})\}_{n=1}^{\infty}$– бесконечно малая. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из определения предела последовательности ясно, что если $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то последовательность $\{|\alpha_n|\}$ – также бесконечно малая (докажите самостоятельно!).

ТЕОРЕМА 6.1. *Если* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *бесконечно малая и* $c \in \mathbf{R}$, *то* $\{c\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *также бесконечно малая.*

Доказательство. Если $c = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $c \neq 0$. Зададим $\varepsilon > 0$. Так как $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая, то по

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|c|} > 0 \quad \exists\, N_1(\varepsilon_1): \ \forall\, n > N_1(\varepsilon_1)$$

выполнено

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{|c|}, \quad \text{т.е.} \quad |c\alpha_n| < \varepsilon.$$

Следовательно, $c\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

$\square$

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть даны две последовательности* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, *причем* $|\beta_n| \leq \alpha_n \ \forall\, n = 1, 2, \ldots$. *Тогда, если* $\{\alpha_n\}$ *– бесконечно малая, то* $\{\beta_n\}$ *также бесконечно малая.*

Доказательство. Мы имеем

$$-\alpha_n \leq \beta_n \leq \alpha_n \ \forall n = 1, 2, \ldots.$$

По теореме 6.1 последовательность $\{-\alpha_n\}$ – бесконечно малая. Пользуясь принципом "сжатой последовательности", получаем нужное.

$\square$

ТЕОРЕМА 6.3. *Пусть даны две последовательности* $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, *из которых* $\{\alpha_n\}$ *– ограничена, а* $\{\beta_n\}$ *– бесконечно малая. Тогда их произведение – бесконечно малая последовательность.*

Доказательство. Так как $\{\alpha_n\}$ – ограничена, то существует число M такое, что

$$|\alpha_n| \leq M \ \forall n = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда имеем

$$|\alpha_n \beta_n| = |\alpha_n||\beta_n| \le M|\beta_n| \quad \forall n = 1, 2, \ldots.$$

По теореме 6.1 (дважды примененной) последовательность $\{M|\beta_n|\}$ – бесконечно малая. Поэтому на основании теоремы 6.2 заключаем, что последовательность $\{\alpha_n \beta_n\}$ – бесконечно малая.

□

СЛЕДСТВИЕ. Если $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые последовательности, то их произведение $\{\alpha_n \beta_n\}$ – тоже бесконечно малая последовательность.

ТЕОРЕМА 6.4. *Если $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малые, то последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ – также бесконечно малая.*

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Так как $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая, то

$$\exists\, N_1(\varepsilon) : \ |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n > N_1(\varepsilon). \tag{1}$$

Так как $\{\beta_n\}$– бесконечно малая, то

$$\exists\, N_2(\varepsilon) : \ |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n > N_2(\varepsilon). \tag{2}$$

При любом $n > N = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ неравенства (1) и (2) выполняются одновременно. А потому

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ – бесконечно малая.

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно большой положительной (бесконечно большой отрицательной) и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty)$, если

$$\forall\, E > 0 \quad \exists\, N(E) : \quad a_n > E \quad (a_n < -E) \quad \forall\, n > N(E).$$

Другими словами, последовательность $\{a_n\}$ есть бесконечно большая положительная (отрицательная), если всякая E-окрестность точки $+\infty$ $(-\infty)$ содержит все члены $\{a_n\}$, начиная с некоторого номера.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Дайте определение бесконечно большой последовательности.

ПРИМЕР 3. $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно большая положительная. □

ПРИМЕР 4. $\{\log_2 \frac{1}{2n}\}_{n=1}^{+\infty}$ – бесконечно большая отрицательная. □

ТЕОРЕМА 6.5. *Предположим, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно большой положительной (отрицательной), и все a_n не равны нулю. Тогда последовательность $\{\frac{1}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой.*

Доказательство. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Т.к. $\{a_n\}$ – положительная бесконечно большая, то существует $N(\varepsilon)$: $\forall\, n > N(\varepsilon)$ выполнено $a_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Отсюда

$$\varepsilon > \frac{1}{a_n} > 0 \quad \forall\, n > N(\varepsilon),$$

т.е. последовательность $\{\frac{1}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказательство для случая бесконечно большой отрицательной последовательности проведите самостоятельно.

□

УПРАЖНЕНИЕ 3. Сформулируйте и докажите данное утверждение для случая бесконечно большой последовательности.

§7. Предельный переход и арифметические операции

ЛЕММА 7.1. *Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет пределом число a тогда и только тогда, когда последовательность $\{a_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$, такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Это означает, что последовательность $\{a_n - a\}$ является бесконечно малой.

Обратно. Пусть $\{a_n - a\}$ – бесконечно малая, тогда $\forall\, \varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon)$, такое что $\forall\, n > N(\varepsilon)$ выполнено $|a_n - a| < \varepsilon$. Это означает, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

□

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть $a_n \to a$, $b_n \to b$ при $n \to \infty$. Тогда последовательность $\{a_n \pm b_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, причем*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

Доказательство. Так как $a_n \to a$ и $b_n \to b$ при $n \to \infty$, то по лемме 7.1

$$a_n = a + \alpha_n,\ b_n = b + \beta_n,$$

где

$$\alpha_n = a_n - a,\ \beta_n = b_n - b$$

– бесконечно малые. Отсюда получаем

$$a_n \pm b_n = a \pm b + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

Согласно **теореме 6.4** предыдущего пункта последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ – бесконечно малая. Пользуясь еще раз леммой 7.1, получаем нужное.

□

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие существования пределов последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ в **теореме 7.1**, является существенным.

ПРИМЕР 1. $\lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n + (-1)^{n+1}) = 0$. Однако, пределы каждого из слагаемых не существуют. Другими словами, высказывание “предел суммы равен сумме пределов” верно не всегда. □

ТЕОРЕМА 7.2. *Пусть $a_n \to a$, $b_n \to b$ при $n \to \infty$. Тогда существует предел последовательности $\{a_n b_n\}$, равный ab.*

Доказательство. По лемме 7.1

$$\{\alpha_n\} = \{a_n - a\} \quad \text{и} \quad \{\beta_n\} = \{b_n - b\}$$

– бесконечно малые при $n \to \infty$. Отсюда,

$$a_n b_n = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

Пользуясь результатами предыдущего пункта, заключаем, что последовательность $\{a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n\}$ является бесконечно малой. Воспользуемся еще раз леммой 7.1 и получим требуемое.

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. Привести пример двух последовательностей, произведение которых имеет предел, однако хотя бы одна из них предела не имеет.

ЛЕММА 7.2. *Если $a_n \to a$ при $n \to \infty$ и $a \neq 0$, то существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех достаточно больших n выполнено $|a_n| \geq c$.*[4]

Доказательство. По $\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0 \quad \exists N(\varepsilon) : \ \forall n > N(\varepsilon)$ выполнено $|a - a_n| < \frac{|a|}{2}$. Следовательно, $|a| - |a_n| < \frac{|a|}{2}$, т.е. $|a_n| > \frac{|a|}{2} \ \ \forall n > N(\varepsilon)$.

□

ТЕОРЕМА 7.3. *Если $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют пределами числа a и b соответственно, причем $b \neq 0$, то существует предел частного*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Доказательство. Положим $a_n - a = \alpha_n$, $b_n - b = \beta_n$. По лемме 7.1 последовательности $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ – бесконечно малые. Мы имеем

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n b - b_n a}{b_n b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{b_n b}.$$

По лемме 7.2 последовательность $\{b_n\}$ отграничена от нуля, т.е. существуют постоянные $c > 0$ и $N > 0$ такие, что $|b_n| \geq c$, $\forall n > N$. Тем самым для всех достаточно больших n выполнено

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| \leq \frac{|\alpha_n b - \beta_n a|}{c|b|}.$$

Так как последовательность

$$\{\alpha_n b - \beta_n a\}$$

– бесконечна малая, то и

$$\left\{\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right\}$$

– бесконечно малая. Тогда по лемме 7.1 получаем требуемое.

□

[4] Данное свойство называется отграниченностью от нуля.

§8. Некоторые часто встречающиеся последовательности

Ниже нам потребуется бином Ньютона[5] и некоторые его следствия.

Пусть $a,\ b \in \mathbf{R},\ n \geq 1$ – целое. Справедлива формула

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n} b^n.$$

Здесь

$$\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n),$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n, \quad 0! \equiv 1.$$

Часто используют обозначение

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите формулу бинома Ньютона.

В частности, при $a = 1,\ b > 0$ получаем

$$(1+b)^n = \binom{n}{0} b^0 + \binom{n}{1} b^1 + \ldots + \binom{n}{n} b^n \geq \binom{n}{0} b^0 + \binom{n}{k} b^k.$$

Однако

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1, \ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

и поэтому

$$(1+b)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot b^k, \ b > 0. \tag{1}$$

В частности, при $k = 1$ выполнено

$$(1+b)^n \geq 1 + nb, \qquad b > 0. \tag{2}$$

ПРИМЕР 1. Докажем, что предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad \text{при} \quad p > 0.$$

[5]Ньютон Исаак (4.1.1643–31.3.1727) – физик, механик,астроном, математик и теолог. Род. в Вулсторпе (Англия). Член Лондонского королевского общества (1672) и его президент (1703), иностранный член Парижской АН (1699). Одновременно с Г.Лейбницем, но независимо от него, создал дифференциальное и интегральное исчисления.

Действительно, по $\varepsilon > 0$ выберем

$$N(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда $\forall n > N(\varepsilon)$, т.е.

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{имеем} \quad n^p > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{n^p} < \varepsilon$$

при любом $n > N(\varepsilon)$. $\square$

ПРИМЕР 2. Если $p > 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

Случай 1. Пусть $p > 1$.

Положим

$$x_n = \sqrt[n]{p} - 1,$$

тогда $x_n > 0$ и согласно неравенству (2) имеем

$$p = (1 + x_n)^n \geq 1 + nx_n.$$

Таким образом,

$$0 < x_n < \frac{p-1}{n}.$$

На основании принципа "сжатой" последовательности замечаем, что существует

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1.$$

Случай 2. При $p = 1$ доказательство тривиально.
Случай 3. Пусть $0 < p < 1$.

Положим $q = \frac{1}{p} > 1$. Тогда, используя случай 1, получаем

$$1 = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{q}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p}.$$

$\square$

ПРИМЕР 3. Докажем, что
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Доказательство. Положим
$$x_n = \sqrt[n]{n} - 1\,,$$
тогда $x_n \geq 0$ и по неравенству (1) при $k = 2$ имеем
$$n = (1 + x_n)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2.$$
Отсюда получаем
$$n - 1 \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2,$$
и, при $n > 1$,
$$1 \geq \frac{n}{2} x_n^2\,,$$
т.е.
$$0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n}}.$$
Используя принцип "сжатой" последовательности, находим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \to 0$. $\Box$

ПРИМЕР 4. Если $p > 0,\ \alpha \in \mathbf{R}$ – произвольные числа, то предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0.$$

Действительно, пусть k – такое целое число, что $k > \alpha$, $k > 0$. При $n > 2k$ в силу (1), имеем
$$(1+p)^n > C_n^k p^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k,$$
однако
$$n(n-1)\dots(n-k+1) \geq (n-k+1)^k > (n - \frac{n}{2} + 1)^k > \frac{n^k}{2^k},$$
а потому
$$(1+p)^n > \frac{n^k p^k}{2^k k!},\ \forall n > 2k.$$
Отсюда
$$0 < \frac{n^\alpha}{(p+1)^n} < \frac{2^k k!}{p^k} n^{\alpha - k}.$$
Поскольку $\alpha < k$, то $n^{\alpha-k} \to 0$ при $n \to \infty$. Тем самым, легко получаем нужное.

$\Box$

§9. Монотонные последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность вещественных чисел. Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ возрастает, если

$$a_n < a_{n+1} \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots,$$

убывает, если

$$a_n > a_{n+1} \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots,$$

невозрастает, если

$$a_n \geq a_{n+1} \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots,$$

неубывает, если

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots.$$

Последовательности перечисленных типов называются монотонными.

ТЕОРЕМА 9.1. *Всякая неубывающая (невозрастающая) ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет предел.*

Доказательство. В основе доказательства лежит использование аксиомы полноты. Пусть $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ \ldots$ – произвольная неубывающая ограниченная сверху последовательность. По теореме о существовании точной верхней грани существует $\sup\{a_n\} = M,\ n \in \mathrm{N}$. Таким образом, выполнено

$$\begin{aligned} &1.\ \forall\, n \in \mathbf{N} :\ a_n \leq M, \\ &2.\ \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N} :\ a_N > M - \varepsilon. \end{aligned}$$

Покажем, что $a_n \to M$ при $n \to \infty$. Т.к. M есть точная верхняя грань множества $\{a_n\}$, то

$$0 \leq M - a_n,\ \forall n = 1,\ 2, \ldots \tag{1}$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Так как M – наименьшая из верхних граней, то существует $N(\varepsilon)$ такое, что $a_{N(\varepsilon)} > M - \varepsilon$. Однако, последовательность $\{a_n\}$ неубывает, а потому

$$a_n \geq a_{N(\varepsilon)} > M - \varepsilon,\ \forall\, n > N(\varepsilon),$$

т.е.

$$M - a_n < \varepsilon,\ \forall n > N(\varepsilon). \tag{2}$$

Сопоставляя (1) и (2), заключаем, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено $|a_n - M| < \varepsilon$. По определению предела выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = M$.

Рассуждения для невозрастающей последовательности аналогичны (провести самостоятельно).

$\square$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим *рекуррентную* последовательность вида:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{s}{a_n}),\ s > 0.$$

Выберем произвольно $a_1 > 0$ и покажем, что $a_n \to \sqrt{s}$ при $n \to \infty$. (*Очень удобная формула для приближенного вычисления квадратного корня из вещественного числа).* Прежде всего покажем, что $a_n \geq \sqrt{s} \quad \forall n = 2, 3, \ldots$. С этой целью заметим, что для любого $t > 0$ справедливо неравенство:

$$t + \frac{1}{t} \geq 2. \tag{3}$$

Действительно,

$$(t-1)^2 \geq 0 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 \geq 0 \Rightarrow t^2 + 1 \geq 2t \Rightarrow t + \frac{1}{t} \geq 2.$$

Из неравенства (3) получаем

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{s}}{2}(\frac{a_n}{\sqrt{s}} + \frac{\sqrt{s}}{a_n}) \geq \sqrt{s} \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots.$$

Покажем, что последовательность $\{a_n\}_{n=2}^{\infty}$ невозрастает. Действительно,

$$a_{n+1}^2 \geq s \Rightarrow 2a_{n+1}^2 \geq s + a_{n+1}^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a_{n+1} \geq \frac{s}{a_{n+1}} + a_{n+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_{n+1} \geq \frac{1}{2}(\frac{s}{a_{n+1}} + a_{n+1}) = a_{n+2}.$$

Покажем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{s}$. Действительно, последовательность невозрастает и ограничена снизу, значит, она имеет предел (по доказаной теореме). Положим $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Переходя к пределу в обеих частях рекуррентного соотношения при $n \to \infty$ и пользуясь теоремами о пределах частного и суммы, находим

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{s}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}).$$

Однако,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

Поэтому $a = \frac{1}{2}(a + \frac{s}{a})$. Решая квадратное уравнение, и учитывая, что $a > 0$, находим $a = \sqrt{s}$. Что и требовалось получить. $\square$

§10. Принцип вложенных отрезков

ТЕОРЕМА 10.1 (о вложенных отрезках). *Пусть дана бесконечная последовательность вложенных один в другой отрезков*

$$[a_1,\ b_1] \supset [a_2,\ b_2] \supset \ldots \supset [a_n,\ b_n] \supset \ldots ,$$

длины которых стремятся к нулю при $n \to \infty$. Тогда существует, и притом единственная, точка $c \in \mathbf{R}$, принадлежащая одновременно всем отрезкам $[a_n,\ b_n]$ и такая, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Доказательство. Рассмотрим две последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. Последовательность $\{a_n\}$ неубывает и ограничена сверху, например, числом b_1. По теореме о монотонной последовательности существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c'$. Из аналогичных соображений существует $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c''$. Покажем, что $c' = c''$. Действительно, по теореме о пределе разности двух последовательностей, имеем:

$$0 = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = c'' - c',$$

что и требуется. Покажем, что точка $c = c' = c''$ принадлежит каждому из отрезков $[a_n,\ b_n]$. Действительно, поскольку $\{a_n\}$ неубывает, то

$$a_n \le c,\ \forall\, n = 1, 2, \ldots$$

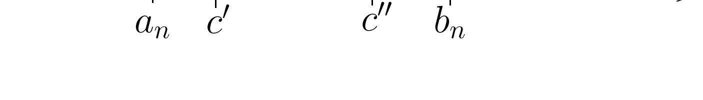
Но $\{b_n\}$ невозрастает, и потому

$$b_n \ge c,\ \forall\, n = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, $a_n \le c \le b_n$, т.е.

$$c \in [a_n,\ b_n],\ \forall\, n = 1, 2, \ldots$$

Докажем единственность c. Если найдутся две различные точки c' и c'', принадлежащие всем отрезкам $[a_n, b_n]$, то $b_n - a_n \ge |c' - c''| > 0$. Приходим к противоречию с тем, что длина n-го промежутка стремится к нулю.



$\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие замкнутости отрезков в условиях теоремы – существенно. В этом несложно убедиться рассмотрев последовательность интервалов

$$(0,1) \supset (0,\frac{1}{2}) \supset \ldots \supset (0,\frac{1}{n}) \supset \ldots.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Предположим, что в результате измерения физической величины a (скорость, давление, плотность и т.п.) получено число $\tilde{a}$. Ясно, что оно рациональное. Говорят, что абсолютная погрешность измерения величины a не превосходит некоторого положительного числа Δ, если $|\tilde{a} - a| \le \Delta$, т.е. число $\tilde{a} \in [a - \Delta,\ a + \Delta] = J(\Delta)$. Как правило, точное числовое значение величины a неизвестно, а известен всего лишь отрезок $J(\Delta)$, в пределах которого оно находится. Основное допущение, на котором базируются приложения методов математического анализа в естествознании, состоит в том, что величина a может быть измерена со сколь угодно высокой точностью. Другими словами, зададим бесконечно малую последовательность абсолютных погрешностей

$$\{\Delta_n\}:\ \Delta_1 > \Delta_2 > \ldots > \Delta_n > \ldots > 0.$$

При измерениях величины a с погрешностью Δ_n мы будем получать числа, расположенные в отрезках $J(\Delta_n)$, при этом

$$J(\Delta_1) \supset J(\Delta_2) \supset \ldots \supset J(\Delta_n) \supset \ldots$$

и длины этих отрезков стремятся к нулю. Принцип вложенных отрезков гарантирует, что данная последовательность измерений определяет некоторое вещественное число и притом единственным образом.

§11. Число "e". Натуральные логарифмы

Для произвольного $n = 0, 1, 2, \ldots.$ положим

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Последовательность $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ монотонно возрастает. Кроме того, она ограничена сверху, т.к.

$$S_n \le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 2+\frac{\frac{1}{2}-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Следовательно, по теореме о пределе монотонной последовательности можем заключить, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Число $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ будем обозначать символом e.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что $2 < e < 3$. Можно доказать, что e не является ни рациональным числом, ни даже алгебраическим, $e \approx 2,718\ldots$.

ТЕОРЕМА 11.1. *Предел* $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ *существует и равен* e.

Доказательство. Положим

$$t_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

По формуле бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Тогда

$$t_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots +$$
$$+\binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \ldots +$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \ldots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{k-1}{n}) +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n}) \le$$
$$\le 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} = S_n.$$

Таким образом,

$$t_n \le S_n. \tag{1}$$

Далее заметим, что последовательность $\{t_n\}$ является возрастающей. Действительно, если от t_n перейти к t_{n+1}, т.е. увеличить n на единицу, то прежде всего добавится новый $(n+2)$-й член (положительный). А каждый из написанных $n+1$ членов увеличится, ибо любой из множителей в круглых скобках вида $(1-\frac{s}{n})$ заменится большим множителем $(1-\frac{s}{n+1})$. Итак, для любой пары чисел $n \geq m$ выполнено $t_n \geq t_m$. Кроме того, при $n \geq m$ выполнено

$$t_n = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\ldots+\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})\,(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{m-1}{n})+$$
$$+\ldots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n}) \geq 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\ldots$$
$$+\frac{1}{m!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{m-1}{n}) \equiv \alpha_n(m).$$

Учитывая неравенство (1), находим:

$$\alpha_n(m) \leq t_n \leq S_n, \quad \forall n \geq m. \tag{2}$$

Последовательность $\{\alpha_n(m)\}$ возрастает с ростом n, так как при фиксированном m число членов в сумме $\alpha_n(m)$ остается неизменным, равным $m+1$, а каждое из чисел в круглых скобках увеличивается. Итак, все три последовательности $\{\alpha_n(m)\}$, $\{t_n\}$, $\{S_n\}$ монотонно возрастают с ростом n и ограничены сверху. Поэтому они имеют пределы. На основании теоремы о предельном переходе в неравенстве (2) получаем:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(m) \leq \lim_{n\to\infty} t_n \leq \lim_{n\to\infty} S_n,$$

или

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \leq \lim_{n\to\infty} t_n \leq e.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем:

$$e = \lim_{m\to\infty} S_m \leq \lim_{n\to\infty} t_n \leq e,$$

т.е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = e$.

$\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.2. Логарифмы по основанию e называются натуральными и обозначаются $\log_e a = \ln a$. Ясно, что

$$\ln a = \frac{\log_b a}{\log_b e}, \ \forall\, b > 0, \ b \neq 1.$$

ПРИМЕР 1. Найдем предел последовательности

$$\left\{ \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n =$$

$$= |n+1=m,\ n\to\infty \Rightarrow m\to\infty| =$$
$$= \lim_{m\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{m})^m}{1+\frac{1}{m}} = e.$$

□

ПРИМЕР 2. Найдем предел последовательности

$$\left\{\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^n} =$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+2})^2}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+2})^{n+2}} = \frac{1}{e}.$$

□

§12. Подпоследовательности. Частичные пределы последовательности

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Пусть

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

– произвольная последовательность. Последовательность a_{n_1}, a_{n_2}, …, $a_{n_k}, \ldots$, составленная из членов последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, называется подпоследовательностью последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если $n_1 < n_2 < ... < n_k < ....$ Если предел подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ существует, то он называется частичным пределом последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

ПРИМЕР 1. Пусть $\{a_n\} = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ – последовательность. Тогда $\{a_{n_k}\} = 2, 4, 6, \ldots, 2k, \ldots$ – подпоследовательность. □

ПРИМЕР 2. $\{\sin 2n\} = \sin 2,\ \sin 4,\ \sin 6,\ \ldots$ – последовательность, $\{a_{n_k}\} = \sin 4,\ \sin 8,\ \ldots$ – подпоследовательность.
□

ПРИМЕР 3. Найдем все частичные пределы последовательности с общим членом $a_n = (-1)^n,\ n = 1, 2, \ldots$ Легко заметить, что только два типа подпоследовательностей являются сходящимися. К первому типу относится подпоследовательность при $n = 2k:\quad 1, 1, \ldots$ с пределом равным единице. Ко второму типу относится подпоследовательность при

$n = 2k+1: \quad -1, -1, \ldots$, сходящаяся к -1.
Множество всех частичных пределов состоит из двух элементов -1 и 1. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность. Говорят, что a есть верхний предел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и пишут

$$a = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \quad (\text{или } a = \limsup_{n\to\infty} a_n),$$

если

i) существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\} \to a$;
(иначе, $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, N \quad \exists\, n > N: \, |a_n - a| < \varepsilon$)
ii) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon): \, \forall\, n > N(\varepsilon)$ выполнено $a_n < a + \varepsilon$.

Говорят, что a есть нижний предел a_n и пишут

$$a = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \quad (\text{или } \; a = \liminf_{n\to\infty} a_n),$$

если

i) существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\} \to a$;
ii) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon): \, \forall n > N(\varepsilon)$ выполнено $a_n > a - \varepsilon$.

ПРИМЕР 4. Пусть $a_n = (-1)^n$. Тогда $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = 1$ и $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -1$. $\square$

ТЕОРЕМА 12.1. *Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет пределом число a тогда и только тогда, когда $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = a$.*

Доказательство. Предположим, что $\{a_n\}$ сходится к a. Тогда любой ее частичный предел равен a и, следовательно,

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = a.$$

Обратно. Предположим, что верхний предел последовательности $\{a_n\}$ совпадает с нижним и равен a. Фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Тогда

$$\exists\, N_1(\varepsilon): \; \forall\, n > N_1(\varepsilon) \; \text{ выполнено } \; a_n < a + \varepsilon, \tag{1}$$

$$\exists\, N_2(\varepsilon): \; \forall\, n > N_2(\varepsilon) \; \text{ выполнено } \; a_n > a - \varepsilon. \tag{2}$$

При $n > N = \max\{N_1(\varepsilon), \; N_2(\varepsilon)\}$ неравенства (1) и (2) выполняются одновременно. А потому $\forall\, n > N$ имеем:

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon\,, \quad \text{т.е.} \quad |a_n - a| < \varepsilon.$$

По определению предела последовательности заключаем, что предел существует и равен a.

$\square$

ТЕОРЕМА 12.2 (Больцано – Вейерштрасса[6]). *Из всякой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная ограниченная последовательность. Существуют такие постоянные m, M, что выполнено $m \leq a_n \leq M \; \forall \, n = 1, 2, \ldots$ Разделим отрезок $[m, M]$ пополам точкой $S = \frac{m+M}{2}$. Тогда хотя бы один из отрезков $[m, S]$ или $[S, M]$ содержит бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$. Обозначим его через $[m_1, M_1]$. Отрезок $[m_1, M_1]$ разделим пополам точкой S_1. Хотя бы один из отрезков $[m_1, S_1]$ или $[S_1, M_1]$ содержит бесконечно много членов последовательности a_n. Обозначим его $[m_2, M_2]$. Продолжая этот процесс неограниченно, построим последовательность вложенных один в другой отрезков

$$[m, M] \supset [m_1, M_1] \supset [m_2, M_2] \supset \ldots \supset [m_k, M_k] \supset \ldots,$$

длины которых равны $\frac{M-m}{2^k}$ и стремятся к нулю при $k \to \infty$. При этом каждый из отрезков $[m_k, M_k]$ содержит бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$. Выберем подпоследовательность. Пусть a_{n_1} – произвольный член последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, содержащийся в отрезке $[m_1, M_1]$. Т.к. отрезок $[m_2, M_2]$ содержит бесконечно много членов последовательности a_n, то существует $a_{n_2} \in [m_2, M_2]$ такой, что $n_2 > n_1$ (важно!!!). Продолжая процесс неограниченно, найдем подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ такую, что

$$a_{n_k} \in [m_k, M_k] \; (k = 1, 2, \ldots).$$

Покажем, что подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ сходится. Последовательности $\{m_k\}$ и $\{M_k\}$ являются соответственно неубывающей и невозрастающей последовательностями, описанными в теореме о вложенных отрезках. Согласно этой теореме существуют пределы $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = \lim\limits_{k\to\infty} M_k = C$, т.е. концы отрезков сходятся к одной и той же точке. Поскольку $m_k \leq a_{n_k} \leq M_k$, то на основании принципа "сжатой" последовательности заключаем, что существует $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = C$. □

[6]Больцано Бернард (5.10.1781-18.12.1848) – математик, философ и логик. Род. в Праге (Чехия). Работал в Пражском университете. Основные математические труды опубликованы после смерти.
Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (31.10.1815-19.2.1897). Род. в Остенфельде (Германия). В 1842-1855 гг. – преподаватель математики в католических средних учебных заведениях. С 1856 г. работает в Берлинском университете. Лекции и статьи в основном посвящены математическому анализу, теории аналитических функций, вариационному исчислению, дифференциальной геометрии, линейной алгебре.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Привести пример последовательности, множество всех частичных пределов которой совпадает с отрезком $[-1,1]$.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Пусть $\{a_n\}$ – произвольная последовательность и A – множество всевозможных ее частичных пределов. Доказать, что

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \inf_{x\in A} x,$$

а

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \sup_{x\in A} x.$$

§13. Критерий Коши

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.1. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется последовательностью Коши[7] (или фундаментальной), если

$$\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,N=N(\varepsilon):\ \forall\,n,\,m>N(\varepsilon)\ \text{ выполнено }\ |a_n-a_m|<\varepsilon.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной тогда и только тогда, когда $\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,N=N(\varepsilon):\ \forall\,n>N(\varepsilon)\ \forall\,p\in\mathbf{N}$ выполнено

$$|a_n-a_{n+p}|<\varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 13.1 (критерий Коши). *Для того, чтобы последовательность была сходящейся необходимо и достаточно, чтобы она была последовательностью Коши.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\{a_n\}\to a$ при $n\to\infty$. Покажем, что $\{a_n\}$ – фундаментальна. Зададим $\varepsilon>0$. Т.к. $\{a_n\}$ сходится, то $\exists\,N=N(\varepsilon):\ \forall\,n>N(\varepsilon)$ выполнено $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ (из определения предела). Пусть $n,\,m>N(\varepsilon)$ – произвольны. Тогда

$$|a_n-a_m|=|a_n-a+a-a_m|\le|a_n-a|+|a-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $\{a_n\}$ – фундаментальная последовательность. Зададим $\varepsilon>0$. Тогда $\exists\,N(\varepsilon):\ \forall\,n\ ,\,m>N(\varepsilon)$ выполнено $|a_n-a_m|<\varepsilon$, т.е.

$$-\varepsilon<a_m-a_n<\varepsilon\quad\forall\ \ n,m>\ N(\epsilon).$$

[7]Коши Огюстен Луи (21.8.1789-23.5.1857). Род. в Париже (Франция). Член Парижской АН (1816), Петербургской АН (1831). Автор более 800 работ по арифметике и теории чисел, алгебре, математическому анализу, дифференциальным уравнениям теоретической и небесной механике, математической физике и т.д.

Фиксируя m и допустив изменения n, видим, что все a_n, начиная с некоторого номера, лежат в ε-окрестности точки a_m. Это означает ограниченность последовательности $\{a_n\}$. Согласно теореме Больцано-Вейерштрасса, существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторому числу a. Покажем, что и вся последовательность $\{a_n\}$ сходится к a. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Т.к. $\{a_{n_k}\}$ сходится к a, то

$$\exists\, N_1(\varepsilon):\ |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n_k > N_1(\varepsilon). \tag{1}$$

Т.к. $\{a_n\}$ фундаментальна, то

$$\exists\, N_2(\varepsilon) : \forall\, n, m > N_2 \text{ выполнено } |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

И, в частности,

$$|a_n - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\,\forall\, n,\ n_k > N_2(\varepsilon))\,.$$

Заметим, что

$$\forall\, n > N = \max\{N_1(\varepsilon),\ N_2(\varepsilon)\}$$

свойства (1) и (2) выполняются одновременно. Поэтому $\forall\, n > N$ имеем

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $\{a_n\}$ стремится к a.

$\square$

УПРАЖНЕНИЕ 2. Определить, является ли последовательность $\{(-1)^n + 1\}_{n=0}^{\infty}$ последовательностью Коши.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Сформулировать на "языке $\varepsilon - N$", что последовательность $\{a_n\}$ не является последовательностью Коши.

Глава 2

Предел функции

§1. Понятие функции

Понятие функции является таким же первоначальным понятием, как точка, прямая, множество и в строгом определении не нуждается. Попробуем пояснить его.

Пусть заданы непустые множества — множество *аргументов* $x \in X$ и множество *значений функции* $y \in Y$. Правило или закон f, по которому элементам $x \in X$ ставится в соответствие один или несколько элементов $y \in Y$, называется *функцией* и обозначается $y = f(x)$ (или $f : X \to Y$).

Говоря иначе, функция — это тройка, состоящая из двух множеств и правила, а задать функцию означает задать все три элемента этой тройки. Меняя элементы тройки (множества или правило), мы получаем другие функции.

Пусть дана функция $f : X \to Y$ и пусть $X_1 \subset X$ – некоторое подмножество множества X. Оставив правило без изменения и рассматривая его лишь применительно к точкам $x \in X_1$, приходим к сужению (или ограничению) функции f на множество X_1. Ограничение функции f на множество обозначается $f|_{X_1}$.

ПРИМЕР 1. Всякую последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ можно истолковать как функцию, заданную на множестве натуральных чисел

$$a_n = f(n), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Пусть $K \subset \mathbf{N}$ – некоторое бесконечное подмножество множества $\mathbf{N}$. Тогда сужение функции $f|_K$ есть не что иное, как подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ последовательности $\{a_n\}$. $\square$

Множество $D(f)$ всевозможных значений переменной $x \in X$, для которых определено значение $y = f(x) \in Y$, называется областью определения функции $f : X \to Y$.

Множество $E(f)$ всевозможных значений переменной $y \in Y$, которые принимает функция $y = f(x)$ при изменении x в области определения, называется областью значений функции f.

ПРИМЕР 2. Для функции $y = \sqrt{\ln(x+1)}$ имеем

$$D(f) : \ln(x+1) \geq 0 \Rightarrow x+1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 0;$$

$$E(f) : \{y \in \mathbf{R} : y \geq 0\}.$$

$\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1.

Найти область определения и область значений функции $\sqrt{\operatorname{tg} x - |\operatorname{tg} x|}$.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Пусть $s \geq 0$ – целое число. Обозначим через $Q(s)$ множество всех целых (рациональных, иррациональных) чисел p, для которых существуют целые (рациональные, иррациональные) q такие, что $p^2 + q^2 = s$.

Пусть $X = Q(2)$ – множество аргументов, а $Y = Q(5)$ – множество значений функции. В качестве правила f возьмем отношение $y = x$.

Множества X и Y не пусты, поскольку каждое из них содержат, по крайней мере, число 1. Тройка (X, f, Y) задает некоторую функцию. Попробуйте найти ее область определения и область значений!

Функция $f : X \to Y$ называется однозначной, если каждому $x \in X$ соответствует ровно одно значение y. Функция, принимающая хотя бы в одной точке более одного значения, называется многозначной.

ПРИМЕР 3. Многозначная функция $y = \pm\sqrt{\ln(x+1)}$ имеет областью определения то же самое множество $\{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$, что и однозначная функция $y = \sqrt{\ln(x+1)}$, а областью значений всю числовую прямую. $\square$

Договоренность!!! Далее, говоря о функции, будем всегда иметь в виду однозначную функцию, если только не оговорено противное.

Если на плоскости задана декартова прямоугольная система координат XOY, то множество точек вида $(x, f(x))$, где x изменяется в области определения функции $y = f(x)$, называется графиком функции.

Пусть задана функция $y = f(x)$ с множеством аргументов X и множеством значений Y, т.е. $f : X \to Y$. И задана еще одна функция $z = g :\ Y_1 \to Z$ с множеством аргументов Y_1 и множеством значений Z.

Тогда выражение $z = g(f(x))$ называется суперпозицией функций f и g (либо композицией функций, либо сложной функцией).

Область определения сложной функции, вообще говоря, может измениться по сравнению с X.

ПРИМЕР 4. Функция $y = \sqrt{\ln(x+1)}$ есть суперпозиция трех функций $z = x + 1, \quad t = \ln(z)$ и $y = \sqrt{t}$. $\Box$

УПРАЖНЕНИЕ 3. Привести пример, в котором область определения суперпозиции сужается по сравнению с первоначальной.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Привести пример, в котором область определения суперпозиции – пустое множество.

Пусть даны две функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$. Предположим, что областью определения f и областью значений g является одно и то же непустое множество. Если $f(g(y)) = y$ для всех y из области определения g, то функцию $x = g(y)$ называют обратной к функции $y = f(x)$ и обозначают
$x = f^{-1}(y)$.

ПРИМЕР 5. Функция $x = \sqrt[3]{y}$ является обратной к функции $y = x^3$. $\Box$

ПРИМЕР 6. Обратной функцией к функции $y = x^2$ является многозначная (вообще говоря, двузначная) функция $x = \pm\sqrt{y}$, график которой состоит из двух "ветвей". $\Box$

Различают несколько способов задания функции:

Аналитический способ, т.е. задание функции с помощью одной или нескольких аналитических формул.

ПРИМЕР 7. $y = \ln(1 - x^2)$. $\Box$

ПРИМЕР 8. Функция

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x - \text{рациональное} \\ 0, & \text{если} \quad x - \text{иррациональное} \end{cases}$$

носит название функции Дирихле[1]. $\Box$

ПРИМЕР 9. Функция $y = [x]$ *(целая часть числа x) определяется следующим образом: если $x = n + r$, где n – целое число и $0 \le r < 1$, то $[x] = n$.*
$\Box$

Графический способ, когда задается график функции.

Параметрический способ. Иногда график может быть задан в виде системы функций

$$x = x(t) \quad \text{и} \quad y = y(t)\,, \quad \text{где параметр} \;\; t \in \langle a, b \rangle.$$

[1]Дирихле Петер Густав Лежен (13.2.1805-5.5.1859). Род. в Дюрене (Германия). Автор ряда значительных результатов в теории чисел, математическом анализе, механике, математической физике.

При изменении параметра t на $\langle a, b\rangle$ точка $(x(t), y(t))$ описывает некоторую дугу γ в плоскости (x, y). Обозначим через X ортогональную проекцию γ на ось x-ов. Тогда над каждой точкой $x \in X$ расположены одна или несколько точек на дуге γ. Тем самым, каждому $x \in X$ по определенному правилу ставится в соответствие одно или несколько значений y, т.е. задана некоторая (вообще говоря, многозначная) функция $y = y(x)$, графиком которой является дуга γ.

В этом случае говорят, что функция $y = y(x)$ задана *параметрически*.

ПРИМЕР 10. Нетрудно видеть, что параметрически заданная функция

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad -\pi \leq t \leq \pi,$$

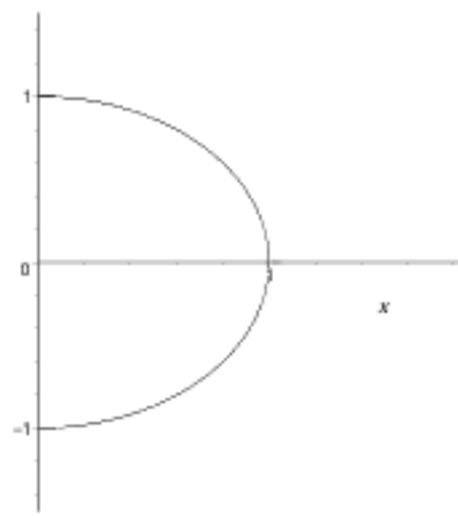
описывает дугу окружности

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Действительно, мы имеем

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Следовательно, $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Поскольку $x = \cos t$ и $t \in [-\pi, \pi]$, то $0 \leq x \leq 1$.



$\square$

Табличный способ, при котором выписываются в виде таблицы значения аргумента и соответствующие им значения функции.

Различают *явный* и *неявный* способы задания функции. Аналитический и табличный – способы явного задания.

Опишем неявный способ. Предположим, что значения двух переменных величин x и y связаны между собой некоторым соотношением

$$F(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Если функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, такова, что уравнение (1) при подстановке в него вместо y выражения $f(x)$ обращается в тождество относительно x, т.е. $F(x, f(x)) \equiv 0$, то говорят, что функция $y = f(x)$ есть неявная функция, определённая уравнением (1).

ПРИМЕР 11. Многозначная функция $y = \pm\sqrt{x}$ может быть задана также неявно посредством уравнения $x - y^2 = 0$. Т.е. одна и та же функция может задаваться как явно, так и неявно. $\square$

ПРИМЕР 12. Рассмотрим неявную функцию $y = f(x)$, определяемую соотношением

$$\cos x \ln x - \cos y - \ln y = 0$$

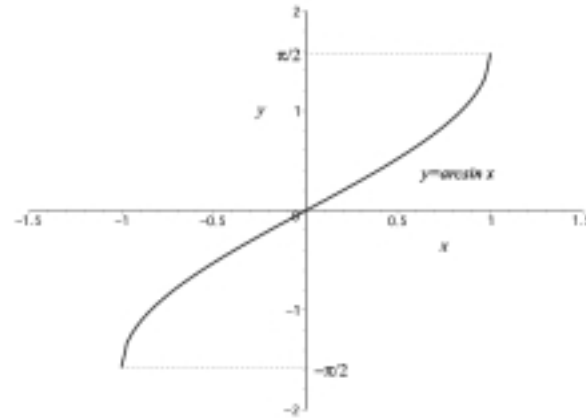
(берем x и находим $y = f(x)$). Можно доказать (попробуйте!), что эта функция в явном виде с помощью известных нам формул не выражается. $\square$

§2. Некоторые функции одной переменной

1) Обратные тригонометрические функции

а) Функция $y = \arcsin x$. Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Ее областью определения является вся числовая прямая $\mathbf{R}$, а областью значений отрезок $[-1, 1]$. Всякая прямая $y = C$, где $C \in [-1, 1]$, пересекает график функции в бесконечном количестве точек, т.е. обратная функция, которую обозначают $x = \mathrm{Arcsin}\ y$, является бесконечнозначной. Обычно рассматривают лишь одну "ветвь" этой функции, отвечающую изменению x между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Каждому $y \in [-1, 1]$ соответствует ровно одно $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Его обозначают $x = \arcsin y$ и называют главным значением (главной "ветвью") функции $x = \mathrm{Arcsin}\ y$. Ясно, что

$$\mathrm{Arcsin}\ y = (-1)^k \arcsin y + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

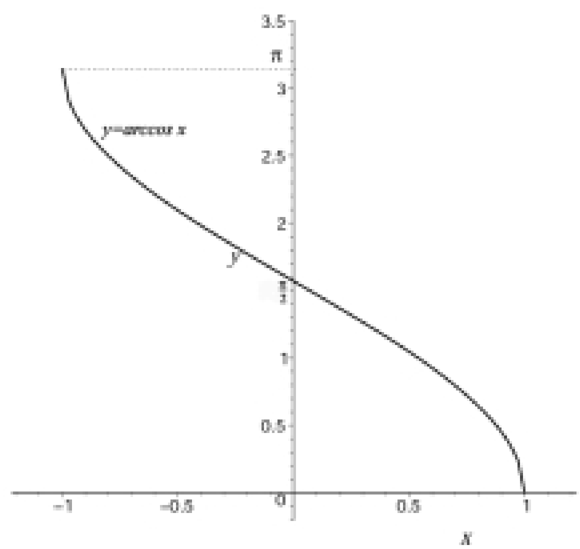


б) Функция $y = \arccos x$. Рассуждая, как и выше с функцией $y = \cos x$, получаем многозначную обратную функцию $x = \mathrm{Arccos}\, y,\ y \in [-1, 1]$. Ее главная "ветвь"

$$x = \arccos y,\ y \in [-1, 1],\ x \in [0, \pi].$$

При этом

$$\mathrm{Arccos}\, y = 2k\pi \pm \arccos y \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\,.$$

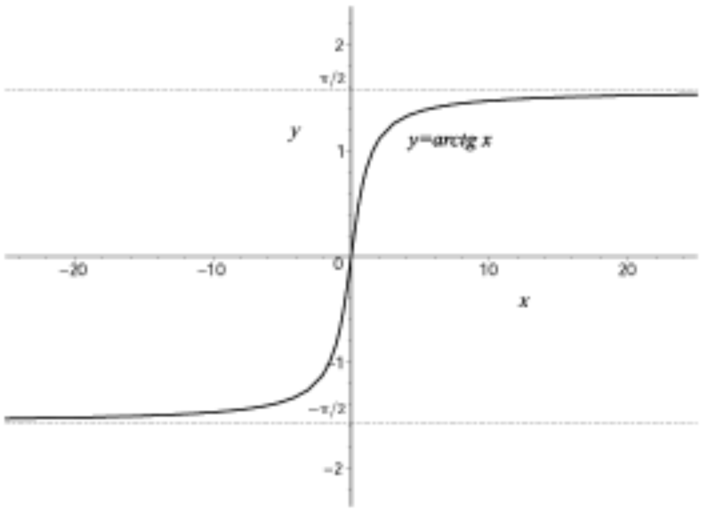


в) Функция $y = \mathrm{arctg}\ x$. Обратная к функции $y = \mathrm{tg}\, x$ функция $x = \mathrm{Arctg}\ y$ является бесконечнозначной. Ее главная "ветвь"

$$x = \mathrm{arctg}\ y,\ y \in (-\infty, \infty),\ x \in (-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}).$$

Тогда справедливо соотношение

$$\mathrm{Arctg}\ y = k\pi + \mathrm{arctg}\ y \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

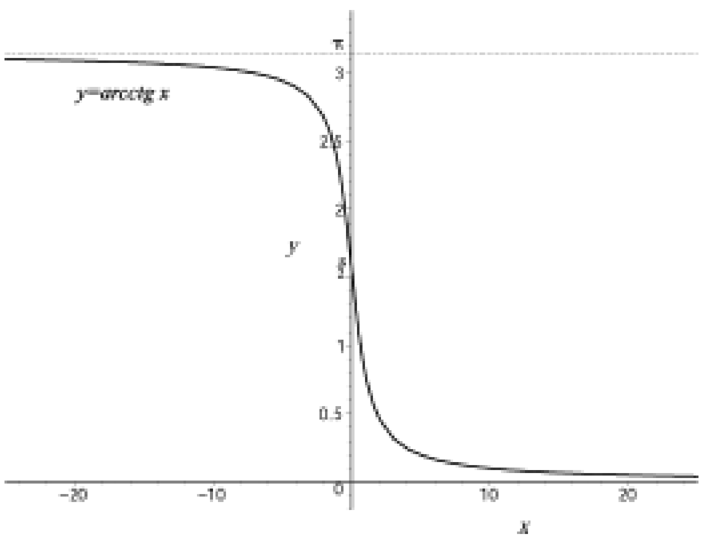


г). Функция $y = \operatorname{arcctg} x$. Обратная к $y = \operatorname{ctg} x$ функция $x = \operatorname{Arcctg} y$ является бесконечнозначной. Главная "ветвь"

$$x = \operatorname{arcctg} y, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (-\infty, \infty).$$

Справедливо соотношение

$$\operatorname{Arcctg} y = k\pi + \operatorname{arcctg} y \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$



Установим соотношение между функциями $y = \arcsin x$ и $y = \operatorname{arctg} x$:

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \forall\, x \in \mathbf{R},$$

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall\, x \in (-1, 1).$$

Докажем первое из соотношений. Положим $\alpha = \operatorname{arctg} x$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = x$. Получаем:

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Так как на интервале $(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$ знаки синуса и тангенса одного и того же угла (аргумента) совпадают, то

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Знак меняется, если меняется промежуток. Отсюда

$$\operatorname{arctg} x = \alpha = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

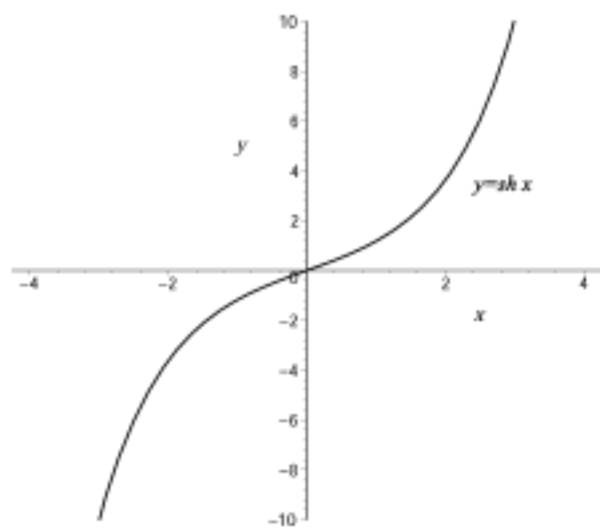
УПРАЖНЕНИЕ 1. Проверить второе соотношение самостоятельно.

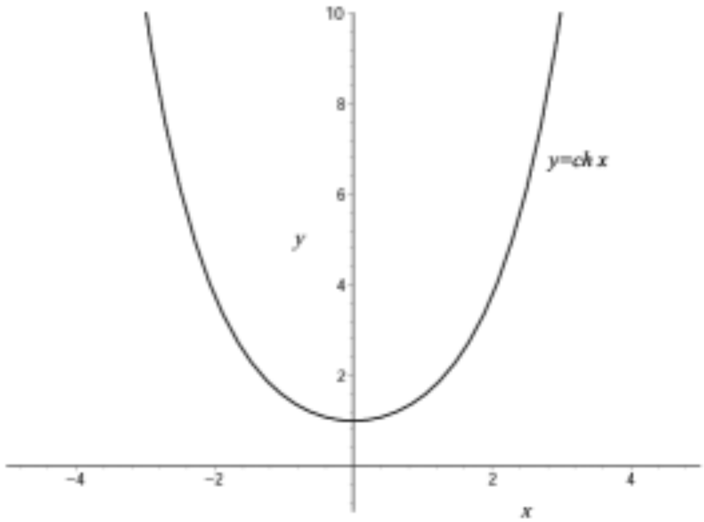
2) Гиперболические функции.

По определению полагаем для любых $x \in \mathbf{R}$

$$\mathrm{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \qquad \mathrm{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Данные функции имеют областью определения всю числовую прямую. При этом $\mathrm{sh}\,x$ функция нечетная, а $\mathrm{ch}\,x$ функция четная.





УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказать формулу $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Построить эскизы графиков
$y = \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\quad y = \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Доказать, что
$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y$, $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y$.

§3. Точные грани, максимум и минимум функции

Пусть $y = f(x)$ – функция, определенная на множестве $X \subset \mathbf{R}$ с областью значений $Y \subset \mathbf{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу), если множество Y ограничено сверху (снизу), т.е. существует постоянная M такая, что

$$f(x) \leq M \ \ \forall x \in X \quad (f(x) \geq M \ \ \forall x \in X).$$

Число M называется верхней (нижней) гранью функции $f(x)$ на множестве X.

Функция называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу, т. е. найдется постоянная M такая, что

$$|f(x)| \leq M \ \ \forall x \in X, .$$

Наименьшая (наибольшая) из всех верхних (нижних) граней называется точной верхней (точной нижней) гранью функции $f(x)$ на множестве X и обозначается

$$\sup_{x \in X} f(x) \quad (\inf_{x \in X} f(x)).$$

Ясно, что $A = \sup_{x\in X} f(x)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $f(x) \le A \;\; \forall\, x \in X$;

2) $\forall\, A' < A$ найдется $x \in X : f(x) > A'$ (т.е. A – наименьшая из всех верхних граней).

Аналогично, можно записать, что $A = \inf_{x\in X} f(x)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $f(x) \ge A \;\; \forall\, x \in X$ (т.е. A – верхняя грань f);

2) $\forall\, A' > A$ найдется $x \in X : f(x) < A'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Число A называется максимумом (минимумом) функции $y = f(x)$ на множестве X, если оно является максимальным (минимальным) элементом множества Y, т.е.

1) $f(x) \le A \; (\ge A) \;\; \forall\, x \in X$;

2) найдется $x \in X : f(x) = A$ (т.е. эта верхняя грань достигается в некоторой точке).

Максимум (минимум) функции обозначается

$$A = \max_{x\in X} f(x), \quad (A = \min_{x\in X} f(x)).$$

В общем случае, функция может иметь точную верхнюю (нижнюю) грань, но не иметь максимума (минимума) (построить примеры!).

Если функция не ограничена сверху (снизу), то часто говорят, что она имеет бесконечную точную верхнюю (нижнюю) грань и пишут

$$\sup_{x\in X} f(x) = +\infty \quad (\inf_{x\in X} f(x) = -\infty).$$

§4. Пределы функции по Коши и по Гейне

Пусть $E \subset \mathbf{R}$ – множество и a – точка сгущения E (которая может как принадлежать E, так и не принадлежать). Пусть $y = f(x)$ – функция, определенная на множестве E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. (Предел функции по Коши). Говорят, что число A является пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$ и пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \; \forall\, x \in E,\, x \ne a, \; |x - a| < \delta(\varepsilon)$$

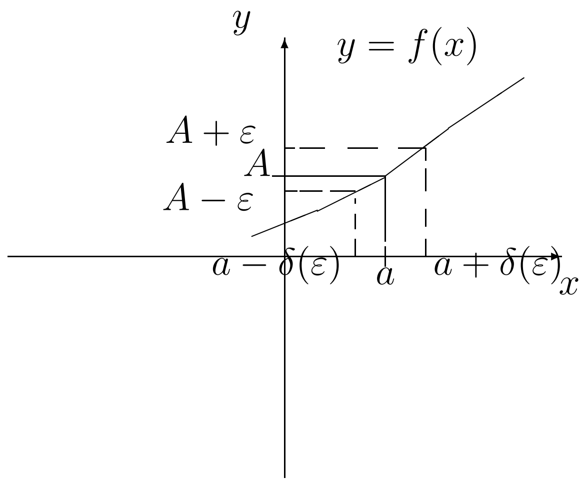
выполнено

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Множество $\{x \in \mathbf{R} : |x-a| < \delta, \ x \neq a\}$ называется проколотой δ - окрестностью точки a.

Теперь определение предела функции в точке можно переформулировать следующим образом.

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a (при $x \to a$), если для любой ε-окрестности точки A найдётся такая $\delta(\varepsilon)$-окрестность точки a, что при изменении x в проколотой $\delta(\varepsilon)$-окрестности точки a значения функции меняются в ε-окрестности точки A (см. рисунок ниже).



ПРИМЕР 1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и будем искать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\forall\, x \in \mathbf{R}, \ x \neq 0, \ |x| < \delta(\varepsilon)$$

выполнено $|x^2| < \varepsilon$. Решаем неравенство $|x^2| < \varepsilon$, или $|x|^2 < \varepsilon$. Т.е. $|x| < \sqrt{\varepsilon}$ и можно положить $\delta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$.

$\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Число A не является пределом $f(x)$ при $x \to a$, $x \in E$, если $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что $\forall\, \delta > 0$ найдется $x \in E, \ x \neq a, \ |x-a| < \delta$, однако $|f(x) - A| \geq \varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. (Предел функции по Гейне[2]). Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to a$, $x \in E$, если для любой последовательности $\{x_n\}, \ x_n \in E$, $x_n \neq a, \ x_n \to a$ выполнено $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Определения предела функции в точке в смысле Коши и в смысле Гейне эквивалентны.*

[2]Гейне Генрих Эдуард (16.3.1821-21.10.1881). Род. в Берлине (Германия). Основные труды относятся к математической физике, теории уравнений в частных производных.

Доказательство. Пусть A есть предел функции $y = f(x)$ при $x \to a$ в смысле Коши. Покажем, что функция имеет тот же самый предел A и в смысле Гейне. Зададим произвольно последовательность $\{x_n\}$ со свойствами: $x_n \in E$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$. Покажем, что $f(x_n) \to A$ при $n \to \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно. Найдем $\delta(\varepsilon) > 0$ из первого определения такое, что

$$\forall\, x \neq a,\ |x-a| < \delta(\varepsilon) \qquad \text{выполнено} \qquad |f(x)-A| < \varepsilon. \quad (1)$$

Далее заметим, что $\exists\, N = N(\delta(\varepsilon))$, такое что $\forall\, n > N$ выполнено $|x_n - a| < \delta(\varepsilon)$. Тогда из (1) вытекает

$$\forall\, n > N(\delta(\varepsilon)) : |f(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Таким образом, A – предел функции $y = f(x)$ по Гейне.

Пусть A есть предел функции $y = f(x)$ в смысле Гейне. Требуется доказать, что $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\, x \in E,\ x \neq a,\ |x - a| < \delta(\varepsilon)$ выполнено $|f(x) - A| < \varepsilon$. Предположим противное, т.е.

$$\exists\, \varepsilon > 0 :\ \forall\, \delta > 0\ \text{ найдётся }\ x \in E,\ x \neq a,\ |x - a| < \delta$$

и такой, что

$$|f(x) - A| \geq \varepsilon.$$

Пусть

$$\delta_1 = 1,\ \delta_2 = \frac{1}{2},\ \ldots,\ \delta_n = \frac{1}{n}\ \ldots.$$

По каждому δ_n находится

$$x_n \in E \quad \text{такое, что} \quad x_n \neq a,\ |x_n - a| < \frac{1}{n}, \text{ и } \quad |f(x_n) - A| \geq \varepsilon.$$

Получаем противоречие с предположением, поскольку возникла последовательность $\{x_n\} \to a$, для которой $f(x_n) \not\to A$. $\square$

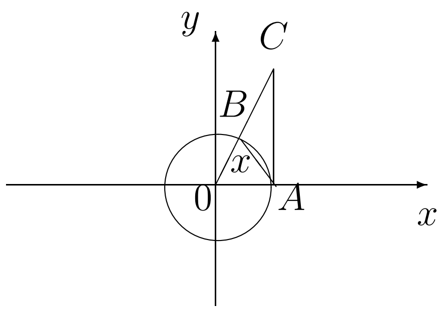
§5. Первый "замечательный" предел

ТЕОРЕМА 5.1. *Существует предел*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Доказательство. Покажем, что $\forall\, x \in (0,\ \frac{\pi}{2})$ выполнено

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \quad (1)$$



Пусть угол $BOA = x$. Площадь сектора OBA равна $\frac{x}{2}$. Площадь $\triangle OBA$ равна $\frac{1}{2}\sin x$. Площадь $\triangle OCA$ равна $\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Так как

$$\text{пл. } \triangle OBA < \text{ пл. сектора } OBA < \text{ пл. } \triangle OCA,$$

то

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

что и требовалось для доказательства (1).

Покажем, что $\forall x \in (0, \frac{\pi}{4})$ выполнено

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

Действительно, из (1) следует, что

$$\frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}.$$

Отсюда,

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < (\frac{1}{\cos x} - 1)\frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x} - 1.$$

Однако, при $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ имеем

$$\frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1 - \cos x}{\cos x} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x} < \frac{2(\frac{x}{2})^2}{\cos x} < \frac{x^2}{2(\cos(\frac{\pi}{4}))} = \frac{x^2}{\sqrt{2}},$$

что и доказывает (2).

Покажем, что $\forall\, x \in (-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}),\ x \neq 0$ выполнено

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{\sqrt{2}}. \tag{3}$$

Действительно, пусть $x < 0$. Положим $y = -x$. Тогда $y > 0$ и $\forall\, x \in (-\frac{\pi}{4},\ 0)$ имеем

$$1 - \frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{\sin(-y)}{(-y)} = 1 - \frac{\sin y}{y}.$$

Учитывая данное равенство, неравенство (3) непосредственно следует из (2).

Докажем существование предела. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольно. Выберем

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\sqrt[4]{2\varepsilon^2},\ \frac{\pi}{4}\}.$$

Тогда $\forall\, x \neq 0 : |x| < \delta(\varepsilon)$ заключаем, что $|x| < \frac{\pi}{4}$ и, значит, справедливо неравенство (3). Тогда, пользуясь (3), находим, что

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \frac{x^2}{\sqrt{2}} < \frac{\delta^2}{\sqrt{2}} \leq \frac{(\sqrt[4]{2\varepsilon^2})^2}{\sqrt{2}} = \varepsilon.$$

Последнее неравенство доказывает теорему. □

ПРИМЕР 1. Мы имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = 1.$$

□

§6. Простейшие свойства предела функции. Односторонние пределы

ТЕОРЕМА 6.1. *Предположим, что заданные на одном и том же множестве функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют при $x \to a$ пределами A и B соответственно. Тогда*

1) функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ имеют при $x \to a$ пределы, причем

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B,$$

$$\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = AB;$$

2) если $B \neq 0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ имеет предел при $x \to a$, причем

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \to a$, $(x_n \neq a,\ n = 1, 2, \ldots)$ – произвольная последовательность точек из области определения функций $f(x)$ и $g(x)$. Последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$ имеют пределы A и B. Пользуясь соответствующим утверждением для последовательностей, заключаем о существовании пределов последовательностей

$$\{f(x_n) \pm g(x_n)\}, \quad \{f(x_n) \cdot g(x_n)\}, \quad \{\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\}$$

и справедливости равенств

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n) \pm g(x_n)) = A \pm B, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{A}{B},$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \cdot g(x_n) = AB.$$

В силу произвола в выборе последовательности $\{x_n\}$, из теоремы 4.1, получаем требуемое.

□

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – функции с общей областью определения $X \subset \mathbf{R}$, и a – точка сгущения X. Пусть также существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Тогда, если*

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in X,$$

то $A \leq B$.

Доказательство. Пусть $\{x_n\} \to a$ $(x_n \neq a,\ n = 1, 2, \ldots)$ – произвольная последовательность. Тогда $f(x_n) \leq g(x_n)\ \forall\, n = 1, 2, \ldots$. Пользуясь теоремой о предельном переходе в неравенстве для последовательностей, заключаем, что $A \leq B$. □

УПРАЖНЕНИЕ 1. Покажите, что в условиях теоремы достаточно выполнения неравенства $f(x) \leq g(x)$ в некоторой окрестности точки a.

ТЕОРЕМА 6.3. *Пусть $y = f(x)$, $y = g(x)$, $y = h(x)$ функции с общей областью определения $X \subset \mathbf{R}$ и a – точка сгущения X. Предположим, что*

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a} g(x) = A.$$

Тогда, если

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in X,$$

то существует $\lim\limits_{x \to a} h(x) = A$.

Докажите самостоятельно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет пределом число A при $x \to a$ справа (слева), если для любой последовательности точек $\{x_n\} \to a$, $\ x_n > a$ $(x_n < a)$ выполнено $f(x_n) \to A$. Обозначения:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A \ \text{ и } \ \lim_{x \to a-0} f(x) = A.$$

В случае $a = 0$ используем специальные обозначения

$$\lim_{x \to +0} f(x) = A \ \text{ и } \ \lim_{x \to -0} f(x) = A.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет пределом число A при $x \to a$ справа (слева), если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall\, x > a \quad (x < a), \ |x - a| < \delta(\varepsilon)$$

выполнено $|f(x) - A| < \varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ обозначают символом $f(a+0)$, а $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$, соответственно, символом $f(a-0)$.

ТЕОРЕМА 6.4. *Определения* 6.1 *и* 6.2 *предела функции в точке справа и слева эквивалентны.*

Доказательство. Рассуждения почти дословно повторяют доказательство теоремы об эквивалентности для двустороннего предела. □

ТЕОРЕМА 6.5. *Двусторонний предел функции при $x \to a$ существует тогда и только тогда, когда существуют порознь и равны между собой односторонние пределы данной функции в указанной точке.*

Доказательство. Ясно, что если существует двусторонний предел, то существуют порознь и равны между собой односторонние пределы.

Обратно, предположим, что существуют $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = A$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда существуют $\delta_1(\varepsilon),\ \delta_2(\varepsilon) > 0$ такие, что

$$\forall\, x > a,\ |x-a| < \delta_1(\varepsilon) \quad \text{выполнено} \quad |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (1)$$

и

$$\forall\, x < a,\ |x-a| < \delta_2(\varepsilon) \ \ \text{выполнено} \ \ |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (2)$$

Положим $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon),\ \delta_2(\varepsilon)\}$. При $|x-a| < \delta(\varepsilon)$ неравенства (1) и (2) выполняются одновременно, а потому существует

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 2. Сформулировать и доказать теоремы о единственности предела функции в точке и о единственности односторонних пределов функции в точке.

§7. Монотонные функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Функция $y = f(x)$ называется
i) монотонно возрастающей, если $\forall\, x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) < f(x_2)$,

ii) монотонно убывающей, если $\forall\, x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) > f(x_2)$,

iii) невозрастающей, если $\forall\, x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) \geq f(x_2)$,

iv) неубывающей, если $\forall\, x_1 < x_2$ выполнено $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функции перечисленных классов называются монотонными.

ТЕОРЕМА 7.1. *Если $y = f(x)$ монотонна на интервале (a, b), то в каждой точке $x_0 \in (a, b)$ существуют односторонние пределы справа и слева.*

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ неубывает на интервале (a, b). Фиксируем $x_0 \in (a, b)$. Тогда для всех $x \in (a, x_0)$ выполнено

$$f(x) \leq f(x_0). \quad (1)$$

Пусть Y – область значений сужения $f(x)$ на интервале (a, x_0). В силу соотношения (1) множество Y ограничено сверху числом $f(x_0)$. Обозначим

$$c = \sup Y = \sup_{x \in (a, x_0)} f(x).$$

Покажем, что $c = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. По определению точной верхней грани функции, найдется точка $x' \in (a, x_0)$ такая, что

$$y' = f(x') > c - \varepsilon.$$

Положим $\delta(\varepsilon) = x_0 - x'$. Тогда $\forall\, x \in (x_0 - \delta(\varepsilon), x_0)$, выполнено $x' < x < x_0$ и потому

$$f(x') \leq f(x) \leq c.$$

Тем самым,

$$0 \leq c - f(x) \leq c - f(x') < c - (c - \varepsilon) = \varepsilon,$$

т.е. $c = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$. Аналогичным образом устанавливается существование предела справа. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В процессе доказательства теоремы мы доказали также следующее утверждение: если $y = f(x)$ неубывает (невозрастает) на интервале (a, x_0) и ограничена сверху (снизу), то она имеет предел $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$.

§8. Второй "замечательный" предел

ТЕОРЕМА 8.1. *Справедливо равенство*

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Доказательство. Покажем, что

$$\exists \lim_{x \to +0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Будем использовать определение предела справа в смысле Гейне. Пусть $x_n > 0$, $x_n \to 0$ при $n \to \infty$ – произвольная последовательность. Выберем целые числа K_n так, чтобы

$$K_n \leq \frac{1}{x_n} < K_n + 1.$$

Это можно сделать, положив, например, $K_n = [1/x_n]$. Тогда имеем

$$\frac{1}{K_n+1} < x_n \le \frac{1}{K_n} \Rightarrow 1 + \frac{1}{K_n+1} < 1 + x_n \le 1 + \frac{1}{K_n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 + \frac{1}{K_n+1})^{K_n} < (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} < (1 + \frac{1}{K_n})^{K_n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1+\frac{1}{K_n+1})^{K_n+1}}{1+\frac{1}{K_n+1}} < (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} < (1+\frac{1}{K_n})^{K_n}(1+\frac{1}{K_n}).$$

Поскольку $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ и $K_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то левая и правая части двойного неравенства также стремятся к e. Пользуясь принципом "сжатой" последовательности, заключаем, что

$$\exists \lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e.$$

Покажем, что

$$\exists \lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Положим $y = -x$. Тогда

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1-y)^{-\frac{1}{y}} = \frac{1}{(1-y)^{\frac{1}{y}}} = (\frac{1-y+y}{1-y})^{\frac{1}{y}} =$$

$$= \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1-y}{y}}(1+\frac{y}{1-y}) = (1+t)^{\frac{1}{t}}(1+t),$$

где $t = \frac{y}{1-y}$. При $x \to -0$ имеем: $y \to +0$, и, стало быть, $t \to +0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+0}(1+t)^{\frac{1}{t}}(1+t) = e.$$

Наконец пользуясь теоремой о связи двустороннего предела с односторонним, заключаем о справедливости равенства

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

□

§9. Критерий Коши существования предела функции

ТЕОРЕМА 9.1. *Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела предел при $x \to x_0$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall\, x' \neq x_0,\ \forall x'' \neq x_0,$$

$$|x' - x_0| < \delta(\varepsilon),\ |x'' - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

выполнялось

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Покажем, что функция удовлетворяет условию критерия Коши. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Т.к. $f(x) \to A$, при $x \to x_0$, то

$$\exists\, \delta(\varepsilon):\ \forall\, x \neq x_0,\ |x - x_0| < \delta(\varepsilon)\ \text{ выполнено }\ |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому $\forall\, x',\ x'' \neq x_0,\ |x' - x_0| < \delta(\varepsilon),\ |x'' - x_0| < \delta(\varepsilon)$ получаем

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A + A - f(x'')| \leq$$

$$\leq |f(x'') - A| + |f(x') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Пусть $y = f(x)$ удовлетворяет в окрестности x_0 условию Коши. Покажем, что $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Воспользуемся определением предела функции в точке "на языке" последовательностей (т.е. в смысле Гейне). Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность такая, что $x_n \neq x_0$, $x_n \to x_0$ при $n \to \infty$. Требуется доказать, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Зададим $\varepsilon > 0$. Найдем $\delta(\varepsilon)$, участвующее в формулировке критерия Коши. Так как $x_n \to x_0$, то по определению предела последовательности

$$\exists\, N(\delta(\varepsilon)):\ \forall\, n > N(\delta(\varepsilon))\ \text{ выполнено }\ |x_n - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

(воспользовались). Поэтому

$$|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \quad \forall\, n,\ m > N(\delta(\varepsilon)).$$

Таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}$ является фундаментальной. Согласно критерию Коши для последовательностей она имеет предел.

Покажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$. Предположим противное, т.е. найдутся последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ такие, что

$$x'_n \neq x_0,\ x''_n \neq x_0,\ \lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x''_n = x_0$$

и

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x''_n).$$

Тогда, полагая

$$x'''_n = \begin{cases} x'_n, & \text{если} \quad n - \text{четное}, \\ x''_n, & \text{если} \quad n - \text{нечетное}, \end{cases}$$

заключаем, что последовательность $\{f(x'''_n)\}$ предела не имеет. Получаем противоречие. $\square$

Глава 3

Непрерывные функции и их свойства

§1. Непрерывность и разрывы функции

Пусть $y = f(x)$ – функция, определённая на множестве $E \subset \mathbf{R}$, и пусть $x_0 \in E$ – точка сгущения множества E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Говорят, что $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если предела функции в точке не существует или предел существует, но не равен значению функции в этой точке, то такая точка называется точкой разрыва функции.

Если точка x_0 не является точкой сгущения (т.е. является изолированной точкой области определения), то о пределе в этой точке (а, следовательно, о непрерывности или разрывах функции) говорить нельзя.

ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда вопрос о пределе функции в изолированной точке множества ее определения решается несколько иначе. А именно, считают по определению, что предел всегда существует и равен $f(x_0)$. Соответственно, функция в изолированной точке области определения всегда непрерывна.

Если обозначить через $\Delta x = x - x_0$ приращение аргумента, а через $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ – приращение функции, то $f(x)$ непрерывна в x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Говорят, что $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа (слева), если

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \;=\; f(x_0) \; (\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)).$$

Из теоремы о связи односторонних пределов с двусторонними следует, что функция f непрерывна в x_0 тогда и только тогда, когда она в этой точке непрерывна и справа и слева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Функция называется непрерывной на множестве $E \subset \mathbf{R}$, если она непрерывна в каждой точке сгущения, принадлежащей E. В противном случае функция называется разрывной.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции на множестве E, то функции*

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x)$$

также непрерывны. Если, кроме того, $g(x) \neq 0$, то непрерывна и функция $f(x)/g(x)$.

Доказательство непосредственно следует из теорем о пределе суммы, разности, произведения, частного двух функций.

ТЕОРЕМА 1.2 (о непрерывности сложной функции). *Предположим, что определена сложная функция $y = f(g(x))$. Тогда, если $t = g(x)$ непрерывна в x_0, а функция $y = f(t)$ непрерывна в точке $t_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Т.к. f непрерывна в точке t_0, то $\exists\ \delta_1(\varepsilon) > 0 :\ \forall t,\ \ |t - t_0| < \delta_1(\varepsilon)$ выполнено

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon. \tag{1}$$

Так как $g(x)$ непрерывна в точке x_0, то по

$$\delta_1(\varepsilon) > 0\ \exists\ \delta_2 = \delta_2(\delta_1(\varepsilon)) > 0 :\ \forall x,\ |x - x_0| < \delta_2(\delta_1(\varepsilon))$$

выполнено

$$|t - t_0| = |g(x) - g(x_0)| < \delta_1(\varepsilon).$$

В силу (1) величина δ_2 является искомой.

$\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы видно, что для непрерывной функции $f(t)$ и произвольной $g(x)$ справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)).$$

Пусть $y = f(x)$ – функция, определенная на отрезке $[x_0, x_0 + \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ – некоторое число. Для того чтобы $f(x)$ была непрерывна справа, необходимо и достаточно, чтобы

1) $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$,

2) этот предел равен $f(x_0)$.

Отсюда ясно, при каких обстоятельствах в точке x_0 появляются разрывы. Мы введем следующие понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ существует, но не равен $f(x_0)$, то говорят, что $f(x)$ имеет справа в точке x_0 разрыв I-го рода. В этом случае говорят также, что $f(x)$ имеет справа скачок, равный по величине $|f(x_0+0)-f(x_0)|$.
Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ не существует, то говорят, что $f(x)$ имеет при $x = x_0$ справа разрыв II-го рода. Классификация разрывов слева аналогична.

Пусть $y = f(x)$ определена всюду на интервале (a, b) за исключением точки $x_0 \in (a, b)$. В этом случае точку x_0 называют особой точкой (или особенностью) функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Точка x_0 называется устранимой особой точкой $f(x)$, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Точка x_0 называется существенно особой, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, если x_0 – устранимая особая точка, то функцию $f(x)$ можно доопределить (по непрерывности) в точке x_0, положив по определению $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. После этого функция станет непрерывной в x_0.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Построить график функции $y = \sin(1/x)$ и определить тип особой точки.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доопределить по непрерывности функцию $y = (\sin x)/x$ в точке $x = 0$.

§2. Условие непрерывности и точки разрыва монотонной функции

Пусть $y = f(x)$ – монотонная на отрезке $[a, b]$ функция. Как было доказано ранее, в каждой точке $x_0 \in [a, b]$ существуют односторонние пределы.

ТЕОРЕМА 2.1. *Всякая монотонная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ может иметь лишь разрывы I-го рода. В частности, если $f(x)$ принимает все без исключения значения между $f(a)$ и $f(b)$, то $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. В параграфе "Монотонные функции" предыдущей главы установлено, что у всякой монотонной функции в каждой точке интервала существуют односторонние пределы справа и слева (в точках a и b, соответственно, пределы справа и слева). Отсюда сразу следует, что разрывы у $y = f(x)$ могут быть лишь I-го рода.

Далее будем считать, что функция $y = f(x)$ принимает все без исключения значения между $f(a)$ и $f(b)$. Предположим, что $y = f(x)$ имеет в x_0 разрыв, например, слева. Это означает, что

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq f(x_0).$$

Но поскольку функция является неубывающей, то $\forall\, x \leq x_0$ выполнено

$$f(x) \leq \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

и $\forall\, x \geq x_0$ выполнено

$$f(x) \geq f(x_0) > \lim_{x \to x_0 - 0} f(x).$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Выясните, почему последнее неравенство строгое?

Следовательно, ни одно из значений между $f(x_0)$ и пределом $f(x)$ при $x \to x_0 - 0$ функция не принимает. Получили противоречие.

□

§3. Непрерывность обратной функции

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $y = f(x)$ – монотонно возрастающая (убывающая) на отрезке $[a, b]$ функция, принимающая все значения между $A = f(a)$ и $B = f(b)$. Тогда существует однозначная обратная функция $x = g(y)$, также монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная на отрезке $[A, B]$.*

Доказательство. Рассмотрим случай возрастающей функции (для убывающей — доказательство аналогично). Существование обратной к $f(x)$ однозначной функции $x = g(y)$ очевидно, поскольку всякая прямая $y = C \quad (C \in [f(a), f(b)])$ пересекает график функции не более чем в одной точке (это следует из монотонности), т.е. каждому $y \in [A, B]$ можно поставить в соответствие $x \in [a, b]$ (и притом единственным образом) такое, что $f(x) = y$.

Докажем возрастание обратной функции. По $y', y'' \in [A, B]$, $y' > y''$, получим $x' = g(y')$ и $x'' = g(y'')$. Тогда выполнено

$$f(x') = y' > y'' = f(x'')$$

и, так как функция $y = f(x)$ возрастает, то $x' > x''$. Так как $g(y)$ принимает все значения между a и b , то она непрерывна по теореме 2.1 предыдущего пункта.

□

§4. Теорема об обращении функции в нуль

ТЕОРЕМА 4.1 (первая теорема Больцано-Коши). *Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков. Тогда между a и b обязательно найдется точка c, в которой функция обращается в нуль, т.е.*

$$\exists\, c \ (a < c < b): \qquad f(c) = 0.$$

Доказательство. Пусть $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Разделим $[a, b]$ пополам. Получим точку $\frac{a+b}{2}$. Пусть $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$. Тогда на концах хотя бы одного из этих промежутков

$$[a, \frac{a+b}{2}] \quad \text{или} \quad [\frac{a+b}{2}, b]$$

функция будет принимать значения разных знаков. Обозначим этот промежуток через $[a_1, b_1]$. Аналогично, делим этот отрезок пополам. Получим точку $(a_1+b_1)/2$. Выберем из двух полученных отрезков тот, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Обозначим его $[a_2, b_2]$. И так далее. На n-м шаге получим отрезок $[a_n, b_n]$. Причем,

$$f(a_n) < 0, \qquad f(b_n) > 0, \qquad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

(Проверьте, почему выполнено $f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0$?)

Найденная последовательность отрезков является вложенной, причем

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

По теореме о вложенных отрезках существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$. Покажем, что точка c — искомая. Функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и, в частности, непрерывна в точке c. Поэтому мы имеем

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \quad \text{и} \quad f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0.$$

Значит, $f(c) = 0$ и теорема доказана.

□

ЗАМЕЧАНИЕ. Используемый в доказательстве метод нахождения корня c уравнения $f(x) = 0$, часто применяется в вычислительных процедурах и называется методом вилки. Величины a_n, b_n могут выбираться в качестве приближенного значения корня c. При этом абсолютная погрешность n-го приближения легко оценивается

$$|a_n - c| \le |a_n - b_n| = \frac{|b-a|}{2^n}\,.$$

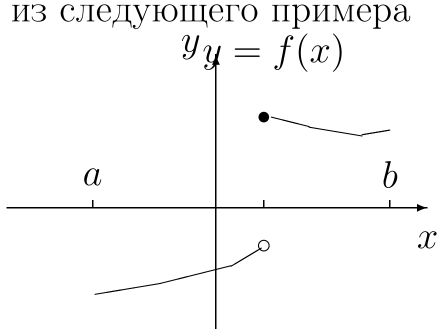
Если же в качестве приближенного значения корня c выбирать $(a_n + b_n)/2$, то мы получаем

$$\left| c - \frac{a_n + b_n}{2} \right| = \frac{1}{2}\,|(c - a_n) - (b_n - c)| \le \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}},$$

что несколько лучше предыдущей оценки.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Постройте пример, показывающий, что в условиях теоремы может существовать несколько точек, в которых функция $f(x)$ обращается в нуль.

Предположение о непрерывности функции существенно, что видно из следующего примера



СЛЕДСТВИЕ. Всякий многочлен $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0$ с вещественными коэффициентами и нечетной степени имеет хотя бы один вещественный корень.

Доказательство. Так как степень $n = 2k+1$ многочлена нечетная, то

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = -\infty$$

и

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Таким образом, найдутся точки A и B, $A < B$, такие, что $f(A) < 0$, $f(B) > 0$. Поскольку f непрерывна на $[A, B]$, найдется точка $c \in [A, B]$, в которой $f(c) = 0$. $\square$

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть $y = f(x)$ – непрерывная в точке x_0 функция, причем $f(x_0) > 0$. Тогда в некоторой окрестности этой точки выполнено $f(x) > 0$.*

Доказательство. По $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$ найдем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых x, таких, что $|x - x_0| < \delta$, выполнено

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}.$$

Следовательно, справедливо неравенство $f(x) > \frac{f(x_0)}{2}$, доказывающее утверждение теоремы. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 2. Постройте пример, показывающий, что условие непрерывности в теореме является существенным.

§5. Теорема о промежуточном значении

ТЕОРЕМА 5.1 (вторая теорема Больцано-Коши). *Предположим, что функция f определена и непрерывна в некотором промежутке $X \subset \mathbf{R}$ (замкнутом или нет, конечном или бесконечном). Если в двух точках $x = a$ и $x = b$, $a \neq b$, этого промежутка функция принимает значения $f(a) = A$ и $f(b) = B$, $A \neq B$, то для любого C между A и B найдется точка $x = c$, в которой $f(c) = C$.*

Доказательство. Будем считать, например, что $a < b$ и, соответственно, $A < B$. Возьмем произвольное C такое, что $A < C < B$. Рассмотрим на $[a, b]$ функцию $\varphi(x) = f(x) - C$. Имеем

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0 \quad \text{и} \quad \varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0.$$

Таким образом, по первой теореме Больцано-Коши, найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $\varphi(c) = 0$, т.е. $f(c) = C$.

$\square$

§6. Существование максимума и минимума непрерывной функции

ТЕОРЕМА 6.1 (Вейерштрасса). *Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $X \subset \mathbf{R}$, то она ограничена и достигает на этом множестве своих точной верхней и точной нижней граней.*

Доказательство. Покажем сначала, что функция $y = f(x)$ ограничена. Предположим противное. Пусть, например, она не ограничена сверху. Тогда для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ найдется точка $x_n \in X$ такая, что $f(x_n) \geq n$. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то (по теореме Больцано-Вейерштрасса) из нее можно извлечь сходящуюся к некоторой точке x_0 подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Так как множество X замкнуто, то $x_0 \in X$. Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$. Это противоречит тому, что $f(x_{n_k}) \geq n_k$. Покажем теперь, что функция достигает своих точных граней, например, точной верхней грани. Так как функция $f(x)$ ограничена, то существует ее точная верхняя грань $A = \sup_{x \in X} f(x)$. По определению точной верхней грани для любого $n = 1, 2, 3, \ldots$ найдется такая точка $x_n \in X$, для которой

$$A - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq A. \tag{1}$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то из нее можно извлечь сходящуюся к некоторой точке x' подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Так как множество X замкнуто, то $x' \in X$. Из непрерывности функции $f(x)$ следует, что $f(x_{n_k}) \to f(x')$. С другой стороны из неравенства (1) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = A.$$

Следовательно, $f(x') = A$. Что и требовалось показать. $\square$

Покажем на примерах, что ни от одного из условий теоремы (непрерывность функции, ограниченность и замкнутость множества) нельзя отказаться без нарушения утверждения теоремы.

ПРИМЕР 1. Функция $y = \mathrm{arctg} x$ непрерывна и определена на замкнутом, но неограниченном множестве $(-\infty, +\infty)$. Эта функция не достигает ни точной верхней грани $\pi/2$, ни точной нижней грани $-\pi/2$. $\square$

ПРИМЕР 2. Непрерывная функция $y = x$, определенная на ограниченном, но не замкнутом множестве $(0, 1)$ не имеет ни максимума, ни минимума. $\square$

ПРИМЕР 3. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{при} \quad x = 0, \\ x & \text{при} \quad x \in (0, 1), \\ 1/2 & \text{при} \quad x = 1 \end{cases}$$

определена на замкнутом отрезке. Однако, ни в одной точке этого отрезка она не принимает ни значения 0 (точная нижняя грань), ни значения 1 (точная верхняя грань). $\square$

§7. Понятие равномерной непрерывности

Предположим, что функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве $X \subset \mathbf{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Функция $y = f(x)$ называется равномерно непрерывной на множестве X, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{найдется} \quad \delta(\varepsilon) > 0 : \ \forall\, x', x'' \in X, \ |x' - x''| < \delta(\varepsilon),$$
$$\text{выполнено} \quad |f(x') - f(x'')| < \epsilon\,.$$

Ясно, что всякая равномерно непрерывная функция непрерывна.

ПРИМЕР 1. Покажем, что непрерывная на $(0, 1]$ функция $y = \frac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной. Предположим противное, т.е. по $\varepsilon > 0$ найдется

$$\delta(\varepsilon) > 0 : \ |\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}| < \varepsilon\,,$$

как только $|x' - x''| < \delta(\epsilon)$. Положим $x' = a, \ x'' = a + \delta/2$, где $a \in (0, 1]$ – произвольно. Тогда

$$\varepsilon > |\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}| = \frac{\delta}{2a(a + \delta/2)}\,.$$

Перемещая точку a вдоль полуинтервала $(0, 1]$, видим, что при a, достаточно близких к нулю (например $a = \delta/2$, где δ - достаточно мало), данное неравенство нарушается. Противоречие. $\square$

Отметим, что функция не является равномерно непрерывной тогда и только тогда, когда
$\exists\ \varepsilon > 0$: $\forall\, \delta > 0\ \exists\ x'_\delta, x''_\delta \in X$, $|x'_\delta - x''_\delta| < \delta$,
такие, что $|f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \epsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Говорят, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет на множестве $X \subset \mathbf{R}$ условию Липшица[1] с постоянной $A > 0$, если $\forall\, x', x'' \in X$ выполнено

$$|f(x') - f(x'')| \leq A\,|x' - x''|.$$

Говорят, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет на множестве $X \subset \mathbf{R}$ условию Гельдера[2] с постоянной $A > 0$ и показателем $\alpha \in (0, 1]$, если $\forall\, x', x'' \in X$ выполнено

$$|f(x') - f(x'')| \leq A\,|x' - x''|^{\alpha}.$$

ТЕОРЕМА 7.1. *Всякая функция, удовлетворяющая условию Гельдера на некотором множестве $X \subset \mathbf{R}$, является равномерно непрерывной на этом множестве.*

Доказательство. Достаточно положить

$$\delta(\epsilon) = \left(\frac{\epsilon}{A}\right)^{1/\alpha}.$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. Предположим, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет на промежутке $\langle a, b\rangle$ условию Гельдера с показателем $\alpha > 1$. Покажите, что функция f постоянна на этом промежутке.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Привести пример функции, удовлетворяющей на $[0, 1]$ условию Гельдера, но не удовлетворяющей условию Липшица.

§8. Теорема Кантора

ТЕОРЕМА 8.1 (Кантора[3]). *Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $X \subset \mathbf{R}$, то она равномерно непрерывна на этом множестве.*

[1] Липшиц Рудольф (14.5.1832-7.10.1903) – математик, профессор Бреславльского (1862) и Боннского (1884) университетов. Основные работы посвящены различным областям анализа, теории чисел, механики и физики, дифференциальным уравнениям

[2] Гёльдер Отто Людвиг (22.12.1859-29.8.1937). Род. в Штутгарте (Германия). Основные труды относятся к алгебре, математическому анализу, теории чисел, основаниям математики.

[3] Кантор Георг (3.3.1845-6.1.1918). Род. в Петербурге (Россия). В 1867г. окончил Берлинский университет. В 1872 - 1913 – профессор университета в Галле. Один из основоположников теории множеств.

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \forall n = 1, 2, 3, \ldots$ найдутся точки $x'_n, x''_n \in X$ такие, что $|x'_n - x''_n| < 1/n$, однако $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0$.

Так как множество $\mathbf{X}$ ограничено, то ограничена и последовательность $\{x'_n\}$. Поэтому из последовательности $\{x'_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$ сходящуюся к некоторой точке a. Точка a является предельной точкой множества X и, в силу замкнутости множества X, точка $a \in X$. Рассмотрим подпоследовательность $\{x''_{n_k}\}$, соответствующую $\{x'_{n_k}\}$. Ясно, что $\{x''_{n_k}\} \to a$ (Докажите!). Пользуясь непрерывностью $f(x)$ в точке a, имеем $f(x'_{n_k}) \to f(a)$ и $f(x''_{n_k}) \to f(a)$. Это противоречит тому, что

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0.$$

$\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Покажем, что условия теоремы (ограниченность, замкнутость множества X, непрерывность функции $f(x)$) являются существенными для справедливости теоремы.

1) Непрерывность функции существенна, поскольку никакая разрывная функция не может быть равномерно непрерывной.

2) Функция $y = \frac{1}{x}$ определена и непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$, но не равномерно непрерывна. Данный полуинтервал ограничен, но не замкнут.

3) Рассмотрим функцию $y = x^2$, определенную на замкнутом, но неограниченном множестве $(-\infty, +\infty)$. Покажем, что эта функция не равномерно непрерывна. Выбирая $x' = x$, $x'' = x + h$, имеем $(x + h)^2 - x^2 = (2x + h)h$. Ясно, что при фиксированном h эта величина может быть сколь угодно большой при достаточно больших x. Это противоречит условию равномерной непрерывности.

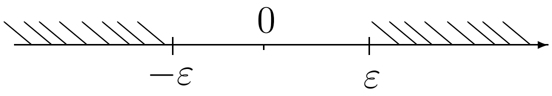
§9. Обобщения понятия предела функции

Напомним, что расширенной числовой прямой называется множество

$$\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Под ε-окрестностью точек $+\infty$ и $-\infty$ далее понимаются множества:

$\{x \in \mathbf{R} : \ x > \varepsilon\}$ – окрестность $+\infty$,
$\{x \in \mathbf{R} : \ x < -\varepsilon\}$ – окрестность $-\infty$.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Пусть $E \subset \overline{\mathbf{R}}$ – произвольное множество. Будем говорить, что $+\infty$ $(-\infty)$ является предельной точкой множества E, если в любой ε-окрестности $+\infty$ $(-\infty)$ имеется хотя бы одна точка множества E, другими словами, когда множество E не ограничено сверху (снизу).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2. Пусть $E \subset \overline{\mathbf{R}}$ – произвольное множество, имеющее $+\infty$ в качестве предельной точки. Будем говорить, что функция $y = f(x)$, заданная на E, имеет пределом $A \in \overline{\mathbf{R}}$ при $x \to +\infty$, если для всякой ε-окрестности A найдется $\delta(\varepsilon)$-окрестность $+\infty$ такая, что при изменении x в $\delta(\varepsilon)$-окрестности $+\infty$ значения $f(x)$ лежат в ε-окрестности A.

Запишем определения некоторых пределов:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, $A \in \mathbf{R}$:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) :\ \forall\, x > \delta(\varepsilon)$ выполнено $|f(x) - A| < \varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) :\ \forall\, x > \delta(\varepsilon)$ выполнено $f(x) > \varepsilon$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) :\ \forall\, x > \delta(\varepsilon)$ выполнено $f(x) < -\varepsilon$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$:

$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) < 0 :\ \forall\, x < \delta(\varepsilon)$ выполнено $f(x) > \varepsilon$.

5. $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = -\infty$:

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) < 0 :\ \forall\, x,\ \delta(\varepsilon) < x < 0$ выполнено $f(x) < -\varepsilon$.

6. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$, $a > 0$:

$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall\, x,\ a < x < a + \delta(\varepsilon)$ выполнено $f(x) > \varepsilon$.

7. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) \neq +\infty$:

$\exists\, \varepsilon > 0 :\ \forall\, \delta > 0\, \exists\, x :\ a < x < a + \delta$, для которого $f(x) < \varepsilon$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулировать и доказать критерий Коши существования пределов $f(x) \to \pm\infty$ при $x \to \pm\infty$.

§10. Асимптоты

Пусть f – функция, определенная на интервале $(a, +\infty)$ (или $(-\infty, a)$). Предположим, что при $x \to +\infty$ $(-\infty)$ выполнено

$$\lim_{x\to+\infty\ (-\infty)} [f(x) - (A\,x + B)] = 0. \tag{1}$$

Прямая $y = A\,x + B$ называется в этом случае *асимптотой* функции f при $x \to +\infty$ $(-\infty)$.

Если $\lim\limits_{x\to c+0\ (c-0)} f(x) = \pm\infty$, то в данном случае говорят, что f имеет в точке $x = c$ *вертикальную асимптоту справа* (слева).

ТЕОРЕМА 10.1. *Условие (1) эквивалентно паре условий*

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty\ (-\infty)} \dfrac{f(x)}{x} & = A, \\ \lim\limits_{x\to+\infty\ (-\infty)} (f(x) - A\,x) & = B. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Докажем, что соотношение (1) влечет (2). Ясно, что из (1) следует

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} (f(x) - A\,x) = B.$$

Однако

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} (f(x) - (A\,x + B)) = \lim_{x\to+\infty(-\infty)} x\left(\frac{f(x)}{x} - A - \frac{B}{x}\right),$$

и потому

$$\lim_{x\to+\infty(-\infty)} \left(\frac{f(x)}{x} - A\right) = 0.$$

Обратно, (2) влечет (1). Это также ясно, поскольку (1) непосредственно вытекает из второго соотношения в (2). □

ПРИМЕР 1. Найдем асимптоты функции

$$y = 2x + \frac{1}{x} + 1.$$

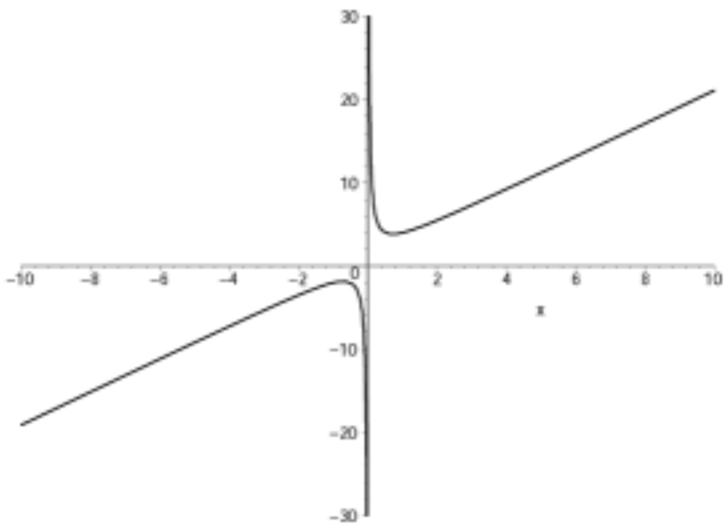
Во-первых, понятно, что функция имеет вертикальную асимптоту в точке $x = 0$ слева и справа.

Во-вторых, заметим, что

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x})=2\,.$$

Далее находим

$$\lim_{x\to\pm\infty}(y(x)-2x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=1\,.$$



Таким образом, функция имеет при $x\to\pm\infty$ асимптоту $y=2x+1$.

§11. Асимптотические формулы. Классификация бесконечно малых

Пусть $y=f(x)$ и $y=g(x)\neq 0$ – функции с общей областью определения, имеющей точку a в качестве точки сгущения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Говорят, что $f(x)$ и $g(x)$ функции одного порядка при $x\to a$, и пишут

$$f(x)\ =\ O(g(x))\quad (x\to a),$$

если существует постоянная $M>0:\ \ \forall\, x\neq a$ и достаточно близких к a выполнено

$$-M<\frac{f(x)}{g(x)}<M.$$

ПРИМЕР 1. Мы имеем

$$\sin\frac{1}{x} = O(1) \quad (x \to 0)$$

и

$$x\,\sin\frac{1}{x} = O(\sin 2x) \quad (x \to 0).$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. Поясните, что означает запись $f(x) = O(1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.2. Говорят, что $f(x)$ эквивалентна $g(x)$ при $x \to a$, и пишут

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \to a)\,,$$

если

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Отметим некоторые пары эквивалентных функций:

1. $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$.

Доказательство было дано ранее (первый "замечательный" предел).

2. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2/2} = \lim_{x\to 0}\frac{2(\frac{x}{2})^2}{x^2/2} = 1.$$

□

3. $\operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$.

Действительно, мы имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} = 1.$$

4. $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$ $(x \to 0)$ $\forall\ n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Воспользуемся формулой

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

для $a = (1+x)^{1/n}$, $\;b = 1$. Имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{x}{n}} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{\frac{x}{n}((1+x)^{\frac{n-1}{n}} + \ldots + (1+x)^{\frac{1}{n}} + 1)} = 1.$$

□

5. $e^x - 1 \sim x \ (x \to 0)$.

Для *доказательства* положим $e^x - 1 = z$. Тогда

$$e^x = z + 1 \Rightarrow x = \ln(1+z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{\ln(1+z)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{z}\cdot \ln(1+z)} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{\ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{\lim\limits_{z\to 0} \ln(1+z)^{\frac{1}{z}}} = \frac{1}{\ln \lim\limits_{z\to 0} (1+z)^{\frac{1}{z}}} = 1.$$

Здесь использована непрерывность функции $y = \ln x$. (В каком именно месте?)

6. $\ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.$$

□

7. $\forall\ \alpha \neq 0$ имеем

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \quad \text{при} \quad x \to 0. \qquad (1)$$

Действительно,

$$\ln(1+x)^\alpha = \alpha \ln(1+x) \sim \alpha x \quad (x \to 0)\,.$$

С другой стороны,

$$\ln(1+x)^\alpha = \ln\{[(1+x)^\alpha - 1] + 1\},$$

причем

$$[(1+x)^\alpha - 1] \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

Однако

$$\ln(1 \ + \ \varepsilon(x)) \ \sim \ \varepsilon(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon(x) \to 0.$$

Значит,

$$\ln([(1+x)^\alpha - 1] + 1) \sim (1+x)^\alpha - 1 \quad (x \to 0)\,.$$

Легко видеть, что отношение эквивалентности транзитивно и потому

$$\alpha x \sim (1+x)^\alpha - 1 \quad (x \to 0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.3. Говорят, что функция $y = f(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.4. Будем говорить, что $y = f(x)$ есть бесконечно малая по сравнению с $y = g(x)$ при $x \to a$, и писать

$$f(x) = \overline{o}(g(x)) \quad (x \to a),$$

если

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

ПРИМЕР 2. Функции $f(x) = \sin^2 x$ и $g(x) = x$ бесконечно малые при $x \to 0$. Справедливо равенство

$$\sin^2 x = \overline{o}(x) \quad (x \to 0).$$

Другими словами, функция $\sin^2 x$ стремится к нулю быстрее, чем x. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 2. Поясните, что означает запись $f(x) = \overline{o}(1)$ при $x \to a$.

Все формулы указанного выше вида называются *асимптотическими формулами.*

ТЕОРЕМА 11.1. *Функция $y = f(x)$ имеет пределом в точке a число A тогда и только тогда, когда функция $(f(x) - A)$ является бесконечно малой при $x \to a$.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда ясно, что $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - A) = 0$. Это означает в свою очередь, что $(f(x) - A)$ – бесконечно малая при $x \to a$.
Обратно. Пусть $(f(x) - A)$ – бесконечно малая при $x \to a$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - A) = 0$. Отсюда по теореме о пределе разности $\lim\limits_{x\to a} f(x) - A = 0$.

$\square$

Пусть $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to a$. Если $f = \overline{o}(\alpha^n(x))$ при $x \to a$, то бесконечно малая f называется бесконечно малой порядка n относительно бесконечно малой α (если $f = \overline{o}(\alpha(x))$ при $x \to a$, то говорят, что f является бесконечно малой более высокого порядка, чем α).

В таком случае простейшими бесконечно малыми естественно назвать бесконечно малые вида

$$C \cdot \alpha^K(x),\ C \equiv const \neq 0,\ K > 0.$$

Говорят, что бесконечно малая $\beta(x)$ $(x \to a)$ имеет порядок $K > 0$ по сравнению с бесконечно малой $\alpha(x)$, если

$$\beta(x) \sim C\alpha^K(x), \quad (x \to a). \tag{2}$$

Ясно, что это соотношение можно переписать в виде

$$\beta(x) = C \cdot \alpha^K(x) + \overline{o}(\alpha^K(x)) \quad (x \to a). \tag{3}$$

Действительно, (2) означает, что

$$\lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{C \cdot \alpha^K(x)} = 1 \Leftrightarrow \frac{\beta(x)}{C \cdot \alpha^K(x)} = 1 + \varepsilon(x)$$

(здесь $\varepsilon(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$).

Таким образом,

$$\beta(x) = C \cdot \alpha^K(x) + \varepsilon(x)[C \cdot \alpha^K(x)]$$

или

$$\beta(x) = C\alpha^K(x) + \overline{o}(\alpha^K(x)) \quad (x \to a).$$

Иногда, вместо того, чтобы записывать формулу (3), говорят, что $C\alpha^K(x)$ является *главной частью* бесконечно малой $\beta(x)$ по сравнению с бесконечно малой $\alpha(x)$. Другими словами, выражение "$C\alpha^K(x)$ является главной частью бесконечно малой $\beta(x)$ по сравнению с бесконечно малой $\alpha(x)$" означает, что бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ связаны соотношением (3) или, что равносильно, соотношением (2).

ПРИМЕР 3. Предположим, что основная бесконечно малая $\alpha(x)$ при $x \to 0$ есть x. Выделим главные части других бесконечно малых

а) $\beta(x) = 1 - \cos(x)$. Главная часть $\beta(x)$ равна $\frac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.

б) $\beta(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$. Тогда

$$\beta(x) = \operatorname{tg} x - \sin x = \sin x(\frac{1}{\cos x} - 1) \sim x(\frac{1}{\cos x} - 1) =$$

$$= x \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x} \sim \frac{x^3}{2}, \quad (x \to 0),$$

т.е. $\frac{x^3}{2}$ – главная часть бесконечно малой $\beta(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$.

□

ПРИМЕР 4. Предположим, что основная бесконечно малая

$$\alpha(x) = \frac{1}{x}, \ (x \to +\infty).$$

Выделим главную часть бесконечно малой

$$\beta(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\,.$$

Покажем сначала, что $\beta(x)$ есть бесконечно малая. Действительно

$$\beta(x) = \frac{x+1+x-1+2\sqrt{x^2-1}-4x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{x^2-1}-x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{-2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x})(\sqrt{x^2-1}+x)}$$

– бесконечно малая при $x \to +\infty$. Найдем главную часть бесконечно малой $\beta(x)$ по отношению к основной бесконечно малой $\alpha(x)$. Имеем

$$\beta(x) = -2\frac{1}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x})(\sqrt{x^2-1}+x)} =$$

$$= \frac{-2}{x^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}+2)(\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+1)} \sim \frac{-1}{4x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, главная часть бесконечно малой $\beta(x)$ по сравнению с основной бесконечно малой $\frac{1}{x}$ $(x \to +\infty)$ есть величина

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

□

§12. Элементарные функции

Функции вида

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m,$$

где $m \geq 0$ – целое и $a_i = \mathrm{const}$, называются *целыми рациональными* функциями.

Отношения двух таких многочленов:

$$f(x) = \frac{a_0x^m + \ldots + a_m}{b_0x^n + \ldots + b_n}$$

называются *дробно-рациональными функциями.*

Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс *рациональных* функций, т.е. класс функций, получаемых в результате операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую положительную степень, примененных к значениям аргумента x и некоторых постоянных.

Если над аргументом x кроме перечисленных алгебраических операций производится еще извлечение корня конечное число раз и результат не является рациональной функцией (корень не извлекается), то получается иррациональная функция.

ПРИМЕР 1. Функция

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{5x^2 + 4x - 7}{3x^2 - 8\sqrt{x} + 4}}$$

является иррациональной.

□

Совокупность всех рациональных и иррациональных функций образует класс явных *алгебраических* функций. В общем случае алгебраической функцией называется многозначная функция $y(x)$, определяемая неявно посредством уравнения

$$p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \ldots + p_{n-1}(x)y + p_n(x) = 0,$$

где n – целое положительное, а коэффициенты $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\ldots, p_n(x)$ – целые рациональные функции. Всякая не алгебраическая функция называется *трансцендентной* функцией. Простейшие (элементарные) трансцендентные функции – это функции вида:

$$y = a^x \quad (a > 0, a \neq 1), \; y = \log_a x \quad (a > 0, a \neq 1),$$

$$y = \sin x, \; y = \cos x, \; y = \operatorname{tg} x, \; y = \operatorname{ctg} x$$

и обратные к ним.

Функции алгебраические, элементарные трансцендентные и их конечные комбинации называются *элементарными* функциями.

Поскольку элементарные функции определяются как результат конечного числа операций над простейшими функциями и сохранение свойства непрерывности при таких действиях установлено, то достаточно проверить непрерывность

функций
$$y = x^{\alpha}\ (\alpha > 0),\ y = \sin x,\ y = e^{x}.$$

ПРИМЕР 2. Функция $y = a^x = e^{x\ln a}$ есть результат суперпозиции функций $y = e^t$ и $t = x \ln a$. □

ПРИМЕР 3. Мы имеем $y = \cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}$. □

В качестве примера докажем непрерывность функции $y = \sin x$. Доказательство непрерывности показательной функции и экспоненты можно найти в более объемных учебниках по анализу.

ТЕОРЕМА 12.1. *Функция $y = \sin x$ непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}$.*

Доказательство. Имеем
$$\sin x - \sin x_0 = 2\,\sin\frac{x - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x + x_0}{2},$$
и, так как $|\sin x| \le |x|\ \ \forall\ x \in \mathbf{R}$, то
$$|\sin x - \sin x_0| \le 2\,|\sin\frac{x - x_0}{2}| \le |x - x_0|$$
для любого x. Поэтому, из условия $x \to x_0$ следует, что
$$\sin x \to \sin x_0.$$
□

Глава 4

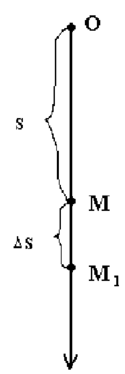
Производная

§1. Понятие производной

Рассмотрим, вначале, некоторые задачи, приводящие к понятию производной.

1.Скорость движения точки

Рассмотрим свободное падение тяжелой материальной точки. Пусть время t отсчитывается от начала падения. Требуется определить скорость ϑ движения точки в данный момент времени t.



Путь, пройденный за время t (когда точка находится в положении M), вычисляется по известной формуле

$$S = \frac{gt^2}{2}.$$

Придадим переменной t некоторое приращение Δt и рассмотрим момент $t + \Delta t$ (когда точка будет в положении M_1). Для нового значения пути имеем выражение

$$S + \Delta S = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2,$$

откуда

$$\Delta S = \frac{g}{2}\left(2t\Delta t + \Delta t^2\right).$$

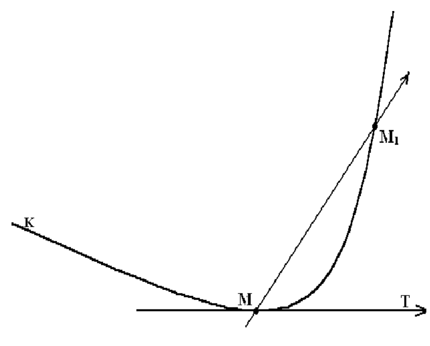
Разделив ΔS на Δt, мы получим *среднюю скорость* падения точки на участке MM_1

$$\vartheta_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = gt + \frac{g}{2}\Delta t.$$

Мгновенной скоростью ϑ точки в момент времени t называют предел, к которому стремится средняя скорость $\vartheta_{\text{ср}}$ за промежуток Δt, когда $\Delta t \to 0$. В нашем случае

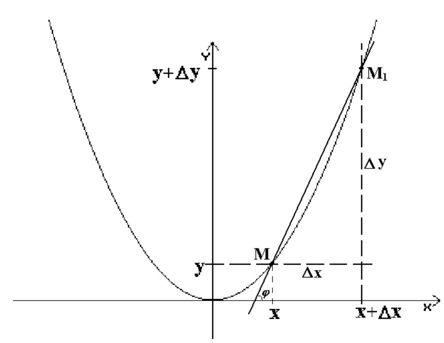
$$\vartheta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + \frac{g}{2}\Delta t \right) = gt.$$

2. Задача о проведении касательной к кривой



Касательной к кривой K в точке M называется предельное положение MT секущей MM_1, когда точка M_1 вдоль кривой стремится к совпадению с M.

Применим это определение к параболе $y = a\,x^2$ в точке $M = (x, y)$. Найдем угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ касательной в точке M.



Придадим абсциссе x приращение Δx и перейдем от точки M к точке M_1 с абсциссой $x + \Delta x$ и ординатой

$$y + \Delta y = a(x + \Delta x)^2.$$

Очевидно,

$$\Delta y = a\left(2x\Delta x + \Delta x^2\right).$$

Таким образом, угловой коэффициент $\mathrm{tg}\varphi$ секущей MM_1

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x.$$

Для получения углового коэффициента касательной, нужно перейти здесь к пределу при $\Delta x \to 0$. Таким образом,

$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} (2ax + a\,\Delta x) = 2ax.$$

В общем случае кривой вида $y = y(x)$ угловой коэффициент устанавливается подобным же образом, т.е.

$$\mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1}$$

Перейдем теперь к определению понятия производной.

Пусть $y = f(x)$ – функция, определенная на множестве $E \subset \mathbf{R}$, и пусть $x_0 \in E$ – точка сгущения E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет производную по множеству E в точке $x_0 \in E$, если существует предел при $x \to x_0$, $x \in E$, разностного отношения

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x \in E, x \neq x_0).$$

В этом случае,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 по множеству E и обозначается $f'_E(x_0)$.

Рассмотрим важнейшие частные случаи данного понятия.
i) Если $E = (a, x_0]$, где $a < x_0$ – произвольная точка, то производная $f'_E(x_0)$ называется производной слева и обозначается $f'(x_0 - 0)$.
ii) Если $E = [x_0, b)$, где $b > x_0$, то производная $f'_E(x_0)$ называется производной справа и обозначается $f'(x_0 + 0)$.
iii) Если $E = (a, b)$ и $x_0 \in (a, b)$, то $f'_E(x_0)$ называется производной и обозначается символом $f'(x_0)$ без указания множества, по которому она берется.

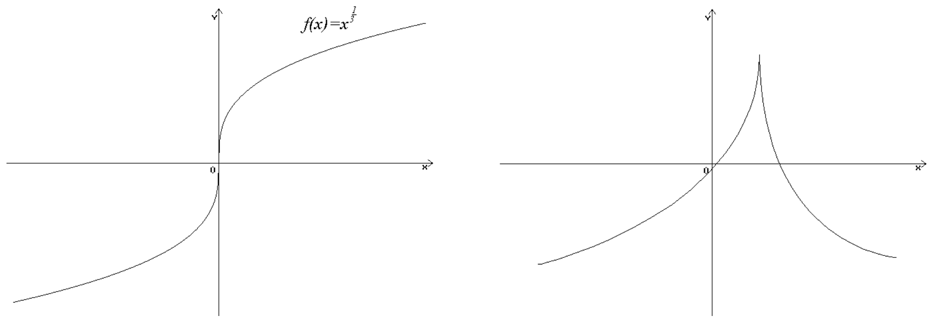
ЗАМЕЧАНИЕ. Из формулы (1) следует, если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то уравнение касательной к ее графику в точке $(x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$Y = Y_0 + f'(x_0)(x - x_0), \quad Y_0 = f(x_0).$$

Нормалью к плоской кривой в точке называется прямая, проходящей через эту точку ортогонально касательной.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Написать уравнение нормали к кривой в заданной точке.

Если при $x \to x_0$ предел разностного отношения существует и равен $\pm\infty$, то эти несобственные числа часто называют бесконечными производными.



Предположим, что функция $y = f(x)$ определена на промежутке $\langle a, b\rangle$. Каждая точка x промежутка является точкой его сгущения. Если в каждой точке x из $\langle a, b\rangle$ существует производная $f'(x)$, то мы вправе рассматривать $f'(x)$ как функцию, определенную на $\langle a, b\rangle$; эта функция называется производной функцией (или просто производной) от f и обозначается f'. Выражения "f дифференцируема на $\langle a, b\rangle$" и "f' есть производная от f" означают, что производная функция определена и, значит, f имеет конечную производную в каждой точке $< a, b >$.

Процесс отыскания производной от данной функции называется *дифференцированием.*

Функция $f'(x)$ (в предположении, что она определена на $\langle a, b\rangle$) сама может быть дифференцируемой; ее производная $(f'(x))'$ обозначается через $f''(x)$. При этом $f'(x)$ называется первой производной от f, а $f''(x)$ – второй производной от f, или производной второго порядка.

Вообще, производные, определяемые таким образом по индукции, обозначаются (если они существуют) символами $f^{(3)}$ (или f'''), $f^{(4)}$,…, $f^{(n)}$, $f^{(n+1)}$. Функция $f^{(n+1)}$ есть по определению $(n+1)$-я производная от f и первая производная от $f^{(n)}$. Если функция f имеет производные всех порядков $n = 1, 2, \ldots$, то говорят, что f бесконечно дифференцируема. Часто полагают $f^{(0)} = f$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведем список обозначений производной:

$$\frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{df}{dx}(x_0) \qquad \text{(Лейбниц);}$$

$$y' \quad \text{или} \quad f'(x_0) \qquad \text{(Лагранж);}$$

$$Dy \quad \text{или} \quad Df(x_0) \qquad \text{(Коши);}$$

$$\dot{y} \quad \text{или} \quad \dot{f}(x_0) \qquad \text{(Ньютон).}$$

Для производных второго порядка и выше используют обозначения: $\frac{d^{(n)}y}{dx^n}$, $y^{(n)}$, $D^{(n)}y$, ...

§2. Примеры вычисления производных

a) Пусть $y = \text{const}$. Тогда

$$\Delta y \equiv 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

Отсюда,

$$(\text{const})' = 0.$$

b) Пусть $y = x^\mu$, где μ – произвольное вещественное число. Тогда

$$\begin{aligned} (x^\mu)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} x^{\mu-1} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \\ &= x^{\mu-1} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

В предыдущей главе (см. параграф *Асимптотические формулы. Классификация бесконечно малых.*, формула (1)) показано, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(1+\varepsilon)^\mu - 1}{\varepsilon} = \mu.$$

Тогда получаем, что

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}.$$

c) Пусть $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Здесь имеем $y = e^{x \ln a}$ и, далее,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{(x+\Delta x) \ln a} - e^{x \ln a}}{\Delta x} = e^{x \ln a} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x \ln a} - 1}{\Delta x} =$$

$$= e^{x \ln a} \ln a \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Здесь мы использовали соотношение

$$e^{\Delta x \ln a} - 1 \sim \Delta x \ln a \quad (\Delta x \to 0).$$

Таким образом,

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

d) Найдем производную функции $y = \log_a x$, где $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Мы имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x \ln a} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x \ln a} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Следовательно,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{и, в частности,} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

e) Перейдем к тригонометрическим функциям. Рассмотрим сначала $y = \sin x$. Здесь имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Тем самым,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

f) Рассмотрим функцию $y = \cos x$. Как и выше, получаем

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите самостоятельно указанную выше формулу.

g) Пусть $y = \mathrm{tg} x$. Тогда

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{tg}(x + \Delta x) - \mathrm{tg} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\sin(x + \Delta x)}{\cos(x + \Delta x)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x)\, \cos x - \cos(x + \Delta x)\, \sin x}{\Delta x\, \cos(x + \Delta x)\, \cos x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тем самым, находим

$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

h) Если $y = \mathrm{ctg} x$, то, как в предыдущем случае, имеем

$$(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

§3. Производная обратной функции

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $y = f(x)$ – функция, определенная на интервале (a, b) и удовлетворяющая там условиям:*
1) в точке $x_0 \in (a, b)$ существует $f'(x_0) \neq 0$;
2) существует обратная к $f(x)$ функция $x = g(y)$, непрерывная в точке $y_0 = f(x_0)$.

Тогда обратная функция $x = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Придадим значению y_0 приращение Δy. Тогда функция $x = g(y)$ получит приращение Δx. Заметим, что при $\Delta y \neq 0$ выполнено $\Delta x \neq 0$, ибо в противном случае функция $y = f(x)$ не была бы однозначной. Далее имеем

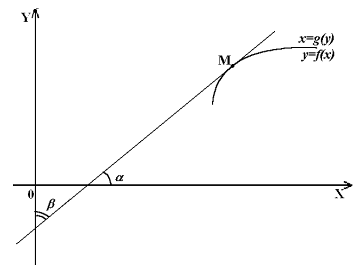
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Если теперь положить $\Delta y \to 0$, то $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности $x = g(y)$ в точке y_0. Поэтому

$$g'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

и теорема доказана. □

Геометрическим истолкованием является следующая формула $\quad \mathrm{tg}\beta = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$.



Производная y'_x есть tg α, где α образован касательной к графику функции $y = f(x)$ с осью Ox. Но обратная функция $x = g(y)$ имеет тот же график, только независимая переменная для нее откладывается по оси Oy. Поэтому производная x'_y, равна tg β, где β — угол, составленный той же касательной с осью Oy.

Таким образом, выведенная формула сводится к известному соотношению, связывающему тангенсы двух углов α и β, сумма которых равна $\frac{\pi}{2}$.

Можно дополнить эту теорему: если $f'(x_0) = 0$ или $\pm\infty$, то $g'(y_0) = \pm\infty$ или 0, соответственно.

§4. Производные обратных тригонометрических функций

а) Найдем производную функции $y = \arcsin x$, где $x \in (-1, 1)$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Мы имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(Здесь знак + был выбран, поскольку $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

Тем самым, доказано

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

b) Аналогично, если $y = \arccos x$, $(x \in (-1,1), \quad y \in (0,\pi))$, то

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{1}{\mp\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

и

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

c) Пусть $y = \mathrm{arctg} x$ и $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Находим

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1/\cos^2 y} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Следовательно,

$$(\mathrm{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

d) Вычислим производную функции $y = \mathrm{arcctg} x$, где $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (0,\pi)$. Как и выше, приходим к соотношению

$$(\mathrm{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Следующие формулы полезно знать на память:

1.	$y = C$:	$y' = 0$;	7.	$y = \cos x$:	$y' = -\sin x$;
2.	$y = x$:	$y' = 1$;	8.	$y = \mathrm{tg} x$:	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
3.	$y = x^\mu$:	$y' = \mu x^{\mu-1}$;	9.	$y = \mathrm{ctg} x$:	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
4.	$y = a^x$:	$y' = a^x \ln a$;	10.	$y = \arcsin x$:	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
5.	$y = \log_a x$:	$y' = \frac{1}{x}\log_a e$;	11.	$y = \arccos x$:	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
	$y = \ln x$:	$y' = \frac{1}{x}$;	12.	$y = \mathrm{arctg} x$:	$y' = \frac{1}{1+x^2}$;
6.	$y = \sin x$:	$y' = \cos x$;	13.	$y = \mathrm{arcctg} x$:	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$;

§5. Дифференцируемость и непрерывность

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $y = f(x)$ – функция, определенная на множестве $E \subset \mathbf{R}$, и пусть $x_0 \in E$ – точка сгущения E. Если существует производная $f'_E(x_0)$, то $y = f(x)$ непрерывна в x_0.*

Доказательство. Так как $f(x)$ имеет производную в точке x_0 по E, то существует конечный предел

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Условие $x \to x_0$ влечет $f(x) \to f(x_0)$ (т.е. $f(x)$ непрерывна в точке x_0). Действительно,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} (f(x)-f(x_0)) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \cdot \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} (x-x_0) =$$

$$= f'_E(x_0)\cdot 0 = 0.$$

$\square$

Заметим, что обратное утверждение не верно, а именно, не всякая непрерывная функция имеет производную. К примеру, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет производной в этой точке. Однако эта функция имеет односторонние производные, и возникает вопрос: всякая ли непрерывная функция имеет односторонние производные?

ПРИМЕР 1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{при } \ x \neq 0, \\ 0 & \text{при } \ x = 0. \end{cases}$$

Заметим вначале, что

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sin\frac{1}{x}.$$

Так как функция $\sin\frac{1}{x}$ не имеет односторонних пределов при $x \to \pm 0$, то, соответственно, функция $f(x)$ не имеет в точке $x = 0$ односторонних производных. $\square$

Приведем другой полезный пример.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

Тогда при $x \neq 0$ имеем (см. §6 "Правила вычисления производных")

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}.$$

В точке же $x = 0$ производная существует:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0.$$

□

§6. Правила вычисления производных

Пусть $x \in (a, b)$ – произвольная точка.

ТЕОРЕМА 6.1. *Предположим, что функция $u = u(x)$ имеет в точке x производную $u'(x)$ и $C \equiv \text{const}$. Тогда функция $Cu(x)$ также имеет производную в этой точке, причем*

$$(Cu)' = Cu'.$$

Доказательство. Действительно, как легко видеть,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = Cu'.$$

□

ТЕОРЕМА 6.2. *Предположим, что функции u и v имеют производные в x. Тогда функция $y = u \pm v$ также имеет производную в этой точке, причем*

$$(u \pm v)' = u' \pm v'.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что для приращений функций u, v и $\Delta(u \pm v)$ справедливо соотношение

$$\Delta(u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v,$$

или

$$\frac{1}{\Delta x} \Delta(u \pm v) = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем нужное.

□

ТЕОРЕМА 6.3. *Предположим, что функции u и v имеют производные в x. Тогда функция $y = u\,v$ также имеет производную в этой точке, причем*

$$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'.$$

Доказательство. Здесь для доказательства достаточно заметить, что

$$\Delta\,(u\,v) = u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x) - u(x)\,v(x) = u(x+\Delta x)\,v(x+\Delta x) -$$

$$-u(x+\Delta x)\,v(x) + u(x+\Delta x)\,v(x) - u(x)\,v(x) =$$

$$= u(x+\Delta x)\,[v(x+\Delta x) - v(x)] + [u(x+\Delta x) - u(x)]\,v(x).$$

Разделив данное выражение на Δx, и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем нужное (Закончите доказательство самостоятельно!). □

ТЕОРЕМА 6.4. *Предположим, что функции u и v имеют производные в x, причем $v(x) \neq 0$. Тогда функция $y = \frac{u}{v}$ также имеет производную в этой точке и справедливо соотношение*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$u(x+\Delta x) = u(x) + u(x+\Delta x) - u(x) =$$

$$= u + \Delta u.$$

и, стало быть, справедливо равенство

$$\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

Разделив данное выражение на Δx, и переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем нужное (Закончите доказательство самостоятельно!). □

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать указанные свойства для общего случая производной $f'_E(x)$ по множеству $E \subset \mathbf{R}$, имеющего $x \in E$ своей точкой сгущения.

§7. Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – функции, определенные на интервалах (c, d) и (a, b) соответственно, причем существует сложная функция $y = f[\varphi(x)]$.

ТЕОРЕМА 7.1. *Предположим, что $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ производную $\varphi'(x_0)$, а функция $y = f(u)$ имеет в точке $u_0 \in (c, d)$, $u_0 = \varphi(x_0)$, производную $f'(u_0)$. Тогда сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ также имеет производную в точке x_0, причем*

$$[f(\varphi(x))]'_{x=x_0} = f'[\varphi(x_0)] \cdot \varphi'(x_0)$$

или, кратко,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad (\textit{цепное правило}).$$

Доказательство. Так как f дифференцируема в точке u_0, то

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u,$$

где $\alpha(u)$ – некоторая бесконечно малая при $u \to u_0$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Пользуясь определением производной, докажите данную формулу.

Отсюда,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Пользуясь непрерывностью φ в точке x_0, замечаем, что $u = \varphi(x) \to u_0$ при $x \to x_0$, и, переходя к пределу при $\Delta x = x - x_0 \to 0$, легко получаем нужное.

□

§8. Производные высших порядков. Формула Лейбница

Напомним, что если $y = f(x)$ имеет конечную производную в X, то эта производная сама представляет собой новую функцию, которая может иметь производную. *Ее называют производной второго порядка.* Обозначение: y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$, ... Аналогично определяется производная третьего порядка, четвертого порядка и т.д. Таким образом,

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'.$$

Заметим, что из предположения, что функция f имеет в точке a производную порядка n, следует, в силу определения последней, что в некоторой окрестности точки a существует производная порядка $n-1$, а, следовательно, при $n > 1$ и все производные более низкого порядка $k < n-1$. При этом все производные, порядок которых меньше n, непрерывны в указанной окрестности (что следует из теоремы о связи дифференцируемости и непрерывности).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Функция называется n раз непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке, если во всех точках этого промежутка она имеет непрерывные производные до порядка n включительно ($n = 0, 1, \ldots$).

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать, что приведенное выше определение эквивалентно следующему:
Функция называется n раз непрерывно дифференцируемой на некотором промежутке, если во всех точках этого промежутка она имеет непрерывную производную порядка n.

Рассмотрим несколько примеров. Очевидно, что

$$(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}, \qquad (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}.$$

ПРИМЕР 1. Вычислим производную n-го порядка функции $y = \sin x$. Имеем

$$y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x,\ y^{(4)} = \sin x, \ldots .$$

$$\sin^{(n)} x = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$

□

ПРИМЕР 2. Пусть функции u и v имеют производные n-го порядка. Вычислим n-ю производную функции $y = uv$. Мы последовательно находим

$$y' = u'v + v'u,$$

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv'',$$

$$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''',$$

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i)}.$$

Последнее доказывается методом математической индукции. При $n = 1$ равенство верно. Предположим, что оно верно для производной порядка n. Тогда

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i [u^{(n-i)} v^{(i)}]' =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i+1)} v^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} v^{(i+1)}.$$

Учитывая, что $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ (докажите!), получаем требуемое, т.е.

$$y^{(n+1)} = u^{(n+1)} v^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^k u^{((n+1)-k)} v^{(k)} + u^{(0)} v^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{((n+1)-k)} v^{(k)} \qquad \text{(формула Лейбница).}$$

□

ПРИМЕР 3. Найдем производную $(x^2 \cos ax)^{(50)}$;

$$v = x^2, \ u = \cos ax, \quad u^{(k)} = a^k \cos(ax + k\frac{\pi}{2}).$$

Тогда

$$(x^2 \cos ax)^{(50)} = -a^{50} x^2 \cos ax - 100a^{49} x \sin ax + 2450a^{48} \cos ax.$$

□

ПРИМЕР 4. Многочлены Лежандра[1] суть выражения вида

$$X_n(x) = C_n \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n},$$

где постоянным C_n придаются те или иные значения из соображений удобства.

Убедимся, что многочлен $X_n(x)$ имеет n различных вещественных корней, которые все содержатся между -1 и 1. Для простоты пусть $C_n = 1$. Тогда

$$(x^2-1)^n = (x-1)^n (x+1)^n.$$

Заметим, что $(n-1)$–последовательная производная обращается в 0 при $x = \pm 1$. Далее находим

$$X_n(x) = (x+1)^n \frac{d^n (x-1)^n}{dx^n} +$$

$$+ C_n^1 \frac{d(x+1)^n}{dx} \frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}} + ... + \frac{d^n (x+1)^n}{dx^n} (x-1)^n.$$

[1] Лежандр Адриен Мари (18.9.1752-10.1.1833). Род. в Париже (Франция). Член Парижской АН (1785). Ему принадлежит ряд значительных результатов в теории геодезических измерений, математическом анализе, теории чисел.

Все слагаемые, начиная со второго, содержат множитель $(x-1)$ и обращаются в 0 при $x = 1$, откуда следует, что

$$X_n(1) = 2^n n!.$$

Аналогично,

$$X_n(-1) = (-1)^n 2^n n!.$$

Положим теперь $C_n = \frac{1}{2^n n!}$ (чаще всего так и делают). Обозначим полученный многочлен через $P_n(x)$. Имеем

$$P_n(1) = 1,$$

$$P_n(-1) = (-1)^n.$$

С помощью формулы Лейбница[2] легко установить, что

$$(x^2-1)X_n'' + 2xX_n' - n(n+1)X_n = 0.$$

Действительно, $y = (x^2-1)^n$ и, далее,

$$y' = 2nx(x^2-1)^{n-1} \Longrightarrow (x^2-1)y' = 2nxy.$$

Возьмем $(n+1)$-е производные от обеих частей последнего равенства. По формуле Лейбница имеем

$$(x^2-1)y^{(n+2)} + (n+1)2xy^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2}2y^{(n)} = 2nxy^{(n+1)} +$$

$$+(n+1)2ny^{(n)} \Longrightarrow (x^2-1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1)y^{(n)} = 0.$$

Умножая на C_n, получаем требуемое. $\square$

§9. Производная функции, заданной в параметрическом виде. Логарифмическая производная

Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – функции, определенные на (a, b), причем $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Theta(x)$. Предположим, что φ и ψ имеют производные в точке $t_0 \in (a, b)$. Пусть $x_0 = \varphi(t_0)$. Так как

$$y = \psi(\Theta(x)) = f(x) \quad \text{и} \quad \Theta'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(t_0)},$$

то, пользуясь цепным правилом, находим

$$f'(x_0) = \psi_t'(t_0) \cdot \Theta'(x_0).$$

[2]Лейбниц Готфрид Вильгельм (1.7.1646-14.11.1716) – математик, философ и теолог. Род. в Лейпциге (Германия). Организатор и первый президент Берлинской АН (1700), член Лондонского королевского общества (1673), член Парижской АН (1700). Один из основателей дифференциального и интегрального исчислений.

Тем самым, приходим к следующей полезной формуле

$$f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.$$

ПРИМЕР 1. Используя формулу для производной функции, заданной параметрически, вычислим производные 2-го и 3-го порядков. Предположим, что функция $y = y(x)$ задана параметрически уравнениями $x = x(t), y = y(t)$. Мы имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Далее находим

$$y''_{x^2} = \frac{x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t}{(x'_t)^3}$$

и

$$y'''_{x^3} = \frac{x'_t(x'_t y'''_{t^3} - x'''_{t^3} y'_t) - 3x''_{t^2}(x'_t y''_{t^2} - x''_{t^2} y'_t)}{(x'_t)^5}.$$

Здесь мы ввели обозначения производных высшего порядка $y''_{x^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$ и т. д. $\square$

Пусть $y = f(x) > 0$ и дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$. Для функции $\ln f(x)$ имеем

$$(\ln f(x_0))' = \frac{f'(x_0)}{f\,(x_0)}.$$

Данную величину часто называют логарифмической производной функции $y = f(x)$.

ПРИМЕР 2. Найдем производную функции вида

$$y = u(x)^{v(x)}.$$

Мы имеем $\ln y = v \ln u$ и, далее,

$$\frac{y'}{y} = [v \ln u]' = v' \ln u + v\frac{u'}{u}.$$

Таким образом, приходим к формуле

$$(u^v)' = u^v \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right).$$

Заметим, впрочем, что можно сразу воспользоваться формулой

$$u^v = e^{(v \ln u)}.$$

□

§10. Дифференциал

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. Предположим, что функция $y = f(x)$ определена на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$ – некоторая точка. Если при $x - x_0 = \Delta x \to 0$ выполнено

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \tag{1}$$

где A – подходящая постоянная, то говорят, что f является дифференцируемой в точке x_0; само же выражение $A\Delta x$ называется дифференциалом функции и обозначается символом dy или $df(x_0)$.

Дифференциал аргумента dx по определению равен Δx.

Равенство (1) показывает, что бесконечно малые Δy и $A\Delta x$ эквивалентны при $\Delta x \to 0$. Другими словами, величина $A\Delta x$ является главной линейной частью бесконечно малой Δy, если за основную бесконечно малую принята Δx.

ТЕОРЕМА 10.1. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела дифференциал в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала конечная производная $y' = f'(x_0)$. При выполнении этого условия*

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что выполнено (1). Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

Следовательно, существует предел

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Для доказательства (2) достаточно заметить, что

$$dy = A\Delta x = f'(x_0)dx.$$

Достаточность. Так как производная $f'(x_0)$ существует, то

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(x) \quad (\Delta x \to 0),$$

где $\varepsilon(x)$ – бесконечно малая величина.

Отсюда получаем

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(x)\Delta x \quad (\Delta x \to 0). \tag{3}$$

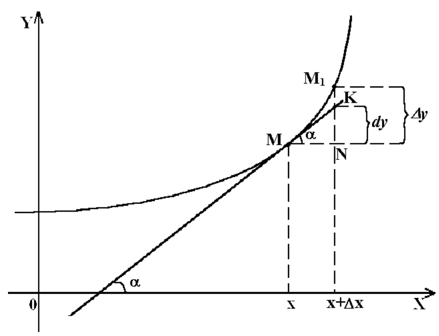
Но $\varepsilon(x)\Delta x = o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$ и теорема доказана.

□

Рассмотрим независимую переменную x. Так как $dx = \Delta x$, то соотношение $df = f'(x_0)dx$ влечет $f'(x_0) = \frac{df}{dx}$, то есть выражение, которое ранее рассматривалось в качестве цельного символа, можно рассматривать как дробь.

Геометрический смысл дифференциала

Обозначим через Δy приращение ординаты кривой, а через dy – приращение ординаты касательной.



Дифференциал функции в точке – это *приближение приращения функции в окрестности точки линейной функцией с точностью до бесконечно малой порядка выше единицы.*

Основные формулы для дифференциалов получаются из соответствующих формул для производных.

Правила дифференцирования:

$$\begin{aligned} d(Cu) &= Cdu, \\ d(u \pm v) &= du \pm dv, \\ d(uv) &= udv + vdu, \\ d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{vdu - udv}{v^2}. \end{aligned}$$

Иногда дифференциал весьма удобно использовать для приближенных вычислений.

ПРИМЕР 1. Вычислим приближенно $0,98^2$. Мы имеем

$$0,98^2 = (1-0,02)^2 = 1^2 - 2\cdot 1\cdot 0,02 + 0,02^2 \approx 1 - 0,04 = 0,96.$$

□

ПРИМЕР 2. Вычислим проближенно $\ln 0,98$. Полагая $\Delta y \approx dy$ и пользуясь (2), можем записать

$$\Delta y \approx y'(x_0)\Delta x,$$

т.е.

$$\ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0 \approx \frac{1}{x_0} \cdot \Delta x.$$

Таким образом, полагая $x_0 = 1$ и $\Delta x = 0,02$, находим

$$\ln 0,98 = \ln(1 - 0,02) - \ln 1 \approx \frac{1}{1} \cdot (-0,02) = -0,02.$$

□

§11. Дифференциалы высших порядков. Инвариантность формы первого дифференциала

В данном параграфе для обозначения дифференциала наряду с символом d мы будем использовать символ δ, там, где это будет удобно.

Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда первый дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$ является функцией двух переменных: точки x и величины dx. Предположим дополнительно, что функция $f'(x)$ также является дифференцируемой в точке x_0 и, что величина dx является постоянной для всех точек x рассматриваемой окрестности точки x_0. При этих предположениях существует дифференциал функции $dy = f'(x)dx$ в точке x_0, который пока мы будем обозначать $\delta(dy)$. Более того, справедливы следующие рассуждения.

$$\delta(dy) = \delta(f'(x)dx) \mid_{x=x_0} =$$

$$= (f'(x)dx)' \mid_{x=x_0} \delta x = f''(x_0)dx\delta x. \qquad (1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Значение $\delta(dy)$ дифференциала от первого дифференциала dy, взятое при $\delta x = dx$, называют вторым дифференциалом функции $y = f(x)$ (в точке x_0) и обозначают символом d^2y.

Из определения и формулы (1) следует, что

$$d^2y = f''(x_0)(dx)^2.$$

Аналогично, по индукции, определяются дифференциалы более высоких порядков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.2. Предположим, что производная порядка $(n-1)$ функции $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Определим дифференциал n-го порядка $d^n y$ (в точке x_0) как дифференциал $\delta(d^{n-1}y)$ от дифференциала $(n-1)$-го порядка, взятый при $\delta x = dx$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Пользуясь методом математической индукции, докажите, что $d^n y = f^{(n)}(x_0)(dx)^n$.

Пусть функции $y = \varphi(x)$ и $x = f(t)$ таковы, что определена сложная функция $y = \varphi[f(t)]$. Предположим, что существуют производные $\varphi'(x)$ и $f'(t)$. Тогда сложная функция также дифференцируема. Найдем дифференциал функции $\varphi(x)$

$$dy = \varphi'_x dx.$$

Найдем дифференциал сложной функции. Имеем

$$dy = \varphi'_x \cdot f'_t dt.$$

Однако $f'_t dt = dx$ и из предыдущего соотношения находим

$$dy = \varphi'_x dx,$$

т.е. мы вернулись к прежней форме дифференциала.

Вывод. Форма дифференциала может быть сохранена даже в том случае, если прежняя независимая переменная заменена новой. Другими словами, мы имеем право писать дифференциал $dy = y'_x dx$, не обращая внимания на то, независима ли переменная x или нет. Разница лишь в том, что dx – не произвольное приращение Δx, а дифференциал x как функции от t. Это свойство называется <u>инвариантностью</u> формы первого дифференциала.

Дифференциалы второго (и более) порядка не обладают инвариантностью формы. Действительно, пусть $y = \varphi(x)$ и $x = f(t)$. Если бы дифференциал второго порядка обладал свойством инвариантности, то была бы справедлива следующая формула

$$d^2 y = \varphi''(x) dx^2. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$d^2 y = \{\varphi[f(t)]\}'' \, dt^2. \tag{3}$$

Далее имеем

$$(\varphi[f(t)])'' = (\varphi' \cdot f')' = \varphi''(f')^2 + \varphi' \cdot f''$$

и на основании (3)

$$d^2y = \left[\varphi''(f')^2 + \varphi' \cdot f''\right] dt^2. \tag{4}$$

Однако

$$dx^2 = \left(f'dt\right)^2 = \left(f'\right)^2 dt^2 \tag{5}$$

и получить (4) из (2) формальной заменой dx^2 на выражение (5) невозможно.

Глава 5

Основные теоремы дифференциального исчисления

§1. Необходимое условие локального экстремума

ЛЕММА 1.1. *Предположим, что функция* $y = f(x)$ *определена на* (a, b) *и имеет конечную производную в точке* $x_0 \in (a, b)$. *Если эта производная* $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$, *то для значений* x, *достаточно близких к* x_0 *справа, справедливо неравенство* $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$, *а для* x, *достаточно близких к* x_0 *слева, справедливо неравенство* $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Доказательство. По определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Пусть $f'(x_0) > 0$. Тогда $\exists \delta > 0 : \quad \forall\, x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнено

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

(Если непрерывная функция имеет строго положительный предел в точке, то в некоторой окрестности она сама положительна).

Далее имеем

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies x - x_0 > 0 \implies f(x) - f(x_0) > 0,$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies x - x_0 < 0 \implies f(x) - f(x_0) < 0.$$

В случае $f'(x_0) < 0$ рассуждения аналогичны.

□

ТЕОРЕМА 1.1 (Ферма[1]). *Пусть $y = f(x)$ определена на (a, b) и в некоторой точке $\xi \in (a, b)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение. Тогда, если существует конечная производная $f'(\xi)$, то*

$$f'(\xi) = 0.$$

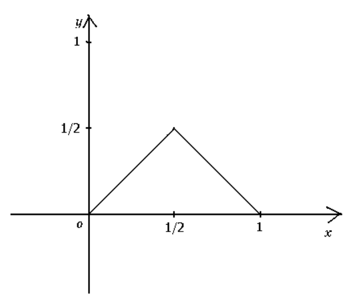
Доказательство. Положим для определенности, что f принимает в точке $\xi \in (a, b)$ максимальное значение. Пусть $f'(\xi) \neq 0$. Если $f'(\xi) > 0$, то, по предыдущей лемме, f возрастает вблизи ξ. Если $f'(\xi) < 0$, то f убывает вблизи ξ. В обоих случаях f не может иметь при $x = \xi$ максимального значения. Противоречие. □

ПРИМЕР 1. Существенно, что ξ – внутренняя точка промежутка. Это видно из примера функции $y = x$, заданной на полуинтервале $(0, 1]$ и достигающей в правом конце этого промежутка своего максимального значения. Здесь производная в точке $\xi = 1$ строго положительна.

□

ПРИМЕР 2. Существенно существование конечной производной $f'(\xi)$. Действительно, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$



Данная функция принимает наибольшее значение при $x = \frac{1}{2}$, но производная $f'(\frac{1}{2})$ в нуль не обращается, точнее $f'(\frac{1}{2})$ не существует.

[1]Ферма Пьер (17.8.1601-12.1.1665) – юрист и математик. Род. в Бомон-де-Ломань (Франция). С 1631 до конца жизни работал советником парламента в Тулузе. На досуге изучал математику, занимался исследованиями в области теории чисел, геометрии, алгебры, теории вероятностей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $y = f(x)$ – функция, определенная на множестве $X \subset \mathbf{R}$. Точка $x_0 \in X$ называется точкой локального максимума (локального минимума), а значения функции в ней – локальным максимумом (локальным минимумом) функции f, если найдется окрестность $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset X$, $\varepsilon > 0$, в каждой точке которой выполнено

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Если

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$$

для всех $x \neq x_0$ в этой окрестности, то точка x_0 называется точкой строгого локального максимума (строгого локального минимума).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Точки локального максимума (локального минимума) называются точками локального экстремума, а значения функции в них — локальными экстремумами функции.

ТЕОРЕМА 1.2 (другая формулировка теоремы Ферма). *Если функция $f : X \to \mathbf{R}$ имеет локальный экстремум в точке $x_0 \in X$ и дифференцируема в x_0, то ее производная $f'(x_0) = 0$.*

УПРАЖНЕНИЕ 1. Найти точки локального экстремума и локальные экстремумы функции

$$y = \sin\frac{1}{x}.$$

§2. Условие обращения в нуль производной (теорема Ролля)

ТЕОРЕМА 2.1 (Ролля[2]). *Предположим, что функция f определена и непрерывна на замкнутом промежутке $[a,b]$ и имеет конечную производную f', по крайней мере, на интервале (a,b). Если $f(a) = f(b)$, то существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $f'(\xi) = 0$.*

[2]Ролль Мишель (21.4.1652-8.11.1719) – математик, член Парижской АН (1685). Род. в Амбере (Франция). Развил метод отделения действительных корней алгебраических уравнений.

Доказательство. Так как функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на этом промежутке свои наибольшее M и наименьшее m значения (теорема Вейерштрасса).

Возможны два случая.

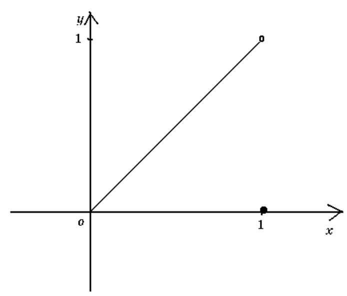
i) Если $M = m$, то $f(x) \equiv \text{const}$ на $[a, b]$. Тогда $f'(x) = 0$ $\forall\, x \in [a, b]$.

ii) Пусть $M > m$. Так как f непрерывна на $[a, b]$, то оба эти значения функцией достигаются. Однако $f(a) = f(b)$, и потому, хотя бы одно из значений M или m достигается в некоторой внутренней точке $\xi \in (a, b)$. По теореме Ферма получаем, что $f'(\xi) = 0$.

$\square$

Существенность условий теоремы

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию $f(x) = x - [x]$ на $[0, 1]$. Данная функция принимает равные значения на концах отрезка, но здесь $f'(x) \equiv 1$ на $(0, 1)$. Функция имеет разрыв в точке $x = 1$. Следовательно, предположение о непрерывности f на отрезке существенно.



ПРИМЕР 2. Напомним пример 2 предыдущего параграфа. А именно, рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$$

Данная функция непрерывна и принимает равные значения на концах промежутка. Производная f' в нуль не обращается. Здесь не существует $f'(\frac{1}{2})$.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим функцию $y = x$ на $[0, 1]$. Данная функция непрерывна на отрезке и имеет конечную производную в каждой его точке. Однако, f' нигде в нуль не обращается. Здесь $f(a) \neq f(b)$.

$\square$

§3. Первая теорема "о среднем" дифференциального исчисления (формула Лагранжа)

ТЕОРЕМА 3.1. *Предположим, что функция f непрерывна на $[a, b]$ и имеет конечную производную f' всюду на (a, b). Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную линейную функцию $F(x) = kx + c$, где постоянные k и c выбраны так, чтобы

$$F(a) = f(a) \quad \text{и} \quad F(b) = f(b).$$

Мы имеем

$$\begin{cases} ka + c &= f(a), \\ kb + c &= f(b). \end{cases}$$

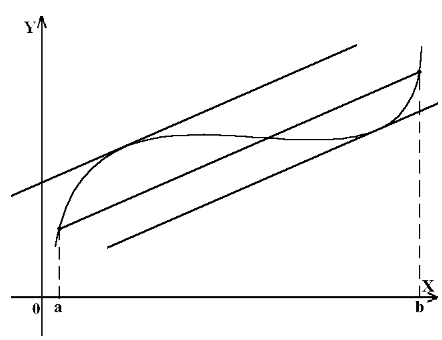
Отсюда находим

$$F(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Функция $\varphi(x) = F(x) - f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля и, тем самым, существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $\varphi'(\xi) = F'(\xi) - f'(\xi) = 0$. Следовательно,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(\xi) = 0,$$

и мы получаем нужное. $\square$



Доказанная формула носит название формулы Лагранжа[3]

[3]Лагранж Жозеф Луи (25.1.1736-10.4.1813) – математик и механик, член Берлинской АН (1759), Парижской АН (1772), почетный член Петербургской АН (1776). Род. в Турине (Италия). Его сочинения по математике, механике и астрономии составляют 14 томов.

(или формулы конечных приращений). Она, очевидно, сохранит силу и при $a > b$.

Зафиксируем произвольно $x_0 \in (a, b)$ и зададим приращение $\Delta x > 0$ так, чтобы $x_0 + \Delta x \in [a, b]$. Применим формулу Лагранжа к отрезку $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Точку ξ, лежащую между x_0 и $x_0 + \Delta x$, можно представить в виде

$$\xi = x_0 + \theta \Delta x, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Тем самым, формулу Лагранжа можно переписать следующим образом

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x)\Delta x.$$

§4. Некоторые следствия из формулы Лагранжа

4.1. Условия постоянства функции

ТЕОРЕМА 4.1. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и*

$$\forall\, x \in (a, b) \quad f'(x) = 0,$$

то $f \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Пусть $x \in (a, b)$ – произвольная точка. Применяя теорему Лагранжа к функции f на отрезке $[a, x]$, получаем

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a) = 0.$$

Таким образом,

$$f(x) = f(a) \quad \forall\, x \in [a, b].$$

$\square$

4.2. Условия монотонности функции

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть f – функция, непрерывная на $[a, b]$ и дифференцируемая на (a, b). Для того, чтобы f возрастала (убывала) на $[a, b]$ достаточно, чтобы*

$$\forall\, x \in (a, b) \quad f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0).$$

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in [a, b]$ – произвольные точки и пусть $x_1 < x_2$. На основании теоремы Лагранжа, применяемой к функции f на отрезке $[x_1, x_2]$, имеем

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), \quad \text{где} \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

Так как $x_2 > x_1$, то

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \text{и} \quad f(x_2) > f(x_1).$$

Аналогично проверяется и условие $f' < 0$ убывания f на $[a, b]$.

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулировать и доказать самостоятельно соответствующие утверждения о достаточных условиях неубывания и невозрастания функции на отрезке.

4.3. Условие Липшица

ТЕОРЕМА 4.3. *Если функция f имеет на $[a, b]$ ограниченную производную, то она удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица.*

Доказательство. Пусть $M > 0$ – постоянная такая, что

$$|f'(x)| \leq M \quad \forall\ x \in [a, b].$$

По формуле Лагранжа для произвольной пары точек $x_1 < x_2$ имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Отсюда

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi)||x_2 - x_1| \leq M|x_2 - x_1|,$$

что и требуется. □

§5. Вторая разность

Величина $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ называется *первой разностью. Второй разностью* называется первая разность от первой разности, а именно,

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = [f(x + \Delta x + \Delta x) - f(x + \Delta x)] -$$

$$-[f(x + \Delta x) - f(x)] = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x).$$

Разности более высокого порядка определяются по индукции $\Delta^{k+1}f(x) = \Delta(\Delta^k f(x))$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Предположим, что функция f имеет вторую производную в некоторой окрестности точки $x = a$, непрерывную в точке $x = a$. Тогда*

$$f''(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta x)^2}. \tag{1}$$

Доказательство. Согласно теореме Лагранжа существует точка ξ, заключенная между a и $a + \Delta x$, для которой

$$\Delta^2 f(a) = \Delta\left(f(a + \Delta x) - f(a)\right) = \left(f'(\xi + \Delta x) - f'(\xi)\right)\Delta x.$$

Применяя еще раз формулу Лагранжа, находим

$$f'(\xi + \Delta x) - f'(\xi) = f''(\eta)\Delta x,$$

где η – точка между ξ и $\xi + \Delta x$.

Таким образом,

$$\Delta^2 f(a) = f''(\eta)(\Delta x)^2,$$

и потому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x \to 0} f''(\eta) = f''(a).$$

$\square$

ПРИМЕР. Заметим, что существование предела правой части (1) вовсе не влечет существования второй производной функции в точке. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x} & \text{при} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

не имеет второй производной в точке $x = 0$ (проверить!), однако,

$$\frac{\Delta^2 f(0)}{(\Delta x)^2} \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

§6. Вторая теорема "о среднем" дифференциального исчисления (формула Коши)

ТЕОРЕМА 6.1. *Предположим, что функции f и g непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на (a,b), причем $g'(x) \neq 0$ всюду на (a,b). Тогда существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что $g(b)-g(a) \neq 0$. Действительно, если $g(b)=g(a)$, то, по теореме Ролля, найдется точка $\xi \in (a,b)$, в которой $g'(\xi)=0$. Это противоречит условиям теоремы.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x)-g(a)).$$

Функция φ удовлетворяет условиям теоремы Ролля и, в частности, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Тем самым, существует точка $\xi \in (a,b)$, в которой $\varphi'(\xi)=0$. Отсюда получаем

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. Можно ли получить формулу Лагранжа из формулы Коши?

УПРАЖНЕНИЕ 2. Объяснить, каким образом мы догадались выбрать вспомогательную функцию φ именно в данном виде?

§7. Теорема Дарбу

ТЕОРЕМА 7.1 (Дарбу[4]). *Если функция f имеет конечную производную в каждой точке отрезка $[a, b]$, то ее производная f' принимает в качестве значения на (a, b) любое число между $f'(a)$ и $f'(b)$.*

Доказательство. Предположим сначала, что

$$f'(a) > 0, \quad f'(b) < 0.$$

Докажем существование точки $\xi \in (a, b)$ такой, что $f'(\xi) = 0$. Из существования и конечности производной f' следует непрерывность на отрезке $[a, b]$ функции f. Далее, по теореме Вейерштрасса, f принимает в некоторой точке $\xi \in [a, b]$ свое наибольшее значение.

Точка $\xi \neq a$, поскольку из $f'(a) > 0$ следует, что $f(x) > f(a)$ вблизи a.

Точка $\xi \neq b$, поскольку неравенство $f'(b) < 0$ влечет, что $f(x) > f(b)$ вблизи точки b.

Таким образом, $a < \xi < b$ и, по теореме Ферма, $f'(\xi) = 0$.

Переходим к общему случаю. Фиксируем произвольно число C между $f'(a)$ и $f'(b)$. Пусть для определенности $f'(a) > C > f'(b)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - Cx.$$

Она дифференцируема на $[a, b]$, и ее производная $\varphi'(x) = f'(x) - C$. Далее имеем

$$\varphi'(a) > 0, \quad \varphi'(b) < 0,$$

и, по доказанному,

$$\exists\, \xi \in (a, b) : \varphi'(\xi) = f'(\xi) - C = 0.$$

Тем самым, $f'(\xi) = C$. □

[4]Дарбу Жан Гастон (13.8.1842-23.2.1917). Род. в Ниме (Франция). Член Парижской АН (1884), чл.-кор. Петербургской АН (1895). Основные труды посвящены дифференциальной геометрии и дифференциальным уравнениям.

§8. Правила Лопиталя

8.1. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$

ТЕОРЕМА 8.1 (правило Лопиталя[5]). *Пусть f и g – функции, определенные на полуинтервале $[a,b)$ и обладающие там следующими свойствами:*
1) $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=0, \quad \lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0;$

2) для всякого $x\in[a,b)$ существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x)\neq 0$;

3) существует (конечный либо нет) предел

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K.$$

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=K.$$

Доказательство. Доопределим f и g в точке $x=b$, положив их при $x=b$ равными нулю, т.е.

$$f(b)=g(b)=0.$$

Тогда функции f и g будут непрерывными на всем отрезке $[a,b]$. По формуле Коши, примененной к функциям f и g на отрезке $[x,b]$, найдется точка $\xi_x\in(x,b)$ такая, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}=\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}. \tag{1}$$

В силу третьего условия теоремы и соотношения (1), получаем

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi_x\to b-0}\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}=K,$$

что и требовалось.

$\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать соответствующее утверждение для полуинтервала $(a,b]$ при $x\to a$.

[5]Лопиталь де Гийом Франсуа(1661-2.2.1704). Род. в Париже (Франция). Член Парижской АН. Издал первый печатный учебник по дифференциальному исчислению – "Анализ бесконечно малых" (1696).

УПРАЖНЕНИЕ 2. Найти формулировку правила Лопиталя для случая, в котором f и g обращаются в нуль во внутренней точке интервала (a, b).

ПРИМЕР 1. Найдем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x - x}{x - \sin x}.$$

Решение проведем в несколько шагов. Рассмотрим полуинтервал $[-\frac{\pi}{4}, 0)$. На этом промежутке $(x-\sin x)' = 1-\cos x \neq 0$, и мы вправе воспользоваться предыдущей теоремой. Тогда имеем

$$\lim_{x\to -0} \frac{\mathrm{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to -0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{1-\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to -0} \frac{2\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}}{\sin x} = \lim_{x\to -0} \frac{2}{\cos^3 x} = 2.$$

Аналогично, рассматривая полуинтервал $(0, \frac{\pi}{4}]$, находим

$$\lim_{x\to +0} \frac{\mathrm{tg} x - x}{x - \sin x} = \lim_{x\to +0} \frac{2}{\cos^3 x} = 2.$$

На основании теоремы о связи односторонних пределов с двусторонним получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x - x}{x - \sin x} = 2.$$

□

ПРИМЕР 2. Найдем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

Пользуясь трижды правилом Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}.$$

□

ТЕОРЕМА 8.2. *Пусть f и g – функции, определенные на $[c,+\infty)$ и обладающие следующими свойствами:*
1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0;$
2) для всякого $x \in [c,+\infty)$ существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$;
3) существует (конечный либо нет) предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Доказательство. Не умаляя общности, можем считать, что $c > 0$. Рассмотрим функции

$$f_1(t) = f(\frac{1}{t}) \quad \text{и} \quad g_1(t) = g(\frac{1}{t}), \quad t \in (0, \frac{1}{c}],$$

полученные заменой $t = \frac{1}{x}$.

Тогда, очевидно,

$$\lim_{t\to0} f_1(t) = \lim_{t\to0} g_1(t) = 0$$

и, кроме того,

$$\lim_{t\to0} \frac{f_1'(t)}{g_1'(t)} = \lim_{t\to0} \frac{f'(\frac{1}{t})\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'(\frac{1}{t})\left(-\frac{1}{t^2}\right)} =$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Пользуясь предыдущей теоремой, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to+0} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to+0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = K.$$

$\square$

8.2. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$

ТЕОРЕМА 8.3. *Пусть f и g – функции, определенные на полуинтервале $[a, b)$ и обладающие там следующими свойствами:*

1) $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty, \quad \lim\limits_{x \to b-0} g(x) = +\infty;$

2) для всякого $x \in [a, b)$ существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$;

3) существует (конечный либо нет) предел

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$$

Тогда существует предел

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = K.$$

Доказательство. Случай $|K| < \infty$. Так как $f(x), g(x) \to +\infty$, то при всех x, достаточно близких к точке b, выполнено $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Поэтому, не умаляя общности, можем считать, что $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ всюду на $[a, b)$.

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу третьего условия теоремы, найдется $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in (b - \delta, b)$ выполнено

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для всякого промежутка $[b - \delta, x]$, где $b > x > b - \delta$, на основании второй теоремы "о среднем" (формула Коши), имеем

$$\frac{f(x) - f(b - \delta)}{g(x) - g(b - \delta)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (b - \delta, x).$$

Поэтому

$$\left| \frac{f(x) - f(b - \delta)}{g(x) - g(b - \delta)} - K \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Данное соотношение можно переписать в виде

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \alpha(x) - K \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, x \in (b - \delta, b), \tag{2}$$

где

$$\alpha(x) = \frac{1 - \dfrac{f(b-\delta)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(b-\delta)}{g(x)}}.$$

Из (2) следует, что

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le \frac{\frac{\varepsilon}{2} + |K|}{|\alpha(x)|},$$

и мы можем заключить, что величина $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ ограничена, по крайней мере, при x достаточно близких к b. Поэтому, опять же, не ограничивая общности мы можем считать, что

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \le M < \infty \quad \text{всюду на} \quad [a, b).$$

После такой договоренности, в силу (2), можно записать

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| = \left|\frac{f(x)}{g(x)}(1-\alpha) + \frac{f(x)}{g(x)}\alpha - K\right| \le$$

$$\le \left|\frac{f(x)}{g(x)}(1-\alpha)\right| + \left|\frac{f(x)}{g(x)}\alpha - K\right| \le M|1-\alpha(x)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Выбирая теперь $\delta_1 > 0$ так, чтобы при $x \in (b-\delta_1, b)$ выполнялось

$$|1-\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

будем иметь

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - K\right| < \varepsilon$$

при всех x, для которых

$$|x-b| < \min\{\delta_1, \delta\}.$$

Тем самым, теорема полностью доказана для $|K| < \infty$.

Случай $K = +\infty$. Поскольку

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty,$$

то при x, достаточно близких к точке b, выполнено $f'(x) > 0$. Тем самым,

$$\lim_{x\to b-0} \frac{g'(x)}{f'(x)} = 0,$$

откуда по доказанному выше вытекает, что

$$\lim_{x\to b-0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$$

и

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty.$$

$\square$

УПРАЖНЕНИЕ 3. Для случая бесконечного промежутка сформулировать и доказать соответствующее утверждение самостоятельно.

8.3. Раскрытие неопределенностей других видов

Неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 раскрываются после подходящего преобразования выражения к ранее изученному случаю.

1) $0\cdot\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$.

ПРИМЕР 3. Найдем

$$\lim_{x\to+0}(x^\alpha\ln x)\quad(\alpha>0).$$

Здесь имеем

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}(x^\alpha\ln x)&=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\\&=\lim_{x\to+0}\frac{1}{x(-\alpha)x^{-\alpha-1}}=0.\end{aligned}$$

$\square$

2) $\infty_1-\infty_2=\frac{1}{1/\infty_1}-\frac{1}{1/\infty_2}=\frac{1/\infty_2-1/\infty_1}{1/\infty_1\cdot 1/\infty_2}$.

ПРИМЕР 4.

$$\lim_{x\to0}\left(\mathrm{ctg}^2x-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos^2x}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos^2x-\sin^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x+\sin x}{x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2x}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2x}=2\lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{\sin^2x+2x\sin x\cos x}=$$

$$= -2 \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x + 2x \cos x} =$$

$$= -2 \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x + 2 \cos x - 2x \sin x} = -\frac{2}{3}.$$

□

3) Неопределенности вида 1^∞, 0^0, ∞^0 раскрываются после предварительного логарифмирования.

ПРИМЕР 5. Найдем

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\dfrac{1}{1 - \cos x}} = z.$$

Мы имеем

$$\ln z = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \sin x - \ln x}{1 - \cos x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x / \sin x - 1/x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin^2 x} = -\frac{1}{3}.$$

Потенцируя, получаем $z = e^{-\frac{1}{3}}$.

□

§9. Приближенное вычисление корней уравнений

9.1. Метод итераций

Пусть F – дифференцируемая на $(-\infty, +\infty)$ функция, удовлетворяющая условию

$$|F'(x)| \leq q < 1 \quad \forall\ x \in (-\infty, +\infty) \quad (q = \text{const}). \tag{1}$$

Требуется решить уравнение

$$F(x) = x. \tag{2}$$

Изучим предварительно свойства итерационной последовательности

$$x_{n+1} = F(x_n) \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{3}$$

ЛЕММА 9.1. *Для произвольного $n = 1, 2, \ldots$ выполнено*

$$|x_{n+1} - x_n| \leq q^n |x_1 - x_0|. \tag{4}$$

Доказательство. Пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа, мы имеем

$$x_{n+1} - x_n = F'(\xi_n)\,(x_n - x_{n-1})$$

и, в силу (1),

$$|x_{n+1} - x_n| \le q\,|x_n - x_{n-1}|\,.$$

Далее, в силу аналогичных соображений, при $n \ge 2$ находим

$$|x_n - x_{n-1}| \le q\,|x_{n-1} - x_{n-2}|\,,$$

и

$$|x_{n+1} - x_n| \le q^2\,|x_{n-1} - x_{n-2}|\,.$$

Сделав n шагов, приходим к (4).

□

ЛЕММА 9.2. *Для любых $n > 1$ и $k \ge 1$ выполнено*

$$|x_{n+k} - x_n| \le q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-q}. \tag{5}$$

Доказательство. Заметим сначала, что

$$x_{n+k} - x_n = (x_{n+k} - x_{n+k-1}) + (x_{n+k-1} - x_{n+k-2}) + \ldots + (x_{n+1} - x_n).$$

Учитывая (4), получаем

$$|x_{n+k} - x_n| \le |x_{n+k} - x_{n+k-1}| + |x_{n+k-1} - x_{n+k-2}| + \ldots +$$

$$+ |x_{n+1} - x_n| \le q^{n+k-1}|x_1 - x_0| + q^{n+k-2}|x_1 - x_0| + \ldots + q^n|x_1 - x_0| =$$

$$= q^n|x_1 - x_0|\left(q^{k-1} + q^{k-2} + \ldots + q + 1\right).$$

По формуле для суммы геометрической прогрессии

$$q^{k-1} + q^{k-2} + \ldots + q + 1 = \frac{1-q^k}{1-q} < \frac{1}{1-q}$$

и из предыдущего соотношения следует (5).

□

ТЕОРЕМА 9.1. *Предположим, что функция F дифференцируема всюду на $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет там условию (1). Тогда*

i) существует и единственен корень ξ уравнения (2);

ii) итерационная последовательность $\{x_n\}$, описываемая равенством (3), сходится к ξ при любом выборе начальной точки x_0;

iii) для любого $n > 1$ выполнено

$$|x_n - \xi| \le q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-q}. \tag{6}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что итерационная последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Действительно, фиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Так как $q < 1$, то существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено

$$q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-q} < \varepsilon.$$

Таким образом, для любых $m > n > N(\varepsilon)$, в силу (5), имеем

$$|x_m - x_n| \le q^n \frac{|x_1 - x_0|}{1-q} < \varepsilon,$$

что и требуется.

Поскольку последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то на основании критерия Коши она сходится. Обозначим ее предел через ξ. Так как F дифференцируема, то она непрерывна, и потому из (3) вытекает

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(\xi),$$

т.е. число ξ является корнем уравнения (2).

Докажем, что этот корень является единственным. Предположим противное, т.е. для некоторого $\eta \ne \xi$ также выполнено $F(\eta) = \eta$. Не умаляя общности, можем считать, что $\xi < \eta$. Согласно формуле конечных приращений Лагранжа, имеем

$$0 < \eta - \xi = F(\eta) - F(\xi) = F'(c)(\eta - \xi),$$

где $c \in (\xi, \eta)$ – некоторая точка.

Отсюда, в силу условия (1), находим

$$|\eta - \xi| \le |F'(c)||\eta - \xi| \le q|\eta - \xi|.$$

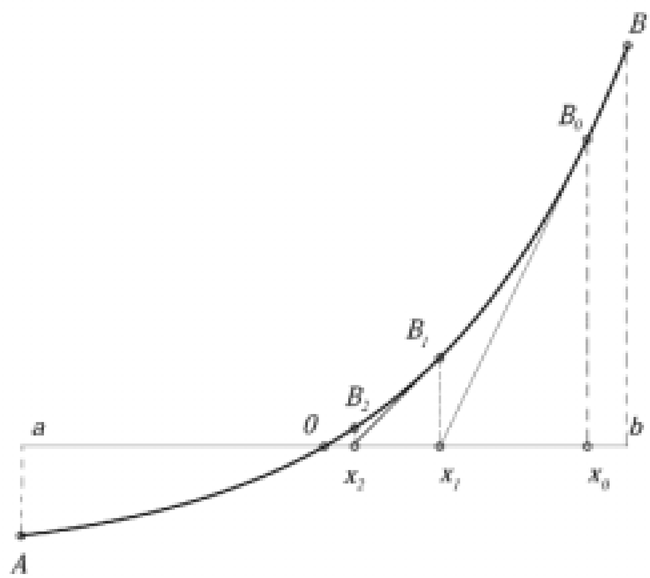
Противоречие с предположением $0 < q < 1$.

$\square$

Имеются модификации метода, пригодные для вычисления корня уравнения (2) в случае, когда F задана на конечном отрезке $[a, b]$. См., например, В.А. Ильин и Э.Г. Позняк, Основы математического анализа, часть I, стр. 392.

9.2. Метод касательных

Предположим, что уравнение $F(x) = 0$ имеет корень ξ на отрезке $[a, b]$. Воспользуемся следующим алгоритмом для приближенного нахождения корня.



Пусть: x_0 – произвольная начальная точка;

x_1 – точка пересечения касательной к графику F в точке x_0 с осью ox;

x_2 – точка пересечения касательной к графику F в точке x_1 с осью ox;

....

x_n – точка пересечения касательной к графику F в точке x_{n-1} с осью ox.

Найдем итерационную формулу. Уравнение касательной, проходящей через точку x_{n-1}, имеет вид

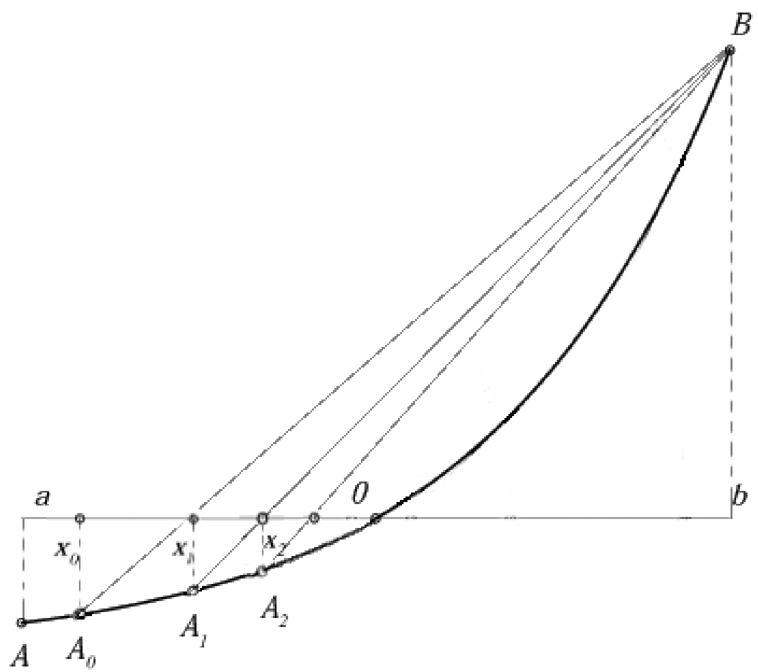
$$y = F'(x_{n-1})(x - x_{n-1}) + F(x_{n-1}).$$

Тем самым, точка пересечения этой касательной с осью $y = 0$, т.е. точка x_n определяется по формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}.$$

9.3. Метод хорд

Предположим, что уравнение $F(x) = 0$ имеет корень ξ на отрезке $[a, b]$.



Описание метода: $x_0 \in [a, b]$ – произвольная начальная точка; x_1 – точка пересечения хорды $\overline{A_0B}$ с осью $y = 0$; x_2 – точка пересечения хорды $\overline{A_1B}$ с осью $y = 0$ и т.д.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Обоснования методов касательных и хорд посмотреть самостоятельно (например, в книге В.А. Ильина и Э.Г. Позняка, Основы математического анализа, часть I, стр. 393-398).

Глава 6

Формула Тейлора

§1. Производные многочлена и его разложение по степеням

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть* $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ *– произвольный многочлен степени* n. *Пусть* $a \in \mathbf{R}$ *– произвольная точка. Тогда*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \qquad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Здесь $P^{(k)}(a)$ – значение производной k-го порядка в точке a при $k = 1, 2, ..., n$. При $k = 0$ – значение самой функции.

Доказательство. Произведя замену $x = (x-a)+a$ в многочлене $P(x)$, получаем

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k[(x-a)+a]^k,$$

что, как легко видеть, можно переписать в виде

$$P(x) = d_0 + d_1(x-a) + d_2(x-a)^2 + ... + d_n(x-a)^n. \qquad (2)$$

Найдем коэффициенты $d_0, d_1, ..., d_n$. Подставляя в обе части (2) $x = a$, имеем

$$P(a) = d_0.$$

Дифференцируя равенство (2) по x, приходим к соотношению

$$P'(x) = d_1 + 2d_2(x-a) + ... + kd_k(x-a)^{k-1} + ... + nd_n(x-a)^{n-1}$$

и при $x = a$ получаем

$$P'(a) = d_1.$$

Далее

$$P''(x) = 2d_2 + 3 \cdot 2d_3(x-a) + ... + k(k-1)d_k(x-a)^{k-2} + ... +$$
$$+ n(n-1)d_n(x-a)^{n-2}$$

и

$$P''(a) = 2d_2.$$

Продолжая далее этот процесс, находим

$$P^{(k)}(a) = k!d_k$$

или

$$d_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, из (2) будем иметь

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

□

§2. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Рассмотрим задачу о существовании многочлена

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ... + c_n x^n$$

такого, чтобы для функции f в окрестности точки $x = a$ выполнялось соотношение

$$f(x) - P_n(x) = o((x-a)^n) \quad x \to a.$$

Было дано решение задачи при $n = 1$ (см., например, параграф "Дифференциал" (формула (3)), или, формула "конечных приращений" Лагранжа). Приведем ее решение в общем виде.

Согласно теореме 1.1 предыдущего параграфа, многочлен $P_n(x)$ можно записать в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{1}$$

Предположим, что функция f имеет в точке $x = a$ все производные вплоть до порядка n. По образцу многочлена (1) составим многочлен

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{2}$$

Данный многочлен называется *многочленом Тейлора*[1] для функции f (с центром в точке a и степени n).

ТЕОРЕМА 2.1. *Если f имеет в точке $x = a$ производную порядка n, то*

$$f(x) - T_n(x) = o((x-a)^n) \quad \textit{при } x \to a. \tag{3}$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(x) = f(x) - T_n(x).$$

Функция φ дифференцируема n раз, причем

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = ... = \varphi^{(n)}(a) = 0.$$

Покажем, что отсюда вытекает свойство

$$\varphi(x) = o((x-a)^n) \quad \text{при } x \to a$$

или, что то же самое,

$$\varphi(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n,$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to a$.

Воспользуемся методом математической индукции. Утверждение справедливо при $n = 1$, поскольку из равенства

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = 0$$

и формулы

$$\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(a)(x-a) + o(x-a) \quad \text{при } x \to a$$

следует, что $\varphi(x) = o(x-a) \quad (x \to a)$.

Предположим, что данное высказывание верно для $n = k$, и покажем, что оно верно при $n = k+1$. Итак, пусть

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = ... = \varphi^{(k+1)}(a) = 0.$$

Тогда производная φ' дифференцируема k раз в точке $x = a$ и, по предположению индукции, для нее выполнено

$$\varphi'(x) = \varepsilon(x)(x-a)^k = o((x-a)^k). \tag{4}$$

[1] Тейлор Брук (18.8.1685-29.12.1731) – математик и философ. Род. в Эдмонтоне (Англия). Член Лондонского королевского общества.

Однако, по формуле Лагранжа,

$$\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(x-a),$$

где ξ точка, заключенная между a и x, и $\xi \to a$ при $x \to a$. Поэтому из (4) получаем

$$\varphi(x) = \varphi'(\xi)(x-a) = \varepsilon(\xi)(\xi - a)^k (x-a) =$$

$$= \varepsilon(\xi)\left(\frac{\xi - a}{x-a}\right)^k (x-a)^{k+1} = \varepsilon_1(x)(x-a)^{k+1},$$

где $\varepsilon_1(x) \to 0$ при $x \to 0$. Последнее равенство является следствием того, что точка ξ находится между точками a и x, а также неравенства

$$\left|\frac{\xi - a}{x-a}\right| < 1.$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (3) может быть записана в виде

$$f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n) \quad \text{при } x \to a. \tag{5}$$

Величина $o((x-a)^n)$ имеет смысл *остаточного члена.* Формула (5) называется формулой *Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*[2]. В частном случае для $n = 1$ мы имеем

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad \text{при } x \to a,$$

т.е. уже известную нам формулу.

ТЕОРЕМА 2.2. *Если f имеет производную порядка n в точке $x = a$ и существует многочлен $P_n(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n$, для которого*

$$f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n) \quad x \to a, \tag{6}$$

то $P_n = T_n$, то есть является многочленом Тейлора с центром в точке a.

Доказательство. Согласно теореме 2.1 имеем

$$f(x) = T_n(x) + o((x-a)^n)$$

[2]Пеано Джузеппе (27.8.1858, Кунео, – 20.4.1932, Турин), итальянский математик. С 1890 профессор Туринского университета (Италия). Занимался изучением основных понятий и фактов анализа (вопрос о возможно более широких условиях существования решения дифференциальных уравнений, определение и содержание понятия кривой) и формально-логическим обоснованием математики. Во всеобщее употребление вошла его аксиоматика натурального ряда чисел. Первым построил пример непрерывной кривой, целиком заполняющей некоторый квадрат (1890 г.).

и поэтому из (6) получаем

$$T_n(x) - P_n(x) = o((x-a)^n) - o((x-a)^n) = o((x-a)^n).$$

Учитывая, что многочлен P_n можно записать в виде (1), находим

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = o((x-a)^n).$$

Подставляя в это равенство $x = a$, получаем

$$f(a) = f^{(0)}(a) = P_n(a).$$

Следовательно, нулевые члены в суммах в (6) взаимно уничтожаются и мы получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = o((x-a)^n)$$

или, поделив обе части равенства на $(x-a)$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1} = o((x-a)^{n-1}).$$

Полагая здесь $x = a$, получаем

$$\frac{f'(a)}{1!} = \frac{P_n'(a)}{1!}.$$

Продолжая этот процесс, заключаем, что

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!},$$

$P_n(x) = T_n(x)$. □

§3. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Коши

Величина $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ называется остаточным членом в формуле Тейлора. Ранее мы показали, что если f имеет в точке $x = a$ производную порядка n, то $R_n(x) = o((x-a)^n)$ при $x \to a$. Однако зачастую данной информации об остаточном члене бывает слишком мало, поскольку никаких границ для величины $o((x-a)^n)$ при этом не указывается. Применяя несколько иные методы, мы можем получить больше информации об остаточном члене.

Предположим, что f дифференцируема $(n+1)$ раз на отрезке $[a, a+h]$. Зафиксируем $x \in (a, a+h)$ и рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(y) = f(x) - f(y) - \frac{f'(y)}{1!}(x-y) - ... - \frac{f^{(n)}(y)}{n!}(x-y)^n,$$

где $a \le y \le x$. Ясно, что $\psi(a) = R_n(x)$ и $\psi(x) = 0$.

Всюду на отрезке $[a, a+h]$ существует производная ψ', причем

$$\psi'(y) = -f'(y) - \left[\frac{f''(y)}{1!}(x-y) - f'(y)\right] - \left[\frac{f'''(y)}{2!}(x-y)^2 - \right.$$

$$\left. - f''(y)(x-y)\right] - \dots - \left[\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - \frac{f^{(n)}(y)}{(n-1)!}(x-y)^{n-1}\right] =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n.$$

Выберем произвольно функцию g дифференцируемую на $[a, x]$, для которой $g' \neq 0$. К паре функций ψ и g применим обобщенную формулу конечных приращений Коши. Имеем

$$\frac{\psi(x) - \psi(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\psi'(\xi)}{g'(\xi)},$$

где $\xi \in (a, x)$ – некоторая точка. Эту точку ξ можно записать в виде $\xi = a + \theta(x-a)$, где $\theta \in (0, 1)$ – некоторое число. Так как $\psi(x) = 0$, $\psi(a) = R_n(x)$ и $\psi'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$, то мы получаем

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \frac{g(x) - g(a)}{g'(\xi)}. \tag{1}$$

Выбирая в (1) различные функции g, будем получать разные формы остаточного члена в формуле Тейлора.

Положим $g(y) = x - y$. Получим

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(1-\theta)^n (x-a)^{n+1}$$

– *остаточный член в форме Коши.*

Положим $g(y) = (x-y)^{n+1}$. Тогда

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

– *остаточный член в форме Лагранжа.*

§4. Примеры разложения функций по формуле Маклорена. Использование в приближенных вычислениях

Разложение вида

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

т.е. разложение функции по формуле Тейлора в окрестности точки $a = 0$, называется разложением (формулой) Маклорена[3].

ПРИМЕР 1. Представим функцию e^x по формуле Маклорена. Прежде всего заметим, что эта функция дифференцируема бесконечное число раз, причем $(e^x)^{(n)} = e^x$ и поэтому

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

□

ПРИМЕР 2. Пусть $y = \sin x$. Тогда $y^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$ и $y^{(n)}(0) = \sin(n\frac{\pi}{2})$. Следовательно,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

где n – нечетно. □

ПРИМЕР 3. Пусть $y = \cos x$. Как и выше имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}}\frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

где n – четно. □

ПРИМЕР 4. Мы определили число e как предел

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Пользуясь формулой Маклорена, покажем, как можно вычислить это число с любой наперед заданной точностью. С

[3]Маклорен Колин (1698-14.6.1746). Род. в Килмодан (Шотландия). Член Лондонского королевского общества (1719). Первым опубликовал работу о разложении функций в степенные ряды.

этой целью воспользуемся выражением для остаточного члена в форме Лагранжа. Имеем при $x = 1$

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!},$$

где $\xi \in (0,1)$ – некоторая точка.

Так как e^x возрастает, и мы знаем оценку $e < 3$, то $e^{\xi} < 3$ и

$$|e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Таким образом, чтобы вычислить, например, число e с точностью до 10^{-37}, достаточно выбрать n столь большим, чтобы было

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-37}.$$

Тогда сумма $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ дает приближенное значение числа e с нужной точностью. $\square$

§5. Приложения формулы Тейлора к исследованию графиков функций

Мы знаем, что если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то f имеет в точке x_0 локальный минимум; если же $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то – локальный максимум. Случай $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ остался неисследованным.

Рассмотрим общую ситуацию. Предположим, что в окрестности точки $x = x_0$ функция имеет n производных и n-я производная в точке x_0 не обращается в нуль, а $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Имеем

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \varepsilon(x)(x-x_0)^n,$$

где $\varepsilon(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Так как все $f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 1, 2, ..., n-1)$, то

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \varepsilon(x)(x-x_0)^n,$$

$$f(x) - f(x_0) = [\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x)](x-x_0)^n. \qquad (1)$$

При x, близких к x_0, знак $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \varepsilon(x)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$. Рассмотрим два случая

а) n – четное. Тогда $(x - x_0)^n > 0$ и знак приращения $f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$. Следовательно, при $f^{(n)}(x_0) > 0$ точка x_0 есть точка локального минимума, а при $f^{(n)}(x_0) < 0$ – точка локального максимума.

б) n – нечетное. Пусть $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тогда при $x < x_0$ множитель $(x - x_0)^n$ в (1) меньше нуля и $f(x) - f(x_0) < 0$, при x, близких к x_0, а при $x > x_0$ множитель $(x - x_0)^n$ в (1) больше нуля и $f(x) - f(x_0) > 0$, при x, близких к x_0. Следовательно, x_0 – точка перегиба.

Аналогично и в случае, когда $f^{(n)}(x_0) < 0$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Если из производных, отличных от нуля, первой оказывается производная нечетного порядка (больше 1), то точка x_0 – точка перегиба. Если таковой является производная четного порядка, то x_0 – точка локального максимума либо локального минимума в зависимости от того, будет ли ее знак отрицательный либо положительный.*

Удобное правило для запоминания. Если $f'(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то $f(x)$ ведет себя в окрестности x_0 как функция $k(x - x_0)^n$, где $k = f^{(n)}(x_0)$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим функцию $y = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ в окрестности $x_0 = 0$.

$$\text{Имеем:} \qquad y(0) = 0,$$

$$y'(0) = [\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}]|_{x=0} = 0, \; y''(0) = [-\sin x + x]|_{x=0} = 0,$$

$$y'''(0) = [-\cos x + 1]|_{x=0} = 0, \quad y^{(4)}(0) = \sin x|_{x=0} = 0$$

$$\text{и} \quad y^{(5)}(0) = \cos x|_{x=0} = 1.$$

Следовательно, точка $x = 0$ – точка перегиба. □

Глава 7

Выпуклые функции

§1. Понятие выпуклой функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функция f, определенная и непрерывная в промежутке $\langle a, b\rangle$, называется выпуклой вниз, если для произвольных значений x_1, x_2 из промежутка $\langle a, b\rangle$ и любого $q \in (0,1)$ выполняется неравенство

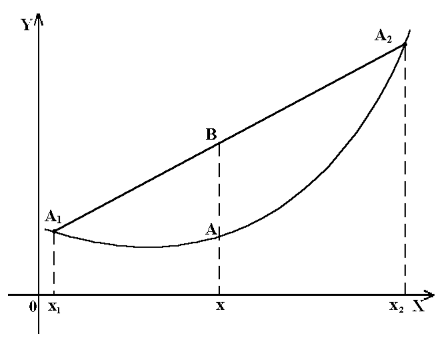
$$f\left(qx_1 + (1-q)x_2\right) \leq qf(x_1) + (1-q)f(x_2). \tag{1}$$

Функция называется выпуклой вверх, если

$$f\left(qx_1 + (1-q)x_2\right) \geq qf(x_1) + (1-q)f(x_2). \tag{2}$$

Очевидно, что если f – выпукла вниз, то $(-f)$ – выпукла вверх и обратно.

Геометрический смысл.



Пусть $x = qx_1 + (1-q)x_2$, где $x_1 < x_2$. Тогда, очевидно, $x_1 < x < x_2$.

Обратно, всякое число x такое, что $x_1 < x < x_2$, представимо в виде $x = qx_1 + (1-q)x_2$ при

$$q = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad 1-q = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Пусть $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2)$, где $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$, – концевые точки хорды A_1A_2.

Ордината точки B записывается в виде

$$y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}y_2.$$

В левой части соотношения (1) записана ордината точки A, в правой части (1) – ордината точки B. Таким образом, выпуклая вниз функция характеризуется тем, что для произвольной поддуги ее графика все точки этой поддуги лежат не выше стягивающей поддугу хорды. (В случае выпуклой вверх функции – не ниже.)

УПРАЖНЕНИЕ 1. Попробуйте дать свое определение *вогнутой* и *выпуклой* функции. Заметим, что у различных авторов определения – диаметрально противоположные (см., например, Г.М. Фихтенгольц "Курс дифференциального и интегрального исчисления"и "Математический энциклопедический словарь" под ред. Ю.В. Прохорова). В связи с этим, предлагаем учесть нюансы русского языка.

§2. Простейшие свойства выпуклых функций

ТЕОРЕМА 2.1. *Произведение выпуклой вниз функции на положительную постоянную – выпуклая вниз функция. Произведение выпуклой вниз функции на отрицательную постоянную – выпуклая вверх функция.*

Доказать самостоятельно.

ТЕОРЕМА 2.2. *Сумма двух выпуклых вниз функций – также выпуклая вниз функция.*

Доказать самостоятельно.

ПРИМЕР 1. Функция $y = -x^{\frac{1}{3}}$, заданная на множестве $x > 0$, является выпуклой вниз, однако функция
$y = (-x^{\frac{1}{3}})(-x^{\frac{1}{3}}) = x^{\frac{2}{3}}$ выпукла вверх. Таким образом, произведение 2-х выпуклых вниз функций может не являться выпуклой вниз функцией. □

ТЕОРЕМА 2.3. *Если $\varphi(u)$ – возрастающая, выпуклая вниз функция, а $u = f(x)$ также выпукла вниз, то сложная функция $\varphi(f(x))$ является выпуклой вниз.*

Доказательство. В силу выпуклости вниз f и возрастания φ, мы имеем

$$\varphi\left(f\left(qx_1 + (1-q)x_2\right)\right) \le \varphi\left(qf(x_1) + (1-q)f(x_2)\right).$$

Далее, поскольку φ выпукла, находим

$$\varphi\left(qf(x_1) + (1-q)f(x_2)\right) \le q\varphi(f(x_1)) + (1-q)\varphi(f(x_2)).$$

Сопоставляя данное неравенство с предыдущим, получаем нужное.

□

ТЕОРЕМА 2.4. *Если $y = f(x)$ и $x = g(y)$ – однозначные, взаимно обратные функции (в соответствующих промежутках), то одновременно*

$f(x)$	$g(y)$
выпукла вниз, возрастает	*выпукла вверх, возрастает*
выпукла вниз, убывает	*выпукла вниз, убывает*
выпукла вверх, убывает	*выпукла вверх, убывает*

Доказательство. Докажем первое из высказываний. Доказательства других утверждений предоставляются читателю. Пусть

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2,$$

и

$$x_1 = g(y_1), \quad x_2 = g(y_2).$$

Тогда

$$f(qx_1 + (1-q)x_2) \le qf(x_1) + (1-q)f(x_2) = qy_1 + (1-q)y_2.$$

По теореме об обратной функции, g также возрастает и

$$g\left(qy_1 + (1-q)y_2\right) \ge g\left(f(qx_1 + (1-q)x_2)\right) =$$
$$= qg(y_1) + (1-q)g(y_2),$$

т.е. g – выпукла вверх.

□

ТЕОРЕМА 2.5. *Выпуклая вниз в промежутке $\langle a, b\rangle$ функция f, $f \not\equiv \mathrm{const}$, не может достигать максимума внутри этого промежутка.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. функция достигает наибольшее значение во внутренней точке x_0. Так как $f \not\equiv \mathrm{const}$, то можно заключить, что $x_1 < x_0 < x_2$ и хотя бы на одном конце отрезка $[x_1, x_2]$ значение функции строго меньше, чем в точке x_0. Пусть, например

$$f(x_1) < f(x_0), \quad f(x_2) \le f(x_0).$$

Положим $x_0 = qx_1 + (1-q)x_2$. Умножим обе части первого неравенства на q, а второго на $(1-q)$ и сложим их. Полученное неравенство

$$qf(x_1) + (1-q)f(x_2) < f(x_0) = f\left(qx_1 + (1-q)x_2\right)$$

противоречит выпуклости вниз f.

□

ТЕОРЕМА 2.6. *Если функция f выпукла вниз на промежутке $\langle a, b\rangle$ и отрезок $[x_1, x_2]$, $x_1 < x_2$, содержится в $\langle a, b\rangle$, то соотношение* (1) *выполняется либо всегда со знаком "=", либо всегда со знаком строгого неравенства.*

Геометрически: дуга A_1AA_2 либо сливается с хордой A_1A_2, либо вся (за исключением концов) лежит под хордой.

Доказательство. Пусть

$$l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} y_2.$$

Тогда

$$\varphi(x) = f(x) - l(x) = f(x) + [-l(x)]$$

– выпукла вниз как сумма 2-х выпуклых вниз функций.

Мы имеем $\varphi(x_1) = 0$, $\varphi(x_2) = 0$. Возможны варианты:

1) $\varphi(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv l(x)$, т.е. дуга сливается с хордой.

2) $\varphi(x) < 0 \ \forall\, x \in (x_1, x_2)$, поскольку в противном случае φ достигает максимума внутри $[x_1, x_2]$, что невозможно. Отсюда, $f(x) < l(x)$.

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Если для любого отрезка $[x_1, x_2] \subset \langle a, b\rangle$ соотношение (1) выполняется со знаком неравенства, f называется строго выпуклой вниз.

Определение строгой выпуклости вверх — аналогично.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать, что

если $\varphi(u)$	и $u = f(x)$	то $\varphi(f(x))$
выпукла вниз, убывает	выпукла вверх,	выпукла вниз
выпукла вверх, возрастает	выпукла вверх,	выпукла вверх
выпукла вверх, убывает	выпукла вниз,	выпукла вверх

§3. Условия выпуклости

Учитывая результаты предыдущего раздела, неравенство, определяющее выпуклую вниз функцию, можно переписать в виде

$$f(x) \le \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

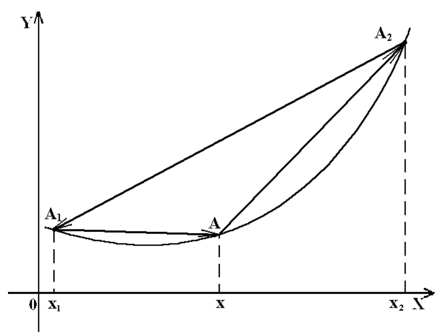
для $x_1 < x < x_2$. Следовательно,

$$(x_2 - x) f(x_1) + (x_1 - x_2) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \ge 0, \qquad (1)$$

что эквивалентно неравенству

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x & f(x) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix} \geq 0. \tag{2}$$

Геометрический смысл:



Определитель в (2) равен удвоенной площади $\triangle A_1AA_2$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Предположим, что функция f определена и непрерывна на промежутке $\langle a, b\rangle$ и имеет в каждой точке конечную производную f'. Для того чтобы f была выпуклой вниз на $\langle a, b\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы производная f' неубывала.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_1 < x < x_2$. Перепишем неравенство (1) в виде

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}. \tag{3}$$

Последовательно устремляя здесь $x \to x_1,\ x \to x_2$, получаем

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2), \tag{4}$$

т.е. $f'(x_1) \leq f'(x_2)$.

Достаточность. Применим формулу конечных приращений

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\xi_1), \quad \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\xi_2),$$

где $x_1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x_2$. Так как f' не убывает, то $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$ и мы приходим к соотношению (3).

□

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что f определена и непрерывна вместе со своей производной f' на $\langle a, b\rangle$, а также имеет на (a, b) конечную вторую производную $f''(x)$. Для выпуклости вниз (вверх) f на $\langle a, b\rangle$ необходимо и достаточно, чтобы всюду на (a, b) вторая производная $f'' \geq 0 \quad (f'' \leq 0)$.*

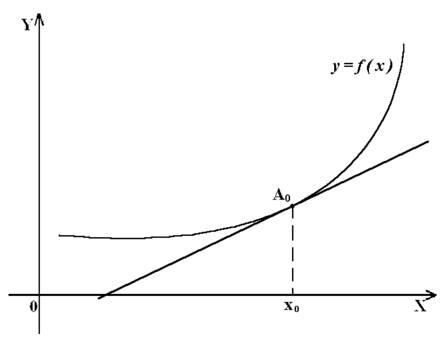
Доказательство. Так как $f'' > 0$, то f' неубывает. По предыдущей теореме получаем требуемое.

$\square$

ТЕОРЕМА 3.3. *Предположим, что f определена и непрерывна на (a, b) и имеет там конечную производную f'. Для выпуклости вниз f необходимо и достаточно, чтобы ее график лежал над любой своей касательной (или на ней).*

Доказательство. Необходимость. Уравнение касательной в точке $A_0 = (x_0, f(x_0))$ имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$



Необходимо показать, что выпуклость вниз f влечет свойство: $\forall\, x_0, x \in (a, b)$ выполнено

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \tag{5}$$

т.е.

$$\begin{cases} f'(x_0) \leq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{при} \quad x > x_0, \\ f'(x_0) \geq \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{при} \quad x < x_0. \end{cases} \tag{6}$$

Данные соотношения совпадают с двойным неравенством (4) в теореме 3.1, если в левом из неравенств положить $x_2 = x,\ x_1 = x_0$, а в правом – $x_2 = x_0,\ x_1 = x$.

Достаточность. Предположим, что выполнено (5) или, что то же самое, неравенства (6). Соотношения (6) влекут выполнение двойного неравенства (4), которое, в свою очередь, влечет за собой $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. Это означает, что производная f' неубывает, а функция f выпукла вниз. □

§4. Неравенство Иенсена

ТЕОРЕМА 4.1 (неравенство Иенсена[1]). *Пусть f – выпуклая вниз на (a, b) функция и пусть*

$x_1, \ldots, x_n \in (a, b), \quad \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1.$

Тогда

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

Доказательство. При $n = 2$ утверждение совпадает с определением выпуклой вниз функции. Предположим, что неравенство справедливо для $n - 1$, и, для определенности, что $\alpha_n \neq 0$. Выберем число $\beta = \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$. Тогда

$$\frac{\alpha_2}{\beta} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta} = 1.$$

Пользуясь выпуклостью вниз, получаем

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = f\left(\alpha_1 x_1 + \beta\left(\frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n\right)\right) \leq$$

$$\leq \alpha_1 f(x_1) + \beta f\left(\frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta} x_n\right) \leq$$

$$\leq \alpha_1 f(x_1) + \beta\left(\frac{\alpha_2}{\beta} f(x_2) + \ldots + \frac{\alpha_n}{\beta} f(x_n)\right).$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. Найти соответствующее неравенство для выпуклой вверх функции.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Определить условия, при которых неравенство Иенсена обращается в равенство.

[1] Иенсен Иоганн Людвиг (8.5.1859-5.3.1925). Профессор Копенгагенского университета.

§5. Замечания о построении графика функции

Часто при изучении той или иной функции, достаточно ограничиться эскизом ее графика. Однако в ответственных случаях, требуется более подробное исследование. Имеется несколько отличающихся друг от друга схем построения графиков. Мы предлагаем здесь схему, заимствованную из "Сборника задач и упражнений по математическому анализу" Б.П. Демидовича.

Для построения графика функции $y = f(x)$ необходимо:
1. определить область существования данной функции и исследовать поведение функции в граничных точках последней;
2. выяснить симметрии графика, периодичность;
3. найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности;
4. определить нули функции и области постоянства знака;
5. найти точки экстремума и описать промежутки возрастания и убывания функции;
6. определить точки перегиба и указать промежутки вогнутости определенного знака функции;
7. найти асимптоты в случае их существования;
8. указать те или иные специфические особенности графика.

В частных случаях общая схема упрощается. Полезно использовать простейшие преобразования графиков известных функций, такие как сдвиг, сжатие, растяжение, симметричное отображение, известные еще из школьного курса математики. Для более подробного изучения данной темы, мы можем рекомендовать книгу Р.Б. Райхмиста "Графики функций", в которой содержится достаточно большое количество полезных примеров.

Глава 8

Неопределенный интеграл

§1. Понятие неопределенного интеграла

Основная задача дифференциального исчисления состоит в нахождении производной или дифференциала данной функции. Интегральное исчисление решает обратную задачу: по заданной производной или дифференциалу неизвестной функции требуется определить эту функцию.

Пусть f — функция, определенная на $\langle a, b\rangle$, где $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$. Говорят, что функция F является *первообразной* по отношению к f, если $F'(x) = f(x)$ для всех x из промежутка $\langle a, b\rangle$.

ПРИМЕР 1. Функции $F_1(x) = \ln x$ и $F_2(x) = \ln 3x - 1$ являются первообразными по отношению к функции $f(x) = 1/x$ на $(0, +\infty)$. А функции $F_1(x) = \ln |x|$ и $F_2(x) = \ln 3|x| - 1$ являются первообразными по отношению к функции $f(x) = 1/x$ на $(-\infty, 0)$. □

Операция нахождения первообразной по данной функции называется *интегрированием.* Операция интегрирования в отличие от операции дифференцирования многозначна. В самом деле, если

$$F'(x) = f(x),$$

то

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Оказывается этим исчерпывается множество всех первообразных для функции $f(x)$. Иными словами, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть F_1, F_2 – первообразные по отношению к функции f на $\langle a, b\rangle$. Тогда существует постоянная C такая, что $F_1(x) - F_2(x) = C$ для всех $x \in \langle a, b\rangle$.*

Доказательство. Так как F_1 и F_2 являются первообразными по отношению к одной и той же функции, то

$(F_1(x) - F_2(x))' = 0$ на $\langle a, b\rangle$. Но, как было доказано ранее, если производная функции равна нулю всюду на $\langle a, b\rangle$, то функция тождественно постоянна на данном промежутке. Следовательно, существует постоянная C, для которой $F_1(x) - F_2(x) = C$ при всех x из $\langle a, b\rangle$. □

ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях теоремы важно, что область определения состоит из одного, а не из нескольких связных промежутков. Функции $y = \ln|x|$ и $y = \ln|x| + \mathrm{sgn} x$ имеют производную $1/x$ на множестве $\mathbf{R} \setminus \{0\} = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Однако, их разность равна $\mathrm{sgn}\, x$, что, очевидно, не есть постоянная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Совокупность всех первообразных F по отношению к f на $\langle a, b\rangle$ называется *неопределенным интегралом* от f на $\langle a, b\rangle$ и обозначается

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C.$$

Операция нахождения неопределенного интеграла, также как и первообразной, называется *интегрированием.*

ТЕОРЕМА 1.2. *Справедливы соотношения:*

a. $d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx;$

b. $\int dF(x) = F(x) + C;$

c. $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx;$

d. $\int (c\, f(x))\, dx = c \int f(x)\, dx, \quad c = \mathrm{const}.$

Доказательство. Первые два свойства означают, что символы d и $\int$ взаимно уничтожаются. Эти утверждения — непосредственные следствия определений дифференциала и интеграла. Докажем свойство *c*. Пусть F — первообразная по отношению к f, G — первообразная по отношению к g на $\langle a, b\rangle$. Тогда функция $F \pm G$ является первообразной по отношению к $f \pm g$, что следует из свойств производных суммы и разности.

Докажем свойство *d*. Пусть F — первообразная по отношению к f. Тогда функция $c\,F$ является первообразной по отношению к $c\, f$, поскольку $(c\,F)' = c\,F' = c\, f$. □

§2. Замена переменной в неопределенном интеграле

ТЕОРЕМА 2.1. *Если $y = \varphi(x)$ — дифференцируема и определена сложная функция $f(\varphi(x))$, то*

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy.$$

При этом, если существует один из этих интегралов, то существует и другой.

Доказательство. Пусть F — произвольная первообразная по отношению к f. Требуется проверить равенство

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + C.$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$(F(\varphi(x)) + C)' = F'(\varphi(x))\,\varphi'(x) = f(\varphi(x))\,\varphi'(x),$$

что и требуется. □

ПРИМЕР 1. Вычислим

$$\int \frac{xdx}{x^2 + a}.$$

Сделаем подстановку

$$y = x^2 + a = \varphi(x) \quad dy = 2x\,dx = \varphi'(x).$$

Тогда имеем

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2 + a} = \frac{1}{2}\int \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|y| + C = \frac{1}{2}\ \ln\ |x^2 + a| + C\,.$$

□

ПРИМЕР 2. (1650)(Здесь и ниже в скобках приводится нумерация заданий в книге Б.П. Демидовича "Сборник задач и упражнений по математическому анализу"). Находим интеграл

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin\ x}{\cos\ x}\,dx = \left|\begin{array}{rcl} \cos x & = & y \\ -\sin x dx & = & dy \end{array}\right| =$$

$$= -\int \frac{-\sin x\,dx}{\cos\,x} = -\int \frac{dy}{y} =$$
$$= -\ln\,|y| + C = -\ln\,\cos\,x + C.$$

□

ПРИМЕР 3. (1703) Находим интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1-\cos^2 x} = \left|\begin{array}{rcl} \cos x & = & y \\ -\sin x dx & = & dy \end{array}\right| =$$
$$= -\int \frac{dy}{1-y^2} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C.$$

□

ПРИМЕР 4. Находим интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \left|\begin{array}{rcl} y & = & \operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} \\ x & = & a\operatorname{tg} y \\ dx & = & \dfrac{a\,dy}{\cos^2 y} \end{array}\right| =$$
$$= a\int \frac{dy}{(a^2\operatorname{tg}^2 y + a^2)^{3/2}\cos^2 y} = \frac{1}{a^2}\int \cos y\,dy = \frac{1}{a^2}\sin y + C =$$
$$= \frac{1}{a^2}\sin(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}) + C = \frac{1}{a^2}\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x/a)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x/a)}} + C =$$
$$= \frac{1}{a^2}\frac{x/a}{\sqrt{1+(x/a)^2}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} + C.$$

□

§3. Интегрирование по частям

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые функции и пусть существует неопределенный интеграл от $v(x)\,u'(x)$. Тогда существует неопределенный интеграл от $u(x)\,v'(x)$, причем*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx \qquad (1)$$

или, кратко,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Доказательство. Так как функции u и v дифференцируемы, то по правилу дифференцирования произведения имеет место равенство
$$d(uv) = vdu + udv,$$
и, поэтому,
$$udv = d(uv) - vdu.$$
Интеграл от каждого слагаемого правой части существует, так как
$$\int d(uv) = uv + C,$$
а интеграл $\int vdu$ существует по условию теоремы. Поэтому существует и интеграл $\int udv$, причем выполнено равенство
$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$
то есть равенство (1) доказано. □

ПРИМЕР 1. (1798) Мы имеем
$$\int x\cos x dx = \int x d(\sin x) = x\sin x - \int \sin x dx =$$
$$= x\sin x + \cos x + C.$$
□

ПРИМЕР 2. Вычислить
$$\int x^\alpha \ln x\, dx.$$
Случай $\alpha = -1$. Мы имеем
$$\int x^\alpha \ln\, x\, dx = \int \ln x \frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{ccc} \ln x & = & y \\ \frac{dx}{x} & = & dy \end{array} \right| = \int ydy =$$
$$= \frac{y^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$
Случай $\alpha \neq -1$. Здесь имеем
$$\int x^\alpha \ln x dx = \frac{1}{\alpha+1}\int \ln x dx^{\alpha+1} = \frac{x^{\alpha+1}\ln x}{\alpha+1} -$$
$$- \frac{1}{\alpha+1}\int x^{\alpha+1}\frac{dx}{x} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C.$$
□

ПРИМЕР 3. Интегрируя по частям, находим

$$\int \sin^2 x\,dx = -\int \sin x\,d\cos x = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx =$$

$$= -\sin x\cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx = -\sin x\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx.$$

Таким образом,

$$\int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2} + C.$$

Аналогично,

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x d\sin x = \sin x\cos x + \int \sin^2 x\,dx =$$

$$= \sin x\cos x + \left(-\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2}\right) + C.$$

Отсюда приходим к формуле

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x\cos x + C.$$

□

ПРИМЕР 4. Обнаружить неточности в следующей цепи рассуждений: интегрируя по частям в интеграле

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \left\{\begin{array}{cc} u = \frac{1}{\sin x}, & dv = \cos x \\ du = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx, & v = \sin x \end{array}\right\}$$

будем иметь

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \frac{1}{\sin x}\cdot\sin x + \int \sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx =$$

$$= 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx, \qquad (2)$$

откуда $0 = 1$.

Решение. Неопределенный интеграл представляет собой некоторое множество функций, а именно, множество первообразных. Таким образом, равенство (2) является равенством двух **множеств** функций и останется верным, если константу 1 заменить на любую другую константу, например, на π. Итак, в приведенном в данном примере рассуждении были неверно взаимно уничтожены множества.

□

§4. Простые дроби и их интегрирование

Простыми дробями называются выражения следующих четырех типов

$$I)\,\frac{A}{x-a},\ II)\,\frac{A}{(x-a)^m},\ III)\,\frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ IV)\,\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}.$$

Здесь $m = 2, 3, \dots,\quad A, M, N, a, p, q \in \mathbf{R}$, и квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет вещественных корней, т.е. $p^2-4q < 0$.

Рассмотрим каждый из типов в отдельности.

Берем интеграл вида I:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

Находим интегралы вида II:

$$\int \frac{A}{(x-a)^m}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \frac{A}{-m+1}\frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C.$$

Вычисляем интегралы вида III:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \left|\begin{array}{rcl} x^2+px+q & = & (x+p/2)^2 - p^2/4 + q \\ x+p/2 & = & y \\ dx & = & dy \\ -p^2/4+q & = & a^2, a>0 \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{M(y-p/2)+N}{y^2+a^2}\,dy = \int \frac{My}{y^2+a^2}dy + \int \frac{N-M(p/2)}{y^2+a^2}\,dy =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(y^2+a^2)}{y^2+a^2} + (N-M(p/2))\frac{1}{a}\int \frac{d(y/a)}{(y/a)^2+1} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(y^2+a^2) + \frac{1}{a}(N-M(p/2))\mathrm{arctg}\frac{y}{a} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{1}{\sqrt{q-p^2/4}}(N-M(p/2))\mathrm{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C.$$

Вычисляем интегралы вида IV:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}\,dx = \left|\begin{array}{rcl} x & = & y-p/2 \\ x^2+px+q & = & y^2+a^2 \\ dx & = & dy \\ a & = & \sqrt{q-p^2/4} \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{M(y-p/2)+N}{(y^2+a^2)^m}\,dy = M\int \frac{y\,dy}{(y^2+a^2)^m} +$$

$$+(N-M(p/2))\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^m}\equiv M\,I_m+(N-M(p/2))\,J_m.$$

Находим I_m:

$$I_m=\frac{1}{2}\int\frac{d(y^2+a^2)}{(y^2+a^2)^m}=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^m}=\frac{-1}{2(m-1)}z^{-m+1}+C=$$

$$=\frac{-1}{2(m-1)}(x^2+px+q)^{-m+1}+C.$$

Находим J_m:

$$J_m=\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^m}=\left|\begin{array}{lcl} u & = & \frac{1}{(y^2+a^2)^m} \\ v & = & y\end{array}\right|=\frac{y}{(y^2+a^2)^m}+$$

$$+2m\int\frac{y^2dy}{(y^2+a^2)^{m+1}}=\frac{y}{(y^2+a^2)^m}+2m\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^m}-$$

$$-2ma^2\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^{m+1}}.$$

Мы получили рекуррентную формулу

$$2ma^2J_{m+1}=\frac{y}{(y^2+a^2)^m}+(2m-1)J_m,$$

пользуясь которой для вычисления J_m мы можем спуститься от индекса m к индексу $m-1$ и т.д. вплоть до J_1 (интеграл J_1 мы вычислили ранее). Следовательно, интегралы вида IV можно также эффективно вычислять, причем результат записывается через рациональную функцию и арктангенс.

§5. Разложение правильных дробей на простые

Приведем специальный прием разложения правильных дробей на простые, называемый методом неопределенных коэффициентов.

Пусть дана произвольная рациональная функция вида

$$R(x)=\frac{x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}.$$

Если $m<n$, то данная функция называется *правильной дробью.* Если $m\geq n$, то, разделив числитель на знаменатель (по известному правилу), добьемся того, чтобы функция $R(x)$ представлялась в виде

$$R(x)=P(x)+R_1(x),$$

где $P(x)$ — многочлен и $R_1(x) = \varphi(x)/\psi(x)$ — правильная дробь. Таким образом, интегрирование произвольной рациональной функции сводится к интегрированию простых дробей.

ТЕОРЕМА 5.1. *Каждая правильная дробь может быть единственным образом представлена в виде суммы простых дробей.*

Мы не будем доказывать теорему 5.1; ее доказательство опирается на основную теорему алгебры, согласно которой всякий многочлен степени n имеет ровно n корней, вообще говоря комплексных. В частности, **каждый многочлен с действительными коэффициентами может быть записан в виде произведения линейных и квадратичных многочленов** (также с вещественными коэффициентами). Данная теорема говорит о возможности разложения, однако для многочленов степени $n \geq 5$ общих правил для нахождения таких разложений не существует. Существуют явные формулы для нахождения корней уравнений 3 и 4 степени (формулы Кардано[1]). Вместе с тем доказано, что уравнение 5-ой степени (и выше), вообще говоря, в явном виде не разрешимо (Абель[2]).

Если принять теорему 5.1, то из нее и результатов предыдущего пункта вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2. *Неопределенный интеграл от любой рациональной функции выражается в конечном виде — с помощью рациональной же функции, логарифма и арктангенса.*

Таким образом, первый и самый трудный шаг в разложении правильной дроби на простейшие дроби состоит в разложении ее знаменателя $\psi(x)$ на множители, каждый из которых является либо степенью функции $x - a$, либо степенью квадратичной функции $x^2 + px + q$, не имеющей действительных корней. Иными словами, мы должны найти разложение

$$\psi(x) = (x - a_1)^{\nu_1}(x - a_2)^{\nu_2} \ldots (x - a_k)^{\nu_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{\mu_1}\cdot$$

$$\cdot(x^2 + p_2x + q_2)^{\mu_2} \ldots (x^2 + p_lx + q_l)^{\mu_l},$$

где $\nu_1 + \cdots + \nu_k + 2\mu_1 + \cdots + 2\mu_l$ – степень многочлена $\psi(x)$. Если такое разложение найдено, то имеется алгоритм для пред-

[1]Кардано Иеронимус (24.9.1501-21.9.1576) – математик, философ и врач. Род. в Павии (Италия). Профессор математики в Милане и Болонье.

[2]Абель Нильс Хенрик (5.8.1802-6.4.1829). Род. близ Ставангера (Норвегия). Один из создателей теории эллиптических и гиперэллиптических функций. Основатель общей теории интегралов алгебраических функций.

ставления правильной дроби

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

в виде суммы простейших (так называемый "метод неопределенных коэффициентов"). В основе данного метода лежит следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.3. *Пусть* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *– правильная рациональная дробь,* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *– многочлены с действительными коэффициентами. Если*

$$\psi(x) = (x-a_1)^{\nu_1}(x-a_2)^{\nu_2}\dots(x-a_k)^{\nu_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdot$$
$$\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{\mu_2}\dots(x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l},$$

где a_i *– попарно различные действительные корни многочлена* $\psi(x)$ *кратности* ν_i, $i=1,\dots,k$, $x^2+p_jx+q_j = (x-z_j)(x-\overline{z_j})$, z_j *и* $\overline{z_j}$ *– попарно различные при различных* j *существенно комплексные корни многочлена* $\psi(x)$ *кратности* μ_j, *то существуют действительные числа* $A_i^{(\nu)}$, $i=1,\dots,k$, $\nu=1,\dots,\nu_i$, *а также* $M_j^{(\mu)}$ *и* $N_j^{(\mu)}$, $j = 1,\dots,l$, $\mu=1,\dots,\mu_j$, *такие, что*

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)^{\nu_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{(x-a_1)^{\nu_1-1}} + \dots + \frac{A_1^{(\nu_1)}}{(x-a_1)} + \dots +$$
$$+\frac{A_k^{(1)}}{(x-a_k)^{\nu_k}} + \frac{A_k^{(2)}}{(x-a_k)^{\nu_k-1}} + \dots + \frac{A_k^{(\nu_k)}}{(x-a_k)} +$$
$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}} + \frac{M_1^{(2)}x+N_1^{(2)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1-1}} + \dots + \frac{M_1^{(\mu_1)}x+N_1^{(\mu_1)}}{(x^2+p_1x+q_1)} +$$
$$+\dots+\frac{M_l^{(1)}x+N_l^{(1)}}{(x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l}} + \frac{M_l^{(2)}x+N_l^{(2)}}{(x^2+p_lx+q_l)^{\mu_l-1}} + \dots + \frac{M_l^{(\mu_l)}x+N_l^{(\mu_l)}}{(x^2+p_lx+q_l)}.$$

Данное утверждение мы доказывать не будем (доказательство можно найти, например, в книге Л.Д.Кудрявцева "Курс математического анализа", т.1, 1988, стр.531), но проиллюстрируем применение метода на примерах.

Отметим два полезных разложения

$$x^4-1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

и

$$x^4+1 = (x^2+1-x\sqrt{2})(x^2+1+x\sqrt{2}).$$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим правильную дробь

$$\frac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^4(x+1)^2}.$$

Множители x и $(x+1)$ входят в знаменатель дроби соответственно в степенях 4 и 2. Поэтому, если разложение данной дроби на сумму простых дробей существует, то знаменатели этих дробей могут иметь вид x^4, x^3, x^2, x, $(x+1)^2$, $(x+1)$ и никакой другой. Поскольку множители x и $(x+1)$ линейны, а не квадратичны, числители соответствующих им дробей являются постоянными. Следовательно, по теореме 5.1 существуют такие числа A, B, C, D, E, F, что дробь равна

$$\frac{A}{x^4} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x} + \frac{E}{(x+1)^2} + \frac{F}{x+1}.$$

Эти коэффициенты мы пока не знаем — они являются неопределенными. Приводя к общему знаменателю, получаем

$$\frac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^4(x+1)^2} =$$

$$= \frac{A(x+1)^2 + B(x+1)^2 x + C(x+1)^2 x^2 + D(x+1)^2 x^3 + Ex^4 + Fx^4(x+1)}{x^4(x+1)^2}.$$

Приравнивая числители, находим

$$x^4 + x^2 + 2x + 1 =$$

$$= (D+F)x^5 + (C + 2D + E + F)x^4 + (B + 2C + D)x^3 +$$

$$+ (A + 2B + C)x^2 + (2A + B)x + A.$$

Отсюда получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} D + F = 0 \\ C + 2D + E + F = 1 \\ B + 2C + D = 0 \\ A + 2B + C = 1 \\ 2A + B = 2 \\ A = 1 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 1$ и $F = 0$. Таким образом, получаем разложение

$$\frac{x^4 + x^2 + 2x + 1}{x^4(x+1)^2} = \frac{1}{x^4} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

□

ПРИМЕР 2. Пусть дана правильная дробь

$$\frac{2x^3}{x^4-1}$$

и требуется разложить ее на сумму простейших.

Мы имеем

$$\frac{2x^3}{x^4-1} = \frac{2x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Далее,

$$2x^3 = (A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+A-B-D$$

и

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ A-B+D=0 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=0 \end{cases}.$$

Решая данную систему, находим $A = B = 1/2$, $C = 1, D = 0$. Следовательно,

$$\frac{2x^3}{x^4-1} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{x}{x^2+1}.$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. Представить в виде суммы простых дробей следующие дроби

$$\frac{x^4+2x^2+x+1}{(x+1)^3}, \quad \frac{1}{x^4+1}.$$

§6. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}\right) dx.$$

Здесь $a, b, c, d = \mathrm{const}$ – произвольные числа, такие, что $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$, n – целое положительное и $R(\xi, \eta)$ – рациональная функция двух переменных (т.е. отношение двух многочленов от двух переменных).

Сделаем подстановку

$$t = \sqrt[n]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}.$$

Тогда

$$t^n = \frac{a\,x+b}{c\,x+d}, \quad x = \frac{dt^n - b}{a - c\,t^n}, \quad dx = \frac{(a\,d-b\,c)\cdot n\,t^{n-1}}{(a-c\,t^n)^2}\,dt,$$

и

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{a\,x+b}{c\,x+d}}\right)dx =$$

$$= \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-c\,t^n}, t\right)\frac{(a\,d-b\,c)\cdot n\,t^{n-1}}{(a-c\,t^n)^2}\,dt.$$

Поскольку композиция рациональных функций является, опять же, рациональной функцией, то интеграл в правой части есть интеграл от рациональной дроби.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Самостоятельно рассмотреть случай $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

ПРИМЕР 1. Найдем интеграл

$$I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\frac{dx}{1-x}.$$

Мы имеем

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad t^2 = \frac{1+x}{1-x}, \quad t^2 - t^2\,x = 1+x,$$

$$t^2-1 = (t^2+1)\,x, \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{2t(t^2+1)-2t(t^2-1)}{(t^2+1)^2},$$

$$dx = \frac{4tdt}{(t^2+1)^2}.$$

Отсюда получаем

$$I = \int \frac{t\cdot 4t}{(t^2+1)^2}\cdot\left(1-\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^{-1}dt = \int\frac{4t^2}{(t^2+1)\cdot 2}dt =$$

$$= 2\int\frac{t^2+1-1}{(t^2+1)}dt = 2t - 2\mathrm{arctg}t + C.$$

Далее необходимо вернуться к переменной x (сделайте это самостоятельно!).

$\square$

Изучим интеграл общего вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx.$$

Пусть m – общий знаменатель чисел $r_1, ..., r_s$. Тогда $r_i = \frac{p_i}{m}$ (p_i – целое). Выполним замену переменной

$$t^m = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Мы получаем

$$\int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, ..., t^{p_s}\right) \cdot \left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}\right)' dt = \int R^*(t) dt,$$

где

$$R^*(t) = R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, ..., t^{p_s}\right) \cdot \left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}\right)'$$

– рациональная функция переменной t. Таким образом, вычисление данного интеграла также сводится к интегрированию рациональных дробей.

ПРИМЕР 2. (2129) Возьмем интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

Сделаем подстановку $x = t^6$. Тогда $dx = 6t^5\, dt$ и, далее,

$$\int \frac{6t^5\, dt}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3\, dt}{t+1} = 6\int \frac{t^3 + 1 - 1}{t+1} dt =$$

$$= 6\left[\int (t^2 - t + 1)\, dt - \int \frac{dt}{t+1}\right] =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C.$$

□

§7. Подстановки Эйлера

Изучим интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx, \tag{1}$$

где $R(x,t)$ – рациональная функция переменных x и t.

Предполагается, что многочлен $ax^2+bx+c \geq 0$ не имеет равных корней, поскольку в противном случае имеем ранее изученный случай.

I-я подстановка. Пусть $a \geq 0$. Следуя теории Эйлера, полагаем

$$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = t - \sqrt{a}\,x$$

(можно $\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = t + \sqrt{a}\,x$, что иногда бывает удобнее).

Возводя обе части равенства в квадрат, находим

$$a\,x^2+b\,x+c = t^2 - 2\sqrt{a}\,t\,x + a\,x^2.$$

Далее,

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}\,t+b}, \qquad dx =$$

$$= \frac{2t\,dt\,(b+2\sqrt{a}t) - (t^2-c)2\sqrt{a}\,dt}{(b+2\sqrt{a}\,t)^2} = 2\frac{\sqrt{a}\,t^2+b\,t+c\,\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}\,t+b)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = t - \sqrt{a}\,\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}\,t}.$$

Тем самым, интеграл (1) преобразуется к виду

$$\int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, t-\sqrt{a}\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}\right) 2\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt,$$

т.е. мы получили интеграл от рациональной функции.

II-я подстановка. Пусть $c > 0$. Мы полагаем

$$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = x\,t + \sqrt{c}$$

(или $\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = x\,t - \sqrt{c}$) и, далее,

$$a\,x^2+b\,x+c = x^2\,t^2 + 2x\,t\sqrt{c} + c,$$

$$x = \frac{-2t\sqrt{c}+b}{t^2-a}, \quad dx = 2\frac{\sqrt{c}\,t^2-b\,t+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{a\,x^2+b\,x+c} = -t\,\frac{2t\sqrt{c}-b}{t^2-a} + \sqrt{c}.$$

Тем самым, интеграл (1) преобразуется к интегралу от рациональной функции.

III-я подстановка. Пусть

$$a\,x^2 + b\,x + c = a(x-\lambda)(x-\mu),$$

где λ и μ – вещественные числа. Положим

$$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = t\,(x-\lambda).$$

Тогда

$$a\,x^2 + b\,x + c = t^2\,(x-\lambda)^2$$

и

$$a\,(x-\lambda)(x-\mu) = t^2\,(x-\lambda)^2,$$

$$x = -\frac{a\,\mu - t^2\,\lambda}{t^2 - a}, \quad dx = \frac{2a\,(\mu-\ \lambda)t}{(t^2-a)^2}\,dt,$$

$$\sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} = \frac{a\,(\lambda-\mu)}{t^2-a}\,t.$$

Тем самым, интеграл (1) также преобразуется к интералу от рациональной функции.

Покажем, что I-й и III-й подстановок достаточно для сведения интеграла (1) к интегралу от рациональной функции во всех 3-х случаях.

Действительно, если $a\,x^2 + b\,x + c$ имеет вещественные корни, то выполняется подстановка III, если же вещественных корней нет, то $D = b^2 - 4a\,c < 0$ и потому

$$a\,x^2 + b\,x + c = \frac{1}{4a}(4a^2\,x^2 + 4a\,b\,x + 4a\,c) =$$

$$= \frac{1}{4a}\left[(2a\,x + b)^2 + (4a\,c - b^2)\right] > 0.$$

Выражение в квадратных скобках положительно и потому $a > 0$. Следовательно, возможна I-я подстановка.

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 7.1. *Интегралы вида (1) посредством подстановок Эйлера*[3] *сводятся к интегралам от рациональной функции и потому всегда выражаются в элементарных функциях.*

ПРИМЕР 1. Возьмем интеграл

$$I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

[3] Эйлер Леонард (15.4.1707-18.9.1783) – математик, физик, механик и астроном. Род. в Швейцарии. Работал в Петербурге, Берлине. Автор более 865 исследований.

Сделаем подстановку

$$t - x = \sqrt{x^2 - x + 1}, \quad x = \frac{t^2 - 1}{2t - 1},$$

$$dx = 2\frac{t^2 - t + 1}{(2t - 1)^2}\,dt.$$

Тогда

$$I = 2\int \frac{t^2 - t + 1}{t(2t - 1)^2}\,dt.$$

Далее,

$$\frac{t^2 - t + 1}{t(2t - 1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{2t - 1} + \frac{C}{(2t - 1)^2},$$

и

$$t^2 - t + 1 = t^2(4A + 2B) + t(-4A - B + C) + A.$$

Тем самым, приходим к системе

$$\begin{cases} 4A + 2B = 1, \\ -4A - B + C = -1, \\ A = 1, \end{cases}$$

откуда определяем коэффициенты

$$A = 1, \quad B = -3/2, \quad C = 3/2.$$

Таким образом, находим

$$\frac{t^2 - t + 1}{t(2t - 1)^2} = \frac{1}{t} - \frac{3}{2\,(2t - 1)} + \frac{3}{2\,(2t - 1)^2}.$$

Отсюда,

$$I = 2\int \frac{dt}{t} - 3\int \frac{dt}{2t - 1} + 3\int \frac{dt}{(2t - 1)^2} =$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t - 1| - \frac{3}{2(2t - 1)} + C_1 =$$

$$= 2\ln|x + \sqrt{x^2 - x + 1}| - \frac{3}{2}\ln|2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1| -$$

$$-\frac{3}{2}\frac{1}{2x + 2\sqrt{x^2 - x + 1} - 1} + C_1.$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. Используя III-ю подстановку, найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \lambda^2}}.$$

Сравнить результат с табличным интегралом.

§8. Интегрирование тригонометрических выражений. Универсальная подстановка

Изучим интеграл
$$\int R(\cos x, \sin x)\, dx, \tag{1}$$
где $R(u, v)$ — рациональная функция двух переменных. Сделаем подстановку
$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$
Тогда имеем
$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2\,t}{1+t^2},$$
$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$
Таким образом, приходим к утверждению.

ТЕОРЕМА 8.1. *Интегралы вида (1) с помощью универсальной подстановки $t = \operatorname{tg}(x/2)$ приводятся к интегралам от рациональной функции и, следовательно, берутся в элементарных функциях.*

ПРИМЕР 1. (1754) Найдем интеграл
$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$
Сделаем подстановку $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Имеем
$$\sin^2 x = \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}, \qquad \cos^2 x = \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$
Отсюда,
$$I = \int \frac{(1+t^2)^4 2\,dt}{4t^2\,(1-t^2)^2\,(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+t^2)^3}{t^2\,(1-t^2)^2}\,dt.$$
Далее работаем методом неопределенных коэффициентов. А можно поступить проще. Именно,
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

□

Вывод. Универсальная подстановка (как и всё универсальное!) бывает неоптимальной.

§9. Замечания об эллиптических интегралах

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d})\,dx,$$

$$\int R(x, \sqrt{a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e})\,dx, \tag{1}$$

где $R(u, v)$ – рациональная функция двух переменных, называются *эллиптическими*. Они возникают, в частности, в связи с вычислением длины дуги эллипса. Как правило, данные интегралы в элементарных функциях не выражаются. В специальных случаях, когда интегралы вида (1) берутся в элементарных функциях, эти интегралы называются *псевдоэллиптическими*.

ТЕОРЕМА 9.1. *Все эллиптические интегралы с помощью элементарных подстановок и с точностью до слагаемых, выражающихся в элементарных функциях, приводятся к следующим трём стандартным интегралам*

$$\int \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad \int \frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$\int \frac{dt}{(1+kt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad 0 < k < 1.$$

Эти интегралы называются, соответственно, эллиптическими интегралами I-го, II-го и III-го рода в смысле Лежандра.

Имеется ряд других интегралов, про которые точно известно, что они в элементарных функциях не выражаются.

Например,

$\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона,

$\int \cos x^2\,dx, \quad \int \sin x^2\,dx$ – интегралы Френеля,

$\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм,

$\displaystyle\int \frac{\cos x}{x}\,dx, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx$ – интегральные косинус и синус.

Для всех перечисленных функций имеются специальные таблицы. Эти функции изучены столь же полно, как и элементарные.

§10. Биномиальные дифференциалы. Теорема Чебышева

Рассмотрим интеграл

$$I = \int x^m \,(a + b\,x^n)^p \,dx, \tag{1}$$

где a, b — произвольные, отличные от нуля числа, а m, n, p — рациональные числа. Подынтегральное выражение (1) называется *биномиальным дифференциалом.*

Выясним случай, когда данный интеграл берется в элементарных функциях. Сделаем подстановку

$$x^n = t, \qquad dx = \frac{1}{n}\,t^{\frac{1-n}{n}}\,dt.$$

Тогда интеграл (1) предобразуется к виду

$$I = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m-n+1}{n}}\,(a + b\,t)^p\,dt.$$

Положим $(m-n+1)/n = q$. Задача об отыскании интеграла (1) сводится к нахождению интеграла вида

$$J = \int t^q\,(a + b\,t)^p\,dt, \tag{2}$$

где p, q – рациональные числа.

ТЕОРЕМА 10.1 (Чебышев[4]). *Интеграл (2) берется в элементарных функциях тогда и только тогда, когда хотя бы одно из чисел p, q или $p+q$ является целым.*

[4]Чебышев Пафнутий Львович (16.5.1821-8.12.1894) – математик и механик. Род. в Окатово (ныне Калужская обл., Россия). Один из основателей петербургской математической школы. Член Берлинской (1871), Болонской (1873), Парижской (1874), Шведской (1893) АН, член Лондонского королевского общества (1877). Автор ряда работ по теории чисел, теории вероятностей, теории приближения функций, интегральному исчислению и т.д.

Доказательство. Мы докажем лишь часть теоремы, показав, что в случае, когда одно из чисел p, q или $p+q$ — целое, интеграл (2) сводится к интегралу от рациональной функции. Оставшаяся часть теоремы очень сложна и требует привлечения методов алгебры, которые нам пока недоступны.

Итак, пусть p — *целое*. Поскольку q — рационально, то оно представимо в виде несократимой дроби α/β, где α и β — целые. Сделаем подстановку

$$t = u^{\beta}, \quad dt = \beta u^{\beta-1}\, du\,.$$

Тогда

$$J = \beta \int u^{\alpha}\,(a + bu^{\beta})^{p}\, u^{\beta-1}\, du,$$

и мы получили интеграл от рациональной функции.

Пусть q – *целое*. Здесь имеем $p = \alpha/\beta$, где α и β – целые. Возможна подстановка

$$t = \frac{1}{b}\,(u^{\beta} - a), \quad dt = \frac{\beta}{b}\, u^{\beta-1}\, du\,,$$

и мы приходим к интегралу от рациональной функции

$$J = \frac{\beta}{b} \int \frac{1}{b^{q}}\,(u^{\beta} - a)^{q}\, u^{\alpha}\, u^{\beta-1}\, du\,.$$

Пусть $(p+q)$ — *целое*. В этом случае

$$J = \int t^{p+q}\, \left(\frac{a}{t} + b\right)^{p}\, dt\,,$$

где

$$p = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \left(\frac{a}{t} + b\right)^{1/\beta} = u\,.$$

После подстановки

$$t = \frac{a}{u^{\beta} - b}, \quad dt = -\frac{\beta\, a\, u^{\beta-1}}{(u^{\beta} - b)^{2}}\, du$$

также приходим к интегралу от рациональной функции

$$J = -\beta\, a \int \frac{a^{p+q}}{(u^{\beta} - b)^{p+q}}\, u^{\alpha}\, \frac{u^{\beta-1}}{(u^{\beta} - b)^{2}}\, du\,.$$

$\square$

ПРИМЕР 1. Вычислим интеграл

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

Мы имеем

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx = \left| \begin{array}{rcl} x^{\frac{1}{4}} & = & t \\ x & = & t^4 \\ dx & = & 4t^3\, dt \end{array} \right| =$$

$$= \int t^{-2}(1+t)^{\frac{1}{3}} 4t^3 dt = 4\int t(1+t)^{\frac{1}{3}} dt = \left| \begin{array}{rcl} u & = & (1+t)^{\frac{1}{3}} \\ t & = & u^3 - 1 \\ dt & = & 3u^2\, du \end{array} \right| =$$

$$= 12 \int (u^3 - 1)\, u^3\, du = \frac{12}{7}\, u^7 - 3u^4 + C =$$

$$= \frac{12}{7}(1+t)^{\frac{7}{3}} - 3(1+t)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{12}{7}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{7}{3}} - 3(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{4}{3}} + C.$$

□

ПРИМЕР 2. (1986) Вычислим интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

Выполнив подстановку

$$x^4 = t, \quad x = t^{\frac{1}{4}}, \quad dx = \frac{1}{4}\, t^{-\frac{3}{4}}\, dt,$$

получаем

$$I = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{1}{4} \int t^{-\frac{3}{4}}\, (1+t)^{-\frac{1}{4}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{4} \int t^{-1} \left(\frac{1}{t} + 1\right)^{-\frac{1}{4}} dt = \left| \begin{array}{rcl} u & = & \left(\frac{1}{t} + 1\right)^{-\frac{1}{4}} \\ t & = & \frac{u^4}{1-u^4} \\ dt & = & \frac{4u^3}{(1-u^4)^2}\, du \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(1-u^4)u^4}{u^4\,(1-u^4)^2}\, du = \int \frac{du}{1-u^4}.$$

Раскладываем на сумму простых дробей. Имеем

$$\frac{1}{1-u^4} = \frac{1}{(1-u)(1+u)(1+u^2)} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{Cu+D}{1+u^2}$$

и, далее,

$$1 = u^3(A-B-C) + u^2(A+B-D) + u(A-B+C) + A+B+D.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A-B-C=0\\ A+B-D=0\\ A-B+C=0\\ A+B+D=1,\end{cases}$$

находим $A=B=1/4$, $C=0$ и $D=1/2$.

Таким образом, получаем

$$I=\int\left(\frac{1}{4(1-u)}+\frac{1}{4(1+u)}+\frac{1}{2(1+u^2)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\ln|1-u|+\ln|1+u|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}u\right)+C_1=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\ln\left|1-(1/t+1)^{-1/4}\right|+\ln\left|1+(1/t+1)^{-1/4}\right|+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(1/t+1)^{-1/4}\right)+C_1=\frac{1}{4}\left(-\ln\left|1-\left(1/x^4+1\right)^{-1/4}\right|+\right.$$

$$\left.+\ln\left|1+\left(1/x^4+1\right)^{-1/4}\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(1/x^4+1\right)^{-1/4}\right)+C_1.$$

□

§11. Метод Остроградского выделения рациональной части интеграла

Пусть $P(x)/Q(x)$ – правильная несократимая дробь и пусть ее знаменатель $Q(x)$ разложен на простые сомножители, т.е.

$$Q(x)=(x-a)^k\ldots(x^2+px+q)^m\ldots. \tag{1}$$

Тогда интеграл от этой дроби представим в виде суммы интегралов от простых дробей. Именно,

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx+\cdots+\int\frac{M\,x+N}{(x^2+p\,x+q)^m}\,dx+\ldots.$$

Если $k>1$, то

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}\,dx=-\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C. \tag{2}$$

Если $m>1$, то на основании рекуррентной формулы

$$\int\frac{M\,x+N}{(x^2+p\,x+q)^m}\,dx=\frac{M'x+N'}{(x^2+p\,x+q)^{m-1}}+$$

$$+\alpha\int\frac{dx}{(x^2+p\,x+q)^{m-1}}=\frac{M'x+N'}{(x^2+p\,x+q)^{m-1}}+\frac{M''x+N''}{(x^2+p\,x+q)^{m-2}}+$$

$$+\beta\int\frac{dx}{(x^2+p\,x+q)^{m-2}}=\dots=\frac{M'x+N'}{(x^2+p\,x+q)^{m-1}}+$$

$$+\frac{M''x+N''}{(x^2+p\,x+q)^{m-2}}+\dots+\lambda\int\frac{dx}{x^2+p\,x+q},$$

имеем

$$\int\frac{M\,x+N}{(x^2+p\,x+q)^m}\,dx=$$

$$=\frac{R(x)}{(x^2+p\,x+q)^{m-1}}+\lambda\int\frac{dx}{x^2+p\,x+q}. \qquad (3)$$

Здесь $R(x)$ – многочлен степени более низкой, чем знаменатель, и λ – постоянная. Таким образом, на основании (2) и (3) мы можем записать

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx=\left[\text{слагаемые вида }\frac{A}{(x-a)^{k-1}}\right]+$$

$$+\left[\text{слагаемые вида }\frac{R(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}}\right]+$$

$$+\left[\text{интегралы вида }\int\frac{A}{x-a}dx\right]+$$

$$+\left[\text{интегралы вида }\int\frac{\gamma dx}{x^2+px+q}\right].$$

Объединяя теперь однотипные слагаемые, выводим следующую формулу, впервые найденную Остроградским[5]

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx. \qquad (4)$$

Так как рациональная часть интеграла $P_1(x)/Q_1(x)$ получена от сложения выделенных рациональных частей, то она является правильной дробью со знаменателем

$$Q_1(x)=(x-a)^{k-1}\dots(x^2+px+q)^{m-1}\dots.$$

[5]Остроградский Михаил Васильевич (24.9.1801-1.1.1862). Род. в с. Пашенная (ныне Полтавская обл., Украина). Один из основателей петербургской математической школы. Член Петербургской АН (1830), Парижской АН (1856) и др. Автор ряда исследований в области математики и механики, дифференциального и интегрального исчисления, высшей алгебры, геометрии, теории чисел, математической физики и др.

Дробь $P_2(x)/Q_2(x)$, стоящая под знаком интеграла, получена от сложения дробей вида $1/(x-a)^{\cdots}$ и $1/(x^2+px+q)^{\cdots}$, а потому

$$Q_2(x) = (x-a)\dots(x^2+px+q)\dots .$$

В силу разложения (1), имеем

$$Q(x) = Q_1(x)\,Q_2(x). \tag{5}$$

С другой стороны, дифференцируя равенство (4), можно записать

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left[\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\right]' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}. \tag{6}$$

Мы видим, что многочлены $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ легко вычисляются, если известно разложение (1) многочлена $Q(x)$.

Перейдем к методу нахождения числителя в формуле (6). Пусть n, n_1, n_2 — степени многочленов Q, Q_1, Q_2 соответственно. Ясно, что $n = n_1 + n_2$. Степени многочленов P, P_1, P_2 не будут превышать $n-1$, n_1-1, n_2-1. Подставим в качестве P_1 и P_2 многочлены степени n_1-1 и n_2-1 с буквенными коэффициентами. Имеем

$$P_1 = a_1x^{n_1-1} + a_2x^{n_1-2} + \dots + a_{n_1-1}x + a_{n_1},$$

$$P_2 = b_1x^{n_2-1} + b_2x^{n_2-2} + \dots + b_{n_2-1}x + b_{n_2}.$$

Всего неизвестных a_k и b_k ровно $n_1+n_2=n$. Выполним в (6) дифференцирование

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} + \frac{P_2}{Q_2}. \tag{7}$$

Заметим, что

$$\frac{P_1'Q_1 - P_1Q_1'}{Q_1^2} = \frac{P_1'Q_2 - P_1H}{Q_1Q_2}, \quad H = \frac{Q_1'Q_2}{Q_1}. \tag{8}$$

Далее заметим, что H является целым многочленом. Действительно, если выражение $(x-a)^k$, $k \ge 1$, входит множителем в Q_1, то $(x-a)^{k-1}$ входит в Q_1', а $(x-a)$ — в Q_2. Аналогично с множителем $(x^2+px+q)^m$ при $m \ge 1$.

Таким образом, можно считать, что H — целый многочлен степени n_2-1. Подставляя (8) в (7), приходим к соотношению

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1'Q_2 - P_1H}{Q} + \frac{P_2Q_1}{Q_1Q_2}$$

или, отбрасывая знаменатель,

$$P = P_1'\,Q_2 - P_1H + P_2\,Q_1. \tag{9}$$

Приравнивая коэффициенты этих многочленов, получим n линейных уравнений для определения a_k и b_k. Так как существование соотношения (6) доказано, то система (9) должна быть разрешимой.

ПРИМЕР 1. Выделить рациональную часть интеграла

$$\int \frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx.$$

Мы имеем

$$Q_2=(x+1)(x^2+1)=Q_1=x^3+x^2+x+1.$$

Значит, в силу (6),

$$\frac{4x^4+4x^3+16x^2+12x+8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}=\left[\frac{ax^2+bx+c}{x^3+x^2+x+1}\right]'+$$

$$+\frac{dx^2+ex+f}{x^3+x^2+x+1}$$

и, далее,

$$4x^4+4x^3+16x^2+12x+8=(2ax+b)(x^3+x^2+x+1)-$$

$$-(ax^2+bx+c)(3x^2+2x+1)+(dx^2+ex+f)(x^3+x^2+x+1).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. Находим

$$\begin{array}{rl} d=0 & \qquad d=0\\ -a+d+e=4 & \qquad c=-4\\ -2b+d+e+f=4 & \qquad b=1\\ a-b-3c+d+e+f=16 & \qquad a=-1\\ 2a-2c+e+f=12 & \qquad e=3\\ b-c+f=8 & \qquad f=3. \end{array}$$

Таким образом, окончательно получаем

$$\int \frac{4\,x^4+4\,x^3+16\,x^2+12\,x+8}{(x+1)^2\,(x^2+1)^2}\,dx=\frac{-x^2+x-4}{(x+1)\,(x^2+1)}+$$

$$+3\operatorname{arctg}x+C.$$

□

Глава 9

Определенный интеграл

§1. Понятие определенного интеграла

Пусть f – функция, определенная на $[a,b]$. Произвольный упорядоченный набор точек

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = b$$

назовем *разбиением* T_n отрезка $[a,b]$ на отрезки $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$[1] или просто разбиением T_n. Наибольшую из длин $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ отрезков $[x_i,x_{i+1}]$ назовем *мелкостью* разбиения T_n и обозначим через $\mu(T_n)$. Другими словами,

$$\mu(T_n) = \max_{0\leq i\leq n-1} \Delta x_i.$$

Если на каждом из отрезков $[x_i,x_{i+1}]$ разбиения T_n выбрано по точке $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, то полученный объект будем называть *разбиением с отмеченными точками* отрезка $[a,b]$ и обозначать $\dot{T}_n$. Величина

$$S(\dot{T}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$$

называется *интегральной суммой Римана*[2], соответствующей разбиению с отмеченными точками $\dot{T}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Если существует конечный предел

$$\lim_{\mu(T_n)\to 0} S(\dot{T}_n), \tag{1}$$

не зависящий от выбора последовательности разбиений $\{\dot{T}_n\}$ с мелкостью $\mu(T_n) \to 0$, то этот предел называется *определе-*

[1] всего n отрезков

[2] Риман Георг Фридрих Бернхард (17.9.1826-30.7.1866). Род. в Нижней Саксонии (Германия). Автор ряда значительных исследований в области теории функций комплексного переменного, математической физике, топологии, геометрии и др.

ленным интегралом[3] от функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Функции, для которых указанный предел существует, называются интегрируемыми (по Риману) на отрезке $[a, b]$.

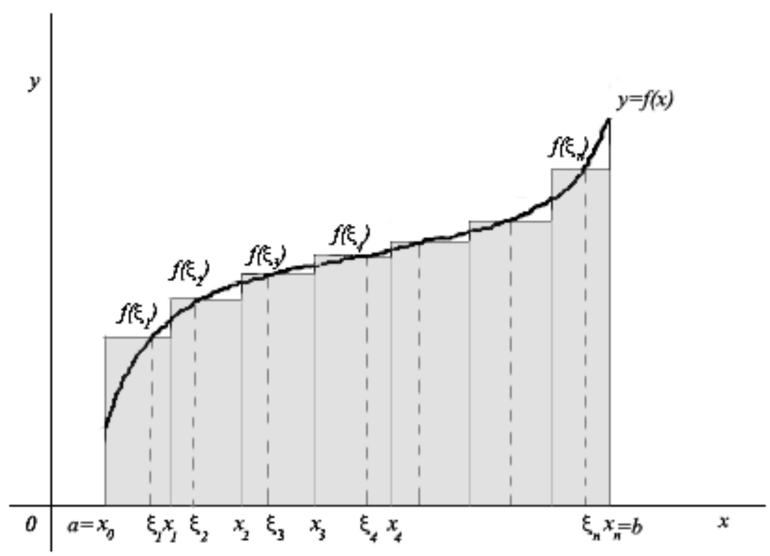
УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулировать, что означает запись (1) "на языке" последовательностей и "на языке" $\varepsilon - \delta$.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказать, что данные определения предела интегральных сумм эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ. В определении интегральных сумм Римана мы можем переобозначить отмеченные точки ξ_i так, что $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, где $i = \overline{1, n}$. Аналогично можно положить $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ для $i = 1, ..., n$. При этом

$$S(\dot{T}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

§2. Геометрический смысл определенного интеграла



[3]точнее, определенным интегралом Римана

Пусть задана непрерывная и неотрицательная функция $f(x)$. Тогда

$$S(\dot{T}_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$$

– площадь ступенчатой фигуры. При измельчении разбиения ступенчатая фигура все лучше и лучше аппроксимирует криволинейную трапецию так, что $\lim\limits_{\mu(T_n)\to 0} S(\dot{T}_n)$ — площадь криволинейной трапеции[4].

Если f отрицательна, то величина интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

совпадает с площадью криволинейной трапеции, взятой со знаком минус. В общем случае, если f меняет знак, то этот интеграл равен сумме взятых с соответствующими знаками площадей криволинейных трапеций.

§3. Физический смысл определенного интеграла

Предположим, что тело движется прямолинейно и его ускорение, как функция времени t, подсчитывается по формуле $a = a(t)$. Определим скорость тела $v = v(t)$ в момент времени $t > 0$, зная, что $v(0) = v_0$. Устроим разбиение T_n отрезка $[0, t]$. На каждом из отрезков $[t_i, t_{i+1}]$ можно приближенно принять ускорение постоянным и равным $a(\xi_i)$. Тогда за промежуток времени от $t = t_i$ до $t = t_{i+1}$ скорость v получит приращение, приближенно равное

$$a(\xi_i)(t_{i+1} - t_i) = a(\xi_i)\Delta t_i,$$

а за все время от 0 до t имеем

$$v(t) - v(0) \approx \sum_{i=0}^{n-1} a(\xi_i)\,\Delta t_i,$$

т.е. $v(t) - v(0) \approx S(\dot{T}_n)$. Переходя к пределу, находим

$$v(t) - v(0) = \lim_{\mu(T_n)\to 0} S(\dot{T}_n) = \int_0^t a(\tau)\,d\tau,$$

[4]Точное определение понятия площади фигуры будет приведено ниже (Глава 11. Приложения определенного интеграла).

т.е.

$$v(t) = \int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau + v(0). \tag{1}$$

Здесь τ – "немая" переменная, т.е. переменная, которую можно записать любым другим символом или буквой за исключением v, a, t – уже используемых.

Аналогично, по известной мгновенной скорости $v(t)$ мы всегда можем определить путь, пройденный телом за промежуток времени $[0,t]$, по формуле

$$S(t) = \int\limits_0^t v(x)\,dx. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) имеют важные применения в технических конструкциях. Рассмотрим следующий известный пример.

ПРИМЕР 1. Представим себе полностью закрытый, без окон, объект, движущийся по прямой. Находящийся внутри объекта наблюдатель должен определить пройденное расстояние с помощью измерений и вычислений, выполненных внутри объекта без каких-либо контактов с внешним миром.

Если объект движется с постоянной скоростью, то наблюдатель не замечает движения и не имеет возможности обнаружить движение никакими механическими опытами. Это есть классический *принцип относительности* Галилея.[5]

В то же время каждый из нас, хотя бы раз ездивший в трамвае, знает, что ускорение можно определять, не глядя в окно. К примеру, пружина с жестко закрепленным одним из концов, расположенная внутри объекта по ходу направления движения, при ускорениях сжимается либо растягивается. Таким образом, наблюдатель, находящийся внутри объекта, может определять ускорение $a(t)$ в момент времени t посредством измерений длины пружины.

Допустим, что в начальный момент времени объект находился в состоянии покоя, т.е. $v(0) = 0$. Зная ускорение $a(t)$, по формулам (1), (2) можно вычислять скорость $v(t)$ и путь $S(t)$, пройденный за время t, т.е. наблюдатель может определять свое положение в любой момент времени.

[5]Равномерное движение не может быть обнаружено никакими опытами внутри объекта, связанными с электромагнитными явлениями, например, распространением света. Это — *принцип относительности Эйнштейна.*
Галилей Галилео (15.2.1564–8.1.1642) – физик, механик, астроном и математик. Род. в Пизе (Италия). Один из основателей точного естествознания.
Эйнштейн Альберт (14.3.1879–18.4.1955) – физик и математик. Род. в Ульме (Германия). Создатель спец. теории относительности, общей теории относительности, квантовой концепции света, автор работ по теории броуновского движения и др.

Описываемая ситуация не является плодом фантазий. К примеру, она встречается в случае атомных подводных лодок, остающихся в погруженном состоянии весьма длительное время, в случае ракет и т.п. Основная идея принципа инерциальной навигации состоит в том, что по измеряемому ускорению, путем его интегрирования, находятся скорость и положение объекта. Интегрирование производится с помощью специального прибора, называемого — интегратор. □

§4. Пример неинтегрируемой по Риману функции

Рассмотрим функцию Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ x \text{ – рациональное,} \\ 0, & \text{если } \ x \text{ – иррациональное.} \end{cases}$$

Докажем, что при любых $a < b$ интеграл

$$\int_a^b D(x)\,dx$$

не существует. Пусть T_n – произвольное разбиение $[a, b]$. Так как точки ξ_i выбираются произвольно, то сначала выберем их рациональными, а потом иррациональными. В первом случае интегральные суммы имеют вид

$$S(\dot{T}_n) = \sum_{i=0}^{n-1} D(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_i = b - a,$$

во втором —

$$S(\dot{T}_n') = \sum_{i=0}^{n-1} D(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Ясно, что даже сколь угодно измельчая отрезок $[a, b]$, мы не можем добиться того, чтобы $S(\dot{T}_n)$ и $S(\dot{T}_n')$ стремились к одному и тому же пределу. Таким образом, функция Дирихле не интегрируема по Риману.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Как "устроен" график функции Дирихле $y = D(x)$? Является ли данная функция кусочно-непрерывной?

§5. Ограниченность интегрируемых по Риману функций

ТЕОРЕМА 5.1. *Если f интегрируема по Риману на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Так как функция f интегрируема на $[a,b]$, то существует

$$\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Предположим, что f неограничена на $[a,b]$. Выберем $\varepsilon = 1$. Из интегрируемости f следует, что существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что для любого разбиения T с мелкостью $\mu(T) < \delta(\varepsilon)$ будет выполнено

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i - \int\limits_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon = 1. \tag{1}$$

Так как f неограничена на $[a,b]$, то она неограничена хотя бы на одном из отрезков $[x_j, x_{j+1}]$. Тогда на этом отрезке существует последовательность точек $\xi_j^m \in [x_j, x_{j+1}]$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} f(\xi_j^m) = \infty.$$

Зафиксирует теперь каким-либо образом точки $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, j-1,\ j+1, \ldots, n-1$. Выбирая m достаточно большим, мы можем добиться того, чтобы сумма

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=0}^{j-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i + f(\xi_j^m)\,\Delta x_j + \sum_{i=j+1}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

была сколь угодно большой. Последнее противоречит неравенству (1). □

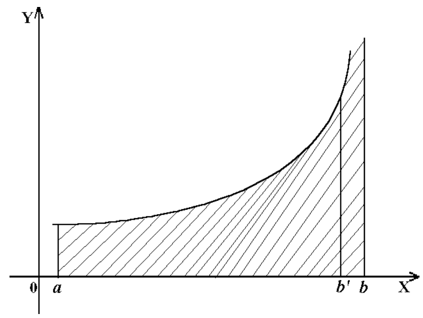
ЗАМЕЧАНИЕ. Пример функции Дирихле показывает, что условия ограниченности функции недостаточно для ее интегрируемости по Риману.

§6. Понятие несобственного интеграла

Как поступить, если требуется определить интеграл от функции f, однако функция в окрестности одного из концов $[a,b]$, например в окрестности b, принимает сколь угодно большое значение? На рисунке ниже заштрихованная фигура неограничена, однако может иметь конечную площадь.

Предположим, что f интегрируема по Риману на всяком меньшем отрезке $[a,b']$, $a < b' < b$. По определению полагаем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b-0} \int_a^{b'} f(x)\,dx.$$



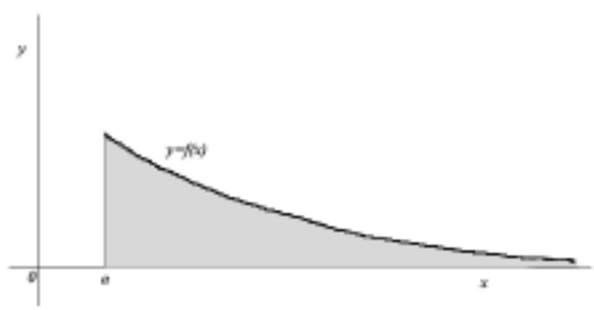
Интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

называется *несобственным* (обозначение то же, что и у интеграла Римана).

Аналогично поступаем и в случае, когда необходимо найти интеграл по бесконечному промежутку, например по $[a, +\infty)$. Здесь полагаем

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$



Определение несобственного интеграла для случаев, когда f неограничена в окрестности внутренней точки отрезка, либо когда требуется вычислить интеграл по (a, b), или по $(-\infty, +\infty)$, будут введены позже в теории несобственного интеграла.

§7. Суммы Дарбу, их геометрический смысл. Верхний и нижний интегралы Дарбу

Пусть f – ограниченная на $[a, b]$ функция, T_n – разбиение отрезка $[a, b]$. Положим

$$m_i = \inf\{f(x) :\ x \in [x_i, x_{i+1}]\}, M_i = \sup\{f(x) :\ x \in [x_i, x_{i+1}]\}.$$

Величины

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \quad \text{и} \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

называются соответственно *нижней и верхней суммами Дарбу*.

ЛЕММА 7.1. *Для всякого разбиения T отрезка $[a, b]$ верхняя сумма Дарбу не меньше нижней, т.е.*

$$s(T) \le S(T).$$

Доказательство. Так как $m_i \le M_i$ $(i = 1, \dots, n)$, то

$$s(T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \, \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} M_i \, \Delta x_i = S(T).$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть T' и T'' – произвольные разбиения $[a, b]$. Говорят, что разбиение T'' следует за разбиением T', если все точки деления T' являются одновременно и точками деления разбиения T''.

ЛЕММА 7.2. *Если разбиение T'' следует за T', то*

$$s(T') \le s(T'') \quad \text{и} \quad S(T'') \le S(T').$$

Доказательство. Докажем первое из неравенств. Предположим, что разбиение T'' получено из T' добавлением одной точки деления $x' \in [x_k, x_{k+1}]$. Тогда имеем

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \le \inf_{x \in [x_k, x']} f(x) = \widetilde{m}_k,$$

и

$$m_k = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x) \le \inf_{x \in [x', x_{k+1}]} f(x) = \widetilde{\widetilde{m}}_k.$$

Перепишем нижнюю сумму Дарбу, соответствующую разбиению T', в виде

$$s(T') = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \, (x_{i+1} - x_i) + m_k \, (x_{k+1} - x_k) + \sum_{i=k+1}^{n-1} m_i \, (x_{i+1} - x_i).$$

Замечая, что

$$m_k\,(x_{k+1}-x_k) = m_k\,(x'-x_k) + m_k\,(x_{k+1}-x') \le$$

$$\le \widetilde{m}_k\,(x'-x_k) + \widetilde{\widetilde{m}}_k\,(x_{k+1}-x'),$$

приходим к неравенству

$$s(T') \le \sum_{i=0}^{k-1} m_i\,(x_{i+1}-x_i) + \widetilde{m}_k\,(x'-x_k) +$$

$$+\,\widetilde{\widetilde{m}}_k\,(x_{k+1}-x') + \sum_{i=k+1}^{n-1} m_i\,(x_{i+1}-x_i) = s(T'').$$

Для верхней суммы Дарбу доказательство аналогично. □

ЛЕММА 7.3. *Для произвольных разбиений T' и T'' отрезка $[a,b]$ выполнено*

$$s(T') \le S(T'').$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение T, полученное объединением точек деления T' и T''. Ясно, что разбиение T следует и за T', и за T''. Из леммы 7.2 следует, что

$$s(T') \le s(T), \qquad S(T'') \ge S(T).$$

С другой стороны, на основании леммы 7.1 всегда выполнено $s(T) \le S(T)$. Поэтому мы получаем

$$s(T') \le s(T) \le S(T) \le S(T'').$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Величины

$$\sup_T s(T) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{I} \quad \text{и} \quad \inf_T S(T) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{I}$$

называются, соответственно, *нижним и верхним интегралами Дарбу.*

Из леммы 7.3 вытекает, что для всякой ограниченной функции множество всех ее верхних сумм Дарбу $\{S(T)\}$ ограничено снизу, а множество всех нижних сумм $\{s(T)\}$ — сверху. Таким образом, верхний и нижний интегралы Дарбу определены, по крайней мере, для ограниченных функций. С другой стороны, ясно, что если функция неограничена на отрезке, то по крайней мере один из ее интегралов Дарбу — верхний или нижний — обращается в бесконечность.

ЛЕММА 7.4. *Для всех f, заданных на $[a,b]$, справедливо неравенство*

$$\underline{I} \le \overline{I}.$$

Доказательство. Действительно, поскольку для любых разбиений T', T'' отрезка выполнено $s(T') \le S(T'')$, то

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{T'} s(T') \le S(T'') \quad \forall\, T''.$$

Переходя в этом неравенстве к точной нижней грани по T'', находим

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \inf_{T''} S(T'') = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{I}.$$

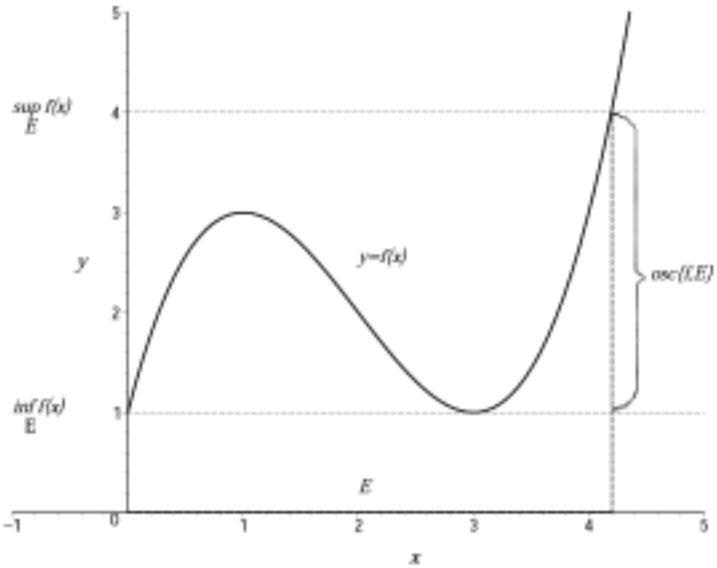
$\square$

§8. Теорема Дарбу

Предположим, что функция f определена и ограничена на множестве $E \subset \mathbf{R}$. Величина

$$\operatorname{osc}\{f, E\} = \sup_E f(x) - \inf_E f(x)$$

называется *колебанием* (или *осциляцией*) функции f на множестве E.



ЛЕММА 8.1. *Пусть f – ограниченная на $[a,b]$ функция, T – разбиение отрезка $[a,b]$, T' – разбиение $[a,b]$, следующее за разбиением T и полученное из T добавлением m новых внутренних точек деления. Тогда*

$$s(T') - s(T) \le m\,\Omega\,\mu(T) \tag{1}$$

и

$$S(T) - S(T') \le m\,\Omega\,\mu(T), \tag{2}$$

где Ω – колебание f на $[a,b]$ и $\mu(T)$ – мелкость разбиения T.

Доказательство. Докажем лишь (1), поскольку доказательство (2) аналогично. Ограничимся случаем, когда T' получается из T добавлением одной точки деления x'. (Общий случай, применяя метод математической индукции, рассмотрите самостоятельно!). Предположим, что $x' \in [x_k, x_{k+1}]$. Тогда

$$m_k\,(x_{k+1} - x_k) \le \widetilde{m}_k\,(x' - x_k) + \widetilde{\widetilde{m}}_k\,(x_{k+1} - x'), \tag{3}$$

где величины m_k, $\widetilde{m}_k \ge m_k$, $\widetilde{\widetilde{m}}_k \ge m_k$ были определены в предыдущем разделе.

В силу (3), имеем

$$s(T') - s(T) = \widetilde{m}_k\,(x' - x_k) + \widetilde{\widetilde{m}}_k\,(x_{k+1} - x') - m_k(x_{k+1} - x_k) =$$

$$= (\widetilde{m}_k - m_k)\,(x' - x_k) + (\widetilde{\widetilde{m}}_k - m_k)\,(x_{k+1} - x').$$

Однако, как легко видеть,

$$0 \le \widetilde{m}_k - m_k \le \Omega, \quad 0 \le \widetilde{\widetilde{m}}_k - m_k \le \Omega,$$

а потому
$$s(T')-s(T) \le \Omega\,(x'-x_k)+\Omega\,(x_{k+1}-x') = \Omega\,(x_{k+1}-x_k) \le \Omega\,\mu(T).$$

□

ТЕОРЕМА 8.1 (Дарбу). *Пусть f – ограниченная на $[a,b]$ функция. Тогда существуют пределы верхней и нижней сумм Дарбу при $\mu(T)\to 0$, причем*

$$\lim_{\mu(T)\to 0} s(T) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{I}, \quad \lim_{\mu(T)\to 0} S(T) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{I}.$$

Доказательство. Докажем первое из утверждений. Так как
$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_T s(T),$$
то $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ разбиение T_ε такое, что
$$s(T_\varepsilon) \le \underline{I} \le s(T_\epsilon) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$
Предположим, что разбиение T_ε содержит $m \ge 1$ точек деления. Положим
$$\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2m\Omega}, \quad \Omega = \operatorname{osc}\{f;[a,b]\}.$$
(Мы вправе считать, что $\Omega > 0$, поскольку из равенства $\Omega = 0$ следует, что $f \equiv \mathrm{const}$ и утверждение очевидно).

Пусть T – разбиение, для которого $\mu(T) < \delta(\varepsilon)$, а T' – разбиение, полученное из T добавлением точек деления T_ε. Тогда справедливо $s(T_\varepsilon) \le s(T')$, и на основании (4) находим
$$\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} \le s(T') \le \underline{I}. \tag{5}$$
По лемме 8.1 выполнено
$$0 \le s(T') - s(T) \le m\,\Omega\,\mu(T). \tag{6}$$
Пользуясь теперь (5) и (6), получаем
$$0 \le \underline{I} - s(T) = \underline{I} - s(T') + s(T') - s(T) \le \frac{\varepsilon}{2} + m\,\Omega\,\mu(T) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \Omega\,m\,\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon\,\Omega\,m}{2\,\Omega\,m} = \varepsilon.$$

□

§9. Критерий интегрируемости функции по Риману

ТЕОРЕМА 9.1. *Для того, чтобы ограниченная на $[a, b]$ функция f была интегрируемой по Риману, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{I}.$$

Доказательство. Достаточность. Предположим, что

$$\underline{I} = \overline{I} = I,$$

и покажем, что для всякой последовательности разбиений с отмеченными точками $\dot{T}_n$ такой, что $\mu(T_n) \to 0$, суммы Римана $S(\dot{T}_n) \to I$. Здесь T_n – разбиение (без отмеченных точек), соответствующее разбиению $\dot{T}_n$. Так как $\mu(T_n) \to 0$, то, по предположению,

$$s(T_n) \to I \quad \text{и} \quad S(T_n) \to I.$$

С другой стороны,

$$s(T_n) \le S(\dot{T}_n) \le S(T_n).$$

Пользуясь принципом "сжатой" последовательности, заключаем, что $S(\dot{T}_n) \to I$.

Необходимость. Предположим, что f интегрируема по Риману. Нужно доказать, что $\underline{I} = \overline{I}$.

Так как f интегрируема, то $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\ \dot{T}_n$ с $\mu(T_n) < \delta(\varepsilon)$ выполнено

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon,$$

где

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Отсюда имеем

$$I - \varepsilon < \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i < I + \varepsilon.$$

Переходя в двойном неравенстве к точной верхней и точной нижней граням по всем $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n-1$, получаем

$$I - \varepsilon \le \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \le I + \varepsilon,$$

где m_i и M_i – соответственно точные нижняя и верхняя грани f на $[x_i, x_{i+1}]$.

Таким образом, $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\ T_n$ с $\mu(T_n) < \delta(\varepsilon)$ выполнено

$$|I - s(T_n)| \le \varepsilon \quad \text{и} \quad |I - S(T_n)| \le \varepsilon. \tag{1}$$

Следовательно,

$$s(T_n) \to I \quad \text{и} \quad S(T_n) \to I.$$

По теореме Дарбу получаем нужное. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что из неравенств (1) следует утверждение:*если функция f интегрируема по Риману, то* $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists\ \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для всех разбиений T с $\mu(T) < \delta(\varepsilon)$ выполнено* $|S(T) - s(T)| < \varepsilon$.

СЛЕДСТВИЕ. Для того, чтобы функция f была интегрируемой по Риману на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало разбиение T отрезка $[a, b]$ такое, что $S(T) - s(T) < \varepsilon$.

Доказательство. Достаточность. В силу определений верхнего и нижнего интегралов Дарбу, для произвольного разбиения T справедливо

$$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le S(T) - s(T).$$

Тем самым, по предположению,

$$0 \le \overline{I} - \underline{I} \le \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что $\overline{I} = \underline{I}$, и по критерию интегрируемости заключаем, что функция f интегрируема.

Необходимость. Смотри замечание. □

§10. Классы интегрируемых функций

10.1. Интегрируемость непрерывных функций

ТЕОРЕМА 10.1. *Всякая непрерывная на отрезке функция интегрируема по Риману.*

Доказательство. Пусть f – произвольная непрерывная на $[a, b]$ функция. По теореме Кантора f равномерно непрерывна на $[a, b]$, т.е. для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек x', $x'' \in [a, b]$ и $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$ выполнено $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Выберем разбиение T отрезка $[a, b]$ с мелкостью $\mu(T) < \delta(\varepsilon)$. На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ выполнено

$$-\varepsilon < f(x') - f(x'') < \varepsilon \quad \forall\ x',\, x'' \in [x_i, x_{i+1}].$$

Переходя в этом неравенстве к точной верхней грани по $x' \in [x_i, x_{i+1}]$ и, далее, к точной нижней грани по $x'' \in [x_i, x_{i+1}]$, получаем $M_i - m_i \le \varepsilon$. Здесь, как и выше, m_i и M_i суть точные нижняя и верхняя грани f на $[x_i, x_{i+1}]$ соответственно. Тогда

$$S(T) - s(T) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\, \Delta x_i \le \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon\, (b - a).$$

Пользуясь следствием из критерия интегрируемости, получаем нужное. $\square$

10.2. Интегрируемость кусочно-непрерывных функций

ТЕОРЕМА 10.2. *Всякая ограниченная на отрезке функция, имеющая конечное число точек разрыва, интегрируема по Риману на этом отрезке.*

Доказательство. Если функция f является тождественной константой, то утверждение теоремы очевидно справедливо. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, в котором функция f отлична от тождественной постоянной и имеет на $[a, b]$ одну единственную точку разрыва. Обозначим через Ω – колебание f на $[a, b]$. Ясно, что $0 < \Omega < \infty$. (Почему?)

Пусть $c \in [a, b]$ – точка разрыва функции f. Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем точки c' и c'' так, чтобы

$$c' < c < c'', \quad c'' - c' < \varepsilon/(3\Omega).$$

Функция f непрерывна на $[a, c']$ и $[c'', b]$. Рассуждая как при доказательстве предыдущей теоремы, найдем разбиение T' отрезка $[a, c']$ и разбиение T'' отрезка $[c'', b]$ такие, что $S(T') - s(T') < \varepsilon/3$ и $S(T'') - s(T'') < \varepsilon/3$.

Пусть T – разбиение, состоящее из точек разбиения T', точек c', c'' и точек разбиения T''. Тогда выполнено

$$S(T) - s(T) = S(T') - s(T') + S(T'') - s(T'') + (\widetilde{M} - \widetilde{m})\,(c'' - c') \le$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \Omega\,(c'' - c') \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Здесь $\widetilde{M} = \sup\{f(x) : x \in [c', c'']\}$, а $\widetilde{m} = \inf\{f(x) : x \in [c', c'']\}$. Пользуясь следствием из критерия интегрируемости, получаем нужное. □

10.3. Интегрируемость монотонных функций

ТЕОРЕМА 10.3. *Всякая монотонная на отрезке функция интегрируема по Риману на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть f – произвольная неубывающая на $[a, b]$ функция. Зададим $\varepsilon > 0$ и устроим разбиение T отрезка $[a, b]$ на n равных промежутков так, чтобы длина каждого из них была не более ε. Тогда в обозначениях предыдущего пункта выполнено

$$S(T) - s(T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,\Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} m_i\,\Delta x_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1}) - f(x_i)) =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \cdots + \right.$$

$$\left. + f(b) - f(x_{n-1})\right] = \frac{b-a}{n}\left[f(b) - f(a)\right],$$

т.е.

$$S(T) - s(T) \leq \varepsilon\,(f(b) - f(a)).$$

Пользуясь следствием из критерия интегрируемости, заключаем, что f интегрируема по Риману на $[a, b]$. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Всякая кусочно-непрерывная на $[a, b]$ функция имеет конечное число точек разрыва. Легко видеть, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = 0 \\ 1/n & \text{при} \quad x \in (1/(n+1), 1/n] \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

неубывает на $[0, 1]$ и имеет бесконечное число точек разрыва.

Таким образом, монотонные функции могут не входить в класс кусочно-непрерывных функций. Поэтому доказанная в данном пункте теорема не вытекает из предыдущей.

Глава 10

Свойства интегрируемых функций

§1. Свойства определенного интеграла

1.1. Аддитивность определенного интеграла

ТЕОРЕМА 1.1. *Если f интегрируема на $[a,c]$ и $a<b<c$, то f интегрируема на $[a,b]$ и $[b,c]$. При этом*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx. \tag{1}$$

Обратно, если f интегрируема на $[a,b]$ и $[b,c]$, то она интегрируема на $[a,c]$ и имеет место соотношение (1).

Доказательство. Предположим, что f интегрируема на $[a,c]$. Зададим $\varepsilon>0$. По следствию из критерия интегрируемости существует разбиение T_ε отрезка $[a,c]$ такое, что

$$S(T_\varepsilon) - s(T_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Пусть $x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = c$ – точки деления разбиения T_ε. Предположим, что b попала в отрезок $[x_i, x_{i+1}]$. Рассмотрим разбиения

$$T'_\varepsilon = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_i \le b\} \quad \text{и} \quad T''_\varepsilon = \{b \le x_{i+1} < \cdots \le c\}.$$

Пусть T'''_ε – разбиение, получающееся объединением T'_ε и T''_ε. Тогда справедливо

$$S(T_\varepsilon) - s(T_\varepsilon) \ge S(T'''_\varepsilon) - s(T'''_\varepsilon) =$$

$$= S(T'_\varepsilon) - s(T'_\varepsilon) + S(T''_\varepsilon) - s(T''_\varepsilon) \ge 0,$$

и
$$0 \le S(T'_\varepsilon) - s(T'_\varepsilon) < \varepsilon, \quad 0 \le S(T''_\varepsilon) - s(T''_\varepsilon) < \varepsilon.$$
Тем самым, f интегрируема как на $[a,b]$, так и на $[b,c]$.

Обратно. Пусть f интегрируема на $[a,b]$ и $[b,c]$. Зададим $\varepsilon > 0$. Существуют разбиения T'_ε отрезка $[a,b]$ и T''_ε отрезка $[b,c]$ такие, что
$$S(T'_\varepsilon) - s(T'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad S(T''_\varepsilon) - s(T''_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Объединение T_ε разбиений T'_ε и T''_ε таково, что
$$S(T_\varepsilon) - s(T_\varepsilon) = S(T'_\varepsilon) - s(T'_\varepsilon) + S(T''_\varepsilon) - s(T''_\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Тем самым, f интегрируема на $[a,c]$.

Докажем соотношение (1). Так как f интегрируема на $[a,b]$ и $[b,c]$, то существуют последовательности разбиений с отмеченными точками $\dot{T}'_n$ и $\dot{T}''_n$ отрезков $[a,b]$ и $[b,c]$ соответственно, имеющие мелкости $\mu(\dot{T}'_n) \to 0$, $\mu(\dot{T}''_n) \to 0$ и для которых
$$S(\dot{T}'_n) \to \int\limits_a^b f(x)\,dx \quad \text{и} \quad S(\dot{T}''_n) \to \int\limits_b^c f(x)\,dx.$$
Для разбиения $\dot{T}_n$, полученного объединением разбиений $\dot{T}'_n$ и $\dot{T}''_n$, выполнено
$$S(\dot{T}_n) = S(\dot{T}'_n) + S(\dot{T}''_n) \to \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx. \qquad (2)$$
Поскольку f интегрируема на $[a,c]$ и мелкость
$$\mu(\dot{T}_n) = \max[\mu(\dot{T}'_n), \mu(\dot{T}''_n)] \to 0,$$
то
$$S(\dot{T}_n) \to \int\limits_a^c f(x)\,dx.$$
На основании (2) приходим теперь к равенству (1). □

1.2. Интеграл по ориентированному отрезку

Пусть $a < b$. По определению полагаем
$$\int\limits_b^a f(x)\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Договоримся также считать, что

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Таким образом, определен интеграл по произвольному "ориентированному отрезку"[1] $[a,b]$, где a, b произвольны и могут быть как $a<b$, так и $b \le a$.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть a, b, $c \in \mathbf{R}$ – произвольны. Если существуют два из интегралов*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx, \quad \int\limits_b^c f(x)\,dx, \quad \int\limits_a^c f(x)\,dx,$$

то существует и третий, причем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx.$$

Доказательство. В случае $a<b<c$ это утверждение было доказано выше. В других случаях оно непосредственно следует из определения интеграла по "ориентированному отрезку" (проверить!). Таким образом, данное утверждение справедливо при любых a, b и c. □

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – интегрируемые на $[a,b]$ функции, $c = \mathrm{const}$. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$ и $cf(x)$ также интегрируемые на $[a,b]$, причем*

$$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx,$$

$$\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$$

Здесь a и b любые.

УПРАЖНЕНИЕ 1. *Доказательство* теоремы разобрать самостоятельно. Рассмотреть случай $a<b$, затем произвольные $a \ge b$.

[1]т.е. отрезку, на котором указано направление от одного его конца к другому

§2. Оценки интегралов

Всюду в данном параграфе будем считать, что $a < b$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Если $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$ и интегрируема на $[a, b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Доказательство. Так как $f(x) \geq 0$, то для любого разбиения $\dot{T}$ отрезка $[a, b]$ выполнено

$$S(\dot{T}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при мелкости $\mu(T) \to 0$, получаем нужное. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Следует ли из условий $f(x) \geq 0$ и $f \not\equiv 0$ утверждение

$$\int\limits_a^b f(x)dx > 0.$$

(Ответ: нет.)

ТЕОРЕМА 2.2. *Если f и g интегрируемы по отрезку $[a, b]$ и*

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall\, x \in [a, b],$$

то

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \leq \int\limits_a^b g(x)\, dx.$$

Доказательство. Функция $g - f$ интегрируема. Так как $g(x) - f(x) \geq 0\ \forall\, x \in [a, b]$, то по теореме 2.1 выполнено

$$\int\limits_a^b (g(x) - f(x))\ dx \geq 0.$$

Отсюда,

$$\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

$\square$

ТЕОРЕМА 2.3. *Предположим, что f интегрируема на $[a,b]$ и*

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Тогда

$$m\,(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\,(b-a).$$

Доказательство. Из интегрируемости функции f следует ее ограниченность и, стало быть, существование M и m. Функция $(f-m)$ интегрируема и неотрицательна. Согласно теореме 2.1 будем иметь

$$\int_a^b [f(x)-m]\,dx \geq 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b m\,dx \geq 0.$$

Отсюда,

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq m\,(b-a).$$

Доказательство второго соотношения в двойном неравенстве аналогично.

$\square$

ТЕОРЕМА 2.4. *Если функция f интегрируема на $[a,b]$, то функция $|f|$ также интегрируема, причем*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказательство. Пусть T – произвольное разбиение отрезка $[a,b]$ вида $a = x_0 \leq x_1 \ldots \leq x_n = b$ и g – произвольная функция, определенная на $[a,b]$. Введем обозначения

$$m_i(g) = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} g(x), \quad M_i(g) = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} g(x),$$

и

$$s_g(T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(g)\Delta x_i, \quad S_g(T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(g)\Delta x_i.$$

Для доказательства интегрируемости $|f|$ нам достаточно показать, что по заданному $\varepsilon > 0$ найдется разбиение T отрезка $[a, b]$ такое, что

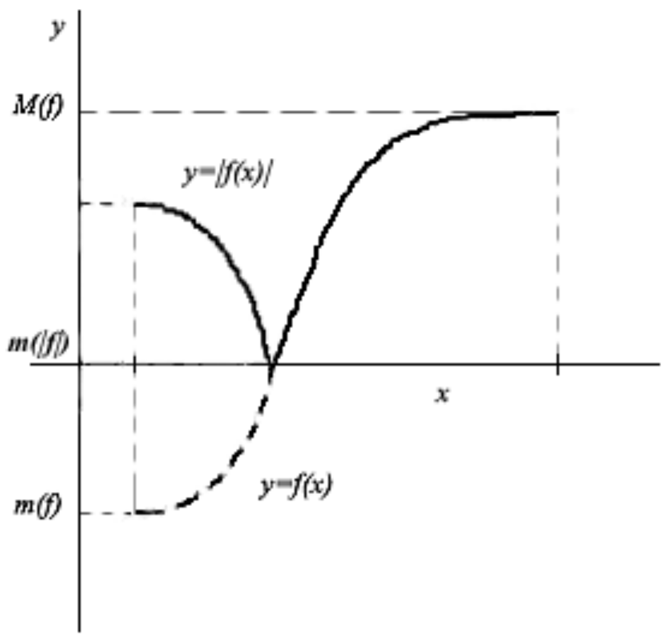
$$S_{|f|}(T) - s_{|f|}(T) \le \varepsilon,$$

или

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(M_i(|f|) - m_i(|f|)\right) \Delta x_i \le \varepsilon.$$

Заметим, что

$$M_i(|f|) - m_i(|f|) \le M_i(f) - m_i(f). \tag{1}$$



УПРАЖНЕНИЕ 2. Докажите неравенство (1).

Из неравенства (1) получаем

$$S_{|f|}(T) - s_{|f|}(T) \le S_f(T) - s_f(T) \quad \forall\, T.$$

Так как f интегрируема на $[a, b]$, то согласно следствия из критерия интегрируемости правая часть данного соотношения может быть сделана сколь угодно малой за счет подходящего выбора разбиения T.

Тем самым, может быть сделана сколь угодно малой и левая часть соотношения. Пользуясь еще раз следствием из критерия интегрируемости, легко заключаем, что $|f|$ также интегрируема по Риману.

Докажем оставшуюся часть теоремы. Для всякого разбиения с отмеченными точками $\dot{T}$ отрезка $[a, b]$ выполнено

$$\left|S_f(\dot{T})\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\;\Delta x_i = S_{|f|}(\dot{T}).$$

Переходя к пределу при мелкости $\mu(\dot{T}) \to 0$, выводим нужное неравенство. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 3. Проверьте, следует ли из интегрируемости функции $|f|$ интегрируемость f? Рассмотрите функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x \text{ – рациональное}, \\ 1, & \text{если} \quad x \text{ – иррациональное}. \end{cases}$$

§3. Теорема о среднем

Всюду в данном параграфе будем предполагать, что $a < b$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a).$$

Доказательство. В соответствии с доказанным выше

$$m\,(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a),$$

где

$$m = \min_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{и} \quad M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Значит,

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Пользуясь теоремой о промежуточном значении непрерывной функции, заключаем о существовании точки $\xi \in [a, b]$ такой, что

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

□

КОНТРПРИМЕР. Приведем пример, показывающий, что условие непрерывности является существенным. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad x \in [0, 1/2], \\ 3 & \text{при} \quad x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Здесь

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{2}.$$

Однако, соотношение $5/2 = f(\xi)$ не выполняется ни при каких значениях ξ.

§4. Обобщенная теорема о среднем

Всюду в данном параграфе будем предполагать, что $a < b$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что функции f и g непрерывны на $[a, b]$, причем g неотрицательна. Тогда существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(\xi)\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. В случае $g \equiv 0$ теорема, очевидно, выполнена. Пусть в дальнейшем $g \not\equiv 0$. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то, по теореме Вейерштрасса, существуют ее минимум и максимум

$$m = \min_{[a,b]} f(x) \quad \text{и} \quad M = \max_{[a,b]} f(x),$$

а потому всюду на $[a, b]$ выполнено

$$m\,g(x) \le f(x)\,g(x) \le M\,g(x).$$

Тем самым,

$$m\int\limits_a^b g(x)\,dx \le \int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx \le M\int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Так как $g \not\equiv 0$, то существует точка x_0 в которой $g(x_0) > 0$. Тогда из непрерывности $g(x)$ следует, что $g(x) > 0$ в некоторой окрестности точки x_0 и, стало быть, выполнено неравенство

$$\int_a^b g(x)\,dx > 0.$$

Таким образом, при $g(x) \not\equiv 0$ выполнено

$$m \leq \frac{\displaystyle\int_a^b g(x)\,f(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx} \leq M.$$

Но $f(x)$ непрерывна, а потому принимает все промежуточные значения между m и M. Таким образом, существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$f(\xi) = \frac{\displaystyle\int_a^b g(x)\,f(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx}.$$

$\square$

§5. Определенный интеграл с переменным верхним пределом

5.1. Непрерывность по верхнему пределу

Пусть f – интегрируемая на $[a,b]$ функция и пусть z – произвольная точка из $[a,b]$. Мы полагаем

$$\Phi(z) = \int\limits_a^z f(x)\,dx.$$

ТЕОРЕМА 5.1. *Если f интегрируема на $[a,b]$, то Φ непрерывна на $[a,b]$.*

Доказательство. Так как функция f интегрируема, то она ограничена на $[a,b]$ и

$$M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| < \infty.$$

Для произвольной пары точек $z' < z''$ из $[a, b]$ мы имеем

$$\Phi(z'') - \Phi(z') = \int_a^{z''} f(x)\,dx - \int_a^{z'} f(x)\,dx =$$

$$= \int_a^{z'} f(x)\,dx + \int_{z'}^{z''} f(x)\,dx - \int_a^{z'} f(x)\,dx$$

и, следовательно,

$$|\Phi(z'') - \Phi(z')| = \left| \int_{z'}^{z''} f(x)\,dx \right| \leq \int_{z'}^{z''} |f(x)|\,dx \leq$$

$$\leq M \int_{z'}^{z''} dx = M\,(z'' - z').$$

Таким образом,

$$|\Phi(z'') - \Phi(z')| \leq M\,|z'' - z'|,$$

и, поэтому, Φ непрерывна на $[a, b]$. □

5.2. Дифференцируемость по переменному верхнему пределу

Пусть, как и выше,

$$\Phi(z) = \int_a^z f(x)\,dx, \quad a \leq z \leq b.$$

ТЕОРЕМА 5.2. *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то Φ дифференцируема на $[a, b]$, причем*

$$\Phi'(z) = f(z) \quad \textit{для всех} \quad z \in [a, b].$$

Доказательство. Фиксируем $z \in [a, b]$. Придадим z приращение Δz так, чтобы точка $z+\Delta z \in [a, b]$. Тогда справедливо

$$\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z) = \int\limits_a^{z+\Delta z} f(x)\,dx - \int\limits_a^{z} f(x)dx = \int\limits_z^{z+\Delta z} f(x)\,dx.$$

По теореме о среднем существует точка ξ, лежащая между z и $z+\Delta z$ и такая, что

$$\int\limits_z^{z+\Delta z} f(x)\,dx = f(\xi)\,\Delta z.$$

При $\Delta z \to 0$ точка $\xi \to z$, и мы получаем

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \lim_{\xi \to z} f(\xi).$$

Так как f непрерывна, то предел в правой части существует и равен $f(z)$. Значит, существует предел в левой части, который также равен $f(z)$.

$\square$

СЛЕДСТВИЕ. Если f непрерывна на $[a, b]$, то она имеет первообразную. Такой первообразной является, например, функция

$$\Phi(z) = \int\limits_a^{z} f(x)\,dx.$$

5.3. Интегрируемая по Риману функция, не имеющая первообразной

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Данная функция имеет единственную точку разрыва, а потому интегрируема на $[-1, 1]$. С другой стороны,

$$\Phi(z) = \int\limits_{-1}^{z} f(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1 \le z \le 0, \\ z & \text{при} \quad 0 < z \le 1. \end{cases}$$

Функция Φ не имеет производной в точке 0.

Вообще, функция f не имеет первообразной. Действительно, существование функции F со свойством

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$$

противоречит теореме Дарбу, согласно которой $F'(x)$ обязана принимать все промежуточные значения между $F'(-1) = f(-1) = 0$ и $F'(1) = f(1) = 1$.

5.4. Неинтегрируемая по Риману функция, имеющая первообразную

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin(1/x) & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0. \end{cases}$$

Если $\alpha > 1$, то существует производная

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} \sin(1/x) - x^{\alpha-2} \cos(1/x) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Ясно, что F есть первообразная по отношению к f. Однако, при $1 < \alpha < 2$ функция f неограничена в окрестности точки $x = 0$, а потому не является непрерывной и даже интегрируемой.

§6. Связь определенного интеграла с неопределенным. Формула Ньютона – Лейбница

ТЕОРЕМА 6.1 (формула Ньютона-Лейбница). *Если f непрерывна на $[a, b]$ и F – произвольная ее первообразная на $[a, b]$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Как было только что доказано, функция

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\, dt$$

является первообразной для функции f. Однако, как было доказано еще ранее, любые две первообразные могут отличаться разве лишь на константу, т.е. существует константа C

такая, что

$$\Phi(x) - F(x) = C \quad \text{для любого} \quad x \in [a, b].$$

Следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C$ и мы получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Phi(b) - \Phi(a) =$$

$$= (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

$\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем мы будем пользоваться следующим обозначением

$$F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

ПРИМЕР. Вычислим интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin 0 = 1.$$

§7. Замена переменной в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 7.1. *Предположим, что функция f непрерывна на $[a, b]$, а функция φ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$ и обладает свойствами:*
i) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.
ii) $a \le \varphi(t) \le b$ для всех $t \in [\alpha, \beta]$.
Тогда выполнено

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство. Так как f непрерывна, то она имеет первообразную F. При этом по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1}$$

Функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, поскольку

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

$\square$

ПРИМЕР 1.

$$\int\limits_{0}^{1}(2x-3)^{100}dx = \left|\begin{array}{rcl} t & = & 2x-3 \\ x & = & (t+3)/2 \\ dx & = & dt/2 \end{array}\right| = \int\limits_{-3}^{-1}\frac{1}{2}t^{100}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{101}}{101}\bigg|_{-3}^{-1} = \frac{1}{202}\left[(-1)^{101} - (-3)^{101}\right] = \frac{1}{202}[-1+3^{101}].$$

$\square$

ПРИМЕР 2.

$$\int\limits_{0}^{\pi/4}\sin 2x dx = \left|\begin{array}{rcl} t & = & 2x \\ x & = & t/2 \\ dx & = & dt/2 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\cos t\bigg|_{0}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos 0 = -\frac{1}{2}.$$

$\square$

ПРИМЕР 3.

$$\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin x\,\cos x\,dx = \int\limits_{0}^{\pi/2}\sin x\,d\sin x = \left|\begin{array}{rcl} t & = & \sin x \\ dt & = & d\sin x \end{array}\right| =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} t\,dt = \frac{t^2}{2}\bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{2}.$$

$\square$

§8. Интегрирование по частям в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть u, v – непрерывно дифференцируемые на $[a,b]$ функции. Тогда*

$$\int\limits_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)\, v(x)\, dx.$$

Доказательство. Так как функции $(u\, v')$ и $(u'\, v)$ непрерывны, то существуют их первообразные P и Q соответственно. Функция $P+Q$ является первообразной по отношению к $(u\, v)'$. Таким образом,

$$P(x) = u(x)v(x) - Q(x) + \text{const}, \quad \forall \ x \in [a,b]$$

и

$$P(b) - P(a) = u(x)v(x)\big|_a^b - (Q(b) - Q(a))\,. \tag{1}$$

Однако

$$\int\limits_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = P(b) - P(a),$$

и

$$[u(x)\, v(x)]\,\big|_a^b - Q(x)\big|_a^b = u(x)v(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)\, v(x)\, dx.$$

Сопоставляя данные соотношения с (1), получаем нужное. □

§9. Формула Валлиса

ТЕОРЕМА 9.1. *Справедливо следующее соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{\pi}{2},$$

где $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n$ *и* $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)$.

Доказательство. Вычислим

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx, \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что $I_0 = \pi/2$, $I_1 = 1$. Пусть $m > 1$. Пользуясь формулой интегрирования по частям, имеем

$$I_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m x\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x\,d(-\cos x) =$$

$$= -\sin^{m-1} x \cos x\Big|_0^{\pi/2} + (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x \cos^2 x\,dx =$$

$$= (m-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{m-2} x\,(1-\sin^2 x)\,dx = (m-1)I_{m-2} - (m-1)I_m.$$

Тем самым, мы получаем рекуррентную формулу

$$I_m = \frac{m-1}{m} I_{m-2}.$$

Пусть $m = 2n$ – четное ($n \geq 1$). Тогда

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \cdots =$$

$$= \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2}\ldots\frac{1}{2} I_0,$$

т.е.

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Здесь и ниже $k!!$ – произведение всех нечетных чисел $1\cdot 3\cdots k$, если k нечетно, и произведение всех четных чисел $2\cdot 4\cdots k$, если k четно.

Пусть $m = 2n-1$ – нечетное ($n \geq 2$). Тогда

$$I_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = \cdots = \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots 2}{(2n-1)(2n-3)\ldots 1},$$

и

$$I_{2n-1} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}. \tag{2}$$

Так как при $x \in [0, \pi/2]$ выполнено $0 \le \sin x \le 1$, то для любого $n = 1, 2, \ldots$ справедливо двойное неравенство

$$\sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x.$$

Интегрируя, получаем

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x d\,x \le \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x\,dx.$$

Пользуясь соотношениями (1), (2), находим

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \le \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \le \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

или

$$\frac{1}{(2n+1)}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \le \frac{\pi}{2} \le \left[\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 2n = \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n}.$$

Далее имеем

$$0 \le \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \le \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right] =$$

$$= \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n(2n+1)} \le \frac{\pi}{2}\frac{1}{2n},$$

или

$$0 \le \frac{\pi}{2} - \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1} \le \frac{\pi}{4n}. \qquad (3)$$

В силу (3), заключаем о существовании следующего предела и справедливости формулы Валлиса[2]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Заметим, что (3) дает также оценку скорости сходимости данной последовательности рациональных дробей к $\pi/2$. □

§10. Приближенные методы вычисления определенного интеграла

Предположим, что требуется вычислить определенный интеграл от непрерывной на $[a, b]$ функции, а первообразную

[2]Валлис Джон (23.11.1616-28.10.1703). Род. в Кентском уезде (Англия). Один из основателей и первых членов Лондонского королевского общества.

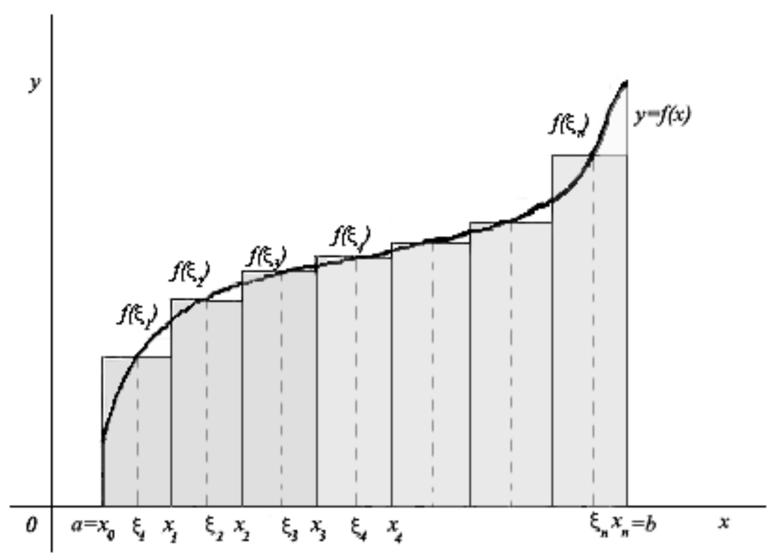
мы найти затрудняемся (или она имеет сложный вид). Тогда интеграл вычисляется приближенно.

Имеется достаточно много различных методов приближенного нахождения интегралов. Мы изучим здесь только три из них — метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол (метод Симпсона[3]).

10.1. Формула прямоугольников

Здесь мы используем непосредственно приближения определенного интеграла интегральными суммами Римана

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu(T)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$



Пусть T – разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных частей точками

$$a = x_0 < x_1 = a + \frac{b-a}{n} < x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n} < \dots < x_k =$$

$$= a + \frac{k(b-a)}{n} < \dots < x_n = b.$$

[3]Симпсон Томас (20.8.1710-14.5.1761). Профессор математики в военной академии в Вульвиче (Англия). Автор работ, посвященным приближенному интегрированию, элементарной геометрии, анализу, теории вероятностей.

В качестве отмеченных точек выберем точки $\xi_i = (x_i + x_{i+1})/2$, т.е. середины отрезков $[x_i, x_{i+i}]$. Тогда справедливо

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right),$$

и приходим к формуле прямоугольников

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + R_n. \tag{1}$$

Здесь R_n – остаточный член и для практических применений формулы (1) важно знать его оценки.

Покажем, что если f имеет на $[a, b]$ непрерывную производную второго порядка, то

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{24n^2}M, \quad M = \max_{[a,b]}|f''(x)|. \tag{2}$$

Оценим сначала интеграл

$$\int_{-h}^{h} f(x)\,dx,$$

считая, что f дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[-h, h]$.

Пусть F – первообразная по отношению к f. Тогда

$$\int\limits_{-h}^{h} f(x)\,dx = F(h) - F(-h).$$

Так как F трижды непрерывно дифференцируема на $[-h, h]$ (что следует из того, что f – дважды непрерывно дифференцируема, и теоремы о дифференцируемости интеграла по переменному верхнему пределу), то, пользуясь формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получаем

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2}F''(0)x^2 + \frac{1}{6}F'''(\xi_x)x^3,$$

где ξ_x – некоторая точка между точками 0 и x.

Заметим, что

$$F'(0) = f(0), \quad F''(0) = f'(0), \quad F'''(\xi_x) = f''(\xi_x).$$

Теперь имеем

$$F(h) - F(-h) = \left[F(0) + f(0)h + \frac{1}{2}f'(0)h^2 + \frac{1}{6}f''(\xi_h)h^3\right] -$$

$$- \left[F(0) - f(0)h + \frac{1}{2}f'(0)h^2 - \frac{1}{6}f''(\tilde{\xi}_h)h^3\right] =$$

$$= 2f(0)h + \left(f''(\xi_h) + f''(\tilde{\xi}_h)\right)\frac{h^3}{6},$$

где $\tilde{\xi}_h$ расположена между точками $-h$ и 0.

Таким образом, для всякого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ выполнено

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx = 2f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)\frac{x_{i+1} - x_i}{2} +$$

$$+[f''(\xi_i) + f''(\tilde{\xi}_i)]\frac{(x_{i+1} - x_i)^3}{48}.$$

(Здесь ξ_i и $\tilde{\xi}_i$ — некоторые точки, расположенные между серединой $[x_i, x_{i+1}]$ и точками x_{i+1} и x_i соответственно.)

Тем самым, мы приходим к следующей формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24n^3}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f''(\xi_i) + f''(\tilde{\xi}_i)}{2}.$$

Остаточный член R_n здесь имеет вид

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^3}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f''(\xi_i) + f''(\tilde{\xi}_i)}{2}.$$

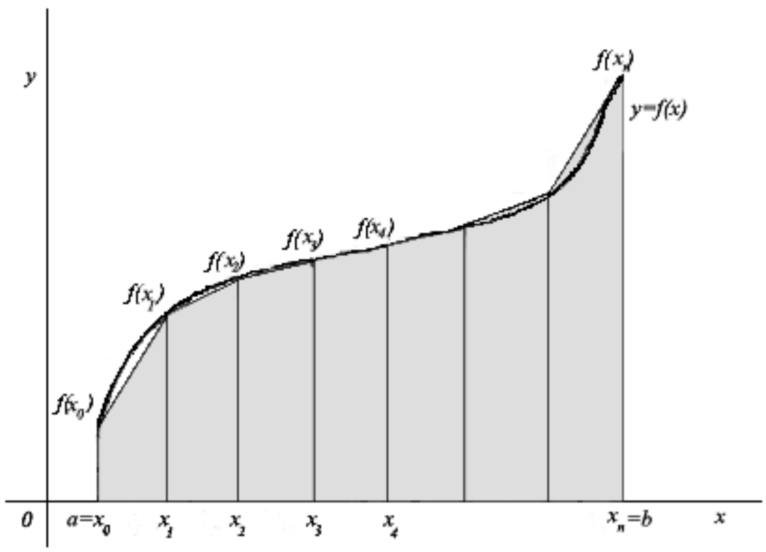
Поэтому, предполагая, что $|f''(x)| \le M$ для всех $x \in [a, b]$, находим

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3}{24n^3}\sum_{i=0}^{n-1} M = \frac{(b-a)^3}{24n^2}M,$$

что и требовалось доказать.

10.2. Формула трапеций

Предположим, что f – непрерывная на $[a, b]$ функция и T – разбиение отрезка $[a, b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. На каждом из элементарных



отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ рассмотрим линейную функцию, совпадающую с f в x_i и x_{i+1}.

Площадь элементарной трапеции, расположенной над $[x_i, x_{i+1}]$, дается формулой

$$\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2}(x_{i+1}-x_i) = \frac{b-a}{n}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2},$$

а площадь $S_{tr}(T)$ фигуры, состоящей из элементарных трапеций, равна

$$S_{tr}(T) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right).$$

Заметим, что $s(T) \le S_{tr}(T) \le S(T)$, где $s(T)$ и $S(T)$ – нижняя и верхняя суммы Дарбу, соответствующие разбиению T. Так как функция f непрерывна, то, как было доказано в теореме об интегрируемости непрерывной функции, величины $s(T)$ и $S(T)$ стремятся к интегралу

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

откуда следует

$$\lim_{\mu(T)\to 0} S_{tr}(T) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

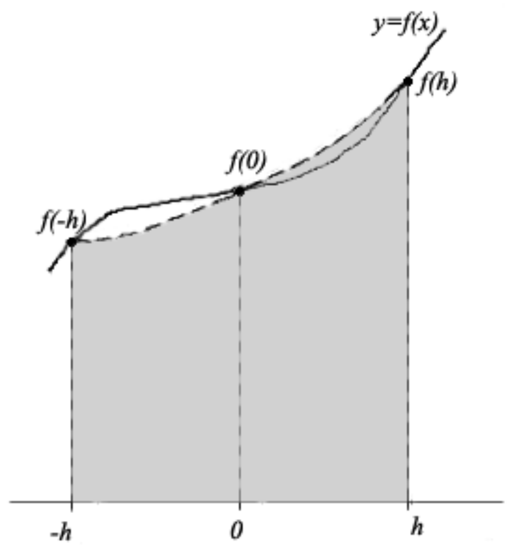
Тем самым, мы получаем приближенную формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right),$$

называемую *формулой трапеций.*

10.3. Формула парабол (формула Симпсона)

Пусть f – непрерывная на $[-h, h]$ функция. Заменим приближенно f квадратичной параболой $y = a\,x^2 + b\,x + c$ так, чтобы $y(-h) = f(-h)$, $y(0) = f(0)$ и $y(h) = f(h)$.



Найдем коэффициенты a, b и c. Имеем

$$\left\{\begin{array}{rcl} ah^2 - bh + c & = & f(-h) \\ c & = & f(0) \\ ah^2 + bh + c & = & f(h), \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} b & = & \dfrac{f(h) - f(-h)}{2h} \\ c & = & f(0) \\ a & = & \dfrac{f(-h) + f(h) - 2f(0)}{2h^2}. \end{array}\right.$$

Выполним некоторые вычисления:

$$\int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\,dx = \left.\frac{ax^3}{3}\right|_{-h}^{h} + \left.\frac{bx^2}{2}\right|_{-h}^{h} + cx|_{-h}^{h} =$$

$$= \frac{a}{3}(h^3 + h^3) + \frac{b}{2}(h^2 - h^2) + c(h + h) =$$

$$= \frac{f(-h)+f(h)-2f(0)}{2h^2}\frac{2h^3}{3} + f(0)2h =$$

$$= h\left[\frac{f(h)}{3} + \frac{4f(0)}{3} + \frac{f(-h)}{3}\right] = \frac{h}{3}\left(f(-h)+4f(0)+f(h)\right).$$

Заменяя теперь интеграл от f эквивалентным интегралом от квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$, получаем

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(-h)+4f(0)+f(h)].$$

В случае, если f непрерывна на $[a,b]$, данное соотношение влечет

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \qquad (3)$$

Разобьем $[a,b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_{2n} = b$ и обозначим через x_{2i+1} середину $[x_{2i}, x_{2i+2}]$. Тогда

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,dx$$

и, применяя к каждому из интегралов в сумме приближенную формулу (3), находим

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}\frac{b-a}{6n}\left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right),$$

или

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\left\{f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1})\right\}.$$

Это есть известная *формула Симпсона.*

Глава 11

Приложения определенного интеграла

§1. Кривые и дуги

Определим некоторые геометрические понятия, связанные с теорией кривых на плоскости. Более строгое изложение данных вопросов будет дано позже и после того, как мы приобретем некоторый опыт работы с этими понятиями.

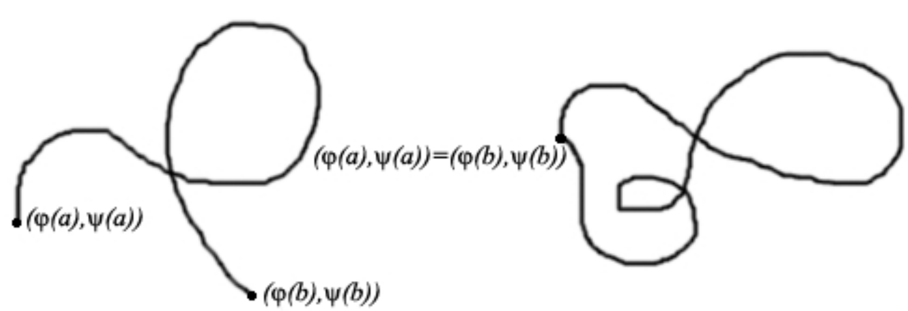
Предположим, что в плоскости $\mathbf{R}^2$ задана декартова прямоугольная система координат xOy. Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – пара функций, заданных на промежутке $\langle a, b \rangle$. В этом случае говорят, что на $\langle a, b \rangle$ задана *вектор-функция*

$$\overline{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t)).$$

Вектор-функция непрерывна (дифференцируема), если каждая из функций φ, ψ непрерывна (дифференцируема).

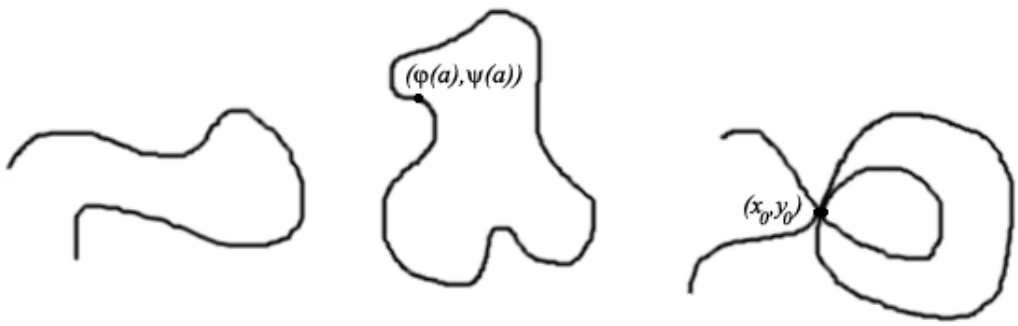
При изменении параметра t от a до b точка $(\varphi(t), \psi(t))$ описывает некоторую кривую γ в плоскости (x, y). Кривая γ называется *замкнутой*, если ее начало и конец совпвдают, т.е.

$$(\varphi(a), \psi(a)) = (\varphi(b), \psi(b)).$$



Кривая γ называется *разомкнутой кривой* (или дугой), если ее начало $(\varphi(a), \psi(a))$ не совпадает с концом $(\varphi(b), \psi(b))$.

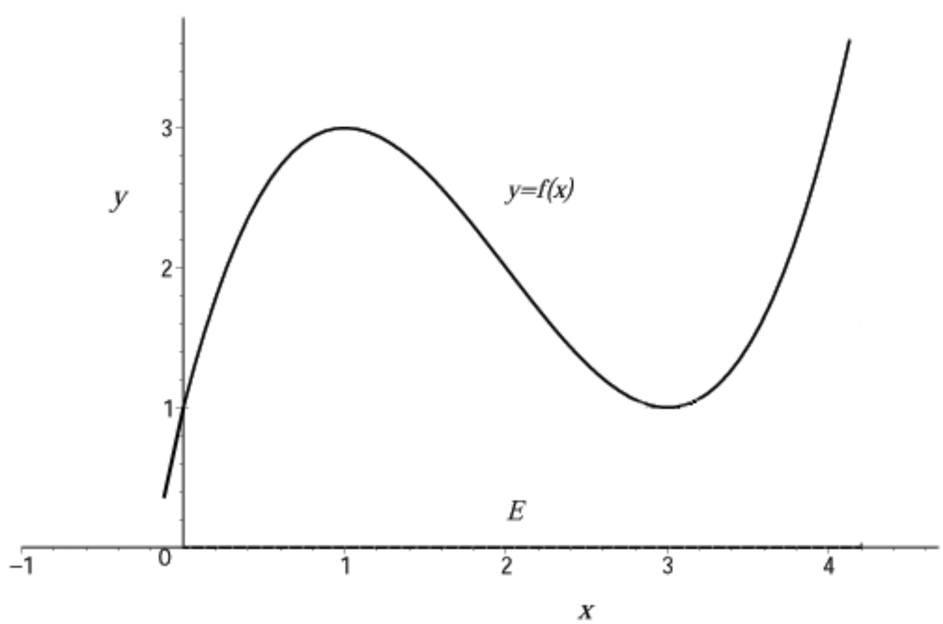
Может случиться, что через одну и ту же точку на плоскости кривая γ проходит несколько раз, т.е. нескольким различным значениям параметра $t_1, t_2, \ldots$ соответствует одна единственная точка (x_0, y_0) плоскости. Эта точка называется *кратной точкой* кривой γ.



Если кривая (или дуга) γ не имеет кратных точек, то она называется *простой кривой* (простой дугой).

Аналогично, простой замкнутой кривой называется замкнутая кривая, не имеющая точек пересечения кроме начала и конца.

Если простая дуга γ является графиком некоторой[1] функции f, то говорят, что γ задана в *непараметрическом виде*.

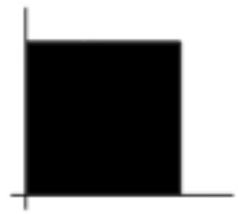


Существуют примеры непрерывных кривых, проходящих

[1] однозначной

через каждую точку квадрата (кривые Пеано).

Схематический рисунок кривой Пеано



УПРАЖНЕНИЕ 1. Сравнить приведенный рисунок со знаменитой картиной Малевича.[2]

УПРАЖНЕНИЕ 2. Выяснить, не могла ли являться картина Малевича "Черный квадрат" попыткой изобразить кривую Пеано?

1.1. Уравнения касательной и нормали к кривой

Пусть задана дифференцируемая кривая (или дуга) γ посредством вектор-функции

$$\overline{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t)),$$

определенной на промежутке $\langle a, b\rangle$. Фиксируем некоторое значение параметра $t_0 \in \langle a, b\rangle$. Придадим t_0 приращение Δt так, чтобы параметр $t_0 + \Delta t \in \langle a, b\rangle$. Тогда вектор-функция получит приращение

$$\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0) = (\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0), \psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)).$$

Предельный вектор

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}(t_0 + \Delta t) - \overline{r}(t_0)}{\Delta t} = \overline{r}'(t_0) = (\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$$

называется *производной вектор-функции* $\overline{r}(t)$ в точке t_0.

[2]Малевич Казимир Северинович (1878–1935 гг.) – художник. Учился в Училище живописи, ваяния и зодчества (1904–1905 гг.). Участник выставок художественных группировок "Бубновый валет", "Ослиный хвост" и др. В 1919-1922 гг. преподавал в Народной художественной школе "нового революционного образца" в Витебске. В 1923-1927 гг. – директор Ленинградского гос. института художественной культуры. Один из основателей абстрактного искусства, отошёл от отражения реальных вещей и явлений, отказался от конкретной сюжетной содержательности произведений, трактовал предметную форму как комбинации контрастных по цвету геометрических элементов ("Чёрный квадрат", 1913 г.; "Полёт аэроплана", 1915 г.; "Красный квадрат", 1917 г.) Автор книг: "Искусство, церковь, фабрика", "Супрематизм", "От кубизма к супрематизму".

Уравнение прямой, проходящей через точки $\overline{r}(t_0)$ и $\overline{r}(t_0 + \Delta t)$, имеет вид

$$\frac{x - \varphi(t_0)}{y - \psi(t_0)} = \frac{\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)}{\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)},$$

или

$$(x - \varphi(t_0))\,(\psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)) = (y - \psi(t_0))\,(\varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)).$$

Разделим обе части равенства на Δt и устремим $\Delta t \to 0$. Приходим к уравнению *касательной* к кривой γ в точке $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, имеющему вид

$$(x - \varphi(t_0))\,\psi'(t_0) = (y - \psi(t_0))\,\varphi'(t_0).$$

Уравнение нормали к γ в точке $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ записывается по обычным правилам

$$(x - \varphi(t_0))\,\varphi'(t_0) = -(y - \psi(t_0))\,\psi'(t_0).$$

1.2. Длина дуги

Пусть $\overline{r} = \overline{r}(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, – непрерывная вектор-функция, определяющая некоторую простую дугу или кривую γ, замкнутую или разомкнутую. При изменении параметра t от a до b точка $\overline{r}(t)$ пробегает вдоль γ от одного ее конца A до другого B, т.е. на γ определено направление.

Если

$$T = \{a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = b\}$$

– разбиение $\langle a, b\rangle$, то точки

$$A = p_0 = \overline{r}(a),\ p_1 = \overline{r}(t_1), \ldots, p_n = \overline{r}(b) = B$$

образуют разбиение P дуги γ. Соединив их последовательно одну за другой прямолинейными отрезками $\overline{p_i p_{i+1}}$, мы получим ломаную линию $\overline{p_0 p_1 \ldots p_n}$.

Каждый из отрезков $\overline{p_i p_{i+1}}$ является хордой для некоторой, стягиваемой им дуги $\widetilde{p_i p_{i+1}}$. Обозначим через $\operatorname{diam}\widetilde{p_i p_{i+1}}$ диаметр этой дуги, т.е.

$$\operatorname{diam}\widetilde{p_i p_{i+1}} = \sup\{p',\, p'' \in \widetilde{p_i p_{i+1}} : |p'' - p'|\}.$$

Здесь символом $|p'' - p'|$ обозначено обычное евклидово расстояние между точками p', p'' на плоскости.

Пусть

$$\mu(P) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \operatorname{diam}\widetilde{p_i p_{i+1}}$$

– мелкость разбиения P дуги (или кривой) γ.

ЛЕММА 1.1. *Предположим, что кривая (или дуга) γ задана посредством пары непрерывных функций $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [a, b]$.*

Если кривая (или дуга) γ является простой, то мелкость $\mu(P) \to 0$ тогда и только тогда, когда мелкость $\mu(T) \to 0$.

Доказательство. Утверждение о том, что $\mu(T) \to 0$ влечет $\mu(P) \to 0$, следует из теоремы Кантора о равномерной непрерывности для φ и ψ.

Для доказательства обратного утверждения предположим противное. В таком случае найдется последовательность пар точек $\{p'_k p''_k\}$, лежащих на γ и таких, что $\operatorname{diam} \overset{\frown}{p'_k p''_k} \to 0$, однако для последовательности их прообразов выполнено $|t'_k - t''_k| \geq \varepsilon > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где ε – некоторое фиксированное число.

Так как последовательность $\{t'_k\}$ лежит на отрезке $[a, b]$, то она ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно извлечь подпоследовательность $\{t'_{k_m}\} \to t' \in [a, b]$. Из соответствующей ей подпоследовательности $\{t''_{k_m}\}$ в свою очередь также извлечем подпоследовательность $\{t''_{k_{m_n}}\} \to t'' \in [a, b]$.

Мы имеем

$$p'_{k_{m_n}} = (\varphi(t'_{k_{m_n}}), \psi(t'_{k_{m_n}})) \to p' = (\varphi(t'), \psi(t')),$$

и

$$p''_{k_{m_n}} = (\varphi(t''_{k_{m_n}}), \psi(t''_{k_{m_n}})) \to p'' = (\varphi(t''), \psi(t'')).$$

Но $\operatorname{diam} \overset{\frown}{p'_{k_{m_n}} p''_{k_{m_n}}} \to 0$, а потому p' совпадает с p''.

С другой стороны, $|t' - t''| \geq \varepsilon$ и

$$(\varphi(t'), \psi(t')) = p', \quad (\varphi(t''), \psi(t'')) = p''.$$

Тем самым, мы нашли два различных значения параметра $t' \neq t''$, переходящих в одну и ту же точку $p' = p''$ на γ, причем в случае замкнутости кривой γ найденная точка не может совпадать с концевой точкой $A = B$. Это противоречит предположению, что γ – простая кривая (дуга).

□

УПРАЖНЕНИЕ 3. Показать, что лемма 1.1 будет неверна, если мелкость определить формулой

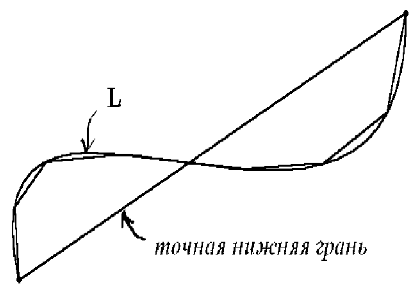
$$\tilde{\mu}(P) = \max_{0 \leq i \leq n-1} |p_i - p_{i+1}|.$$

В каком месте доказательства использовано определение мелкости разбиения P как максимума диаметров дуг $\widetilde{p_i p_{i+1}}$? Подсказка: рассмотреть замкнутые кривые.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Если существует предел

$$\lim_{\mu(P)\to 0} \operatorname{length} \overline{p_0 p_1 \ldots p_n} < \infty, \tag{1}$$

не зависящий от способа вписывания ломаной $\overline{p_0 p_1 \ldots p_n}$, то его величина называется *длиной дуги* γ, а сама дуга γ — *спрямляемой.* Здесь $\operatorname{length} \overline{p_0 p_1 \ldots p_n}$ — длина ломаной $\overline{p_0 p_1 \ldots p_n}$.



1.3. Вычисление длины дуги в декартовых координатах

ТЕОРЕМА 1.1. *Если $\overline{r} = \overline{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ – непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ вектор-функция, задающая простую спрямляемую дугу γ в декартовой прямоугольной системе координат, то*

$$\operatorname{length} \gamma = \int\limits_a^b |\overline{r}'(t)|\, dt = \int\limits_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{2}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\operatorname{length} \overline{p_0 p_1 \ldots p_n} = \sum_{i=0}^{n-1} |\overline{p_i p_{i+1}}| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))^2}.$$

По формуле конечных приращений Лагранжа находим

$$|\overline{p_i p_{i+1}}| = \sqrt{(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i))^2 + (\psi(t_{i+1}) - \psi(t_i))^2} =$$

$$= \Delta t_i \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)},$$

где $\xi_i, \eta_i \in (t_i, t_{i+1})$ – некоторые точки.

Интегральные суммы Римана для интеграла в правой части (2) имеют вид

$$S(\dot{T}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\varphi'^2(\theta_i) + \psi'^2(\theta_i)}\, \Delta t_i, \quad \theta_i \in (t_i, t_{i+1}).$$

Заметим, что

$$\left|\mathrm{length}\, \overline{p_0 p_1 \dots p_n} - S(\dot{T})\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1} (\sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)} - \sqrt{\varphi'^2(\theta_i) + \psi'^2(\theta_i)})\Delta t_i\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi'^2(\xi_i) - \varphi'^2(\theta_i) + \psi'^2(\eta_i) - \psi'^2(\theta_i)}{\sqrt{\varphi'^2(\theta_i) + \psi'^2(\theta_i)} + \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)}}\, \Delta t_i\right| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|\varphi'(\xi_i) - \varphi'(\theta_i)|\, |\varphi'(\xi_i) + \varphi'(\theta_i)| + |\psi'(\eta_i) - \psi'(\theta_i)|\, |\psi'(\eta_i) + \psi'(\theta_i)|}{\sqrt{\varphi'^2(\theta_i) + \psi'^2(\theta_i)} + \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)}}\, \Delta t_i.$$

Так как

$$|\varphi'(\xi_i) + \varphi'(\theta_i)| \le \sqrt{\varphi'^2(\theta_i) + \psi'^2(\theta_i)} + \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)}$$

и

$$|\psi'(\eta_i) + \psi'(\theta_i)| \le \sqrt{\varphi'^2(\theta_i) + \psi'^2(\theta_i)} + \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\eta_i)}$$

(проверьте данные неравенства!), то

$$|\mathrm{length}\, \overline{p_0 p_1 \dots p_n} - S(\dot{T})| \le \sum_{i=0}^{n-1} \left(|\varphi'(\xi_i) - \varphi'(\theta_i)| + |\psi'(\eta_i) - \psi'(\theta_i)|\right)\, \Delta t_i.$$

Но производные φ' и ψ' непрерывны на $[a, b]$ и, по теореме Кантора, равномерно непрерывны, а потому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $\mu(T) < \delta(\varepsilon)$ выполнено

$$|\varphi'(\xi_i) - \varphi'(\theta_i)| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\psi'(\eta_i) - \psi'(\theta_i)| < \varepsilon.$$

Тем самым, при мелкости $\mu(\dot{T}) < \delta(\varepsilon)$ мы имеем

$$|\mathrm{length}\, \overline{p_0 p_1 \dots p_n} - S(\dot{T})| \le 2\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = 2\varepsilon\, (b - a).$$

Таким образом, если γ задается посредством непрерывно дифференцируемой вектор-функции, то она спрямляема и ее длина вычисляется по формуле (2).

□

1.4. Длина непараметрической дуги

ТЕОРЕМА 1.2. *Если дуга γ является графиком непрерывно дифференцируемой функции f, заданной на $[a,b]$, то*

$$\operatorname{length}\gamma = \int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Доказательство. Перепишем γ в параметрическом виде. Положим $x=t$. Тогда $y=f(t)$ и $t\in[a,b]$. По доказанному выше имеем

$$\operatorname{length}\gamma = \int\limits_a^b \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt = \int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(t)}\,dt.$$

□

1.5. Длина дуги в полярных координатах

Напомним, что полярные координаты

$$(r,\varphi), \quad r\ge 0, \;\; 0\le\varphi<2\pi,$$

точки A на плоскости суть расстояние r до A от некоторой выделенной точки O и угол φ, отсчитываемый в положительном направлении[3] от некоторого выделенного направления, например положительного направления оси Ox, до вектора $\overrightarrow{OA}$.

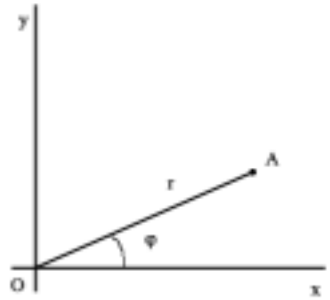
Если точка A имеет полярные координаты (r,φ), то ее декартовы прямоугольные координаты (x,y) находятся по формулам

$$x = r\,\cos\varphi, \quad y = r\,\sin\varphi.$$

ТЕОРЕМА 1.3. *Если дуга (или кривая) γ задана в полярных координатах (r,φ) посредством уравнения $r=r(\varphi)$, где $r(\varphi)$ – непрерывно дифференцируемая на $[\alpha,\beta]$ функция, то*

$$\operatorname{length}\gamma = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r'^2(\varphi)+r^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

[3]т.е. против часовой стрелки



Доказательство. Легко видеть, что в декартовых координатах γ может быть записана в виде

$$x = r(\varphi)\,\cos\,\varphi, \quad y = r(\varphi)\,\sin\,\varphi.$$

Поэтому мы имеем

$$\sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)} =$$
$$= \sqrt{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2 + (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)^2} =$$
$$= \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)}$$

и, пользуясь формулой для длины дуги в декартовых координатах, получаем

$$\operatorname{length}\gamma = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)}\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)}\,d\varphi.$$

□

ТЕОРЕМА 1.4. *Если дуга (или кривая) γ задана в полярных координатах (r, φ) посредством уравнения $\varphi = \varphi(r)$, где $0 < r_1 < r < r_2 < \infty$ – непрерывно дифференцируемая на $[r_1, r_2]$ функция, то*

$$\operatorname{length}\gamma = \int\limits_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2\,\varphi'^2(r)}\,dr.$$

Доказательство. Переходя к декартовым координатам, имеем

$$x = r\,\cos\varphi(r), \quad y = r\,\sin\varphi(r), \quad r_1 < r < r_2.$$

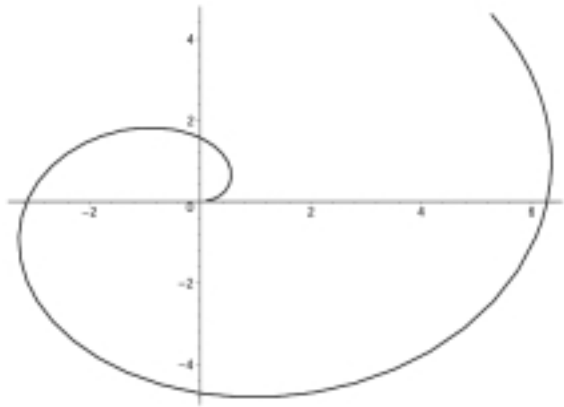
Далее находим

$$\sqrt{x'^2(r) + y'^2(r)} =$$

$$= \sqrt{(\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi')^2 + (\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi')^2} =$$
$$= \sqrt{1 + r^2\varphi'^2}.$$

Как и выше, приходим к нужной формуле. $\square$

ПРИМЕР 1. Найдем длину куска γ спирали, описываемой уравнением $\varphi = r$, где $0 \le r \le R < \infty$.



Мы имеем
$$\operatorname{length}\gamma = \int_0^R \sqrt{1+r^2}\,dr.$$

Используя формулу интегрирования по частям, несложно получить (проверьте!)
$$2\int_0^R \sqrt{1+r^2}\,dr = r\sqrt{1+r^2}\Big|_0^R + \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}}.$$

Отсюда,
$$\operatorname{length}\gamma = \int_0^R \sqrt{1+r^2}\,dr = \frac{R}{2}\sqrt{1+R^2} + \frac{1}{2}\ln\left(R + \sqrt{1+R^2}\right).$$

§2. Площадь криволинейной трапеции

Площадь плоской фигуры, являющейся многоугольником, считаем известной. Введем понятие площади плоской фигуры Q, т.е. части плоскости, ограниченной простой замкнутой кривой L.

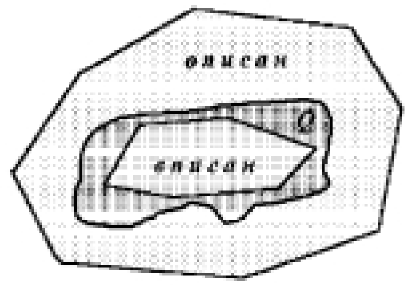
Пусть $\{\underline{S}(M)\}$ – множество площадей многоугольников M, содержащихся в Q, а $\{\overline{S}(M)\}$ – множество площадей многоугольников, содержащих Q. Множество $\{\underline{S}(M)\}$ ограничено сверху, а $\{\overline{S}(M)\}$ – снизу.

Мы определяем нижнюю площадь фигуры

$$\underline{A}(Q) = \sup_M \{\underline{S}(M)\}$$

и верхнюю площадь —

$$\overline{A}(Q) = \inf_M \{\overline{S}(M)\}.$$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Плоская фигура Q называется *квадрируемой*, если верхняя площадь $\overline{A}(Q)$ этой фигуры совпадает с нижней площадью $\underline{A}(Q)$. При этом число $A = \overline{A}(Q) = \underline{A}(Q)$ называется площадью фигуры Q.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для того, чтобы плоская фигура Q была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$ нашлись многоугольники $M_1 \subset Q$ и $M_2 \supset Q$ такие, что $S(M_2) - S(M_1) < \varepsilon$.*

Доказательство. Доказательство проведите самостоятельно. Необходимость сразу следует из определения точных верхней и нижней граней. Достаточность очевидна (см., также, доказательство критерия интегрируемости по Риману). □

ТЕОРЕМА 2.2. *Если граница L ограниченной плоской фигуры Q представляет собой замкнутую спрямляемую кривую, то Q квадрируема.*

Доказательство. Утверждение понятно с геометрической точки зрения. Именно, если L спрямляема, то найдутся многоугольники M (возможно с самопересечениями), границы которых будут сколь угодно тесно примыкать к кривой L. Отсюда вытекает, что будут существовать многоугольники $M_1 \subset Q$ и $M_2 \supset Q$ с близкими по величине площадями. Этого, очевидно, достаточно для квадрируемости Q.

Вместе с тем, рассуждения, обосновывающие с достаточной степенью строгости эти соображения, довольно громоздки (см., например, Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, п. 337).

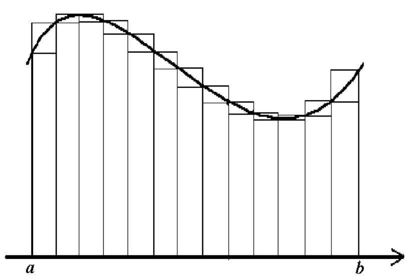
УПРАЖНЕНИЕ 1. Разобрать доказательство самостоятельно.

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная графиком заданной на $[a, b]$, непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, и осью Ox.

ТЕОРЕМА 2.3. *Криволинейная трапеция Q представляет собой квадрируемую фигуру, площадь которой вычисляется по формуле*

$$|Q| = A(Q) = \int_a^b f(x)\,dx.$$



Доказательство. Здесь f непрерывна и, тем самым, интегрируема. Поэтому согласно критерию интегрируемости для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется разбиение T отрезка $[a, b]$ такое, что

$$S(T) - s(T) < \varepsilon.$$

Заметим, что $S(T)$ и $s(T)$ суть площади ступенчатых фигур, являющихся также и многоугольниками. Пользуясь критерием квадрируемости плоской фигуры, получаем нужное.

Формула для вычисления площади криволинейной трапеции получается предельным переходом при $\varepsilon \to 0$. □

§3. Площадь криволинейного сектора

Предположим, что дуга L задана в полярной системе координат посредством непрерывной функции $r = r(\theta)$, где

$r(\theta) \geq 0$ и $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Плоскую фигуру, ограниченную кривой L и лучами $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$, будем называть *криволинейным сектором.*

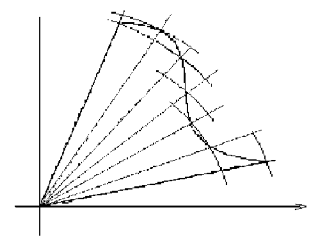
ТЕОРЕМА 3.1. *Криволинейный сектор Q - квадрируемая фигура, площадь $A(Q)$ которой может быть вычислена по формуле*

$$A(Q) = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\, d\theta.$$

Доказательство. Пусть T – разбиение $[\alpha, \beta]$, где

$$\alpha = \theta_0 \leq \theta_1 \leq \ldots \leq \theta_n = \beta.$$

Для каждого $[\theta_i, \theta_{i+1}]$ построим круговые секторы, радиусы которых равны $r_i = \min\limits_{[\theta_i, \theta_{i+1}]} r(\theta)$ и $R_i = \max\limits_{[\theta_i, \theta_{i+1}]} r(\theta)$.



Площади полученных "веерообразных" фигур (круговых многоугольников) суть

$$\underline{S}(T) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} r_i^2 \Delta\theta_i \text{ и } \overline{S}(T) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1} R_i^2 \Delta\theta_i.$$

Отметим, что первая сумма есть нижняя сумма Дарбу для непрерывной функции $\frac{1}{2}r^2(\theta)$, соответствующая разбиению T, вторая сумма – верхняя сумма Дарбу. Функция $\frac{1}{2}r^2(\theta)$ интегрируема на $[\alpha, \beta]$. Согласно критерию интегрируемости для произвольного $\varepsilon > 0$ существует разбиение T такое, что

$$\overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Веерообразные фигуры состоят из круговых секторов. Каждый сектор квадрируем (объясните — почему?), поэтому квадрируемы сами веерообразные фигуры. Следовательно, существуют круговые многоугольники $M_1 \subset Q$ и $M_2 \supset Q$ такие, что

$$\underline{S}(T) - S(M_1) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{и} \quad S(M_2) - \overline{S}(T) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Мы имеем

$$S(M_1) < \underline{S}(T) \leq \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\, d\theta \leq \overline{S}(T) < S(M_2).$$

Однако,

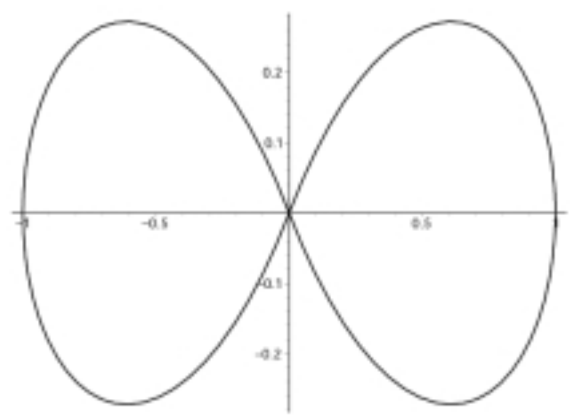
$$S(M_2)-S(M_1) = S(M_2)-\overline{S}(T)+\overline{S}(T)-\underline{S}(T)+\underline{S}(T)-S(M_1) \le$$
$$\le \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

и, переходя к пределу при $\Delta\theta \to 0$, получаем нужную формулу для вычисления площади криволинейного сектора. □

ПРИМЕР 1. Вычислим площадь фигуры, ограниченной кривой $r = \cos 2\varphi$.

Сделаем предварительно эскиз фигуры. Поскольку несводящаяся к точке $r = 0$ часть фигуры должна быть ограничена дугами с $r = r(\varphi) > 0$, то должно быть $\cos 2\varphi > 0$. Это возможно лишь при $-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$ и при $\pi - \frac{\pi}{4} < \varphi < \pi + \frac{\pi}{4}$.

Поскольку функция $\cos 2\varphi$ периодична с периодом π, то фигура имеет вид



Отсюда находим

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\sin\theta\,\cos\theta\big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

и $A = \pi/4$.

§4. Фигуры вращения

Пусть E – ограниченная фигура в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$ с границей, являющейся замкнутой поверхностью без самопересечений.

Пусть $\{V(M_1)\}$ – множество объемов многогранников $M_1 \subset E$, $\{V(M_2)\}$ — множество объемов многогранников $M_2 \supset E$. Множество $\{V(M_1)\}$ ограничено сверху, а множество $\{V(M_2)\}$ – снизу.

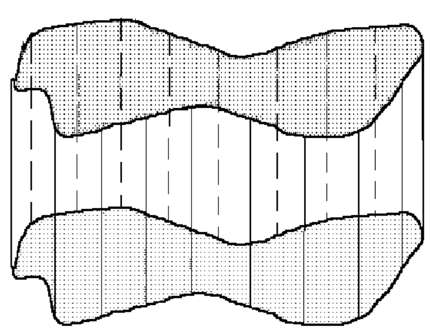
Пусть $\underline{V}(E) = \sup_{M_1} V(M_1)$ – нижний объем и $\overline{V}(E) = \inf_{M_2} V(M_2)$ – верхний объем фигуры E. Ясно, что $\underline{V}(E) \le \overline{V}(E)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Фигура E называется кубируемой, если $\underline{V}(E) = \overline{V}(E)$. Величина $V(E) = \underline{V} = \overline{V}$ называется в этом случае объемом фигуры.

ТЕОРЕМА 4.1. *Для того, чтобы тело $E \subset \mathbf{R}^3$ было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовали многогранники $M_1 \subset E$ и $M_2 \supset E$ такие, что $V(M_2) - V(M_1) < \varepsilon$.*

Доказательство провести самостоятельно (см. комментарии к доказательству соответствующей теоремы для квадрируемых фигур на плоскости).

ПРИМЕР 1. Пусть E – прямой цилиндр с основанием Q, где Q – квадрируемая фигура площади S, h – высота цилиндра. Тогда $V(E) = S\,h$.



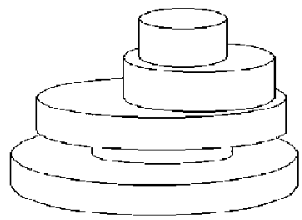
В самом деле, если Q квадрируема, то существуют многоугольники $M_1 \subset Q$ и $M_2 \supset Q$, для которых

$$S(M_2) - S(M_1) < \frac{\varepsilon}{h}.$$

Построим прямые призмы M_1' и M_2' высоты h и основаниями M_1 и M_2 соответственно. Тогда имеем

$$V(M_2') - V(M_1') = (S(M_2) - S(M_1))\, h < \varepsilon,$$

и $V(M_1') \le S\,h \le V(M_2')$.
В пределе получаем нужное.



Попутно мы доказали кубируемость ступенчатых тел, т.е. объединений конечного числа цилиндров, расположенных так, что верхнее основание каждого предыдущего находится в одной плоскости с нижним основанием последующего.

□

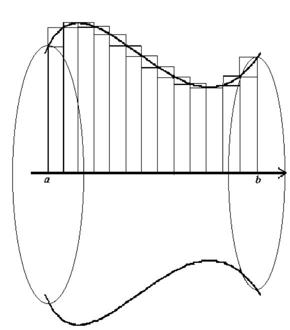
ТЕОРЕМА 4.2. *Предположим, что непараметрическая дуга $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а фигура $E \subset \mathbf{R}^3$ образована вращением вокруг оси Ox этой дуги и плоскостями $x = a$, $x = b$. Фигура E кубируема, причем*

$$V(E) = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\, dx.$$

Доказательство. Пусть $T = \{a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b\}$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ и пусть

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

При вращении плоских ступенчатых фигур (систем прямоугольников вида $[x_{i-1}, x_i] \times [0, m_i]$ или $[x_{i-1}, x_i] \times [0, M_i]$) вокруг оси Ox получаем пространственные фигуры, объемы которых суть



$$\pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i^2\, \Delta x_i \quad \text{и} \quad \pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i^2\, \Delta x_i.$$

Очевидно, это верхняя и нижняя суммы для $\pi f^2(x)$. Предельным переходом приходим к формуле для вычисления соответствующего объема.

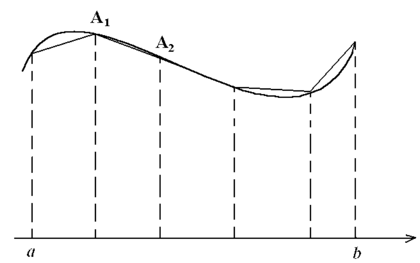
$\square$

§5. Поверхности вращения

Рассмотрим поверхность, полученную вращением графика функции $y = f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$. Зафиксируем разбиение $T_n = \{a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b\}$ отрезка. Соединим в ломаную линию L_n последовательно, одну за другой точки

$$A_0 = (a, f(a)) = (x_0, f(x_0)), \;\; A_1 = (x_1, f(x_1)), \ldots,$$

$$A_n = (x_n, f(x_n)) = (b, f(b)).$$



При вращении L_n вокруг оси Ox получаем поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов. Пусть S_n – площадь этой поверхности, $y_i = f(x_i)$, l_i – длина отрезка $\overline{A_i, A_{i+1}}$. Тогда

$$S_n = 2\pi \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\, l_i = \pi \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})\, l_i.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Данная поверхность вращения называется квадрируемой, если существует предел S площадей S_n при стремлении к нулю мелкости разбиения T_n.

ТЕОРЕМА 5.1. *Предположим, что функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$. Тогда поверхность, полученная вращением ее графика вокруг оси Ox, квадрируема и ее площадь S вычисляется по формуле*

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Доказательство. Фиксируем разбиение T_n отрезка $[a, b]$. Мы имеем

$$l_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2},$$

и, на основании формулы Лагранжа,

$$y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i),$$

где $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ – некоторая точка.

Таким образом,

$$l_i = \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i.$$

Площадь S_n поверхности, образованной вращением ломаной L_n вокруг оси Ox, дается выражением

$$\begin{aligned} S_n \ &= \pi \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + f(x_{i+1})\right)\, l_i = \\ &= 2\pi \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i + R_n, \end{aligned}$$

где

$$R_n = \pi \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) - 2f(\xi_i)\right) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\Delta x_i.$$

Функция f равномерно непрерывна на $[a, b]$ и потому $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения T_n с мелкостью $\mu(T_n) < \delta(\varepsilon)$ выполнено

$$|f(x_i) - f(\xi_i)| < \varepsilon \ \text{ и } \ |f(x_{i+1}) - f(\xi_i)| < \varepsilon.$$

Положим

$$M = \max_{x \in [a,b]} \sqrt{1 + f'^2(x)}.$$

Тогда

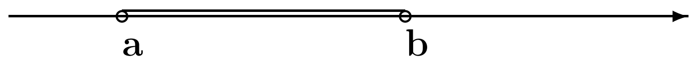
$$|R_n| < 2M\pi\varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = 2M(b - a)\pi\varepsilon$$

и $R_n \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тем самым, $S_n \to S$, поверхность вращения квадрируема и теорема доказана. □

§6. Некоторые приложения из механики

6.1. Масса неоднородного стержня

Рассмотрим неоднородный стержень.



Пусть ρ – плотность распределения массы вдоль отрезка $[a,b]$. Пусть $T = \{a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b\}$ – разбиение $[a,b]$ с мелкостью $\mu(T)$. Выберем произвольно $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ и составим интегральную сумму $\sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i)\Delta x_i$. Каждое слагаемое есть приближенное значение массы элементарного стержня $[x_{i-1}, x_i]$. Для массы M всего стержня имеем

$$M = \lim_{\mu(T)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b \rho(x)\,dx.$$

6.2. Центр тяжести неоднородного стержня

Дана система материальных точек, имеющих массы m_i и расположенных в точках $x_i \in [a,b]$. Координата x_c – центра тяжести данной системы находится по формуле

$$x_c = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} m_i\, x_i}{\sum_{i=0}^{n-1} m_i}.$$

Устроим разбиение $T = \{a = x_0 \le \ldots \le x_n = b\}$ отрезка $[a,b]$. Для массы m_i элементарного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$m_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} \rho(x)\,dx \approx \rho(\xi_i)\Delta x_i.$$

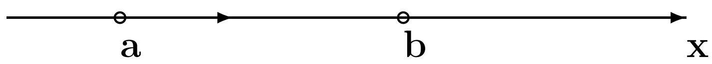
Предполагая, что масса $[x_i, x_{i+1}]$ сосредоточена в ξ_i, получаем

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i\, \rho(\xi_i)\, \Delta x_i}{M},$$

или

$$x_c = \frac{\int\limits_a^b x\,\rho(x)\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)\,dx}.$$

6.3. Работа переменной силы



Пусть материальная точка перемещается из точки a в точку b под действием силы F паралельно оси X. Пусть $T_n = \{a = x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n = b\}$ – произвольное разбиение отрезка $[a, b]$, $\mu(T_n)$ – мелкость этого разбиения. Работа A, совершаемая силой F, подсчитывается по формуле

$$A \approx \sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)\Delta x_i$$

или, полагая $\mu(T_n) \to 0$,

$$A = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Предположим теперь, что материальная точка движется вдоль непрерывно дифференцируемой кривой γ, описываемой радиус-вектором $\{\overline{r} = \overline{r}(s)\}$, где s – длина дуги от переменной точки до некоторой фиксированной начальной точки, $0 \le s \le S$ (так называемый, натуральный параметр).

Предположим, что на материальную точку действует сила $F(s)$, направленная по касательной к траектории в направлении движения. Зададим разбиение

$$T_n = \{0 = S_0 \le S_1 \le \ldots \le S_n = S\}$$

отрезка $[0, S]$ с мелкостью $\mu(T_n)$. Отметим произвольно точки $\xi_i \in [S_{i-1}, S_i]$.

Величину $F(\xi_i)\,\Delta S_i$ примем за приближенное значение работы, производимой силой $F(s)$, когда материальная точка проходит участок кривой γ, соответствующий изменению s от S_i до S_{i+1}.

Величина $\sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)\,\Delta S_i$ есть интегральная сумма Римана для разбиения с отмеченными точками $\dot{T}_n$ и функции $F(s)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Предел W, к которому стремятся суммы $\sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)\Delta S_i$, когда мелкость разбиения $\mu(T_n) \to 0$, называется работой силы F вдоль кривой γ.

Мы имеем

$$A = \int_0^S F(s)\,ds.$$

Предположим, что положение точки на траектории ее движения описывается с помощью какого-либо другого параметра t $(a \le t \le b)$. Пусть $S(t)$ – величина пути, пройденного при изменении параметра t от a до $t \le b$. Выполнив замену переменной $s = S(t)$, находим

$$A = \int\limits_a^b F(S(t))\, S'(t)\, dt.$$

Глава 12

Функции нескольких переменных

§1. Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$. Неравенства Коши и Минковского

Под n-мерным евклидовым пространством $\mathbf{R}^n$ будем понимать множество всевозможных упорядоченных наборов из n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Элементы $\mathbf{R}^n$ будем называть точками (или векторами) и обозначать
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Нулевой элемент (нуль-вектор или нуль-точка) обозначается символом $0 = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n})$.

В множестве $\mathbf{R}^n$ введены операции:
i) для любого $x \in \mathbf{R}^n$ и $\alpha \in \mathbf{R}$ вектор

$$\alpha\, x = (\alpha\, x_1, \alpha\, x_2, \ldots, \alpha\, x_n) \in \mathbf{R}^n;$$

ii) для произвольных $x, y \in \mathbf{R}^n$ вектор

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots, x_n \pm y_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Данные операции обладают свойствами, превращающими $\mathbf{R}^n$ в линейное векторное пространство над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ (см. курс линейной алгебры). Кроме того, евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ обладает следующими свойствами:
iii) для любой пары векторов $x, y \in \mathbf{R}^n$ определено *скалярное произведение*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i;$$

iv) для всякого вектора $x \in \mathbf{R}^n$ определена *длина* вектора

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2};$$

v) для произвольной пары точек $x, y \in \mathbf{R}^n$ определено *расстояние*

$$|x - y| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}.$$

ТЕОРЕМА 1.1 (неравенство Коши). *Для произвольной пары векторов $x, y \in \mathbf{R}^n$ выполнено*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right) \tag{1}$$

или, в эквивалентной форме,

$$|\langle x, y \rangle| \leq |x|\,|y|. \tag{2}$$

Доказательство. Для произвольного $t \in \mathbf{R}$ имеем

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (t\, x_i + y_i)^2 = t^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 =$$

$$= t^2\,|x|^2 + 2t\,\langle x, y \rangle + |y|^2.$$

Данный квадратный трехчлен не принимает отрицательных значений и, следовательно, имеет, разве лишь, один единственный вещественный корень. Поэтому дискриминант трехчлена неположителен, т.е.

$$\langle x, y \rangle^2 - |x|^2\,|y|^2 \leq 0,$$

и (2) доказано. □

ТЕОРЕМА 1.2 (неравенство Минковского[1]). *Для любых двух векторов $x, y \in \mathbf{R}^n$ выполнено*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i)^2} \tag{3}$$

или,

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \tag{4}$$

[1]Минковский Герман (22.6.1864-12.1.1909). Род. в Алексотах (ныне Каунасский р-н, Литва). Работал в Боннском, Кенигсбергском, Цюрихском, Геттингенском университетах. Автор значительных исследований в теории чисел, геометрии, топологии, математической физике, гидродинамике.

Доказательство. На основании неравенства Коши имеем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i)^2}.$$

Отсюда,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2} + \sum_{i=1}^{n} y_i^2\,,$$

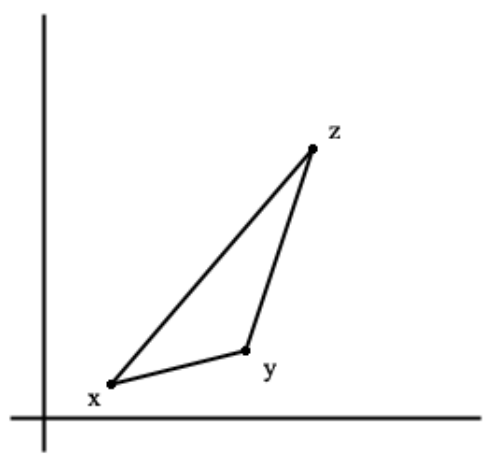
что эквивалентно неравенству

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2 \le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right)^2.$$

Теорема доказана. □

СЛЕДСТВИЕ (неравенство треугольника). Для произвольной тройки $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ выполнено

$$|x - y| \le |x - z| + |z - y|.$$



Отметим, что некоторые обобщения неравенств (1) и (3) будут доказаны ниже в Добавлении II.

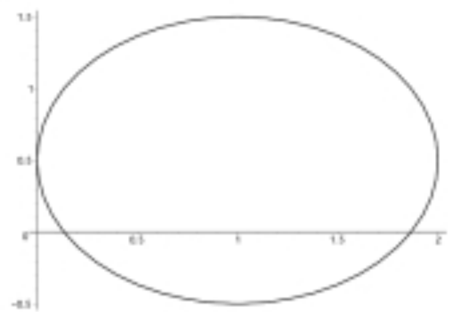
§2. Топология пространства $\mathbf{R}^n$

Пусть $a \in \mathbf{R}^n$ – произвольная точка и $\varepsilon > 0$ – вещественное число. Множество

$$\mathcal{O}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - a| < \varepsilon\}$$

называется ε-окрестностью точки a.

Легко видеть, что $\mathcal{O}_\varepsilon(a)$ есть n-мерный шар[2] с центром в точке a и радиусом ε.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $E \subset \mathbf{R}^n$ – произвольное множество точек. Говорят, что точка $x_0 \in \mathbf{R}^n$ является точкой сгущения (предельной точкой) множества E, если всякая ε-окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0)$ содержит хотя бы одну точку $x \in E$, отличную от x_0.

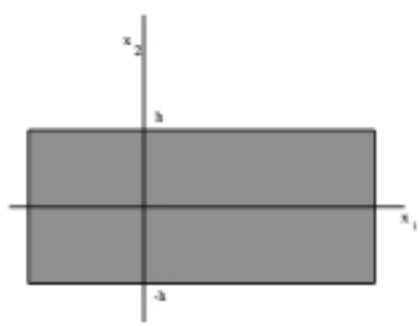
ПРИМЕР 1. Пусть E – множество

$$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| < h\}$$

есть полоса ширины $2h$ без ограничивающих ее сторон. Множество всех точек сгущения — множество

$$\{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x_1| \leq h\}$$

есть полоса ширины $2h$, включая ограничивающие ее стороны.

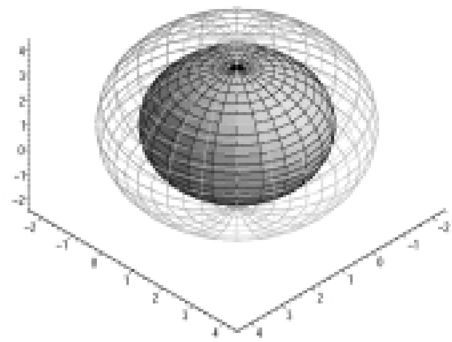


[2]без ограничивающей его сферы

ПРИМЕР 2.

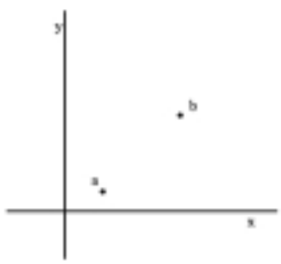
Пусть E – шаровой слой

$$\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : 0 < r \le |x| \le R < \infty\}.$$



Здесь все точки сгущения принадлежат E.

ПРИМЕР 3. Пусть $E = \{a\} \cup \{b\}$, где $a, b \in \mathbf{R}^2$ и $a \neq b$.



Множество E не имеет точек сгущения.

Таким образом, точка сгущения может как принадлежать, так и не принадлежать множеству E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Множество $E \subset \mathbf{R}^n$ называется замкнутым в $\mathbf{R}^n$, если оно содержит все свои точки сгущения.

Говорят, что точка $x_0 \in \mathbf{R}^n$ является точкой прикосновения множества E, если всякая ε-окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0)$ содержит хотя бы одну точку $x \in E$.

Множество всех точек прикосновения E обозначается символом $\overline{E}$ и называется замыканием E.

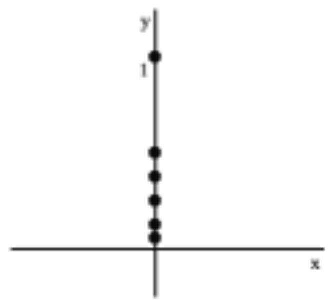
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть $E \subset \mathbf{R}^n$ – множество и $x_0 \in E$ – некоторая точка. Точка x_0 называется внутренней точкой E, если найдется окрестность $\mathcal{O}_\varepsilon(x_0)$, полностью содержащаяся в E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Множество, все точки которого являются внутренними, называется открытым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность точек в $\mathbf{R}^n$. Будем говорить, что $a_k \to a \in \mathbf{R}^n$ при $k \to \infty$ и писать $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$, если $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists$ номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\forall\, k > N(\varepsilon)$ выполнено $|a_k - a| < \varepsilon$.

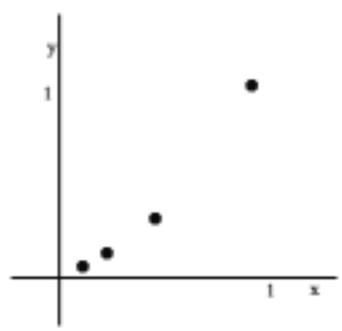
ПРИМЕР 4.

Пусть $a_k = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{n-1}, \frac{1}{k})$.



Последовательность $\{a_k\} \to 0$ при $k \to \infty$.

Пусть $a_k = \left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{3^k}\right) \in \mathbf{R}^2$, $k = 1, 2, \ldots.$



Здесь последовательность $\{a_k\} \to 0$ при $k \to \infty$. $\square$

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть* $a_k = (a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}) \in \mathbf{R}^n$ *и* $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ *– некоторая точка. Последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к точке* a *при* $k \to \infty$ *тогда и только тогда, когда* $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$ *выполнено* $a_{ik} \to a_i$.

Доказательство. Пусть $a_k \to a$. Тогда

$$|a_k - a| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a_{jk} - a_j)^2} \to 0.$$

Следовательно, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$ мы имеем

$$|a_k - a| \geq |a_{ik} - a_i|$$

и $a_{ik} - a_i \to 0$ при $k \to \infty$.

Обратно. Пусть $a_{ik} \to a_i$ при $k \to \infty$ для всякого $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$(a_{ik} - a_i)^2 \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{ik} - a_i)^2 \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty\,,$$

т.е. $|a_k - a| \to 0$ при $k \to \infty$. Теорема доказана. □

УПРАЖНЕНИЕ 1. Какие точки не являются точками сгущения множества E?

УПРАЖНЕНИЕ 2. Привести пример множества, не являющегося ни замкнутым, ни открытым.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Привести пример множества в $\mathbf{R}^n$, являющегося одновременно и замкнутым и открытым.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Может ли одна и та же последовательность точек $a_n \in \mathbf{R}^n$ сходиться к двум различным пределам a' и a''?

§3. Ограниченные множества. Теорема Больцано – Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности

Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ называется ограниченным, если найдется постоянная $M > 0$ такая, что

$$|x| < M \quad \text{для всех} \quad x \in A\,,$$

т.е. множество A помещается в шаре радиуса M с центром в начале координат.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Привести пример замкнутого, но неограниченного множества.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Какие множества в $\mathbf{R}^n$ являются неограниченными?

УПРАЖНЕНИЕ 3. Доказать, что сумма двух ограниченных множеств есть множество ограниченное.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Доказать, что из ограниченности множества $A \subset \mathbf{R}^n$ следует неограниченность множества $\mathbf{R}^n \setminus A$. Верно ли обратное утверждение?

ТЕОРЕМА 3.1 (Больцано – Вейерштрасса). *Из всякой ограниченной последовательности точек $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathbf{R}^n$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Предположим для простоты, что $n = 2$ и $a_k = (x_k, y_k)$. Условие ограниченности последовательности $\{a_k\}$ означает, что найдется постоянная $M > 0$ такая, что

$$\sqrt{x_k^2 + y_k^2} \leq M \quad \text{для всех} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, каждая из последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена и мы вправе воспользоваться теоремой Больцано-Вейерштрасса для одномерного случая.

Таким образом, существует подпоследовательность $\{x_{k_l}\} \to x$. Соответствующая ей подпоследовательность $\{y_{k_l}\}$ ограничена и, пользуясь еще раз теоремой Больцано-Вейерштрасса, находим подпоследовательность $\{y_{k_{l_s}}\} \to y$ при $s \to \infty$.

Последовательность точек $(x_{k_{l_s}}, y_{k_{l_s}})$ сходится к некоторой точке $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ и теорема доказана.

$\square$

УПРАЖНЕНИЕ 5. Дать определение последовательности Коши (фундаментальной последовательности) точек в $\mathbf{R}^n$.

УПРАЖНЕНИЕ 6. Доказать критерий Коши сходимости последовательности точек в $\mathbf{R}^n$.

§4. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – функция, определенная на множестве $E \subset \mathbf{R}^n$ с областью значений в $\mathbf{R}$. Пусть x_0 – точка сгущения E.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Число $y_0 \in \mathbf{R}$ называется пределом $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой последовательности точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \to x_0$, $x_k \in E$, $x_k \neq x_0$, выполнено $f(x_k) \to y_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Число $y_0 \in \mathbf{R}$ называется пределом $f(x)$ при $x \to x_0$ и обозначается $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ (или $f(x) \to y_0$ при $x \to x_0$), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ такая δ-окрестность точки x_0, что при изменении $x \in E$ в проколотой δ-окрестности выполнено $|f(x) - y_0| < \varepsilon$, т.е. $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ так, что $\forall\ x \in E$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ выполнено $|f(x) - y_0| < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Определения 4.1 и 4.2 предела функции нескольких переменных в точке эквивалентны.*

Доказать самостоятельно (см. также теорему об эквивалентности пределов по Коши и по Гейне).

УПРАЖНЕНИЕ 1. Дать определение (конечного) предела функции нескольких переменных в бесконечно удаленной точке

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = y_0 \in \mathbf{R}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 2. Дать определения пределов

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

в случаях $x_0 \in \mathbf{R}^n$ и $x_0 = \infty$.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Сформулировать и доказать аналоги теоремы 4.1 для указанных пределов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть $x_0 \in E$ – точка сгущения множества $E \subset \mathbf{R}^n$. Функция f называется непрерывной в x_0, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0). \tag{1}$$

Функция f разрывна в точке сгущения $x_0 \in E$, если предел (1) не существует, либо не равен $f(x_0)$.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Сформулируйте определение непрерывности функции нескольких переменных по отдельной переменной.

ВНИМАНИЕ, ЛОВУШКА!!! Функция нескольких переменных может быть непрерывной по каждой переменной в отдельности, однако не быть непрерывной в смысле определения 4.3.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{при} \quad x^2+y^2>0\,, \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2=0. \end{cases}$$

Непрерывность этой функции по переменной x при любом фиксированном y и непрерывность по переменной y при любом фиксированном x очевидны. Однако, предела в точке $x=(0,0)$ у функции нет, а потому в этой точке функция разрывна.

Действительно, пусть $k \neq 0$ – постоянная. Найдем предел $f(x,y)$ в точке $(0,0)$ вдоль прямой $y=k\,x$. Мы имеем

$$f(x,y)\Big|_{y=kx} = \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}\ ,$$

т.е. вдоль этих прямых функция тождественно равна различным постоянным $\frac{k}{1+k^2}$[3]. Таким образом, предел функции f в точке $(0,0)$ отсутствует.

§5. Повторные пределы

Кроме рассматриваемого выше предела функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ при одновременном стремлении всех аргументов к их предельным значениям, часто встречаются и пределы другого рода, получаемые как результат ряда последовательных предельных переходов по каждому переменному в отдельности. Такие пределы носят название *повторных.*

[3] и, тем самым, имеет вдоль этих направлений разные пределы

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $z = f(x, y)$ – функция, определенная всюду в прямоугольнике*

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x_1 < x < x_2, y_1 < y < y_2\}$$

за возможным исключением точки $(x_0, y_0) \in R$. Предположим, что

i) существует (конечный или нет) предел

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A;$$

ii) при любом $y \in (y_1, y_2)$ существует (конечный) предел по x

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y) = \varphi(y).$$

Тогда существует повторный предел

$$\lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y) = A.$$

Доказательство. Докажем теорему в предположении, что $A \neq \pm\infty$. В указанных исключительных случаях проведите доказательство самостоятельно.

Условие i) влечет, что $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall \ (x, y) \neq (x_0, y_0)$, удовлетворяющих условию

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta(\varepsilon)\,,$$

выполнено

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon. \tag{1}$$

Неравенство (1) выполняется, в частности, и при всех $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, лежащих в квадрате

$$|x - x_0| < \frac{\delta(\varepsilon)}{\sqrt{2}}, \quad |y - y_0| < \frac{\delta(\varepsilon)}{\sqrt{2}}.$$

Зафиксируем y, подчиненный условию $|y - y_0| < \frac{\delta(\varepsilon)}{\sqrt{2}}$. Переходя к пределу при $x \to x_0$, получаем

$$|\lim_{x\to x_0} f(x, y) - A| = |\varphi(y) - A| \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Таким образом, $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall\, y$, $|y - y_0| < \frac{\delta(\varepsilon)}{\sqrt{2}}$, выполнено (2), а потому повторный предел существует и равен A. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. Если в условиях теоремы $\forall\, x \in (x_1, x_2)$ существует конечный предел $\lim_{y\to y_0} f(x,y)$, то существуют повторные пределы

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

КОНТРПРИМЕРЫ. Укажем некоторые примеры, показывающие существенность требований, накладываемых в условиях теоремы.

1) Повторные пределы существуют, но не равны:

$$f(x,y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x+y}\,,$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x} = 1\,,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{-y+y^2}{y} = -1.$$

(Здесь не существует двойной предел.)

2) Существует двойной предел, но нельзя говорить о повторных:

$$f(x,y) = x\sin\frac{1}{y}.$$

Так как

$$|x\sin\frac{1}{y}| \le |x| \le \sqrt{x^2+y^2}\,,$$

то существует двойной предел

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Здесь нельзя говорить о повторном пределе

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}\,,$$

поскольку предел

$$\lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$$

не существует.

§6. Основные свойства непрерывных функций нескольких переменных

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – функция, непрерывная в точке $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$, а функции*

$$x_1 = x_1(t)\,, x_2 = x_2(t)\,, \ldots, x_n = x_n(t)$$

непрерывны в точке t_0, где $x_0 = x(t_0)$. Тогда, если определена сложная функция

$$\Phi(t) = f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))\,,$$

то она также непрерывна при $t = t_0$.

Доказательство. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Так как f непрерывна, то найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, выполнено

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Каждая из функций $x_k(t)$ непрерывна в t_0 и потому при любом $k = 1, 2, \ldots, n$ существуют $\delta_k(\delta(\varepsilon)) > 0$ такие, что

$$|x_k(t) - x_k(t_0)| < \frac{\delta(\varepsilon)}{\sqrt{n}}\,, \text{лишь только} \quad |t - t_0| < \delta_k(\delta(\varepsilon)).$$

Положим

$$\Delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\delta(\varepsilon)), \ldots, \delta_n(\delta(\varepsilon))\}.$$

При всех t, $|t - t_0| < \Delta(\varepsilon)$, имеем

$$|x(t) - x(t_0)| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k(t) - x_{0k}|^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\delta(\varepsilon)}{\sqrt{n}}\right)^2} = \delta(\varepsilon)$$

и, далее,

$$|\Phi(t) - \Phi(t_0)| < \varepsilon.$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулировать и доказать теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных функций.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Дать определения максимума и минимума функции нескольких переменных. Сформулировать и доказать теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции и о существовании максимума и минимума непрерывной функции нескольких переменных.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Дать определение равномерной непрерывности функции нескольких переменных. Доказать теорему Кантора о равномерной непрерывности.

§7. Понятие области. Теорема об обращении функции в нуль

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Множество $D \subset \mathbf{R}^n$ называется *связным*, если любые две его точки можно соединить ломаной, состоящей из конечного числа звеньев и целиком содержащейся в D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Открытое связное множество $D \subset \mathbf{R}^n$ называется *областью.*

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать, что шар в $\mathbf{R}^n$ (без ограничивающей его сферы) и эллипсоид (без ограничивающей его поверхности) являются областями.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Привести примеры открытых множеств, не являющихся областями.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Если D_1 и D_2 – области в $\mathbf{R}^n$, причем $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, то $D_1 \cup D_2$ – также область (доказать!)

ТЕОРЕМА 7.1. *Если функция $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна в области $D \subset \mathbf{R}^n$ и принимает в этой области значения разных знаков, то найдется точка $\xi \in D$, в которой $f(\xi) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что в точках $(x'_1, \ldots, x'_n)$ и $(x''_1, \ldots, x''_n)$ области $D \subset \mathbf{R}^n$ функция f принимает значения разных знаков. Так как D есть область, то найдется ломаная, состоящая из конечного числа прямолинейных звеньев, соединяющая эти точки и целиком содержащаяся в D. Тогда либо в какой-либо из вершин этой ломаной функция f обращается в нуль, либо найдется отрезок, на концах которого f принимает значения разных знаков.

Пусть таковым является отрезок $\overline{ab}$, где $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$. Параметрические уравнения, описывающие этот отрезок, имеют вид

$$\begin{cases} x_1 = & (1-t)a_1 + tb_1\,, \\ x_2 = & (1-t)a_2 + tb_2\,, \\ & \ldots\ldots \\ x_n = & (1-t)a_n + tb_n\,, \quad t \in [0,1]. \end{cases}$$

При изменении параметра t на $[0,1]$ точка $x = (x_1, \dots, x_n)$ перемещается вдоль отрезка $\overline{ab}$.

Рассмотрим сложную функцию

$$\Phi(t) = f((1-t)a_1 + tb_1, \dots, (1-t)a_n + tb_n).$$

Ясно, что

$$\Phi(0) = f(a) \quad \text{и} \quad \Phi(1) = f(b).$$

Функция Φ непрерывна, поскольку является композицией непрерывных функций. На концах отрезка $[0,1]$ она принимает значения разных знаков. По теореме об обращении в нуль непрерывных функций одной переменной найдется точка $\tau \in (0,1)$, в которой $\Phi(\tau) = 0$. Тем самым, в точке

$$(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = ((1-\tau)a_1 + \tau b_1, \dots, (1-\tau)a_n + \tau b_n) \in D$$

функция f обращается в нуль. Теорема доказана.

$\square$

§8. Частные производные

Пусть $z = f(x,y)$ – функция двух переменных, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^2$, и пусть $(x_0, y_0) \in D$ – некоторая точка. Так как D есть открытое множество, то все точки (x,y) из достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) принадлежат D и определено частное приращение

$$\Delta_x z = \Delta_x f(x_0, y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

функции f в точке (x_0, y_0) по переменной x.

Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

то этот предел называется частной производной функции f по переменной x в точке (x_0, y_0) и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Аналогичным образом определяется частная производная

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0),$$

а также частные производные функций трех и более переменных.

Предположим, что частная производная $\frac{\partial f}{\partial x}$ определена в каждой точке открытого множества D. Тем самым, в D определена функция $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ и можно рассматривать ее производные

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y).$$

Аналогично определяем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k\,\partial y^l}(x,y).$$

ПРИМЕР 1. Найдем $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}$, если

$$f(x,y)=\sin x+y^3.$$

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2\,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y\,, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=0.$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ. Существование частных производных в точке, вообще говоря, не гарантирует даже непрерывности функции в данной точке. К примеру, функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{при} \quad x^2+y^2>0\,,\\[2ex] 0 & \text{при} \quad x^2+y^2=0\end{cases}$$

имеет частные производные в точке $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x}=0\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0\,,$$

однако является разрывной в этой точке.

§9. Полный дифференциал

Пусть $z=f(x,y)$ – функция, определенная на открытом множестве $D\subset\mathbf{R}^2$, и пусть $(x_0,y_0)\in D$ – некоторая точка. Обозначим $\Delta x=x-x_0$, $\quad \Delta y=y-y_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Говорят, что f имеет *полный дифференциал* в точке (x_0, y_0), если найдутся постоянные A и B такие, что ее приращение в окрестности этой точки представимо в виде

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = A\,\Delta x + B\,\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

при $(\Delta x, \Delta y) \to 0$.

Величина

$$df(x_0, y_0) \equiv A\,\Delta x + B\,\Delta y$$

называется в этом случае полным дифференциалом.

По определению, дифференциалы независимых переменных определяются формулами $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$.

Если функция f имеет полный дифференциал в точке (x_0, y_0), то она называется *дифференцируемой* в этой точке.

ТЕОРЕМА 9.1. *Если функция f имеет полный дифференциал в точке (x_0, y_0), то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство очевидно, поскольку из существования полного дифференциала следует, что

$$\Delta f(x_0, y_0) \to 0 \quad \text{при} \quad (\Delta x, \Delta y) \to 0.$$

ТЕОРЕМА 9.2. *Если функция f имеет полный дифференциал в точке $(x_0, y_0) \in D$, то она имеет и частные производные в этой точке, причем*

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,dy.$$

Доказательство. Действительно, из существования полного дифференциала следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\,\Delta x + o(\sqrt{\Delta x^2})}{\Delta x} = A\,,$$

и, аналогично,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{B\,\Delta y + o(\sqrt{\Delta y^2})}{\Delta y} = B.$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. Дать определение дифференциала функции n переменных.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказать приведенные выше теоремы для дифференцируемых функций n переменных.

§10. Условия существования полного дифференциала

Пусть $z = f(x, y)$ – функция, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^2$, и пусть $(x_0, y_0) \in D$ – некоторая точка.

ТЕОРЕМА 10.1. *Если функция f имеет частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ в каждой точке из некоторой окрестности точки (x_0, y_0) и частные производные непрерывны в (x_0, y_0), то f имеет в (x_0, y_0) полный дифференциал.*

Доказательство. Представим приращение функции в виде

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$
$$= \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)} +$$
$$+ \overbrace{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}.$$

Рассматривая функцию $f(x_0, y)$ как функцию одной переменной y (первая переменная фиксирована) и, пользуясь формулой Лагранжа, имеем

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta)\, \Delta y\,,$$

где η – некоторое число, заключенное между y_0 и $y_0 + \Delta y$.

Отсюда, учитывая непрерывность частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ в точке (x_0, y_0), получаем

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, \Delta y +$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \eta) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \Delta y =$$
$$= \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, \Delta y + o(\Delta y) \quad (\Delta y \to 0).$$

Аналогично находим

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, \Delta x +$$

$$+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}) \quad (\Delta x, \Delta y \to 0).$$

Таким образом, мы приходим к соотношению

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\Delta y+$$

$$+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}) \quad (\Delta x, \Delta y \to 0)\,,$$

что и требуется доказать. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. Функцию f будем называть *непрерывно дифференцируемой* в области D, если в каждой точке области функция имеет непрерывные частные производные.

Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ - область, $n \geq 2$. Нам потребуется понятие *кусочно-гладкой* функции. Именно, будем говорить, что функция $f : D \to \mathbf{R}^1$ является кусочно-гладкой, если f непрерывна в D и область D может быть разбита на подобласти $D_1, ..., D_l$ так, чтобы функция f была непрерывно дифференцируема в каждой из D_i, $1 \leq i \leq l$, а для достаточно малых окрестностей U_a каждой из точек $a \in D \cap \cup_{j=1}^{l} \partial D_j$ выполнялось

$$\sup_x \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right| < +\infty \quad (i=1,...,n),$$

где точная верхняя грань берется по множеству

$$\{x \in U_a \setminus D \cap \cup_{j=1}^{l} \partial D_j\}.$$

Вектор-функция $f=(f_1,...,f_m) : D \to \mathbf{R}^m$ называется кусочно-гладкой, если кусочно-гладкой является каждая из функций $f_i, i=1,...,m$.

Определение кусочно-гладкой вектор-функции в случае $n = 1$ вводится очевидным образом.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулировать и доказать аналогичную теорему для функций n переменных.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Какие из ранее доказанных результатов используются в процессе доказательства данной теоремы?

§11. Равенство смешанных производных. Конечно-разностная аппроксимация частных производных второго порядка

ТЕОРЕМА 11.1. *Предположим, что функция $f(x, y)$ определена на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^2$ и обладает там следующими свойствами:*
i) для всякой точки $(x, y) \in D$ существуют производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$;
ii) для всякой точки $(x, y) \in D$ существуют вторые производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$;
iii) производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y)$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x, y)$ непрерывны в точке $(x_0, y_0) \in D$.
Тогда

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0, y_0).$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

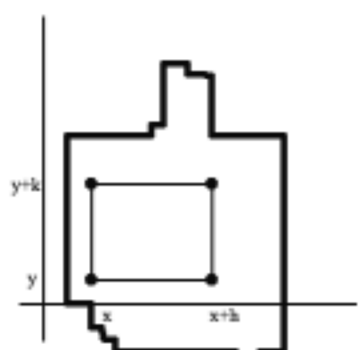
$$\Delta_{hk} f = \frac{1}{h\,k}\left[f(x_0 + h, y_0 + k) - \right.$$

$$\left. - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)\right],$$

где $h, k \neq 0$ и прямоугольник с вершинами в точках

$$(x_0, y_0), \quad (x_0 + h, y_0), \quad (x_0, y_0 + k), \quad (x_0 + h, y_0 + k)$$

содержится целиком в D.



Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{k}\left[f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)\right].$$

Данная функция имеет производную, а потому непрерывна. Мы имеем

$$\Delta_{hk} f = \frac{1}{h}\left[\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)}{k} - \right.$$

$$\left. - \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}\right] = \frac{1}{h}\left[\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)\right].$$

По формуле конечных приращений Лагранжа найдется точка ξ, лежащая между x_0, x_0+h и такая, что

$$\frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h} = \varphi'(\xi)\,,$$

т.е.

$$\Delta_{hk} f = \varphi'(\xi) \text{ или } \Delta_{hk} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)\right] \Big/ k.$$

Рассматривая данную функцию как функцию второй переменной и пользуясь еще раз формулой Лагранжа, приходим к равенству

$$\Delta_{hk} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(\xi, \eta)\,,$$

где η – некоторая точка между y_0 и y_0+k.

Аналогичным образом, вводя вспомогательную функцию

$$\psi(y) = \frac{1}{h}\left[f(x_0+h, y) - f(x_0, y)\right]\,,$$

приходим к формуле

$$\Delta_{hk} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(\xi_1, \eta_1)\,,$$

где ξ_1 содержится между x_0 и x_0+h, а η_1 – между y_0 и y_0+k.

Полагая $h, k \to 0$ и учитывая, что смешанные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

непрерывны в точке (x_0, y_0), получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h,k\to 0} \Delta_{hk} f = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x_0, y_0)\,,$$

что и требовалось доказать. □

ЗАМЕЧАНИЕ. В процессе доказательства мы установили, что в условиях теоремы величина

$$\frac{f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0)}{h^2}$$

стремится к смешанной производной $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)$ при $h\to 0$. Таким образом, при вычислениях на ЭВМ производную $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)$ можно приближенно считать равной указанной величине, т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)\approx\frac{f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0)}{h^2}.$$

В точности также устанавливается, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\approx\frac{f(x_0+h,y_0)-2f(x_0,y_0)+f(x_0-h,y_0)}{h^2} \qquad (1)$$

и

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\approx\frac{f(x_0,y_0+h)-2f(x_0,y_0)+f(x_0,y_0-h)}{h^2}. \qquad (2)$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулировать и доказать аналогичную теорему о равенстве смешанных производных

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

для функций n переменных.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Проверить формулы (1) и (2). В каких предположениях о функции f и ее производных мы можем доказать эти формулы ?

§12. Частные производные сложной функции

Пусть $z=f(x,y)$ – функция, определенная в окрестности точки (x_0,y_0), а функции $x=x(t)$, $y=y(t)$ – в окрестности точки t_0, $(x_0,y_0)=(x(t_0),y(t_0))$, причем определена сложная функция $z=f(x(t),y(t))\equiv\Phi(t)$.

ЗАДАЧА. Как вычислить производную сложной функции $\frac{d\Phi}{dt}$? При каких условиях эта производная существует?

Придадим переменной t в точке t_0 приращение Δt. Тогда функции $x(t)$ и $y(t)$ получат приращения

$$\Delta x=x(t_0+\Delta t)-x(t_0)\quad\text{и}\quad\Delta y=y(t_0+\Delta t)-y(t_0).$$

Заметим, что

$$\Delta\Phi = \Phi(t_0 + \Delta t) - \Phi(t_0) = f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) -$$

$$- f(x(t_0), y(t_0)) = f(x(t_0+\Delta t), y(t_0+\Delta t)) - f(x(t_0+\Delta t), y(t_0)) +$$

$$+ f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0)) - f(x(t_0), y(t_0)).$$

Отсюда вытекает

$$\frac{d\Phi}{dt}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0))}{\Delta t} +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0)) - f(x(t_0), y(t_0))}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0))}{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)} \cdot \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0)) - f(x(t_0), y(t_0))}{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)} \cdot \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \equiv I + II.$$

Если функция $x(t)$ имеет производную в t_0, то она непрерывна в t_0 и

$$\Delta x = x(t_0 + \Delta t) - x(t_0) \to 0$$

при $\Delta t \to 0$. Поэтому слагаемое II можно записать в виде

$$II = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0)) - f(x(t_0), y(t_0))}{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)} \times$$

$$\times \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{dx}{dt}(t_0).$$

В данных рассуждениях мы использовали существование частной производной $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

С первым из слагаемых так поступать нельзя, поскольку приращение получают обе переменные x и y. Поэтому предположим, что f имеет полный дифференциал в точке (x_0, y_0). Тогда

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y +$$

$$+ o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

и мы получаем

$$f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - f(x(t_0 + \Delta t), y(t_0)) =$$

$$= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) =$$

$$= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) - f(x_0+\Delta x, y_0) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) -$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\Delta x + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\Delta y +$$

$$+o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

Отсюда,

$$I = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})}{\Delta y} \right) \times$$

$$\times \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0).$$

Анализируя накладываемые требования и вспоминая условия, при которых $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) полный дифференциал, приходим к утверждению.

ТЕОРЕМА 12.1. *Если $f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) непрерывные частные производные, а функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют производные при $t = t_0$, то существует производная сложной функции $\Phi(t) = f(x(t), y(t))$ при t_0, вычисляемая по формуле*

$$\frac{d\Phi}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\frac{dy}{dt}(t_0).$$

Почти в точности так же, как и предыдущая теорема, доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 12.2. *Предположим, что функция $f(x,y,z)$ имеет в точке (x_0,y_0,z_0) непрерывные частные производные, а функции $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ – непрерывные частные производные в точке (u_0,v_0), где*

$$x_0 = x(u_0,v_0)\,, \quad y_0 = y(u_0,v_0)\,, \quad z_0 = z(u_0,v_0).$$

Если сложная функция $\Phi(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ определена в окрестности точки (u_0,v_0), то она имеет в этой точке частные производные, причем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0,v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)$$

и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) +$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0).$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. В каком месте доказательства используется предположение о непрерывности частных производных в точке ?

УПРАЖНЕНИЕ 2. Сформулировать и доказать приведенные выше теоремы для функций n переменных.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Попробуйте привести более "сжатое" доказательство теоремы 12.1.

§13. Полный дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала

Предположим, что задана дифференцируемая функция

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \quad \text{где} \quad x_i = x_i(t_1, t_2, \ldots, t_k) \; -$$

также дифференцируемые функции k переменных. Ее полный дифференциал подсчитывается по формуле

$$du = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u}{\partial t_i}\, dt_i. \tag{1}$$

Заметим, однако, что, пользуясь правилом вычисления частной производной сложной функции, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}.$$

Отсюда, учитывая (1), находим

$$du = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial x_j} \tfrac{\partial x_j}{\partial t_i} \right) dt_i \ = \sum_{j=1}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial x_j} \overbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x_j}{\partial t_i} dt_i}^{dx_j} = $$

$$= \sum_{j=1}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \, ,$$

т.е.

$$du = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j. \qquad (2)$$

Вывод. Дифференциал сложной функции всегда можно вычислять по формуле (2) независимо от того являются ли x_j функциями переменных $t_1, t_2, \dots, t_k$ либо независимыми переменными.

Данное свойство описывает инвариантность формы первого дифференциала функции нескольких переменных.

§14. Дифференциалы высшего порядка

Предположим, что на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^n$ задана некоторая функция $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, имеющая непрерывные частные производные. Тогда, как нам известно, существует полный дифференциал

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_i.$$

Данная величина (если зафиксировать $dx_i = \Delta x_i$) является функцией переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ и мы можем ставить вопрос о ее дифференциале. Так, если функции $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ имеют непрерывные частные производные или, что то же самое, функция f имеет на D непрерывные вторые производные, то существует второй дифференциал

$$d^2 f \equiv d(df) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i\right) dx_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i\, dx_j.$$

Аналогично определяются дифференциалы третьего порядка и т.д. по индукции.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Показать, что дифференциал второго порядка не обладает свойством инвариантности формы.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Проверить для $n = 2, 3, 4$ следующую "операторную" форму вычисления дифференциала n-го порядка

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^n f.$$

Попробуйте доказать эту формулу в общем случае.

§15. Однородные функции. Формула Эйлера

Функция $f(x, y, z)$ называется *однородной функцией степени* s, если для любого $t > 0$ выполнено

$$f(tx, ty, tz) = t^s f(x, y, z). \qquad (1)$$

ПРИМЕР 1. Пусть α – произвольное вещественное число. Функция

$$f(x, y, z) = x^\alpha \sin\frac{x}{y} + y^\alpha \cos\frac{x}{y} + z^\alpha \frac{x+y}{z}$$

является однородной степени α.

Найдем общее выражение для однородной функции. Пусть $f(x, y, z)$ есть однородная функция *нулевой степени*, т.е.

$$f(tx, ty, tz) = f(x, y, z) \quad \forall\, t > 0.$$

Положим $t = \frac{1}{x}$. Тогда

$$f(x, y, z) = f(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}) \equiv \tilde{f}\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

т.е. *однородная функция нулевой степени представляется в виде функции отношений всех аргументов к одному из них.*

Пусть теперь $f(x, y, z)$ однородна степени s. Тогда функция $f(x, y, z)/x^s$ является однородной степени 0, а потому

$$\frac{f(x, y, z)}{x^s} = \tilde{f}\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Тем самым, приходим к общему виду однородной функции степени s

$$f(x, y, z) = x^s\,\tilde{f}\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

Предположим, что однородная степени s функция $f(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные по каждой из переменных. Продифференцируем обе части равенства (1) по переменной t. Мы имеем

$$f'_x(tx, ty, tz)x + f'_y(tx, ty, tz)y + f'_z(tx, ty, tz)z = st^{s-1}f(x, y, z).$$

В частности, при $t = 1$ приходим к формуле Эйлера

$$f'_x(x, y, z)\,x + f'_y(x, y, z)\,y + f'_z(x, y, z)\,z = s\,f(x, y, z).$$

Можно показать, что всякая функция, имеющая непрерывные частные производные и удовлетворяющая формуле Эйлера, является однородной функцией степени s (Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, раздел 188).

УПРАЖНЕНИЕ 1. Указать области определения однородных функций. Могут ли эти области быть произвольными?

УПРАЖНЕНИЕ 2. Привести примеры недифференцируемых однородных функций степени $s > 1$.

§16. Производная по направлению и градиент

Пусть $z = f(x, y)$ – функция, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^2$. Пусть $(x_0, y_0) \in D$ – некоторая точка и пусть $\overline{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ – единичный вектор, задающий направление в точке (x_0, y_0). Уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0) в направлении $\overline{e}$ имеют вид

$$x(t) = x_0 + t\,\cos\alpha\,, \quad y(t) = y_0 + t\,\sin\alpha.$$

Сужение функции f на эту прямую есть функция переменной t, описываемая равенством $z = f(x(t), y(t))$ или, что то же самое,

$$z = f(x_0 + t\,\cos\alpha\,, y_0 + t\,\sin\alpha).$$

Данная функция определена, по крайней мере, для достаточно малых t, поэтому можно ставить вопрос о ее производной при $t = 0$. Эта производная называется *производной по направлению* $\overline{e}$ функции двух переменных f в точке (x_0, y_0) и обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{e}}(x_0, y_0).$$

Как следует из правила дифференцирования сложной функции, если f имеет в D непрерывные частные производные, то для производной по направлению $\overline{e}$ справедлива следующая формула

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{e}}(x_0, y_0) \equiv \frac{dz}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \, \cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \, \sin\alpha. \quad (1)$$

Градиентом функции f в точке (x_0, y_0) называется вектор

$$\nabla f(x_0, y_0) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) \equiv \operatorname{grad} f(x_0, y_0).$$

Если воспользоваться этим символом, то формула (1) переписывается в следующем виде

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{e}}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \overline{e} \rangle. \quad (2)$$

Из определения производной по направлению следует, что она описывает скорость роста функции в точке (x_0, y_0) в направлении вектора $\overline{e}$. Выясним геометрический смысл градиента.

Предположим, что точка $(x_0, y_0) \in D$ не является *критической*, т.е. выполнено $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$. Соотношение (2) влечет, что

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{e}}(x_0, y_0) = |\nabla f(x_0, y_0)| \cdot |\overline{e}| \cdot \cos\theta = |\nabla f(x_0, y_0)| \, \cos\theta \, ,$$

где θ – угол между векторами $\overline{e}$ и $\nabla f(x_0, y_0)$. Поэтому минимальное и максимальное значения производной $\frac{\partial f}{\partial \overline{e}}(x_0, y_0)$ достигаются, соответственно, при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, т.е. при

$$\overline{e} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|} \quad \text{и} \quad \overline{e} = -\frac{\nabla f(x_0, y_0)}{|\nabla f(x_0, y_0)|}.$$

Вывод. Градиент функции в некритической точке (x_0, y_0) – это вектор, направление которого указывает направление наибольшего подъема функции в этой точке, а длина равна абсолютной величине производной по этому направлению.

Аналогичным образом определяются производная по направлению и градиент функции большего числа переменных. Пусть $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда, по определению,

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

и, если, $\overline{e} = (\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \ldots, \cos\alpha_n)$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} \cos^2\alpha_i = 1$, то

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{e}}(a) = \langle \nabla f(a), \overline{e} \rangle.$$

ПРИМЕР 1. Найдем направление наибольшего подъема функции

$$z = x^2 - \frac{y^2}{2}$$

в точке $(1, 1)$ и производную в этом направлении.

Для градиента функции в точке $(1, 1)$ имеем

$$\nabla z(1,1) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(1,1), \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)\right) = (2, -1) \neq 0.$$

Находим направление наибольшего подъема

$$\overline{e} = \frac{\nabla z(1,1)}{|\nabla z(1,1)|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

и, далее, производную в этом направлении

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{e}}(1,1) = \left\langle \nabla z(1,1), \frac{\nabla z(1,1)}{|\nabla z(1,1)|} \right\rangle = |\nabla z(1,1)| = \sqrt{5}.$$

□

§17. Формула Тейлора для функций нескольких переменных

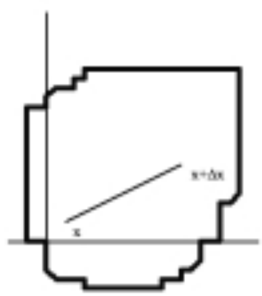
ТЕОРЕМА 17.1. *Пусть* $y = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ – *функция, определенная в области* $D \subset \mathbf{R}^n$ *и имеющая там непрерывные частные производные вплоть до порядка* $(N+1)$ *включительно. Пусть точки* $x_0 = (x_{01}, \ldots, x_{0n})$ *и* $x_0 + \Delta x = (x_{01} + \Delta x_1, \ldots, x_{0n} + \Delta x_n)$ *и соединяющий их отрезок* $[x_0, x_0 + \Delta x]$ *принадлежат* D. *Тогда существует точка* $\theta \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ *такая, что*

$$\Delta f(x_0) = \sum_{k=1}^{N} \frac{d^{(k)} f(x_0)}{k!} + \frac{d^{(N+1)} f(\theta)}{(N+1)!}.$$

Доказательство. Введем новую переменную $t \in [0,1]$, и пусть

$$x = x_0 + t\,\Delta x = \begin{cases} x_1 &= x_{01} + t\,\Delta x_1 \\ & \ldots\ldots \\ x_n &= x_{0n} + t\,\Delta x_n. \end{cases}$$

При изменении параметра t в пределах отрезка $[0,1]$ точка $x = x_0 + t\,\Delta x$ движется вдоль отрезка $[x_0, x_0 + \Delta x]$.



Рассмотрим сложную функцию $y = F(t) = f(x_0 + t\,\Delta x)$, где $t \in [0,1]$. Данная функция имеет непрерывные производные вплоть до порядка $N+1$ включительно и, на основании формулы Тейлора для одномерного случая, имеем

$$F(1) - F(0) = \sum_{k=1}^{N} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}\,,$$

где $\xi \in [0,1]$.

Пользуясь формулой для вычисления частных производных от сложной функции, получаем

$$F^{(1)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + t\,\Delta x) \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + t\,\Delta x)\,\Delta x_i\,,$$

$$F^{(2)}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + t\,\Delta x)\,\Delta x_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x_0 + t\,\Delta x)\,\Delta x_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x_0 + t\,\Delta x)\,\Delta x_i\,\Delta x_j$$

и так далее $N+1$ раз.

Отсюда, при $t=0$ получаем

$$\begin{aligned}
F^{(1)}(0) \quad &= \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\,\Delta x_i = df(x_0)\,,\\
F^{(2)}(0) \quad &= \sum_{i,j=1}^{n} \tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x_0)\,\Delta x_i\,\Delta x_j = d^{(2)}f(x_0)\,,\\
&\ldots\ldots\\
F^{(N)}(0) \quad &= d^{(N)}f(x_0).
\end{aligned}$$

Наконец, замечая, что при $\xi \in [0,1]$ точка
$\theta = x_0 + \xi\,\Delta x \in [x_0, x_0 + \Delta x]$, получаем

$$F^{(N+1)}(\xi) = d^{(N+1)}f(x_0 + \xi\,\Delta x) = d^{(N+1)}f(\theta).$$

Теорема доказана. □

УПРАЖНЕНИЕ 1. Формула Тейлора с центром в точке $x_0 = 0$ называется формулой Маклорена. Разложить по формуле Маклорена с точностью до бесконечно малых третьего порядка функцию $z = e^{xy}$.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Пользуясь операторной формой записи для дифференциалов k-го порядка, показать, что формулу Тейлора можно записать следующим образом

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n\right)^k f(x_0) + R_{N+1}$$

где остаточный член имеет вид

$$R_{N+1} = \frac{1}{(N+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n\right)^{(N+1)} f(\theta)$$

и $\theta = x_0 + \xi\,\Delta x$ – некоторая точка отрезка $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

§18. Необходимые условия локального экстремума функции нескольких переменных

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функция, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^n$. Пусть $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ – точка в D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.1. Говорят, что $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный минимум*, если

$$f(x_0) \leq f(x)$$

для всех x из некоторой окрестности x_0. Если для всех $x \neq x_0$ из данной окрестности выполнено

$$f(x_0) < f(x),$$

то, говорят, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет *строгий локальный минимум.*

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 *локальный максимум*, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполнено

$$f(x_0) \geq f(x).$$

Если для всех $x \neq x_0$ из данной окрестности выполнено

$$f(x_0) > f(x),$$

то, говорят, что в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет *строгий локальный максимум.*

Функция f имеет в x_0 *локальный экстремум*, если она имеет в этой точке либо локальный минимум, либо локальный максимум.

ТЕОРЕМА 18.1. *Пусть $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – функция n переменных, определенная в области $D \subset \mathbf{R}^n$ и имеющая там частные производные первого порядка. Если $x_0 \in D$ является точкой локального экстремума функции f, то*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \text{для всех} \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию одной переменной

$$F(x_1) = f(x_1\,, x_{02}, \dots, x_{0n}).$$

Данная функция имеет при $x_1 = x_{01}$ локальный экстремум и по соответствующей теореме для одномерного случая можем записать

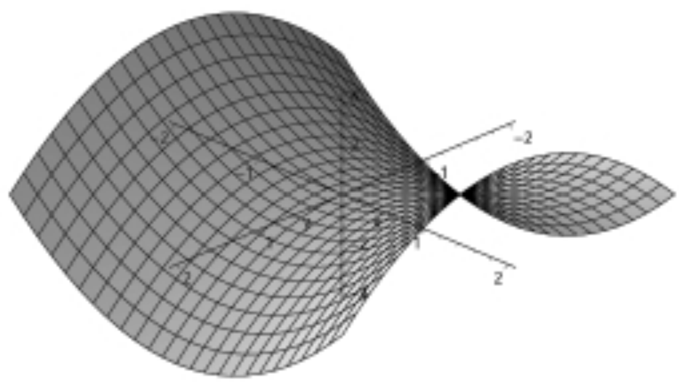
$$\frac{dF}{dx_1}(x_{01}) = 0\,, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}\,, x_{02}, \dots, x_{0n}) = 0.$$

Рассуждая так при любом фиксированном $i = 2, \ldots, n$, убеждаемся в справедливости системы равенств (1). Теорема доказана.

□

Как и в случае одной переменной, условия (1) не являются достаточными для существования в точке локального экстремума. Точки области D, в которых имеют место соотношения (1), называются *критическими* или точками, *подозрительными на экстремум.*

ПРИМЕР 1. Функция $z = y^2 - x^2$ не имеет в точке $(0,0)$ ни локального максимума ни локального минимума, однако $z'_x(0,0) = z'_y(0,0) = 0$. Точка $(0,0)$ является *седловой точкой* графика.



□

§19. Достаточные условия локального экстремума функции нескольких переменных

Пусть $y = f(x)$ – трижды непрерывно-дифференцируемая функция n переменных, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^n$ и пусть x_0 – критическая точка функции f. На основании формулы Тейлора, имеем

$$\Delta f(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \frac{d^3 f(\theta)}{3!},$$

где $\theta \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ – некоторая точка, или, в развернутом виде,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x_0) \, dx_i dx_j +$$

$$+ \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \, \partial x_j \, \partial x_k}(\theta) \, dx_i dx_j dx_k.$$

Напомним терминологию и некоторые факты из алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19.1. Функция упорядоченной пары (x, y) точек n-мерного пространства вида

$$A(x, y) = A(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j,$$

где a_{ij} – заданные числа, называется билинейной формой от x и y.

Величина $A(x) = A(x, x)$ называется квадратичной формой, соответствующей билинейной форме $A(x, y)$.

Обозначим через $Q_f(dx)$ квадратичную форму

$$Q_f(dx) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(x_0) \, dx_i dx_j.$$

Квадратичная форма $Q_f(dx)$ называется *положительно определенной (полуопределенной)*, если для любого $dx = (dx_1, \ldots, dx_n) \neq 0$ выполнено $Q_f(dx) > 0$ $(Q_f(dx) \geq 0)$ и *отрицательно определенной (полуопределенной)*, если $Q_f(dx) < 0$ $(Q_f(dx) \leq 0)$ при всех $dx = (dx_1, \ldots, dx_n) \neq 0$. Если существуют векторы $\widetilde{dx}$ и $\widetilde{\widetilde{dx}}$ такие, что $Q_f(\widetilde{dx}) < 0$, но $Q_f(\widetilde{\widetilde{dx}}) > 0$, то квадратичная форма называется *неопределенной.*

Известно следующее правило Сильвестра[4] (или критерий

[4]Сильвестр Джемс Джозеф (3.9.1814-15.3.1897). Род. в Лондоне (Англия). Член Лондонского королевского общества (1841), иностранный член Петербургской АН (1872). Важнейшие работы относятся к алгебре, теории чисел, теории вероятностей, механике, математической физике.

Сильвестра). Рассмотрим матрицу

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

и обозначим через δ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ее главные миноры

$$\delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \delta_2 = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}, \quad \ldots,$$

$$\delta_n = \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\right).$$

ТЕОРЕМА 19.1 (критерий Сильвестра). *Для того чтобы квадратичная форма $Q_f(dx)$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0, \quad \delta_3 > 0, \quad \cdots, \quad \delta_n > 0.$$

Для того чтобы квадратичная форма $Q_f(dx)$ была отрицательно определенной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\delta_1 < 0, \quad \delta_2 > 0, \quad \delta_3 < 0, \quad \cdots, \quad (-1)^n \delta_n > 0.$$

Докажем следующее достаточное условие для локального экстремума функции нескольких переменных.

ТЕОРЕМА 19.2. *Пусть $y = f(x)$ – трижды непрерывно дифференцируемая на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^n$ функция и $x_0 \in D$ – ее критическая точка. Если в этой точке $Q_f(dx) > 0$ ($Q_f(dx) < 0$), то f имеет в x_0 локальный минимум (максимум). Если $Q_f(dx)$ является в этой точке неопределенной квадратичной формой, то f не имеет в x_0 локального экстремума.*

Доказательство. В качестве первого шага оценим остаточный член в тейлоровском разложении. Мы имеем

$$\frac{d^3 f(\theta)}{3!} = \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}(\theta)\, dx_i dx_j dx_k\,, \quad \theta \in [x_0, x_0 + \Delta x].$$

Так как производные третьего порядка непрерывны, то найдутся постоянные $A > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}(x)\right| \le A \quad \forall\, x\,, |x - x_0| < \varepsilon \quad \text{и} \;\; \forall\; i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Поэтому, выбирая $|\Delta x| < \varepsilon$, будем иметь $|\theta - x_0| < \varepsilon$ и, следовательно,

$$\left|\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i\, \partial x_j\, \partial x_k}(\theta) dx_i dx_j dx_k\right| \le A \sum_{i,j,k=1}^{n} |dx_i|\, |dx_j|\, |dx_k| =$$

$$= A \sum_{i=1}^{n} |dx_i| \;\sum_{j=1}^{n} |dx_j| \;\sum_{k=1}^{n} |dx_k| \le A\, n^{3/2} |dx|^3.$$

Здесь использовано следующее неравенство, получаемое с помощью неравенства Коши (докажите его!),

$$\sum_{i=1}^{n} |dx_i| \le \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} dx_i^2} = \sqrt{n}\, |dx|.$$

Тем самым,

$$\left|\frac{d^3 f(\theta)}{3!}\right| \le \frac{A n^{3/2}}{6}\, |dx|^3$$

и

$$\left|\frac{d^3 f(\theta)}{3!}\right| = o(|dx|^2). \tag{1}$$

Сделаем второй шаг. Предположим, что квадратичная форма $Q_f(dx) > 0$ в x_0. Рассматривая ее как функцию переменной $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ на единичной сфере $|dx| = 1$ и, пользуясь теоремой Вейерштрасса о достижимости точной нижней грани непрерывной функции на замкнутом ограниченном множестве, заключаем, что

$$Q_f(dx) \ge c > 0 \quad \text{для всех} \quad dx, \;\; |dx| = 1\,,$$

где

$$c = \min_{|dx|=1} Q_f(dx).$$

Для произвольного dx мы имеем $|dx/|dx||=1$, а потому

$$Q_f(\frac{dx}{|dx|})=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(x_0)\,\frac{dx_i}{|dx|}\,\frac{dx_j}{|dx|}\geq c\,,$$

откуда

$$Q_f(dx)=|dx|^2\,Q_f(\frac{dx}{|dx|})\geq c\,|dx|^2.$$

Пользуясь тейлоровским разложением для $\Delta f(x_0)$ и учитывая вид (1) остаточного члена, получаем

$$\Delta f(x_0)=\tfrac{1}{2}Q_f(dx)+o(|dx|^2)\geq$$

$$\geq\tfrac{c}{2}|dx|^2+o(|dx|^2)=\tfrac{c}{2}\,|\Delta x|^2+o(|\Delta x|^2)\quad(\Delta x\to 0).$$

Тем самым, для всех достаточно малых Δx выполнено

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)>0$$

и x_0 – точка локального минимума.

Шаг третий. Пусть $Q_f(dx)<0$ в точке x_0. Тогда квадратичная форма $Q_{-f}(dx)$, построенная для функции $y=-f(x)$, является положительно определенной. Действительно, мы имеем

$$Q_{-f}(dx)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2(-f)}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_idx_j=-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_idx_j=$$

$$=-Q_f(dx)>0.$$

Поэтому функция $y=-f(x)$ имеет в x_0 локальный минимум, а функция $y=f(x)$ – локальный максимум.

Нам осталось сделать последний — четвертый шаг и доказать последнее из высказываний теоремы. Итак, предположим, что квадратичная форма $Q_f(dx)$ не определена, т.е. существуют n-мерные векторы

$$\Delta' x=(\Delta' x_1,\ldots,\Delta' x_n)\quad\text{и}\quad\Delta'' x=(\Delta'' x_1,\ldots,\Delta'' x_n)$$

такие, что

$$Q_f(\Delta' x)>0\quad\text{и}\quad Q_f(\Delta'' x)<0.$$

Рассмотрим функции вещественного переменного

$$g_1(t)=f(x_0+t\Delta' x)\quad\text{и}\quad g_2(t)=f(x_0+t\Delta'' x).$$

При всех достаточно малых t точки $x_0+t\Delta' x$ и $x_0+t\Delta'' x$ принадлежит множеству D, а потому функции $g_1(t)$ и $g_2(t)$

определены, по крайней мере, при достаточно малых t. По теореме о дифференцировании сложной функции эти функции трижды непрерывно дифференцируемы по t. Мы имеем

$$\frac{dg_1}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0 + t\Delta' x)\, \Delta' x_k\,,$$

$$\frac{d^2 g_1}{dt^2} = \sum_{k=1}^{n} \Delta' x_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0 + t\Delta' x)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \Delta' x_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k}(x_0 + t\Delta' x)\, \Delta' x_i =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_k}(x_0 + t\Delta' x)\, \Delta' x_i \Delta' x_k.$$

Так как x_0 – критическая точка, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dg_1}{dt}(0) = 0\,,$$

а

$$\frac{d^2 g_1}{dt^2}(0) = Q_f(\Delta' x) > 0.$$

Аналогичным образом, находим

$$\frac{dg_2}{dt}(0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2 g_2}{dt^2}(0) = Q_f(\Delta'' x) < 0.$$

Таким образом, функция $g_1(t)$ имеет при $t = 0$ локальный минимум, а $g_2(t)$ – локальный максимум. Отсюда заключаем, что в любой окрестности точки x_0 найдутся точки $x_0 + t\Delta' x$ и $x_0 + t\Delta'' x$ такие, что

$$f(x_0 + t_1 \Delta' x) = g_1(t_1) > g_1(0) = f(x_0)$$

и

$$f(x_0 + t_2 \Delta'' x) = g_2(t_2) < g_2(0) = f(x_0).$$

Тем самым, x_0 не является точкой локального экстремума и теорема доказана.

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. В каком месте рассуждений использована непрерывность производных третьего порядка?

УПРАЖНЕНИЕ 2. Проанализируйте доказательство теоремы. Нельзя ли доказать утверждение при более слабых предположениях относительно функции f?

Отметим специальный случай доказанной выше теоремы для функций двух переменных.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $z = f(x, y)$ – трижды непрерывно дифференцируемая функция, определенная на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^2$. Пусть $(x_0, y_0) \in D$ – ее критическая точка. Если в этой точке

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0\,, \tag{2}$$

то $z = f(x, y)$ имеет в ней локальный экстремум, а именно, локальный минимум при $f_{xx} > 0$ и локальный максимум при $f_{xx} < 0$. Если

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0 \tag{3}$$

в точке (x_0, y_0), то в этой точке экстремума нет.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму

$$Q_f(\Delta x, \Delta y) = f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\,\Delta y + f_{yy}\Delta y^2.$$

Нетрудно видеть, что условие (2) влечет положительную определенность $Q_f(\Delta x, \Delta y)$ при $f_{xx} > 0$ и ее отрицательную определенность при $f_{xx} < 0$. При выполнении (3) эта квадратичная форма является неопределенной.

Необходимое утверждение следует тогда непосредственно из теоремы. □

§20. Линии уровня функции двух переменных и их свойства

Пусть $z = f(x, y)$ – функция двух переменных, непрерывная на открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^2$. Для произвольного вещественного числа t полагаем

$$E_t = \{(x, y) \in D : f(x, y) = t\}.$$

Множество E_t называется *множеством t-уровня*[5] функции f.

ПРИМЕР 1. Найдем множества t-уровня функции $z = x^2 + y^2$. Имеем

$$E_t = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = t\}.$$

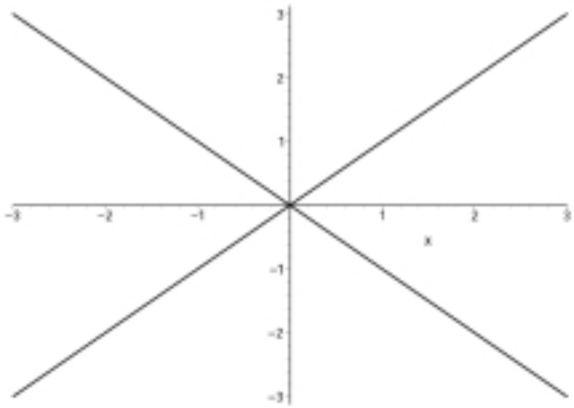
Если $t < 0$, то $E_t = \emptyset$. Если $t = 0$, то E_t состоит из единственной точки $(0, 0)$. Если $t > 0$, то E_t – окружность радиуса $\sqrt{t}$. □

[5] линией уровня

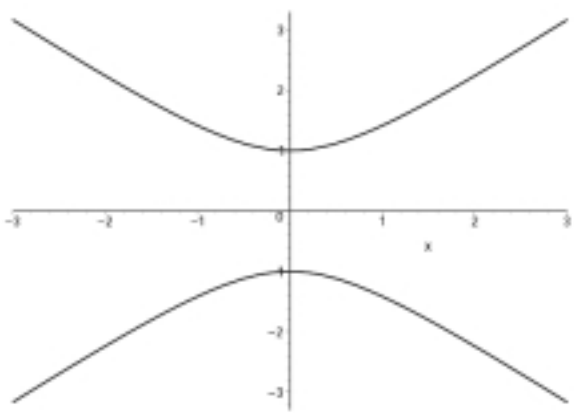
ПРИМЕР 2. Опишем множества t-уровня функции $z = x^2 - y^2$. Имеем

$$E_t = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 - y^2 = t\}.$$

При $t = 0$ множество E_t есть пара скрещивающихся прямых $y = \pm x$.



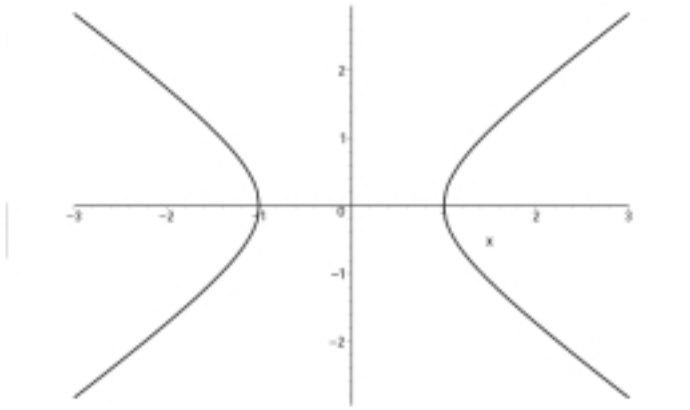
При $t < 0$ имеем $y^2 = x^2 - t$, или $y = \pm\sqrt{x^2 - t}$ – пара гипербол.

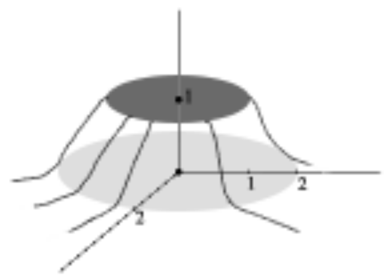


При $t > 0$ имеем $x^2 = y^2 + t$ или $x = \pm\sqrt{y^2 + t}$ – пара гипербол.

□

ПРИМЕР 3. Рассмотрим функцию $h(x, y)$, равную 1 при $x^2 + y^2 \leq 1$ и обращающуюся в 0 при $x^2 + y^2 \geq 2$. В точках кругового кольца $1 < x^2 + y^2 < 2$ предполагается, что $0 < h(x, y) < 1$. При этом можно добиться того, чтобы h была сколь угодно гладкой во всей плоскости $\mathbf{R}^2$, например, дважды непрерывно дифференцируемой. (Подумайте, как можно построить такую функцию?)





При $t < 0$ и $t > 1$ множества $E_t = \emptyset$. При $t = 0$ множество уровня

$$E_t = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 2\}$$

есть внешность круга радиуса $\sqrt{2}$, при любых $0 < t < 1$ множества t-уровня могут быть (но не обязательно) окружностями радиуса $\sqrt{t}$, при $t = 1$ — единичный круг.
□

Вывод. Множество уровня E_t может состоять из нескольких связных частей (компонент связности). Компоненты связности множества E_t могут состоять из одной единственной точки, а также иметь внутренние точки или быть связными дугами и кривыми.

ТЕОРЕМА 20.1. *Пусть D – открытое множество в $\mathbf{R}^2$ и пусть $z = f(x, y)$ – функция, непрерывная в $\overline{D}$. Тогда всякое множество t-уровня этой функции является замкнутым.*

Доказательство. Если $E_t = \emptyset$, то E_t замкнуто по определению. Поэтому пусть $E_t \neq \emptyset$ и пусть дана последовательность точек $(x_n, y_n) \in E_t$, $(x_n, y_n) \to (x', y')$. Требуется доказать, что $(x', y') \in E_t$, т.е. что $f(x', y') = t$.

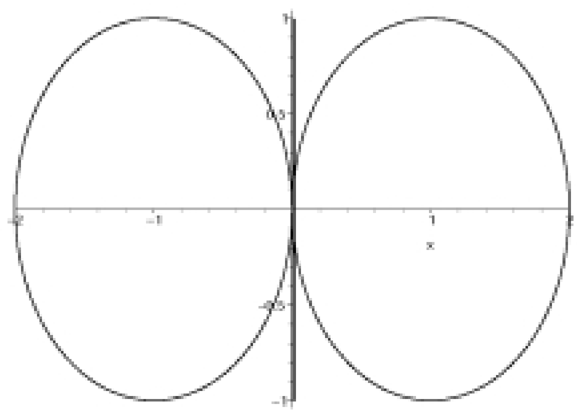
Действительно, это следует из непрерывности f в $\overline{D}$, поскольку равенство $f(x_n, y_n) = t$ влечет в данном случае, что $f(x', y') = t$. $\square$

Пусть $E \subset \mathbf{R}^2$ – множество и $a' = (x', y')$ – его точка сгущения. Будем говорить, что прямая L, проходящая через точку a', является *касательной* к множеству E, если для любой последовательности точек

$$a_n = (x_n, y_n) \in E\,, \quad a_n \neq a', \quad a_n \to a'\,,$$

последовательность прямых L_n, проходящих через $a_n = (x_n, y_n)$ и $a' = (x', y')$, стремится к прямой L. Последнее означает, что угол между L_n и L стремится к нулю при $n \to \infty$.

РИСУНОК множества типа восьмерки, имеющего касательную в центре симметрии:



Ясно,[6] что $L_n \to L$ тогда и только тогда, когда

$$\left\langle k, \frac{a_n - a'}{|a_n - a'|} \right\rangle \to 0\,, \tag{1}$$

где k – единичный вектор, ортогональный L.

[6]Ранее мы уже определяли пределы числовой последовательности и последовательности точек, пределы функции, пределы сумм Римана и Дарбу при неограниченном измельчении разбиений. Все это, как и предел последовательности прямых, может быть описано в рамках единой общей конструкции — *предела функции по фильтру.* Мы не будем рассматривать здесь этот очень общий подход. Желающие могут посмотреть его в книгах Н. Бурбаки, Общая топология. Основные структуры, 1968 (глава I, §7) или В.А. Зорича, Математический анализ, 2001 (глава III, §2).

ТЕОРЕМА 20.2. *Пусть E_t – множество t-уровня функции $z = f(x, y)$ и $(x_0, y_0) \in E_t$ – некоторая точка. Предположим, что f имеет в окрестности точки (x_0, y_0) частные производные, непрерывные в (x_0, y_0). Тогда, если $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$, то*
i) точка (x_0, y_0) не может быть ни компонентой связности E_t, ни внутренней точкой E_t;
ii) множество E_t имеет в (x_0, y_0) касательную и притом перпендикулярную вектору $\nabla f(x_0, y_0)$.

Доказательство. Утверждение i) очевидно. Если (x_0, y_0) – компонента связности множества E_t, то f имеет в (x_0, y_0) локальный экстремум и потому $\nabla f(x_0, y_0) = 0$.

Если же (x_0, y_0) – внутренняя точка E_t, то в некоторой ее окрестности $f \equiv \mathrm{const}$, а потому $\nabla f(x_0, y_0) = 0$. В обоих случаях имеем противоречие.

Докажем утверждение ii). Поскольку f имеет частные производные в окрестности (x_0, y_0), непрерывные в (x_0, y_0), то она имеет в этой точке полный дифференциал и ее приращение в окрестности этой точки представимо в виде

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) +$$

$$+ o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$$

при $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Пусть $(x, y) \in E_t$. Тогда имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,(y - y_0) =$$

$$= o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}).$$

Положим

$$\overline{a}_0 = (x_0, y_0)\,, \quad \overline{a} = (x, y).$$

В этих обозначениях предыдущее соотношение можно переписать в виде

$$\left\langle \nabla f(x_0, y_0), \frac{\overline{a} - \overline{a}_0}{|\overline{a} - \overline{a}_0|} \right\rangle = \frac{o(|\overline{a} - \overline{a}_0|)}{|\overline{a} - \overline{a}_0|} = \varepsilon(|\overline{a} - \overline{a}_0|) \to 0$$

при $\overline{a} \to \overline{a}_0$. Тем самым, из (1) следует, что множество E_t имеет в точке $\overline{a}_0 = (x_0, y_0)$ касательную и притом ортогональную вектору $\nabla f(x_0, y_0)$. Теорема доказана.

$\square$

СЛЕДСТВИЕ. Предположим, что функция $z = f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в окрестности множества t-уровня E_t, причем градиент $\nabla f(x, y) \neq 0$ всюду вдоль E_t. Тогда E_t имеет непрерывно меняющуюся касательную.

Доказательство. В каждой точке $(x, y) \in E_t$ существует касательная, перпендикулярная вектору $\nabla f(x, y)$. Так как $\nabla f(x, y)$ меняется непрерывно, то и касательная меняется непрерывно.

$\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичные свойства имеют место и для функций нескольких переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Если $\nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обладает указанными выше свойствами, то множество уровня

$$E_t = \{x \in \mathbf{R}^n : f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t\}$$

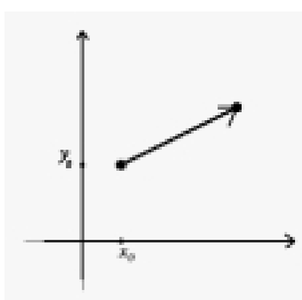
имеет касательные $(n-1)$-мерные плоскости. Все доказательства при этом практически не меняются.

§21. Теорема о неявной функции

Приведем сначала некоторые наводящие соображения. Пусть $z = f(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая в области $D \subset \mathbf{R}^2$ функция. Пусть $(x_0, y_0) \in D$ – точка, в которой

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0\,,$$

т.е. в этой точке вектор $\nabla f(x_0, y_0)$ не горизонтален.



Рассмотрим множество уровня

$$E_t = \{(x, y) \in D : f(x, y) = f(x_0, y_0)\}.$$

Точка (x_0, y_0) лежит на E_t. В соответствии с результатами предыдущего параграфа множество E_t имеет касательную в точке (x_0, y_0), ортогональную $\nabla f(x_0, y_0)$. Так как градиент не горизонтален, то касательная не вертикальна. Поэтому в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) часть линии E_t проектируется однозначно на ось OX, т.е. может быть представлена как график функции $y = g(x)$. Таким образом, существует функция $y = g(x)$, $y_0 = g(x_0)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0 и такая, что

$$f(x, g(x)) = f(x_0, y_0) = \text{const.} \tag{1}$$

Функция $y = g(x)$ называется функцией, *заданной неявно уравнением* (1).

Найдем производную $g'(x)$. Так как $f(x, g(x)) = \text{const}$, то, взяв производную по x от обеих частей равенства, мы имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))g'(x) = 0\,,$$

т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)g'(x_0) = 0$$

и

$$g'(x_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}. \tag{2}$$

Сформулируем точный результат.

ТЕОРЕМА 21.1. *Пусть $z = f(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая функция, определенная на некотором открытом множестве $D \subset \mathbf{R}^2$. Пусть $(x_0, y_0) \in D$ – точка, в которой $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, и пусть $L = \{(x, y) : f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$ – множество уровня. Тогда существует интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, над которым часть L, содержащая точку (x_0, y_0), является графиком функции $y = g(x)$ так, что $g(x_0) = y_0$. При этом функция $y = g(x)$ непрерывно дифференцируема и ее производная подсчитывается по формуле (2).*

Доказательство. Так как производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в D, то существует замкнутый квадрат $\overline{K}$ с центром в точке (x_0, y_0) и сторонами, параллельными осям координат, в котором производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ не обращается в нуль. Пусть

$$E = \{(x, y) \in \overline{K} : f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$$

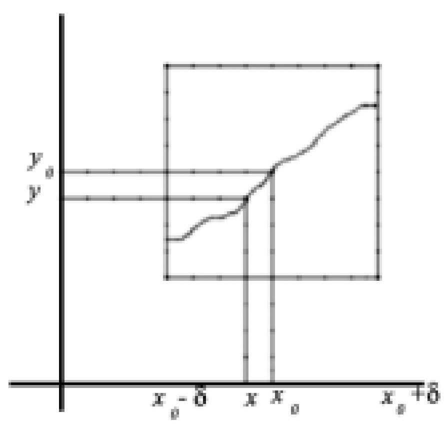
– часть множества уровня, лежащая в квадрате K и содержащая точку (x_0, y_0).

Обозначим через E_x проекцию множества E на ось OX. Покажем, что над каждой точкой $x \in E_x$ расположена одна и только одна точка множества E. Предположим противное, т.е. существуют $\overline{x} \in E_x$ и точки $(\overline{x}, y'), (\overline{x}, y'') \in E$. Тогда функция $h(y) = f(\overline{x}, y)$, рассматриваемая как функция переменной y, принимает в точках y', y'' значения, равные $f(x_0, y_0)$. Это невозможно, поскольку производная

$$\frac{dh}{dy} = \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}, y)$$

либо строго положительна, либо строго отрицательна в $\overline{K}$.

Таким образом, существует интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, над каждой точкой которого расположена одна и только одна точка $(x, y) \in E$, т.е. на этом интервале линия L может быть задана явно посредством функции $y = g(x)$.



В соответствии с результатами предыдущего параграфа график этой функции имеет в каждой точке касательную, меняющуюся непрерывно, т.е. $g(x)$ имеет непрерывную производную, вычисляемую по формуле (2). Теорема доказана.

□

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичный результат справедлив для функций нескольких переменных. Именно, если f имеет непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки $x_0 = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ и

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \neq 0\,,$$

то существует окрестность точки $\overline{x} = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0(n-1)})$ в плоскости $x_n = 0$, над которой множество уровня $\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = f(x_0)\}$ является графиком некоторой функции $x_n = g(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Производные функции g находятся в точности так же.

ПРИМЕР 1. Найдем производную функции $y = f(x)$, заданной неявно равенствами

$$e^{-x\cos y} + \sin y = e\,, \quad y = \pi \quad \text{при} \quad x = 1.$$

Убедимся сначала, что функция

$$F(x, y) = e^{-x\cos y} + \sin y$$

имеет множество уровня $F(x, y) = e$, действительно проходящее через точку $(1, \pi)$. Имеем

$$F(1, \pi) = e^{-\cos\pi} + \sin\pi = e.$$

После этого находим производную неявно заданной функции $y = f(x)$. Легко видеть, что

$$f'(x) = \frac{\cos y\, e^{-x\cos y}}{x\sin y\, e^{-x\cos y} + \cos y}.$$

Если $x = 1$, $f(1) = \pi$, то

$$f'(1) = e.$$

□

§22. Понятие об условном экстремуме. Правило неопределенных множителей Лагранжа

Изучим задачу об отыскании точек экстремума непрерывно дифференцируемой функции $z = f(x, y)$, если аргументы x, y не являются независимыми переменными, а связаны добавочным условием $\varphi(x, y) = 0$.

Пусть (a, b) – искомая точка. Предполагая, что $\nabla\varphi(a, b) \neq 0$, положим для определенности, что $\varphi'_y(a, b) \neq 0$. Тогда по теореме о неявной функции существует окрестность точки $x = a$, в которой кривая $\varphi(x, y) = 0$ может быть записана в явной форме $y = h(x)$, $h(a) = b$.

Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x, h(x)).$$

Данная функция имеет экстремум при $x = a$, поэтому $F'(a) = 0$ и, далее,

$$f'_x(a, b) + f'_y(a, b)\, h'(a) = 0. \tag{1}$$

Обозначим через $\bar{l} = (1, h'(a))$ – вектор, касательный к линии $\varphi(x, y) = 0$ в точке (a, b). Соотношение (1) влечет, что вектор $\nabla f(a, b)$ ортогонален $\bar{l}$. Но градиент $\nabla\varphi(a, b)$ обязан быть также перпендикулярен линии уровня $\varphi(x, y) = 0$ и, в частности, вектору $\bar{l}$. Следовательно, векторы $\nabla f(a, b)$ и $\nabla\varphi(a, b)$ параллельны, т.е. для некоторого λ выполнено

$$\frac{f'_x(a, b)}{\varphi'_x(a, b)} = \frac{f'_y(a, b)}{\varphi'_y(a, b)} = -\lambda. \tag{2}$$

Соотношения (2) дают следующую систему уравнений для определения точки экстремума (a, b):

$$\begin{cases} f'_x(a, b) + \lambda\varphi'_x(a, b) &= 0\,, \\ f'_y(a, b) + \lambda\varphi'_y(a, b) &= 0\,, \\ \varphi(a, b) &= 0. \end{cases} \tag{3}$$

Сформулируем точный результат.

ТЕОРЕМА 22.1. *Для того, чтобы функция $f(x, y)$ имела в точке (a, b) экстремум, при условии $\varphi(x, y) = 0$, необходимо существование такого множителя λ, чтобы три числа a, b, λ удовлетворяли системе трех уравнений (3). При этом предполагается, что частные производные $\varphi'_x(a, b)$, $\varphi'_y(a, b)$ не обращаются одновременно в нуль, т.е. что точка (a, b) не является критической точкой функции $\varphi(x, y)$.*

УПРАЖНЕНИЕ 1. Каковы условия на гладкость функций f и φ, при которых была доказана данная теорема?

УПРАЖНЕНИЕ 2. Дайте объяснения: почему при доказательстве теоремы возникла необходимость потребовать, чтобы точка (a, b) была некритической?

Приведенная теорема может быть сформулирована в несколько иной форме, более удобной для применений. Именно, справедливо, так называемое, *правило (или метод) неопределенных множителей Лагранжа.* Для того, чтобы найти экстремумы функции $f(x, y)$, подчиненной дополнительному условию $\varphi(x, y) = 0$, необходимо составить вспомогательную функцию

$$G(x, y) = f(x, y) + \lambda\,\varphi(x, y)$$

и выписать для нее необходимые условия экстремума

$$G'_x = f'_x + \lambda\,\varphi'_x = 0\,, \quad G'_y = f'_y + \lambda\,\varphi'_y = 0.$$

Эти уравнения вместе с дополнительным условием $\varphi(x, y) = 0$ служат для определения координат точек, подозрительных на экстремум, и множителя λ.

К числу подозрительных точек следует отнести также все критические точки функции $z = \varphi(x, y)$, лежащие на кривой $\varphi(x, y) = 0$.

ПРИМЕР 1. Найдем экстремум функции $u = xy$ в замкнутом круге $x^2 + y^2 \le 2$.

Прежде всего, найдем точки, подозрительные на экстремум и лежащие внутри круга. Пользуясь необходимыми условиями локального экстремума, запишем

$$\begin{cases} u'_x &= 0\,, \\ u'_y &= 0\,, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} y &= 0\,, \\ x &= 0. \end{cases}$$

Таким образом, единственной такой точкой является точка $(0, 0)$.

Найдем точки, подозрительные на экстремум и лежащие на кривой $x^2 + y^2 = 2$. Согласно правилу Лагранжа составим вспомогательную функцию

$$G(x, y) = xy + \lambda\,(x^2 + y^2 - 2).$$

Выпишем для нее необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} G'_x = y + 2\lambda x &= 0\,, \\ G'_y = x + 2\lambda y &= 0\,, \\ x^2 + y^2 - 2 &= 0. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Подозрительные на экстремум точки:

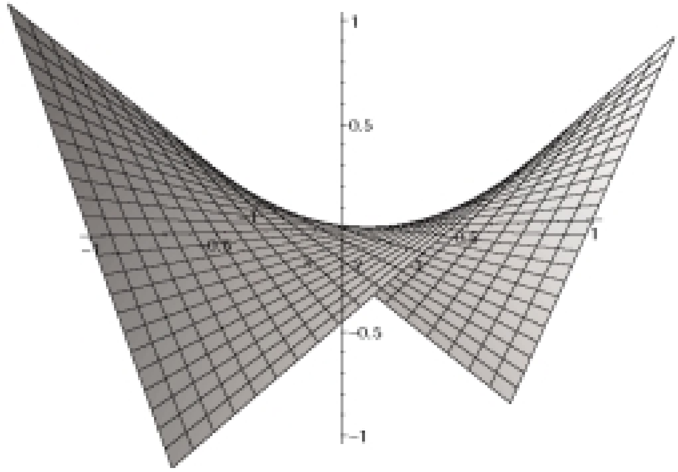
$$(1, 1)\,, \quad (1, -1)\,, \quad (-1, 1)\,, \quad (-1, -1).$$

Находим значения функции в критических точках. Мы имеем

$$u(0, 0) = 0\,, \quad u(1, 1) = 1\,, \quad u(1, -1) = -1\,,$$
$$u(-1, 1) = -1\,, \quad u(-1, -1) = 1.$$

Таким образом, получаем

$$\max_{x^2 + y^2 \le 2} u(x, y) = 1,$$



что достигается в точках $(1,1)$, $(-1,-1)$, и

$$\min_{x^2+y^2\le 2} u(x,y) = -1,$$

что достигается в точках $(-1,1)$, $(1,-1)$.
$\square$

Глава 13

Числовые ряды

§1. Понятие числового ряда

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $\{a_n\}$ – произвольная последовательность вещественных чисел. Символ

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

называется бесконечным *рядом*. Числа a_k называются членами ряда, а числа

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

– частичными суммами (или отрезками) ряда. Конечный либо бесконечный предел S последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ при $n \to \infty$ называется *суммой ряда*.

Подчеркнем, что сумма ряда — это предел частичных сумм, но не результат применения бесконечного числа операций сложения.

Если ряд имеет *конечную* сумму, то его называют *сходящимся*. В случае, когда сумма бесконечна ($\pm\infty$), либо не существует, ряд называется *расходящимся*.

Замечания об обозначениях. Несмотря на различие между понятиями "ряд" и "сумма ряда" очень часто их обозначают одним и тем же символом. Так, например, часто под символом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ понимают именно сумму ряда. (Безусловно, в том и только том случае, когда она существует.)

ПРИМЕР 1. Рассмотрим ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 ... = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}.$$

Его частичные суммы равны

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0,\ S_3 = 1,\ ...,\ S_{2n-1} = 1,\ S_{2n} = 0.$$

Т.к. предела последовательности частичных сумм не существует, то ряд расходится. □

ПРИМЕР 2. Рассмотрим

$$1 + q + q^2 + ... + q^k + ... = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$$

Найдем S_n (частичную сумму этого ряда). Пусть вначале $q \neq 1$. Тогда

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}.$$

1) Пусть $|q| < 1$. Тогда выполнено:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1 - q} - \frac{q^n}{1 - q}\right) = \frac{1}{1 - q}.$$

Таким образом ряд сходится, и его сумма

$$S = \frac{1}{1 - q}.$$

2) Если $|q| > 1$, то в случае $q > 1$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty,$$

и, соответственно, ряд расходится.

В случае $q < -1$, предела у последовательности частичных сумм не существует, и, соответственно, ряд расходится.

3) Если $q = 1$, то $S_n = 1 + 1 + ... + 1 = n$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = +\infty,$$

то есть ряд расходится.

В случае $q = -1$, выполнено $S_{2n-1} = 1, \quad S_{2n} = 0$ (см. предыдущий пример), то есть предела частичных сумм не существует, и, ряд расходится. □

ПРИМЕР 3. Пусть дан следущий ряд $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$.

Заметим, что

$$a_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, ..., a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Таким образом выполнено

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1.$$

□

ПРИМЕР 4. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ расходится, поскольку

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

□

§2. Простейшие теоремы о числовых рядах

Если задан числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{1}$$

то ряд

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k, \tag{2}$$

получаемый из (1) удалением первых m членов, называется остатком ряда (1) после m-го члена.

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что заданы ряд (1) и его остаток (2). Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (2).*

Доказательство. Для произвольного $n > m$ полагаем

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad - \quad \text{частичная сумма ряда (1);}$$

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=m+1}^{n} a_k \quad - \quad \text{частичная сумма ряда (2);}$$

$$C = \sum_{k=1}^{m} a_k \quad - \quad \text{константа, не зависящая от } n\ .$$

Справедливость утверждения следует из равенства

$$\widetilde{S_n} = S_n - C$$

и соответствующих утверждений из теории числовых последовательностей. □

ТЕОРЕМА 2.2. *Если ряд (1) сходится, то сумма его остатка после m-го члена стремится к нулю при $m \to \infty$.*

Доказательство. Положим

S	–	сумма ряда (1);
S_n	–	частичная сумма ряда (1);
$\alpha_m = \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k$	–	сумма остатка ряда (1) .

Утверждение вытекает из соотношения

$$\alpha_m = S - S_m$$

и соответствующих утверждений из теории числовых последовательностей. □

ТЕОРЕМА 2.3. *Если ряд (1) сходится и C – постоянное вещественное число, то сходится и ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} C\, a_k,$$

причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} C\, a_k = C \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что для частичных сумм рядов выполнено

$$\sum_{k=1}^{m} C\, a_k = C \sum_{k=1}^{m} a_k.$$

Тем самым, из существования предела правой части равенства следует существование предела левой части и, далее, нужное соотношение для сумм рядов. □

ТЕОРЕМА 2.4. *Если каждый из рядов*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

сходится, то сходится и ряд, полученный их почленным сложением (вычитанием), причем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что при всяком $m \geq 1$ выполнено

$$\sum_{k=1}^{m}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{m} a_k \pm \sum_{k=1}^{m} b_k.$$

Дальнейшие аргументы аналогичны приведенным в доказательстве предыдущей теоремы. □

ПРИМЕР 1. Ряд

$$\sum_{k=1}^{m}((-1)^k + (-1)^{k+1})$$

сходится, хотя каждый из рядов

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^k \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}$$

расходится. □

§3. Критерий Коши для числовых рядов

Пусть задан числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{1}$$

ТЕОРЕМА 3.1 (Критерий Коши для числовых рядов). *Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда* $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon)$ *такое, что* $\forall\, n \geq m > N(\varepsilon)$ *выполнено*

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. По определению, сходимость ряда равносильна сходимости последовательности его частичных сумм $\{S_n\}$. Утверждение теоремы следует из критерия Коши сходимости последовательности $\{S_n\}$ (вспомните и сформулируйте его!) и замечания о том, что при $n \geq m$ выполнено

$$S_n - S_{m-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

□

ПРИМЕР 1. Докажем сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Заметим, что

$$a_n = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Таким образом, выполнено

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| = a_m + a_{m+1} + ... + a_n <$$

$$< \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{m-1} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m-1}.$$

Пусть m такое, что $\varepsilon \geq \frac{1}{m-1}$, то есть $m \geq \frac{1}{\varepsilon} + 1$. Выберем $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + 1$. Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$, мы нашли $N(\varepsilon) : \forall\, n \geq m > N(\varepsilon)$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

□

ПРИМЕР 2. Докажем расходимость так называемого гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Сформулируем вначале отрицание критерия Коши. А именно, справедливо следующее утверждение.

Ряд (1) расходится тогда и только тогда, когда

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \forall\, N \exists\, n(\varepsilon) \geq m(\varepsilon) > N$$

выполнено

$$\left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| \geq \varepsilon.$$

В нашем случае

$$|a_m + a_{m+1} + ... + a_{2m}| = \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + ... + \frac{1}{2m} >$$

$$> \frac{1}{2m}(2m - m + 1) > \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, выбирая $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $n = 2m$, получаем требуемое. □

УПРАЖНЕНИЕ 1. Выясните происхождение названия *гармонический* ряд, и какое отношение он имеет к музыке?

ТЕОРЕМА 3.2 (Необходимое условие сходимости ряда). *Для сходимости ряда (1) необходимо, чтобы его общий член $a_k \to 0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. На основании критерия Коши сходимости ряда, по $\varepsilon > 0$ можно найти номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $m > N(\varepsilon) \quad (n = m)$ выполнено

$$\left| \sum_{k=m}^{m} a_k \right| = |a_m| < \varepsilon.$$

Это означает, что $a_m \to 0$ при $m \to \infty$. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие $a_k \to 0$ при $k \to \infty$ не является достаточным для сходимости ряда (1). К примеру, гармонический ряд расходится, хотя его общий член $\frac{1}{k} \to 0$ при $k \to \infty$.

ТЕОРЕМА 3.3 (Условие сходимости положительного ряда). *Положительный ряд, т.е. ряд, все члены которого положительны, всегда имеет сумму (возможно, бесконечную); эта сумма конечна, а сам ряд сходится, если множество всех частичных сумм ряда ограничено сверху, и бесконечна, а ряд расходится, если множество таких сумм неограничено.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой о существовании предела монотонно возрастающей, ограниченной сверху последовательности вещественных чисел. (Вспомните и сформулируйте ее!). Приведите доказательство самостоятельно. □

§4. Теоремы сравнения

ТЕОРЕМА 4.1. (α) *Если* $|a_n| \le c_n$ *при всех* $n \ge N_0$, *где* N_0 *– некоторое фиксированное число, и если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *также сходится.*

(β) *Если* $a_n \ge \alpha_n \ge 0$ *при всех* $n \ge N_0$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *также расходится.*

Доказательство. Согласно критерию Коши, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon) \ge N_0$ такой, что при $m \ge n \ge N(\varepsilon)$ выполнено

$$\sum_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \le \sum_{k=n}^{m} |a_k| \le \sum_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon,$$

и, пользуясь еще раз критерием Коши, получаем справедливость утверждения (α).

Справедливость высказывания (β) следует из (α), поскольку если бы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходился, то сходился бы и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$. □

ЗАМЕЧАНИЕ. В частности, в пункте (α) данной теоремы доказано, что если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то сходится и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Выясните, верно ли следующее утверждение: если $a_n \geq \alpha_n$ при всех $n \geq N_0$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ также расходится.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)5^n}.$$

Учитывая неравенство

$$\frac{1}{(n+1)5^n} < \frac{1}{5^n} = (\frac{1}{5})^n,$$

мы можем заданный ряд промажорировать геометрической прогрессией со знаменателем $q = \frac{1}{5} < 1$. Т.к. геометрическая прогрессия с таким знаменателем сходится, то по признаку сравнения сходится и первоначальный ряд. □

ПРИМЕР 2. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

где $0 < \alpha < 1$. Учитывая неравенство $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$ и расходимость гармонического ряда, по признаку сравнения получаем расходимость первоначального ряда. □

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2)$$

– ряды с положительными членами, и пусть существует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = K \quad (0 < K < \infty). \tag{3}$$

Тогда ряды (1) и (2) сходятся либо расходятся одновременно.

Доказательство. В силу соотношения (3), по $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено

$$K - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon.$$

Отсюда получаем: $\forall\, n > N(\varepsilon)$ выполнено

$$0 < a_n < (K + \varepsilon)\, b_n, \tag{4}$$

и, при $0 < \varepsilon < K$,

$$0 < b_n < \frac{1}{K - \varepsilon}\, a_n. \tag{5}$$

Поскольку умножение на постоянную, не равную нулю, не влияет на сходимость либо расходимость ряда, то нужное заключение следует из (4) и (5) на основании теоремы 4.1. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $K = 0$, то из (4) видно, что сходимость ряда (2) влечет сходимость ряда (1), а расходимость (1) — расходимость (2).

Если $K = \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$$

и рассуждения такие же, как и в предыдущем случае.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказать либо опровергнуть утверждение теоремы 4.2 без предположения о положительности рядов.

ТЕОРЕМА 4.3. *Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2)$$

– ряды с положительными членами, и пусть при $n \geq N_0$ *выполнено*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}. \tag{6}$$

Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1), а из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что соотношения (6) справедливы при всех $n = 1, 2, \ldots$. В этом случае мы имеем

$$\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1}, \quad \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Перемножая почленно эти неравенства, получаем

$$\frac{a_{n+1}}{a_1} \leq \frac{b_{n+1}}{b_1} \quad \text{или} \quad a_{n+1} \leq \frac{a_1}{b_1} \cdot b_{n+1}.$$

Дальнейшие рассуждения очевидны (проведите их самостоятельно). □

§5. Ряды с неотрицательными членами

Признаки сравнения очень полезны, но чтобы успешно применять их мы должны иметь перед собой набор рядов с неотрицательными членами, заведомо сходящихся, либо расходящихся.

Простейшим из всех таких рядов, по-видимому, является геометрическая прогрессия. В силу важности данного ряда, уже рассмотренного нами в примере 2 первого параграфа данной главы, еще раз сформулируем полученный там результат.

ТЕОРЕМА 5.1. *Если* $0 < a < 1$, *то*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}.$$

Если $a \geq 1$, *то этот ряд расходится.*

Далее рассмотрим более общий случай. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.2 (Коши). *Допустим, что*

$$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq \ldots \geq 0.$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \ldots + a_k + \ldots \tag{1}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\, a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k . a_{2^k} + \ldots \tag{2}$$

Доказательство. Положим

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

и

$$t_k = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k}.$$

При $n < 2^k$ выполнено $n < 2^{k+1} - 1$ и, далее,

$$S_n < S_{2^{k+1}-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots +$$
$$+ (a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots +$$
$$+ 2^k a_{2^k} \equiv t_k,$$

т.е. при $n < 2^k$ выполнено

$$S_n < t_k. \tag{3}$$

При $n > 2^k$ получаем

$$\begin{aligned} S_n > S_{2^k} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + \\ &+ (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \geq \tfrac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + \\ &+ 2^{k-1} a_{2^k} \equiv \tfrac{1}{2} t_k, \end{aligned}$$

т.е. при $n > 2^k$ выполняется

$$S_n > \frac{1}{2} t_k. \tag{4}$$

Воспользуемся теперь условием сходимости положительного ряда (теорема 3.3). Пусть ряд (1) сходится. Тогда частичные суммы $\{S_n\}$ ограничены сверху. Но, в силу (4), множество $\{t_k\}$ также ограничено сверху и ряд (2) сходится.

Если сходится ряд (2), то, пользуясь (3), устанавливаем ограниченность $\{S_n\}$ и, следовательно, сходимость ряда (1). Теорема доказана.

$\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

будем называть *обобщенным гармоническим.*

Заметим, что ранее в примерах уже была исследована сходимость обобщенного гармонического ряда при $0 < p \leq 1$.

ТЕОРЕМА 5.3. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Доказательство. Если $p \leq 0$, то ряд расходится, поскольку нарушено необходимое условие сходимости.

Пусть $p > 0$. Воспользуемся предыдущей теоремой и рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^k .$$

На основании теоремы 5.1 данный ряд сходится, если $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ (т.е. $p > 1$) и расходится, если $p \leq 1$. Теорема доказана. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится.

ПРИМЕР 1. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln\, n)^p}.$$

Если $p \le 0$, то ряд расходится, поскольку нарушено необходимое условие сходимости.

Пусть $p > 0$. Сравнивая этот ряд с гармоническим рядом, получаем (проверьте!)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(\ln n)^p}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\ln n)^p} = \infty.$$

По теореме сравнения заключаем, что данный ряд расходится. □

ПРИМЕР 2. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}.$$

Мы имеем

$$(\ln n)^{\ln n} = n^{\ln\ln n} > n^2 \quad \text{для достаточно больших } \ n.$$

Отсюда,

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < \frac{1}{n^2}.$$

По теореме 5.3 ряд сходится. □

ТЕОРЕМА 5.4. *Ряд*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

сходится при $p > 1$ *и расходится при* $p \le 1$.

Доказательство. Если $p \le 0$, то

$$\frac{1}{n(\ln n)^p} \ge \frac{1}{n}$$

и, сравнивая данный ряд с гармоническим, убеждаемся, что ряд расходится. Поэтому пусть $p > 0$. В этом случае последовательность $\{n(\ln n)^p\}$ является возрастающей:

$$n(\ln n)^p \le (n+1)(\ln(n+1))^p,$$

а последовательность

$$\left\{\frac{1}{n(\ln n)^p}\right\} \quad (p > 0)$$

– убывающей. Воспользуемся теоремой Коши и рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k(\ln 2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^p k^p}.$$

По предыдущей теореме этот ряд сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$. Теорема доказана. $\square$

ТЕОРЕМА 5.5. *Ряд*

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$$

сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать эту и следующую теорему.

Обозначим

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5.6 (признак Раабе[1]). *Если при достаточно больших n выполняется неравенство $R_n \geq r > 1$, то ряд сходится, если начиная с некоторого номера $R_n \leq 1$, то ряд расходится.*

Доказательство. Пусть $n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) \geq r > 1$. Тогда

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{r}{n}.$$

Возьмем произвольную константу s такую, что $r > s > 1$. Известно (проверьте!), что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^s - 1}{\frac{1}{n}} = s.$$

[1]Раабе Жозеф Людвиг (15.5.1801–12.1.1859) — швейцарский математик и физик. Его научные исследования касались различных областей анализа, геометрии, алгебры, прикладной математики.

Таким образом, для достаточно больших n справедливо неравенство

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^s-1}{\frac{1}{n}}<r,$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^s<1+\frac{r}{n}.$$

Следовательно

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}>(1+\frac{1}{n})^s.$$

Последнее неравенство можно переписать следующим образом

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^s=\frac{\frac{1}{(n+1)^s}}{\frac{1}{n^s}}.$$

Применяя теорему сравнения 4.3 и признак сходимости обобщенного гармонического ряда, получаем сходимость ряда в первом случае.

Пусть теперь $n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\le 1$. Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge\frac{n}{n+1}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}.$$

Применяя теорему сравнения 4.3, получим требуемое. $\square$

СЛЕДСТВИЕ (Признак Раабе в предельной форме). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=R$. Тогда при $R>1$ ряд сходится, при $R<1$ ряд расходится.

ТЕОРЕМА 5.7. *Пусть* $a_n\ge 0$.*Тогда если* $a_n=O(\frac{1}{n^s})$ *при* $n\to\infty$ *и* $s>1$*, то ряд* $\sum n=1a_n$ *сходится.*

Если же $\dfrac{1}{n^s}=O(a_n)$ *при* $n\to\infty$ *и* $s\le 1$*, то ряд расходится.*

Доказательство. Для доказательства в теореме сравнения достаточно взять обобщенный гармонический ряд. $\square$

Следствие. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}n^\alpha a_n=k$. Тогда

1) если $\alpha>1$ и $0\le k<+\infty$, то ряд $\sum n=1a_n$ сходится,

2) если $\alpha\le 1$ и $0<k\le+\infty$, то ряд расходится.

В частности, если $a_n\sim\frac{1}{n^\alpha}$, то ряд сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

ПРИМЕР 3. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 - \cos\frac{\pi}{n})$. Тогда учитывая, что

$$\frac{\pi}{n} \to 0 \qquad \text{при} \qquad n \to \infty,$$

а также

$$\cos x = 1 + \underline{O}(x^2) \qquad \text{при} \qquad x \to 0,$$

получаем

$$a_n = 1 - \left[1 + \underline{O}(\frac{\pi^2}{n^2})\right] = \underline{O}(\frac{1}{n^2}).$$

По предыдущей теореме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. □

§6. Интегральный признак сходимости

Предположим, что функция $y = f(x)$ определена на $[1, +\infty)$, непрерывна, положительна и невозрастает. Обозначим через $F(x)$ произвольную ее первообразную. Так как $F'(x) = f(x) > 0$, то существует предел (возможно бесконечный)

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = L.$$

ТЕОРЕМА 6.1 (Интегральный признак сходимости). *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится, если предел L первообразной $F(x)$ конечен, и расходится, если $L = +\infty$.

Доказательство. Так как $f(x)$ невозрастает, то для всякого $x \in [n, n+1]$ выполнено

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1).$$

Следовательно,

$$f(n) \geq \int\limits_{n}^{n+1} f(x)\, dx \geq f(n+1)$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{k}^{k+1} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k+1).$$

Полагая $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$, имеем

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) = f(2) + f(3) + \ldots + f(n+1) = S_{n+1} - f(1).$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем

$$S_n \geq F(n+1) - F(1) \geq S_{n+1} - f(1).$$

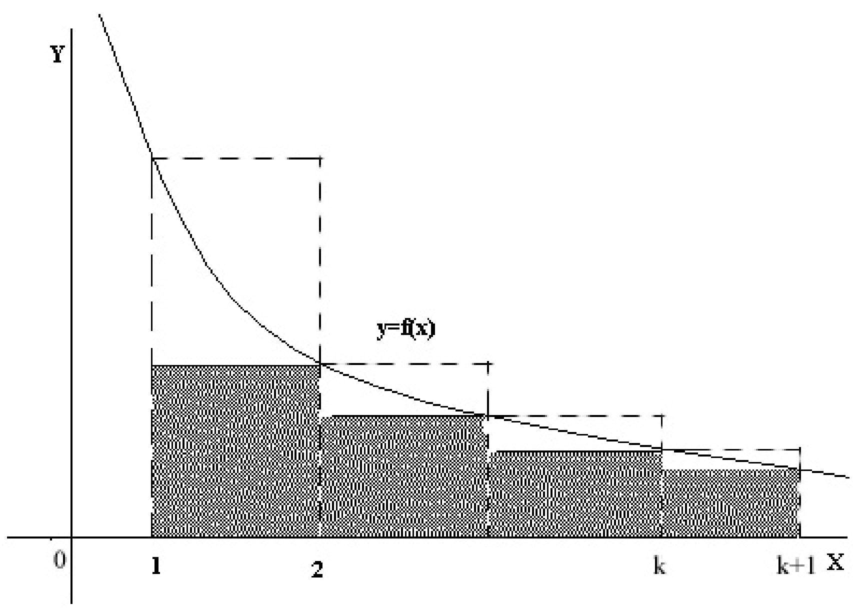
На основании условия сходимости положительных рядов, делаем нужные заключения. Теорема доказана. □

СЛЕДСТВИЕ (другая формулировка интегрального признака сходимости). Если функция $f(x)$, определенная при всех $x \geq 1$, неотрицательна и убывает, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx.$$



ПРИМЕР 1. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})\right).$$

Рассмотрим на $[1,+\infty)$ вспомогательную функцию

$$y=\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x}).$$

Прежде всего, как известно (проверьте!),

$$\ln(1+\varepsilon)\leq\varepsilon$$

для всех $\varepsilon\in(-1,+\infty)$. Поэтому

$$\frac{1}{x}-\ln(1+\frac{1}{x})\geq\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0.$$

Далее,

$$y'=-\frac{1}{x^2}-\frac{(-1/x^2)}{1+1/x}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)x}<0$$

при $x>0$ и, стало быть, $y(x)$ монотонно убывает.

Воспользуемся интегральным признаком сходимости. Найдем первообразную

$$F(x)=\int_1^x\left(\frac{1}{t}-\ln(1+\frac{1}{t})\right)dt=\ln x-\int_1^x\ln(1+\frac{1}{t})\,dt=$$

$$=\ln x-x\ln(1+\tfrac{1}{x})+\ln 2+\int_1^x t\cdot\frac{-1/t^2}{1+1/t}\,dt=\ln x-x\ln(1+\frac{1}{x})+$$

$$+\ln 2-\int_1^x\frac{dt}{t+1}=\ln x-x\ln(1+\frac{1}{x})-\ln(x+1)+2\ln 2=$$

$$\ln\tfrac{x}{x+1}-x\ln\tfrac{x+1}{x}+2\ln 2=-(x+1)\ln(1+\tfrac{1}{x})+2\ln 2.$$

Далее находим

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=2\ln 2-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x+1}}=$$

$$=2\ln 2-\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}}{(1+\frac{1}{x})\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}=2\ln 2-1,$$

т.е. ряд сходится. $\square$

ПРИМЕР 2. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Конечно, этот ряд нам уже хорошо известен, однако воспользуемся другим методом его исследования. Пусть вначале $s > 0, \quad s \neq 1$. Воспользуемся интегральным признаком:

$$f(x) = \frac{1}{x^s},\ F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^s} = \frac{x^{1-s} - 1}{1-s},$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1-s}}{1-s}.$$

Таким образом при $s > 1$ предел конечен, и ряд сходится, а при $s < 1$ предел бесконечен, и ряд расходится. Пусть теперь $s = 1$ (т.е. рассматривается гармонический ряд). Тогда

$$F(x) = \ln x,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

То есть в данном случае ряд расходится. □

§7. Признаки сходимости Коши и Даламбера

Ниже мы будем пользоваться понятиями *верхнего* и *нижнего* пределов последовательности, введенными ранее. Напомним их определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность. Говорят, что a есть верхний предел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и пишут

$$a = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \quad (\text{или } a = \limsup_{n\to\infty} a_n),$$

если

i) существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\} \to a$;
(иначе, $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, N \quad \exists\, n > N: |a_n - a| < \varepsilon$)
ii) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon): \forall\, n > N(\varepsilon)$ выполнено $a_n < a + \varepsilon$.

Говорят, что a есть нижний предел a_n и пишут

$$a = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n, \quad (\text{или } a = \liminf_{n\to\infty} a_n),$$

если

i) существует подпоследовательность $\{a_{n_k}\} \to a$;
ii) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon): \forall\, n > N(\varepsilon)$ выполнено $a_n > a - \varepsilon$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Проверьте следующие утверждения.

1) $\overline{\lim}_{n\to\infty} n^{(-1)^n} = +\infty$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} n^{(-1)^n} = 0$.
2) $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
3) $\overline{\lim}_{n\to\infty} (-1)^n n = +\infty$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} (-1)^n n = -\infty$.
4) $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = +1$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = +1$.

Всюду в данном параграфе будем считать, что $a_n \neq 0$ для всех номеров n.

ТЕОРЕМА 7.1 (Признак Коши). *Пусть задан ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

и пусть

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a.$$

Тогда

i) если $a < 1$, то ряд (1) сходится;

ii) если $a > 1$, то ряд (1) расходится;

iii) существуют как сходящиеся, так и расходящиеся ряды, для которых $a = 1$.

Доказательство. Рассмотрим случай $i)$, т.е. $a < 1$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ так, чтобы $a + \varepsilon < 1$. По определению верхнего предела найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будет выполнено

$$\sqrt[n]{|a_n|} < a + \varepsilon < 1.$$

Тогда для произвольного $n > N(\varepsilon)$ имеем

$$|a_n| < (a + \varepsilon)^n. \tag{2}$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a + \varepsilon)^n$$

есть геометрическая прогрессия со знаменателем $(a + \varepsilon) < 1$. Пользуясь теоремой сравнения, заключаем на основании (2), что ряд (1) сходится.

$ii)$ Пусть $a > 1$. Из определения верхнего предела заключаем, что существует подпоследовательность $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to a > 1$. Значит, $|a_n| > 1$ для бесконечного числа значений n. Тем самым, нарушено необходимое условие сходимости ряда: $a_n \to 0$.

iii) Рассмотрим ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Для каждого из этих рядов

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1,$$

хотя первый из них расходится, а второй сходится. Теорема доказана. □

ТЕОРЕМА 7.2 (Признак Даламбера[2]). *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

i) *сходится, если*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1;$$

ii) *расходится, если*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1;$$

iii) *существуют сходящиеся ряды, для которых*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1,$$

и расходящиеся ряды, для которых

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1.$$

Доказательство. В случае *i*) предположим, что

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a < 1.$$

[2]Даламбер Жан Лерон (16.11.1717-29.10.1783) – математик, механик и философ. Род. в Париже (Франция). Его основные математические исследования относятся к теории дифференциальных уравнений, математическому анализу, алгебре.

Фиксируем q такое, что $a < q < 1$, и находим $N(q)$ такое, что при всех $n > N = N(q)$ выполнено

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q.$$

Отсюда получаем, что

$$|a_{n+1}| < q\,|a_n|.$$

Тогда имеем

$$\begin{array}{ll}
|a_{N+2}| & < q\,|a_{N+1}| \\
|a_{N+3}| & < q\,|a_{N+2}| < q^2\,|a_{N+1}| \\
|a_{N+4}| & < q\,|a_{N+3}| < q^3\,|a_{N+1}| \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
|a_{N+p}| & < q^{p-1}\,|a_{N+1}|.
\end{array}$$

Поэтому для любого $n > N(q)$ получаем

$$|a_n| < q^{n-N(q)-1}|a_{N+1}| = \frac{|a_{N+1}|}{q^{N+1}} \cdot q^n,$$

т.е. для любого $n > N(q)$

$$|a_n| < \operatorname{const} q^n, \quad \text{где} \quad q < 1.$$

Сравнивая ряд (1) с геометрической прогрессией, заключаем о сходимости (1).

ii) Предположим, что

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a > 1.$$

Тогда по $\varepsilon > 0$ такому, что $a - \varepsilon > 1$, найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будет выполняться

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq a - \varepsilon > 1,$$

и, следовательно, при $n > N(\varepsilon)$:

$$|a_{n+1}| > |a_n|.$$

Отсюда выводим, что

$$|a_n| < |a_{n+1}| < |a_{n+2}| < \ldots$$

и что необходимое условие сходимости $a_k \to 0$ ряда (1) не выполняется.

iii) Рассмотрим два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Первый из этих рядов расходится, но для него

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Для второго ряда

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

но ряд сходится. □

ПРИМЕР 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Воспользуемся признаком Коши. Имеем

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n!}} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n!}} = ?$$

На самом деле можно доказать (попробуйте!), что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

но это достаточно затруднительно. Попробуем воспользоваться признаком Даламбера. Имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} n!}{(n+1)! 2^n} = \frac{2}{n+1}$$

и

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Ряд сходится. □

ПРИМЕР 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Ряд сходится. □

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказать, что для всякой последовательности положительных чисел $\{a_n\}$ справедливы соотношения:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Таким образом, *признак Коши не слабее признака Даламбера*[3].

УПРАЖНЕНИЕ 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum k = 1\frac{(-1)^k+3}{2^{k+1}},$$

используя признак Коши и Даламбера. Убедиться, что признак Коши сильнее признака Даламбера.

§8. Теорема Лейбница. Абсолютная и неабсолютная сходимость

ЛЕММА 8.1 (Формула суммирования по частям). *Пусть даны две последовательности* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$. *Положим*

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad A_0 = 0.$$

Тогда, если $q \ge p \ge 1$, *то*

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_{q+1} - A_{p-1}b_p. \qquad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула суммирования по частям (1) называется преобразованием Абеля.

[3] но используется, вообще говоря, реже.

Доказательство. Мы имеем

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q} A_{n-1} b_n =$$

$$= \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q} A_n b_{n+1} + A_q b_{q+1} - A_{p-1} b_p.$$

□

ЛЕММА 8.2 (Признак Дирихле). *Предположим, что*

i) частичные суммы A_n ряда $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ образуют ограниченную последовательность;

ii) $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n \geq \ldots$;

iii) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство. Пусть нам задано произвольное число $\varepsilon > 0$. Выберем постоянную $M > 0$ так, чтобы для любого $n = 1, 2, \ldots$ выполнялось $|A_n| \leq M$. По $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M} > 0$ найдем номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > N(\varepsilon)$ было выполнено

$$0 \leq b_n < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Тогда для произвольных $q \geq p > N(\varepsilon)$ мы имеем

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n b_n \right| = \left| \sum_{n=p}^{q} A_n (b_n - b_{n+1}) + A_q b_{q+1} - A_{p-1} b_p \right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=p}^{q} |A_n| |b_n - b_{n+1}| + |A_q| |b_{q+1}| + |A_{p-1}| |b_p| \leq$$

$$\leq M \sum_{n=p}^{q} (b_n - b_{n+1}) + M b_{q+1} + M b_p = M(b_p - b_{q+1} + b_{q+1} + b_p) \leq \varepsilon.$$

Пользуясь критерием Коши, получаем нужное. □

УПРАЖНЕНИЕ 1 (признак сходимости Абеля). Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, а числа a_n образуют монотонную и ограниченную последовательность

$$|a_n| \leq \mathrm{const} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

ТЕОРЕМА 8.1 (признак Лейбница). *Допустим, что*
i) $|c_1| \geq |c_2| \geq \ldots$;
ii) $c_{2n-1} \geq 0$, $c_{2n} \leq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$;
iii) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.
Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ *сходится.*

Доказательство. Полагая в лемме 8.2

$$a_n = (-1)^{n+1}, \quad b_n = |c_n|,$$

убеждаемся в справедливости утверждения. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Ряды, обладающие свойством *ii*) теоремы, называются *знакочередующимися*[4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится абсолютно*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то говорят, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится неабсолютно* (условно).

ТЕОРЕМА 8.2. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Утверждение следует из неравенства

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\right| \leq \sum_{n=p}^{q} |a_n|$$

и критерия Коши сходимости ряда (см. также замечание после теоремы 4.1). □

ПРИМЕР 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

сходится условно (по признаку Лейбница). Попробуйте угадать его сумму. □

---

[4]или, что не вполне адекватно, — знакопеременными.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим ряд

$$1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\ldots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{2}{3n}+\ldots.$$

Применим признак Дирихле (иногда его называю признаком Дирихле-Абеля). Пусть $\{a_n\}$ – последовательность числителей этого ряда, а $\{b_n\}$ – знаменателей. Тогда частичные суммы ряда $\sum n=1a_n$ ограничены, а именно, для всех n выполнено

$$|A_n|\le 2.$$

С другой стороны, $b_n=\dfrac{1}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Таким образом, наш ряд сходится условно (ряд из модулей, очевидно, расходится). $\square$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}$, где x –фиксированное число. Обозначим $a_k=\cos kx,\quad b_k=\frac{1}{k}$. Оценим последовательность $\{A_n\}$. Для всех k справедливо равенство

$$\sin{(k+\frac{1}{2})x}-\sin{(k-\frac{1}{2})x}=2\sin\frac{x}{2}\cos kx.$$

Суммируя это соотношение по k от 1 до n, получаем

$$\sin{(n+\frac{1}{2})x}-\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos kx=2\sin\frac{x}{2}A_n,$$

$$A_n=\frac{\sin{(n+\frac{1}{2})x}-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

т.е. для любого x не кратного 2π будет

$$|A_n|\le\frac{1}{|\sin\dfrac{x}{2}|}$$

и ряд сходится. Если x кратно 2π, то ряд превращается в гармонический и расходится.
$\square$

УПРАЖНЕНИЕ 2. Докажите, что ряд в предыдущем примере сходится условно (при x не кратном 2π).

УПРАЖНЕНИЕ 3. Предположим, что последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и стремится к нулю. Исследуйте на сходимость следующие ряды

$$\sum a_n\cos n\theta,\quad \sum a_n\sin n\theta.$$

§9. Арифметические операции над рядами

Начнем данный параграф с небольшого примера.

ПРИМЕР 1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \tag{1}$$

сходится неабсолютно. Расставим в нем скобки

$$\left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\tfrac{1}{2n+1} - \tfrac{1}{2n+2}\right) + \ldots =$$

$$= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \tfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} + \ldots .$$

Полученный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \tag{2}$$

положителен и, очевидно, сходится. $\square$

Вопрос. Совпадают ли суммы рядов (1) и (2)?
Ответ дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 9.1. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то в нем можно произвольным образом расставить скобки, причем полученный ряд будет сходиться к той же сумме.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что ряд

$$(a_1 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + \ldots$$

$$\ldots + (a_{n_k+1} + \ldots + a_{n_{k+1}}) + \ldots$$

– тоже сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд. Последовательность частичных сумм нового ряда $\widetilde{A_1}, \ldots, \widetilde{A_k}, \ldots$ есть подпоследовательность частичных сумм старого ряда $A_{n_1}, \ldots, A_{n_k}, \ldots$, что доказывает наше утверждение. $\square$

Пример сходящегося ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}((-1)^i + (-1)^{i+1})$ показывает, что обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

ТЕОРЕМА 9.2. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$, *где* $b_n = (a_{n1} + \ldots + a_{nk})$, *причем* k *– фиксировано. Кроме того, пусть* $a_{nl} \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и при всех* $l = 1, \ldots, k$. *Тогда в ряде* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *можно раскрыть скобки, т.е. ряд*

$$a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1k} + a_{21} + \ldots + a_{2k} + a_{31} + \ldots$$

сходится, причем к той же самой сумме, что и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *(т.е. к* B*).*

Доказательство. Переобозначим члены ряда

$$a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1k} + a_{21} + \ldots = c_1 + c_2 + \ldots + c_k + c_{k+1} + \ldots,$$

т.е. $c_{k(n-1)+l} = a_{nl}$. Обозначим через C_n – $n-$ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$, а B_m – $m-$ю частичную сумму ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$. Очевидно, что при $n = km$ выполнено $C_{km} = B_m$, и, стало быть, $C_{mk} \to B$ при $m \to \infty$.

Далее, заметим, что при $m = [\frac{n}{k}]$ и $l = n - km$ выполнено $\alpha_n = c_{km+1} + \ldots + c_{km+l} = a_{m1} + \ldots + a_{ml}$. Учитывая, что a_{ml} при любом l – бесконечно малая величина при $m \to \infty$, получаем,

$$|\alpha_n| \leq |a_{m1}| + \ldots + |a_{ml}| \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, при $n \to \infty$ выполнено

$$C_n = C_{mk} + \alpha_n \to B + 0 = B.$$

□

§10. Умножение рядов

Пусть заданы два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (2).$$

Положим

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \quad (3)$$

называется *произведением рядов* (1) и (2) (в смысле Коши).

УПРАЖНЕНИЕ 1. Ясно, что произведение рядов (1) и (2) должно быть суммой всевозможных произведений вида $\{a_i b_j\}$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$. Расположим множество $\{a_i b_j\}$ в виде следующей бесконечной матрицы с двумя входами:

$$\begin{array}{cccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & a_1b_4 & a_1b_5 & \ldots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & a_2b_4 & a_2b_5 & \ldots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & a_3b_4 & a_3b_5 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots .
\end{array}$$

Указать способ формирования коэффициентов c_n при определении бесконечного произведения по Коши. Предложить другие "разумные" способы формирования коэффициентов c_n в бесконечном произведении.

ПРИМЕР 1. Найдем "квадрат" геометрической прогрессии

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}, \quad q > 1.$$

Мы имеем

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^k} \cdot \frac{1}{q^{n-k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^{n+1}} = \frac{n}{q^{n+1}}$$

и, следовательно,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{q^{n+1}}.$$

□

ТЕОРЕМА 10.1 (Коши). *Если ряды (1), (2) сходятся абсолютно, то их произведение (3) также сходится абсолютно.*

Доказательство. Для частичных сумм ряда (3) мы имеем

$$\left| \sum_{n=1}^{s} c_n \right| \le \sum_{n=1}^{s} |c_n| = \sum_{n=1}^{s} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} \right| \le$$

$$\leq \sum_{k,n=1}^{s} |a_k|\cdot|b_n| = \left(\sum_{i=1}^{s}|a_i|\right)\left(\sum_{j=1}^{s}|b_j|\right).$$

В правой части данной цепочки неравенств стоит произведение частичных сумм рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|.$$

Тем самым, абсолютная сходимость рядов (1), (2) влечет абсолютную сходимость ряда (3). Теорема доказана. □

УПРАЖНЕНИЕ 2. Показать, что в условиях теоремы сумма ряда (3) равна произведению сумм $A \cdot B$.

ПРИМЕР 2. Если оба ряда (1) и (2) сходятся лишь неабсолютно, то невозможно гарантировать сходимость ряда (3). К примеру, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \ldots$$

сходится условно. Общий член c_n квадрата этого ряда имеет вид

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\tfrac{1}{1\cdot\sqrt{n}} + \tfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \tfrac{1}{\sqrt{i}\sqrt{n-i+1}} + \ldots + \tfrac{1}{\sqrt{n}\sqrt{1}}\right).$$

Так как каждое из слагаемых в скобках больше $\frac{1}{n}$ (проверьте!), то $|c_n| > 1$ при $n > 1$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ расходится.

С другой стороны, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots,$$

общий член квадрата которого

$$c_n = (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2(n-1)} + \ldots + \frac{1}{i(n-i+1)} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Несложно показать (покажите, например, пользуясь методом неопределенных коэффициентов!), что

$$c_n = (-1)^{n-1}\frac{2}{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Также можно доказать (докажите!), что при $n \to \infty$, монотонно возрастая, величина $|c_n|$ стремится к 0, монотонно убывая. По признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится. □

§11. Теорема Римана

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Пусть даны два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \;\; (1) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \;\; (1').$$

Если ряд $(1')$ получается из ряда (1) путем перестановки конечного либо бесконечного множества элементов, то говорят, что ряд $(1')$ есть *перестановка ряда* (1).

ПРИМЕР 1. Пусть задан ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots . \tag{2}$$

Ряды

$$\frac{1}{2^2} + 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

и

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

суть перестановки ряда (2). □

Следующая теорема кажется на первый взгляд абсолютно парадоксальной, поскольку противоречит всей нашей предыдущей математической практике. Еще со школы нам известно правило "от перестановки мест слагаемых сумма не меняется". Однако формулируемая ниже теорема говорит, что если ряд сходится неабсолютно, то от перестановки (бесконечного числа) слагаемых может не только измениться сумма, но и посредством подходящей перестановки она может быть сделана каким угодно наперед заданным числом.

ТЕОРЕМА 11.1. *Предположим, что ряд (1) сходится неабсолютно. Тогда каково бы ни было наперед заданное число L, конечное либо бесконечное, найдется перестановка ряда (1), имеющая суммой L.*

Доказательство. Мы будем предполагать, что все члены ряда (1) отличны от нуля, поскольку нулевые члены ряда на сумму влияния не оказывают. Доказательство проведем в несколько этапов.

I-й этап. Рассмотрим множество всех неотрицательных членов a_n ряда (1) таких, что $a_n \geq 1$. Так как ряд сходится, то общий член $a_n \to 0$ и членов $a_n \geq 1$ будет, разве лишь, конечное число. Поэтому мы можем расположить их в порядке невозрастания:

$$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_{k_1} \geq 1.$$

Рассмотрим множество всех положительных членов ряда (1) таких, что $1 > a_n \geq \frac{1}{2}$. Их также конечное число и мы сможем расположить их следом за первым набором в порядке невозрастания:

$$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_{k_1} > p_{k_1+1} \geq p_{k_1+2} \geq \ldots \geq p_{k_2} \geq \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим множество всех положительных членов ряда (1) таких, что $\frac{1}{2} > a_n \geq \frac{1}{3}$. Мы располагаем их следом за вторым набором в порядке невозрастания:

$$p_1 \geq \ldots \geq p_{k_1} > p_{k_1+1} \geq \ldots \geq p_{k_2} \geq p_{k_2+1} \geq \ldots \geq p_{k_3} \geq \frac{1}{3}.$$

Продолжая этот процесс неограниченно мы расположим все положительные члены ряда (1) в порядке невозрастающей последовательности:

$$p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n \geq \ldots > 0, \quad p_n \to 0. \tag{3}$$

Аналогичную процедуру осуществляем с абсолютными величинами отрицательных членов ряда (1) и располагаем их в виде невозрастающей последовательности:

$$q_1 \geq q_2 \geq \ldots \geq q_n \geq \ldots > 0, \quad q_n \to 0. \tag{4}$$

На этом первый этап построения заканчивается.[5]

II-й этап. Рассмотрим два ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n \ (5) \quad \text{и} \quad \sum_{m=1}^{\infty} q_m \ (6).$$

---

[5]Отметим, что на данном этапе мы использовали лишь факт, что $a_n \to 0$. Ничем более мы не пользовались. Отметим еще, что даже не всякую последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ можно расположить в виде монотонно невозрастающей последовательности. К примеру, пусть дана последовательность

$$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{6}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$$

Попытаемся расположить ее в порядке невозрастания. Получаем набор чисел

$$\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{n+1}{n}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots,$$

который последовательностью не является. Таким образом, на данном этапе условие $a_n \to 0$ существенно.

Покажем, что оба этих ряда расходятся.

Предположим сначала, что оба ряда сходятся. Обозначим через P и Q их суммы. Тогда ряд (1) сходится абсолютно, поскольку при любом $s = 1, 2, \ldots$ мы имеем

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_s| \leq P + Q.$$

Итак, предположим, что один из рядов, например, (5) – сходится, а другой, например, (6) – расходится. Тогда с ростом n частичные суммы S_n ряда (1) вбирают в себя все большее и большее число членов рядов (5) и (6), причем последние со знаком минус. При этом с ростом n члены ряда (6) дают сколь угодно большую отрицательную сумму, тогда как члены ряда (5) могут дать лишь ограниченную компенсацию. Тем самым, $S_n \to -\infty$ при $n \to \infty$ и ряд (1) расходится, что невозможно.

Итак, мы доказали, что каждый из рядов (5) и (6) расходится.

На данном этапе мы уже использовали неабсолютную сходимость ряда (1).

III-й этап. Приступим к построению ряда, имеющего суммой число L. Мы будем предполагать, что $L \neq \pm\infty$.

Будем складывать члены последовательности (3) один за другим по следующему правилу: Если $p_1 > L$, то остановимся. Если $p_1 < L$, то будем прибавлять к нему по порядку члены p_2, p_3 и т.д. до тех пор пока при некотором n_1 не будет выполнено

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n > L \geq \sum_{n=1}^{n_1-1} p_n. \tag{7}$$

Такой номер n_1 существует, поскольку ряд (5) имеет своей суммой $+\infty$.

Будем вычитать из суммы $\sum\limits_{n=1}^{n_1} p_n$ один за другим члены q_m по правилу: Если $\sum\limits_{n=1}^{n_1} p_n - q_1 < L$, то остановимся. Если же нет, то будем продолжать вычитание до тех пор пока для некоторого m_1 не будет выполнено

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n - \sum_{m=1}^{m_1} q_m < L \leq \sum_{n=1}^{n_1} p_n - \sum_{m=1}^{m_1-1} q_m. \tag{8}$$

Такой номер m_1 существует обязательно, поскольку сумма ряда (6) равна $+\infty$.

Будем прибавлять к числу $\sum\limits_{n=1}^{n_1} p_n - \sum\limits_{m=1}^{m_1} q_m$ числа p_n, начиная с (n_1+1)-го члена, по тому же самому правилу. Если $\sum\limits_{n=1}^{n_1} p_n - \sum\limits_{m=1}^{m_1} q_m + p_{n_1+1} > L$, то остановимся, если нет, то найдем номер n_2 такой, что

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n - \sum_{m=1}^{m_1} q_m + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} p_n > L \geq \sum_{n=1}^{n_1} p_n - \sum_{m=1}^{m_1} q_m + \sum_{n=n_1+1}^{n_2-1} p_n. \tag{9}$$

Будем вычитать из числа $\sum\limits_{n=1}^{n_1} p_n - \sum\limits_{m=1}^{m_1} q_m + \sum\limits_{n=n_1+1}^{n_2} p_n$ один за другим числа q_m, начиная с (m_1+1)-го, пока при некотором m_2 мы не придем к ситуации

$$\sum_{n=1}^{n_1} p_n - \sum_{m=1}^{m_1} q_m + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} p_n - \sum_{m=m_1+1}^{m_2} q_m < L \leq$$

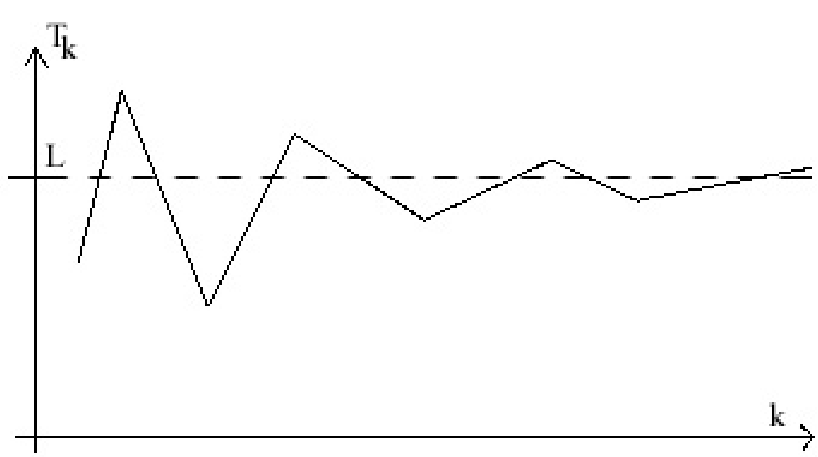
$$\leq \sum_{n=1}^{n_1} p_n - \sum_{m=1}^{m_1} q_m + \sum_{n=n_1+1}^{n_2} p_n - \sum_{m=m_1+1}^{m_2-1} q_m. \tag{10}$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы придем к ряду

$$p_1 + \ldots p_{n_1} - q_1 - \ldots - q_{m_1} + p_{n_1+1} + \ldots + p_{n_2} - q_{m_1+1} - \ldots - q_{m_2} + \ldots \tag{11}$$

Подчеркнем, что при построении ряда (11) мы употребим все до одного члена последовательностей (3) и (4).

IV-й этап. Покажем, что ряд (11) имеет своей суммой число L. Обозначим через T_k частичные суммы ряда (11). Проследим за поведением T_k с ростом k.



Заметим, что из (7), (8), (9) и (10) следует, что

$$|T_{n_1} - L| < p_{n_1}, \quad |T_{n_1+m_1} - L| < q_{m_1}, \quad |T_{n_2+m_1} - L| < p_{n_2},$$

$$|T_{n_2+m_2} - L| < q_{m_2}, \ldots .$$

Так как $p_n, q_m \to 0$ при $n, m \to \infty$, то такие суммы стремятся к L. Таким образом, нами доказана сходимость к L некоторой, специально выбранной, подпоследовательности последовательности частичных сумм.

Далее, возьмем произвольную частичную сумму T_n ряда (11), где $n > n_1 + m_1$. Всегда можно найти номер $k(n)$ такой, что либо $n_k + m_k \le n \le m_k + n_{k+1}$ и, в силу конструции этого ряда, будет справедливо неравенство

$$T_{n_k+m_k} \le T_n \le T_{n_{k+1}+m_k},$$

либо $n_{k+1} + m_k \le n \le n_{k+1} + m_{k+1}$, и будет справедливо неравенство

$$T_{n_{k+1}+m_k} \le T_n \le T_{n_{k+1}+m_{k+1}}.$$

Тем самым, вообще $T_n \to L$ при $n \to \infty$.

Теорема доказана в случае, когда L конечное число. Случаи $L = \pm\infty$ рассмотреть самостоятельно. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства видно, что могут быть построены и такие перестановки неабсолютно сходящегося ряда, которые не будут иметь суммы.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Используя метод доказательства теоремы Римана, предложить несколько различных схем построения "финансовых пирамид".

§12. Перестановки абсолютно сходящихся рядов

ТЕОРЕМА 12.1. *Предположим, что ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

сходится.

Для того чтобы всякая перестановка ряда (1) была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы ряд (1) сходился абсолютно.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что всякая перестановка ряда (1) сходится, но сам ряд сходится неабсолютно. Тогда по теореме Римана найдется перестановка ряда (1), имеющая суммой $+\infty$, что невозможно.

Достаточность. Пусть ряд (1) сходится абсолютно и пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – произвольная его перестановка. Если $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то для любого $N \geq 1$ выполнено

$$\sum_{n=1}^{N} |b_n| \leq S.$$

На основании условия сходимости положительных рядов заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится абсолютно и, следовательно, сходится. Теорема доказана. □

ТЕОРЕМА 12.2. *Если ряд (1) сходится абсолютно, то всякая его перестановка имеет сумму, равную сумме ряда (1).*

Доказательство. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ – произвольная перестановка ряда (1) с частичными суммами $B_k = \sum\limits_{n=1}^{k} b_n$. Частичные суммы ряда (1) будем обозначать через $A_k = \sum\limits_{n=1}^{k} a_n$.

Так как ряд (1) сходится абсолютно, то на основании критерия Коши для всякого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что при любых $p \geq q \geq N(\varepsilon)$ выполнено

$$\sum_{n=q}^{p} |a_n| < \varepsilon. \tag{2}$$

Выберем теперь натуральное число $r = r(N(\varepsilon))$ так, чтобы все числа $a_1, a_2, \ldots, a_{N(\varepsilon)}$ содержались в наборе $b_1, b_2, \ldots, b_r$. (Ясно, что $r \geq N(\varepsilon)$.)

Пусть теперь $k > r$ – произвольно. Тогда числа $a_1, a_2, \ldots, a_{N(\varepsilon)}$ в разности

$$A_k - B_k = \sum_{n=1}^{k} a_n - \sum_{n=1}^{k} b_n$$

уничтожаются. Заметим еще, что в этой разности могут встречаться лишь *различные* числа a_n с $n > N(\varepsilon)$. Поэтому, в силу (2), имеем

$$|A_k - B_k| \le \sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} |a_n| \le \varepsilon. \tag{3}$$

Итак, по $\varepsilon > 0$ нашелся номер $r = r(\varepsilon) > 0$ такой, что при всех $k > r$ выполнено (3). Так как $A_k \to S$, то и $B_k \to S$. Теорема доказана. $\square$

§13. Повторные и двойные ряды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.1. Числовую функцию двух натуральных аргументов будем называть *двойной* последовательностью.

Для таких последовательностей будем использовать обозначение $\{a_{mn}\}$. Удобнее всего такие последовательности представлять себе в виде "бесконечной матрицы".

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.2. Двойным рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m,n} a_{mn}$$

называется формальная бесконечная сумма вида

$$a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{21} + \ldots + a_{31} + \ldots.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.3. Конечная сумма

$$A_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}$$

называется частичной суммой (прямоугольной) двойного ряда вида $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$. Исходная последовательность $\{a_{mn}\}$ называется общим членом ряда.

Напомним еще одно определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.4. Число A называется пределом последовательности $\{A_{mn}\}$ (при $m, n \to \infty$), если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех пар (m, n) с условием $m > N, \quad n > N$ выполнены неравенства

$$|A_{mn} - A| < \varepsilon.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.5. Конечный либо бесконечный предел A последовательности частичных сумм $\{A_{mn}\}$ при $m, n \to \infty$ называется *суммой ряда*. Если ряд имеет *конечную* сумму, то его называют *сходящимся*. В случае, когда сумма бесконечна ($\pm\infty$), либо не существует, ряд называется *расходящимся*.

Справедливы следующие утверждения (которые мы предлагаем читателям доказать самостоятельно).

ТЕОРЕМА 13.1 (критерий Коши сходимости двойного ряда). *Для того чтобы двойной ряд* $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *существовало число* $N = N(\varepsilon)$ *такое, что для всех* (m_1, n_1) *и* (m_2, n_2) *с условием* $m_1 > N, \quad m_2 > N, \quad n_1 > N, \quad n_2 > N$ *было справедливо неравенство*

$$|A_{m_1 n_1} - A_{m_2 n_2}| < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 13.2 (необходимое условие сходимости двойного ряда). *Если ряд* $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$ *сходится, то* $a_{mn} \to 0$ *при* $m, n \to \infty$.

ТЕОРЕМА 13.3. *Для сходимости двойного ряда* $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$ *с условием* $a_{mn} > 0$ *необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы* A_{mn} *были ограничены в совокупности, т.е. чтобы существовало число* M, *для которого* $A_{mn} < M$ *при всех натуральных* m *и* n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.6. Двойной ряд $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{m,n} |a_{mn}|$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите, что двойной абсолютно сходящийся ряд – сходится.

Однако, бесконечные суммы вида $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$ позволяют рассматривать и несколько иные конструкции предельного перехода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.7. Пусть $\{a_{mn}\}$ – двойная последовательность. Зафиксируем m и рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$. Обозначим его через b_m. Формальная бесконечная сумма

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}$$

называется повторным рядом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13.8. Если при любом m ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ сходится к b_m и ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$ сходится к некоторому A, то повторный ряд называют сходящимся, и записывают в виде

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}) = A.$$

ТЕОРЕМА 13.4. *Если сходится двойной ряд* $\sum\limits_{m,n} a_{mn}$, *и для всех* m *сходятся ряды* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$, *то повторный ряд* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}$ *также сходится, и его сумма равна сумме двойного ряда.*

Доказательство. Доказательство вполне аналогично доказанному ранее утверждению о двойных и повторных пределах. Приведите его самостоятельно. □

ТЕОРЕМА 13.5. *Если двойной ряд сходится абсолютно, то сходится и любой ряд (однократный, повторный, двойной), полученный перестановкой членов данного ряда. При этом сумма любого такого ряда совпадает с суммой исходного ряда.*

Попробуйте доказать данное утверждение самостоятельно.

§14. Ряды векторов

Рассмотрим пространство $\mathbf{R^n}$, т.е. пространство, состоящее из векторов x с n вещественными координатами $(x_1, \ldots, x_n)$.

Векторное пространство $\mathbf{R^n}$ нормируется, например с помощью нормы
$$||x|| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$
Можно рассматривать и любую другую норму. В частности, часто используется следующая норма
$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$
Заметим, что для обозначения нормы элемента $x \in \mathbf{R^n}$ часто используется запись $|x|$. Напомним следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.1. Пусть $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} = \{(x_1^k, \ldots, x_n^k)\}$ – произвольная последовательность точек в $\mathbf{R}^n$. Будем говорить, что $x^k \to x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ при $k \to \infty$ и писать $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists$ номер $N(\varepsilon)$ такой, что $\forall\, k > N(\varepsilon)$ выполнено $||x^k - x|| < \varepsilon$.

Последнее эквивалентно тому, что для любого $m = 1, \ldots, n$ выполнено
$$\lim_{k\to\infty} x_m^k = x_m.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14.2. Рядом в $\mathbf{R}^n$ называется символ
$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k,$$
где $x^k = (x_1^k, \cdots, x_n^k) \in \mathbf{R}^n$. Его суммой S называется предел последовательности S^l его частичных сумм:
$$S = \lim_{l\to\infty} S^l = \lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{l} x^k.$$

Как и ранее, говорят что ряд сходится, если он имеет конечную сумму, и расходится в противном случае. Здесь под словами конечная сумма подразумевается вектор из $\mathbf{R}^n$. Из определения сразу следует (проверьте!), что ряд из векторов сходится тогда и только тогда, когда для всех $m = 1, \cdots, n$ сходятся числовые ряды
$$\sum_{k=1}^{\infty} x_m^k.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Введите понятие абсолютной сходимости ряда векторов и сформулируйте основные утверждения, аналогичные утверждениям из теории числовых рядов.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Сформулируйте понятие матричного ряда, и дайте определение его сходимости.

§15. Бесконечные произведения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1. Если $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ есть некоторая последовательность положительных чисел, то символ

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n \tag{1}$$

называется *бесконечным произведением.* Величины

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k \tag{2}$$

называются *частичными произведениями.* Конечный или бесконечный предел

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n$$

частичных произведений называется *значением произведения* (1). Если бесконечное произведение имеет конечное значение P и притом отличное от нуля, то само бесконечное произведение называется *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся.* Произведение

$$\prod_{n=m+1}^{\infty} p_n$$

называется *остатком* произведения (1) после m-го члена.

Прологарифмируем равенство (2). Мы имеем

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^{n} \ln p_k \tag{3}$$

и вопрос о сходимости произведения (1) сводится к существованию отличного от $+\infty$ и $-\infty$ предела частичных сумм (3). Таким образом, *изучение бесконечного произведения полностью сводится к изучению ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Проверьте справедливость следующих утверждений.

1. Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}$ расходится при всяком $q \neq 1$.

2. Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится при всяком $\alpha \neq 0$.

3. Бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty} \exp\{\frac{1}{n \ln^{\alpha} n}\}$ сходится, если $\alpha > 1$, и расходится, если $\alpha \leq 1$.

ПРИМЕР 1. Сформулируем аналог критерия Коши сходимости для бесконечных произведений:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, N(\varepsilon)$$

такое, что $\forall \;\; m \geq n > N(\varepsilon)$ выполнено

$$\left| \ln \prod_{k=n}^{m} p_k \right| < \varepsilon. \tag{4}$$

Перепишем данное соотношение в более простом виде (будем считать, что ε достаточно мало). Мы имеем

$$-\varepsilon < \ln \prod_{k=n}^{m} p_k < \varepsilon$$

или, потенцируя,

$$e^{-\varepsilon} < \prod_{k=n}^{m} p_k < e^{\varepsilon}.$$

Однако,

$$e^{-\varepsilon} = 1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2!} - \ldots > 1 - \varepsilon$$

и

$$e^{\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2!} + \ldots < 1 + 2\varepsilon.$$

Таким образом, неравенство (4) может быть записано в виде

$$1 - \varepsilon < \prod_{k=n}^{m} p_k < 1 + 2\varepsilon.$$

□

Глава 14

Функциональные последовательности и ряды

§1. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и функциональных рядов

Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность функций с одной и той же областью определения $E \subset \mathbf{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Если для всех $x \in E$ выполнено

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

то функция $f(x)$, определенная таким образом на E, называется предельной функцией для последовательности $\{f_n(x)\}$ на E, а сама сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на E называется поточечной сходимостью.

ПРИМЕР 1. Последовательность $\left\{e^{-nx^2}\right\}_{n=1}^{\infty}$ на $\mathbf{R}$ поточечно сходится. При этом, предельная функция имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0 \\ 0, & \text{при } x \neq 0 \end{cases}$$

$\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на E к $f(x)$, если $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N(\varepsilon) : \forall\, n > N(\varepsilon)$ и $\forall\, x \in E$ выполнено $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим последовательность $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно, что предельной функцией является

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 1 \\ 0, & \text{при } |x| < 1. \end{cases}$$

При остальных значениях x предельной функции не существует.

Покажем, что на любом отрезке $[-h, h]$, где $0 < h < 1$, сходимость является равномерной. Пусть вначале $x \in [-h, h]$, где $0 < h < 1$. Зададим $\varepsilon > 0$. Найдем $N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется

$$|x^n - 0| < \varepsilon,$$

т.е.

$$|x^n| < \varepsilon.$$

Для всех $x \in [-h, h]$ справедливо неравенство

$$|x^n| \leq h^n.$$

Выясним, при каких значениях n выполнено $h^n < \varepsilon$. Для этого необходимо, чтобы

$$n \ln h < \ln \varepsilon,$$

т.е. при

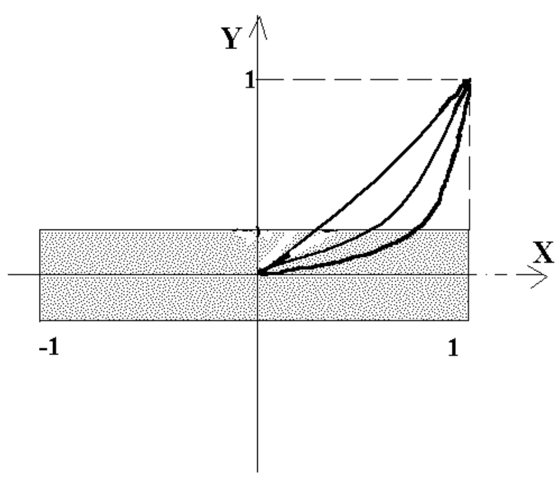
$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln h}$$

необходимое соотношение выполнено (здесь учтено, что $\ln h$ – отрицательное число). Выбирая, например,

$$N(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln h} + 1$$

получаем требуемое.

Итак, мы доказали, что функциональная последовательность $\{x^n\}$ сходится равномерно на отрезке $[-h, h]$, где $0 < h < 1$.



Покажем, что последовательность $\{x^n\}$ сходится неравномерно на интервале $(-1, 1)$ (тем более на $[0, 1]$). Для этого необходимо, чтобы $\exists\, \varepsilon_1 > 0$ такое, что $\forall\, N$ найдутся натуральное число $n > N$ и $x \in (-1, 1)$ для которых

$$|x^n - 0| \geq \varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Тогда необходимо выполнение неравенства

$$|x^n| \geq \frac{1}{2}.$$

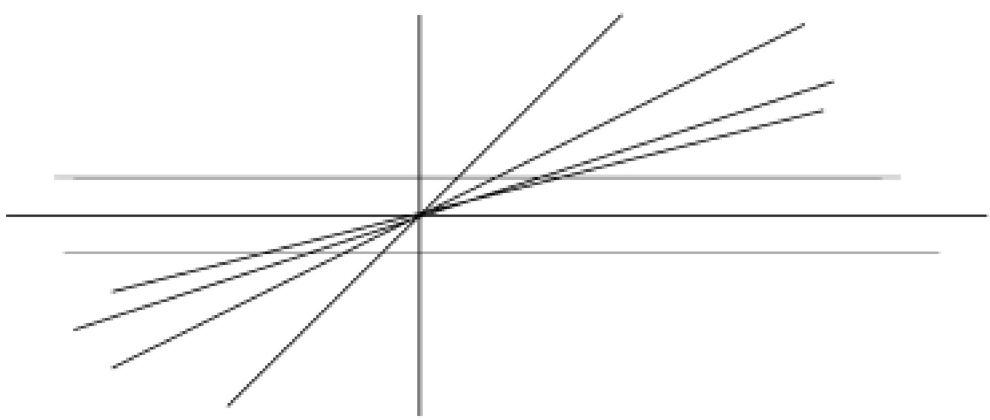
Выбирая

$$x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

получаем требуемое. $\square$

ПРИМЕР 3. Рассмотрим последовательность функций $f_n(x) = \frac{x}{n}$ с областью определения $E = \mathbf{R}$. Очевидно, что предельная функция $f(x) = 0$. Несложно показать (покажите!), что данная функциональная последовательность сходится к нулю неравномерно на $\mathbf{R}$.

Заметим, что если в качестве области определения взять $E = [a, b]$, то сходимость к нулю будет уже равномерная (проверьте!). $\square$



Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x), \tag{1}$$

где $U_n(x)$ – функции с общей областью определения E.

Пусть для всех $x \in E$ ряд (1) сходится к сумме $S(x)$. Тогда $S(x)$ есть поточечный предел последовательности частичных сумм

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} U_n(x).$$

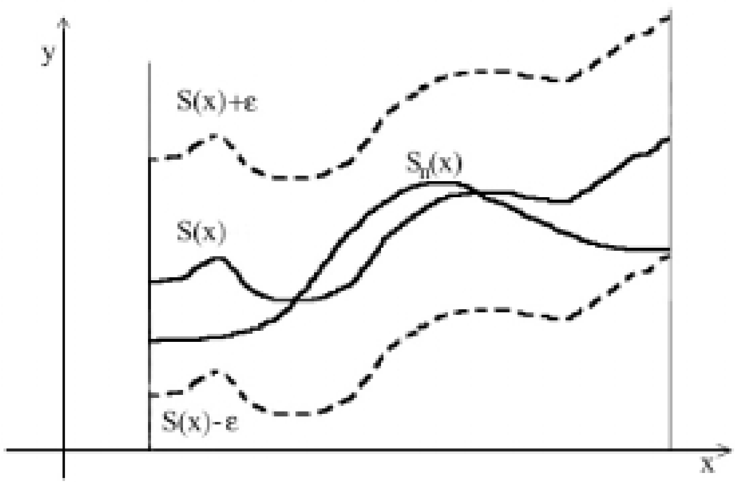
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Говорят, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$$

сходится равномерно на E к своей сумме, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon) : \forall\, n > N(\varepsilon)$ выполнено

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in E$.



§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и функциональных рядов

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть функциональная последовательность* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится к* $f(x)$ *на множестве* E. *Тогда если* $E_1 \subset E$, *то* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится к* $f(x)$ *и на множестве* E_1.

Доказательство. Данное утверждение сразу следует из определения равномерной сходимости функциональной последовательности. Доказательство проведите самостоятельно. $\square$

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится поточечно к $f(x)$ на E. Положим*

$$M_n = \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)|.$$

Последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на E к $f(x)$ тогда и только тогда, когда $M_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть сначала $M_n \to 0$ при $n \to \infty$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется $0 \le M_n < \varepsilon$. Отсюда получаем, что $\forall\, n > N(\varepsilon)$ и $\forall\, x \in E$ выполняется $|f_n(x) - f(x)| \le M_n < \varepsilon$, а следовательно последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к $f(x)$.

Обратно. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно к $f(x)$ на E. Предположим, что $M_n \not\to 0$. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность номеров $\{n_k\} \to \infty$ такие, что $0 < \varepsilon_0 \le M_{n_k}$. Отсюда получаем

$$0 < \varepsilon_0 \le \sup |f_{n_k}(x) - f(x)|.$$

По определению точной верхней грани существуют $x_{n_k} \in E$ такие, что выполнено неравенство:

$$0 < \frac{\varepsilon_0}{2} \le |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})|,$$

т.е. нарушается равномерная сходимость, что, в свою очередь, противоречит условию. □

ТЕОРЕМА 2.3 (признак Вейерштрасса). *Пусть $\{U_n(x)\}$ – последовательность функций определенных на E, и пусть выполнено*

$$|U_n(x)| \le M_n$$

для всех $x \in E$. Тогда если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

сходится, то функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$$

сходится равномерно к своей сумме.

Доказательство. Так как числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ сходится, то сравнивая в точке $x \in E$ функциональный ряд с числовым получаем, что функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ сходится при любом фиксированном x (по признаку сравнения). Таким образом у функционального ряда существует сумма

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x).$$

Тогда имеем

$$\sup_{x\in E} |S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\in E} \Big| \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x) \Big| \leq$$

$$\leq \sup_{x\in E} \sum_{k=n+1}^{\infty} |U_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{x\in E} |U_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \to 0$$

при $n \to \infty$ (т.к. числовой ряд сходится). Пользуясь предыдущей теоремой, получаем требуемое. $\square$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$. Попробуем найти какие-нибудь значения параметра α, при которых этот ряд будет сходиться равномерно на $E = \mathbf{R}$.

Учитывая неравенство $\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$, получаем, что при $\alpha > 1$ ряд сходится равномерно, т.к. мажорируется сходящимся числовым рядом (т.е. сверху ограничивается числовым рядом). $\square$

ПРИМЕР 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2 x)\cos(\pi n x)}{n\sqrt{n}}.$$

Исследуем его на равномерную сходимость на множестве $E = \mathbf{R}$. Заметим, что $\forall\, x \in \mathbf{R}$ и $\forall\, n \in \mathbf{N}$ справедливы неравенства

$$|\operatorname{arctg}(n^2 x)| < \frac{\pi}{2},$$

и

$$|\cos(\pi n x)| \leq 1.$$

Таким образом

$$|U_n(x)| < \frac{\pi}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

Учитывая сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

получаем, что первоначальный ряд сходится равномерно. $\square$

§3. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности и функционального ряда

ТЕОРЕМА 3.1 (критерий Коши). *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно на E тогда и только тогда, когда $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,N(\varepsilon) : \forall\,m \geq n \geq N(\varepsilon)$ и $\forall\,x \in E$ выполняется $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть сначала последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно. Тогда зафиксируем $\varepsilon > 0$ и для $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется номер $N : \forall\,n > N(\varepsilon)$ и $\forall\,x \in E$ выполняется

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $m \geq N$. Тогда справедливо неравенство

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Объединяя, получаем справедливость следующих соотношений

$$|f_m(x)-f_n(x)| = |f_m(x)-f(x)+f(x)-f_n(x)| \leq |f_m(x)-f(x)|+ \\ +|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Обратно, докажем, что последовательность сходится равномерно при условиях, что $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,N(\varepsilon) : \forall\,m \geq n \geq N(\varepsilon)$ и $\forall\,x \in E$ выполняется.

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{1}$$

По критерию Коши для числовых последовательностей, при фиксированном x последовательность $f_n(x)$ сходится к предельной функции $f(x)$.

В неравенстве (1) осуществим предельный переход по $m \to \infty$. Получим, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такой, что для любого $n > N(\varepsilon)$ и $\forall\,x \in E$ справедливо неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Следовательно функциональная последовательность сходится равномерно. $\square$

ТЕОРЕМА 3.2 (критерий Коши для ряда). *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ *сходится равномерно тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $N(\varepsilon)$ *такой, что* $\forall\, m \geq n > N(\varepsilon)$ *и* $\forall\, x \in E$ *выполняется*

$$\left|\sum_{k=n}^{m} U_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Доказательство следует из предыдущей теоремы, т.к. последнее неравенство эквивалентно следующему

$$|S_m(x) - S_n(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in E,$$

где

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k(x).$$

□

§4. Непрерывность суммы функционального ряда

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть функциональный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \tag{1}$$

определен на $[a, b)$. *Если все функции* $U_n(x)$ *непрерывны в точке* a *и ряд (1) сходится равномерно на* $[a, b)$, *то его сумма* $S(x)$ *также непрерывна в точке* a.

Доказательство. Отметим вначале справедливость неравенства

$$|S(x)-S(a)| \leq |S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(a)|+|S_n(a)-S(a)|.$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Т.к. ряд (1) сходится равномерно, то $\exists\, N(\varepsilon) :\ \forall\, n > N(\varepsilon)$ выполняется

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

для всех $x \in [a, b)$. И, в частности, это верно в точке a, т.е.

$$|S_n(a) - S(a)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Фиксируем номер $n_0 > N(\varepsilon)$. Так как $U_n(x)$ – непрерывны в точке a, то частичная сумма $S_{n_0}(x)$ тоже непрерывна в точке a. Отсюда $\exists\,\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех $x: \quad |x-a| < \delta(\varepsilon)$ выполняется

$$|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(a)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Объединяя неравенства $(2), (3), (4)$ получаем, что при всех $x: \quad |x-a| < \delta(\varepsilon)$ выполнено

$$|S(x) - S(a)| \le |S(x) - S_{n_0}(x)| + |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(a)| +$$

$$+ |S_{n_0}(a) - S(a)| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Для каждой функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, для которого она является последовательностью его частичных сумм. А именно,

$$U_1(x) = f_1(x), \quad U_2(x) = f_2(x) - f_1(x), \quad \dots,$$

$$U_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \dots .$$

Таким образом, любую теорему, доказанную для функциональных рядов, можно переформулировать в соответствующую теорему для функциональных последовательностей, и наоборот. В частности, справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность функций, заданных на интервале $[a, b)$. Если все $f_n(x)$ непрерывны в точке a и последовательность сходится равномерно на $[a, b)$ к $f(x)$, то $f(x)$ непрерывна в точке a.*

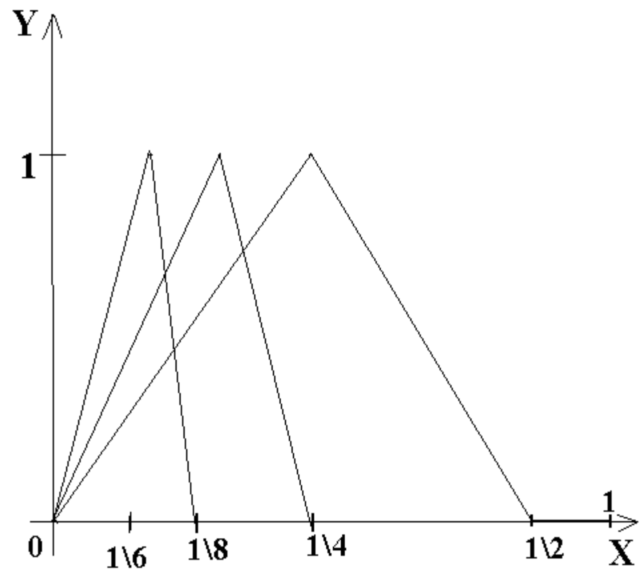
Покажем на контрпримерах существенность требования равномерной сходимости в доказанных выше теоремах.

ПРИМЕР 1. Последовательность $\{x^n\}$ непрерывных на $[0, 1]$ функций сходится (поточечно) к функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 1 \\ 0, & \text{при } x \in [0, 1). \end{cases}$$

Функция $f(x)$ разрывна, следовательно в доказанных теоремах нельзя отказаться от равномерной сходимости. □

ПРИМЕР 2. Последовательность $\{x^n\}$ непрерывных на $[0, 1)$ функций сходится (поточечно) к непрерывной функции, равной тождественно нулю. Следовательно условие равномерной сходимости в теореме не является необходимым. □



Приведем еще один аналогичный пример.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим последовательность функций, изображенную на графике.

Последовательность этих функций на $[0,1]$ сходится к функции, тождественно равной нулю. Сходимость неравномерная, но предельная функция непрерывна, следовательно условие равномерной сходимости ряда не является необходимым для заключения о непрерывности предельной функции. $\square$

§5. Теорема Дини

ТЕОРЕМА 5.1 (Дини[1]). *Пусть $E \subset \mathbf{R}$ – замкнутое ограниченное множество. Кроме того, пусть $\{f_n(x)\}$ – последовательность функций, непрерывных на E, сходящаяся (поточечно) на E к непрерывной функции $f(x)$. Если для всех n выполнено $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ $\forall\, x \in E$, то $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на E.*

Доказательство. Положим $g_n(x) = f_n(x) - f(x) \geq 0$. Тогда все $g_n(x)$ непрерывны, $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ и $g_n(x) \to 0$ поточечно. Таким образом, нам достаточно показать, что $g_n(x)$ сходится к 0 равномерно на E.

[1] Дини Улисс (14.11.1845-28.10.1918) – итальянский математик. Родился и работал в Пизе (Италия). Ему принадлежат важные работы по теории функций действительного переменного, теории аналитических функций, алгебре, аналитической теории дифференциальных уравнений.

Т.к. последовательность $\{g_n(x)\}$ монотонно убывает на E, то для доказательства ее равномерной сходимости достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется хотя бы один номер $n = n(\varepsilon)$ такой, что

$$0 \le g_n(x) \le \varepsilon \;\forall\, x \in E.$$

Предположим противное, т.е.

$$\exists \quad \varepsilon > 0 \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots \quad \exists\, x_n : \qquad g_n(x_n) > \varepsilon > 0.$$

Так как множество E ограничено, то по теореме Больцано-Вейерштрасса из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке x_0, которая принадлежит множеству E, в силу его замкнутости.

Мы имеем $g_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon > 0$. Зафиксируем целое $m \ge 0$. Тогда $\forall\, n_k \ge m$ выполнено $g_m(x_{n_k}) \ge g_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon > 0$, т.е. $g_m(x_{n_k}) > \varepsilon > 0$. Переходя здесь к пределу при $n_k \to \infty$ получим $g_m(x_0) \ge \varepsilon > 0$. Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем $\liminf\limits_{m\to\infty} g_m(x_0) \ge \varepsilon > 0$, что противоречит поточечной сходимости последовательности функций $g_m(x)$ к 0. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для неубывающей функциональной последовательности.

ПРИМЕР 1. Последовательность $\{x^n\}$ сходится неравномерно на $[0, 1)$, что показывает существенность требования замкнутости множества E в условиях теоремы. $\square$

ПРИМЕР 2. Последовательность $\{\frac{x}{n}\}$ сходится неравномерно на $\mathbf{R}^+$, что показывает существенность требования ограниченности множества E в условиях теоремы. $\square$

ПРИМЕР 3. Последовательность $\{x^n\}$ сходится неравномерно на $[0, 1]$, что показывает существенность требования непрерывности предельной функции в условиях теоремы. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 2. Найдите пример, показывающий существенность требования монотонности в условиях теоремы.

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ *определенный на замкнутом ограниченном множестве* E. *Предположим, что все* $U_n(x)$ *непрерывны и неотрицательны. Тогда, если ряд имеет непрерывную сумму* $S(x)$, *то этот ряд сходится к ней равномерно на множестве* E.

Доказательство – очевидно, проведите его самостоятельно.

§6. Перестановка предельных переходов в равномерно сходящейся последовательности

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на множестве E. Кроме того, пусть x_0 – предельная точка множества E и для любого номера n существует конечный*

$$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = A_n. \tag{1}$$

Тогда последовательность $\{A_n\}$ сходится и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{n\to\infty} A_n$$

или, в развернутом виде,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

ПРИМЕР 1. Последовательность $\{x^n\}$ сходится неравномерно на $[0,1)$. Кроме того, справедливы соотношения

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to 1} x^n = 1$$

и

$$\lim_{x\to 1}\lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Таким образом, условие равномерной сходимости в теореме существенно. □

Доказательство. Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Согласно критерию Коши, найдется N такое, что для всех $n, m > N$ и для всех $x \in E$ выполнено

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получаем

$$|A_n - A_m| \leq \varepsilon.$$

Тем самым, по критерию Коши для числовых последовательностей, получаем существование

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

Нам достаточно показать, что существует

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется номер n_0 такой, что для всех $x \in E$ выполнено

$$|f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2}$$

что возможно в силу равномерной сходимости последовательности. Учитывая определение предела числовой последовательности, и выбирая, если нужно n_0 еще больше, добьемся того, чтобы было выполнено

$$|A_{n_0} - A| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

Из условия (1) следует существование $\delta(\varepsilon) > 0$ такого, что для всех $x \in E,\ x \neq x_0, \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ выполняется

$$|f_{n_0}(x) - A_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4}$$

Объединяя $(2), (3), (4)$ получаем, что для произвольного $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in E, \quad x \neq x_0, \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ выполнено

$$|f(x) - A| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - A_{n_0}| + |A_{n_0} - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Таким образом, теорема доказана. □

Аналогично устанавливается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$, *определенный на множестве* E, *и* x_0 *– предельная точка множества* E. *Пусть этот ряд сходится равномерно на* E *и пусть для всех натуральных* n *существует*

$$\lim_{x \to x_0} U_n(x) = U_n.$$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$ *сходится, причем* $\lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, *иначе говоря*

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} U_n(x).$$

§7. Равномерная сходимость и интегрирование

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть $\{f_n(x)\}$ – последовательность непрерывных функций, равномерно сходящаяся на $[a,b]$ к $f(x)$. Тогда справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Всюду ниже будем считать, что $a<b$. Прежде всего отметим, что предельная функция $f(x)$ является непрерывной. Зададим произвольно $\varepsilon>0$. В силу равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на $[a,b]$, существует $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n>N(\varepsilon)$ и для всех $x\in[a,b]$ справедливо неравенство

$$-\varepsilon < f_n(x)-f(x) < \varepsilon.$$

Интегрируя данное неравенство находим:

$$-\varepsilon(b-a) < \int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx < \varepsilon(b-a)$$

т.е. для всех $n>N(\varepsilon)$ выполнено

$$|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx| < \varepsilon(b-a).$$

Это означает, что

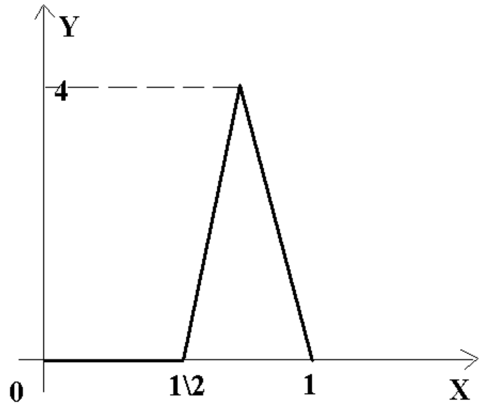
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

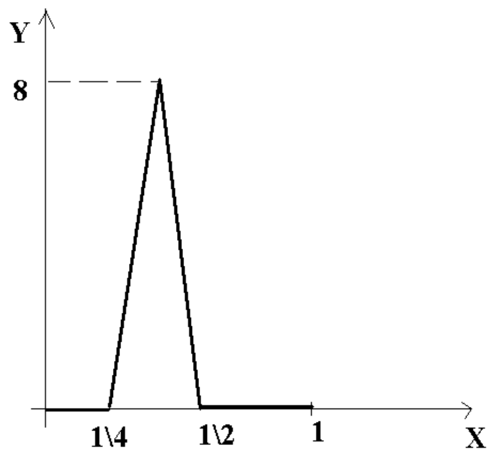
что и требовалось доказать. □

ПРИМЕР 1. Рассмотрим последовательность функций, изображенную на графиках.

Обратим внимание, что

$$\int\limits_0^1 f_1(x) = 1.$$





Обратим внимание, что

$$\int_0^1 f_2(x) = 1.$$

Остальные функции строятся аналогично. Данная последовательность функций сходится поточечно на отрезке $[0, 1]$ к непрерывной функции $f(x) = 0$. С другой стороны справедливы соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулируйте и докажите аналогичную теорему для рядов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Требование непрерывности $\{f_n(x)\}$ не является существенным в условиях теоремы, его можно заменить, например, на интегрируемость. Попробуйте сформулировать соответствующую теорему и доказать ее (или разобраться с доказательством, используя другую учебную литературу).

§8. Равномерная сходимость и дифференцирование

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть $\{f_n(x)\}$ – последовательность непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций. Предположим, что*
1. последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ поточечно на $[a,b]$;
2. последовательность $\{f_n'(x)\}$ сходится к $\varphi(x)$ равномерно на $[a,b]$.
Тогда предельная функция $f(x)$ имеет производную, причем

$$f'(x) = \varphi(x).$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a,b]$ – произвольная точка. Т.к. все $f_n'(x)$ непрерывны, то по предыдущей теореме имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^{x_0} f_n'(x)dx = \int\limits_a^{x_0} \varphi(x)dx.$$

Таким образом, по формуле Ньютона-Лейбница, получаем

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_0) - f_n(a)) = \int\limits_a^{x_0} \varphi(x)dx.$$

Но, с другой стороны, $f_n(x) \to f(x)$ поточечно и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x_0) - f_n(a)) = f(x_0) - f(a) = \int\limits_a^{x_0} \varphi(t)dt.$$

Точка x_0 выбиралась произвольно, и поэтому

$$f(x) - f(a) = \int\limits_a^{x} \varphi(t)dt$$

для всех $x \in [a, b]$.

Функция $\varphi(x)$ непрерывна, поскольку является предельной для равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Дифференцируя интеграл по переменному верхнему пределу получаем:

$$\varphi(x) = \frac{d}{dx} \int\limits_a^x \varphi(t)dt = \frac{d}{dx}(f(x) - f(a)) = f'(x),$$

что и доказывает теорему. □

ПРИМЕР 1. Положим

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2},$$

где $x \in [-1, 1]$. Данная последовательность сходится на $[-1, 1]$ (и притом равномерно) к функции $f(x) \equiv 0$ (докажите!).

Рассмотрим последовательность производных

$$f_n'(x) = \frac{1 + n^2x^2 - x(2xn^2)}{(1 + n^2x^2)^2} = \frac{(1 - n^2x^2)}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Легко показать, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \neq 0 \\ 1, & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

а

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Таким образом, в теореме нельзя отказаться от равномерной сходимости производных, даже если предположить равномерную сходимость самих функций. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия теоремы можно ослабить. Достаточно потребовать дифференцируемость $f_n(x)$, вместо первого пункта потребовать сходимость $\{f_n(x)\}$ хотя бы в одной точке отрезка $[a, b]$ и второй пункт теоремы оставить *без изменений.* Тогда можно утверждать, что эта последовательность сходится во всем промежутке (причем равномерно), и предельная функция дифференцируема, причем

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Однако доказательство в таких предположениях мы проводить не будем. Желающим предлагаем разобраться самостоятельно.

ТЕОРЕМА 8.2. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ *составленный из непрерывно дифференцируемых на* $[a,b]$ *функций, сходящийся к* $S(x)$ *(поточечно). Кроме того, пусть ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n'(x)$ *сходится равномерно на* $[a,b]$ *к некоторой функции* $H(x)$. *Тогда* $S(x)$ *имеет производную в каждой точке* $[a,b]$, *причем для всех* $x \in [a,b]$ *выполнено* $S'(x) = H(x)$.

Доказательство. Данное утверждение сразу следует из предыдущей теоремы, и его доказательство предлагаем провести самостоятельно. □

§9. Степенные ряды

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Пусть задана последовательность вещественных чисел $\{c_n\}$. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \tag{1}$$

называется степенным рядом. Числа $\{c_n\}$ называются коэффициентами степенного ряда.

Ясно, что при изучении ряда вида (1) достаточно ограничиться изучением его разновидности:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{2}$$

ТЕОРЕМА 9.1 (Коши-Адамара[2]). *Пусть задан степенной ряд (2). Положим*

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \qquad R = \frac{1}{\alpha}.$$

Тогда ряд (2) сходится и притом абсолютно при всех x *таких, что*

$$|x| < R,$$

и расходится при всех x, *для которых*

$$|x| > R.$$

[2]Адамар Жак (8.12.1865-17.10.1963) – французский математик, член Парижской АН, иностран-

Доказательство. Зафиксируем x и положим $a_n = c_n x^n$. Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{3}$$

Заметим, что

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n||x|^n} = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x|\alpha.$$

Согласно признаку сходимости Коши для числового ряда (3), этот ряд сходится при $|x|\alpha < 1$, т.е. $|x| < \frac{1}{\alpha}$, и расходится при $|x|\alpha > 1$, т.е. $|x| > \frac{1}{\alpha}$,. Учитывая, что ряд (3) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (2), получаем утверждение теоремы. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Данная теорема верна также и для рядов с комплексными членами. В этом случае неравенство $|z| < R$ описывает круг радиуса R на плоскости. Поэтому как в комплексном, так и в вещественном случаях, R называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулируйте и докажите "теорему Даламбера-Адамара".

ПРИМЕР 1. Вычислить радиус сходимости для следующих степенных рядов:

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

1) $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^n|} = \limsup\limits_{n\to\infty} |n| = \infty$; $R = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\infty} = 0$, т.е. ряд сходится в единственной точке $x = 0$.

2) $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\frac{1}{n!}|} = \limsup\limits_{n\to\infty} |\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}| = 0$; $R = \frac{1}{0} = \infty$, т.е. ряд сходится в каждой точке числовой прямой.

3) $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$; $R = 1$, т.е. ряд сходится на интервале $(-1, 1)$. В $x = +1$ ряд расходится, а в точке $x = -1$ по признаку Лейбница сходится условно.

4) $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$; $R = 1$, т.е. ряд сходится всюду на интервале $(-1, 1)$ и, очевидно, сходится в концевых точках интервала.

$\square$

ный член АН СССР. Родился в Версале (Франция). Работал в Бордо и Париже. Известен фундаментальными исследованиями в теории чисел, теории дифференциальных уравнений, классическом анализе и теории функций, вариационном исчислении.

ЗАМЕЧАНИЕ. Подчеркнем, что в каждой точке интервала $(-R, R)$ ряд сходится, на концах этого интервала ряд может как сходиться, так и расходиться, а всюду вне отрезка $[-R, R]$ ряд расходится.

§10. Свойства степенных рядов

ТЕОРЕМА 10.1. *Пусть $R > 0$ – радиус сходимости степенного ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \tag{1}$$

Тогда на всяком отрезке $[-a, a]$, где $0 < a < R$ ряд (1) сходится равномерно.

Доказательство. Так как $a \in (-R, R)$, то в этой точке ряд (1) сходится абсолютно, т.е. сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| a^n$. Поскольку для всех $x \in [-a, a]$ выполнено

$$|c_n x^n| \leq |c_n| a^n = M_n,$$

то пользуясь признаком Вейерштрасса о равномерной сходимости функциональных рядов, выводим: из сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n$$

следует равномерная сходимость

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

□

СЛЕДСТВИЕ. Сумма степенного ряда непрерывна на интервале сходимости.

Доказательство. Заметим вначале, что функция называется непрерывной на некотором интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Далее зафиксируем произвольную точку x из интервала сходимости степенного ряда. Тогда найдется такое a из интервала сходимости, что $x \in [-a, a]$. Таким образом, утверждение следствия сразу следует из теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда, составленного из непрерывных функций. □

ТЕОРЕМА 10.2. *Пусть* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *– ряд с радиусом сходимости* $R > 0$ *и* $f(x)$ *– сумма этого ряда. Тогда для всех* $x \in (-R, R)$ *существует производная*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}. \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим ряд, полученный формальным дифференцированием ряда (1), т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}. \tag{3}$$

Найдем его радиус сходимости R_1. Справедливы соотношения

$$\frac{1}{R_1} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|c_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}\sqrt[n]{|c_{n+1}|} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|c_n|} = \limsup_{n\to\infty} \{\sqrt[n]{|c_n|}\}^{\frac{n}{n-1}} = \frac{1}{R},$$

т.е. новый ряд имеет тот же самый радиус сходимости, что и первоначальный ряд. Тогда на основании предыдущей теоремы можно заключить, что ряд (3) сходится равномерно на любом отрезке $[-a, a]$, где $0 < a < R$.

Пользуясь теоремой о дифференцировании функциональных рядов, получаем требуемое. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ имеет радиус сходимости $R > 0$ и $f(x)$ – сумма этого ряда. Тогда $f(x)$ является бесконечно дифференцируемой на $(-R, R)$ функцией, причем $f^k(0) = k(k-1) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot c_k$.

ТЕОРЕМА 10.3. *Если ряд (1) имеет радиус сходимости* $R > 0$, *то* $\forall\, a, b : -R < a < b < R$ *выполнено*

$$\int\limits_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = \max\{|a|, |b|\}$. Тогда $-R < -\alpha \leq a < b \leq \alpha < R$ и всюду на $[-\alpha, \alpha]$ ряд (1) сходится равномерно, а его сумма непрерывна. Для завершения доказательства достаточно воспользоваться теоремой об интегрировании равномерно сходящихся функциональных рядов. □

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $|x| < R$, где R – радиус сходимости степенного ряда (1). Тогда ряд (1) можно почленно интегрировать на сегменте $[0, x]$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите, что полученный в результате почленного интегрирования степенной ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

§11. Аналитические функции вещественного переменного

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Говорят, что функция $f(x)$, заданная на (a, b), является аналитической, если она является на этом интервале суммой некоторого степенного ряда.

ПРИМЕР 1. Сумма любого степенного ряда является аналитической функцией внутри интервала сходимости. Причем, если

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

то

$$S^{(n)}(0) = n! c_n,$$

т.е.

$$c_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

Таким образом

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

□

ТЕОРЕМА 11.1. *Пусть*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

для всех $x \in (a, b)$ *и*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

для всех $x \in (c, d)$, *причем каждый из интервалов* (a, b) *и* (c, d) *содержит* $x = 0$. *Тогда, если в некоторой, сколь угодно малой окрестности* $(-\varepsilon, \varepsilon)$ *выполнено* $f(x) = g(x)$, *то* $a_n = b_n$ *для всех* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Как и выше, легко получить, что

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

а

$$b_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}.$$

Так как для всех $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ выполнено $f(x) = g(x)$, то для всех n справедливо

$$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0).$$

Отсюда заключаем, что $a_n = b_n$ для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$. □

Вывод.Поведение аналитической функции полностью определяется ее поведением на любом сколь угодно малом интервале.

§12. Ряды Тейлора и Маклорена. Условие представимости бесконечно дифференцируемой функции рядом Маклорена или Тейлора

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Говорят, что функция $y = f(x)$, определенная на интервале (a, b), представима *рядом Тейлора* с центром в $x_0 \in (a, b)$, если для всех $x \in (a, b)$ выполнено

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{1}$$

Ряд (1) называют рядом Тейлора функции $f(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ясно, что для того, чтобы записать ряд Тейлора с центром в x_0 необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была бесконечно дифференцируема в x_0. А вот будет ли в этом случае сумма ряда Тейлора совпадать с $f(x)$ неясно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2. Ряд (1) с центром в точке $x_0 = 0$ называется *рядом Маклорена.*

Из результатов предыдущего пункта следует, что сумма $S(x)$ степенного ряда $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ представима рядом Маклорена на интервале сходимости этого ряда. Возникает проблема, какие дополнительные условия следует наложить на бесконечно дифференцируемую в x_0 функцию $f(x)$, чтобы для нее было выполнено соотношение (1)?

ТЕОРЕМА 12.1. *Пусть $y = f(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция в некоторой окрестности $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Пусть, кроме того, для всех $x \in U_\varepsilon(x_0)$ и всех $k = 0, 1, 2...$ выполнено*

$$\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!}\varepsilon^k \leq A, \tag{2}$$

где A – некоторая постоянная, не зависящая от k. Тогда функция $f(x)$ представима в $U_\varepsilon(x_0)$ рядом Тейлора с центром в x_0.

Доказательство. Фиксируем произвольно $x_1 \in U_\varepsilon(x_0)$. Для доказательства теоремы нам нужно установить, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k$$

имеет своей суммой число $f(x_1)$. Иначе требуется доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k] = 0. \tag{3}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вспомним формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Пусть $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема $n+1$ раз на отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда существует $\xi \in (\alpha, \beta)$ такая, что

$$f(\beta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(\beta - \alpha)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(\beta - \alpha)^{n+1}.$$

Далее рассматриваем выражение

$$f(x_1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_1 - x_0)^k = R_n. \tag{4}$$

По формуле Тейлора, существует $\xi \in (x_0, x_1)$ такое, что

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_1 - x_0)^{n+1}.$$

Пользуясь условием (2) теоремы, имеем:

$$|R_n| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x_1 - x_0|^{n+1} \leq \left(A\frac{(n+1)!}{\varepsilon^{(n+1)}}\right)\frac{|x_1 - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= A\left(\frac{|x_1 - x_0|}{\varepsilon}\right)^{n+1}.$$

Так как x_1 – точка из интервала $U_\varepsilon(x_0)$, то величина $q = \frac{|x_1 - x_0|}{\varepsilon} < 1$. Отсюда

$$|R_n| \leq Aq^{n+1} \to 0$$

при $n \to \infty$. На основании соотношения (4) получаем нужное. $\square$

ПРИМЕР 1. Ряд в правой части равенства (1) имеет смысл для любой бесконечно дифференцируемой в x_0 функции $f(x)$. Однако не для всякой бесконечно дифференцируемой в x_0 функции равенство (1) действительно справедливо.

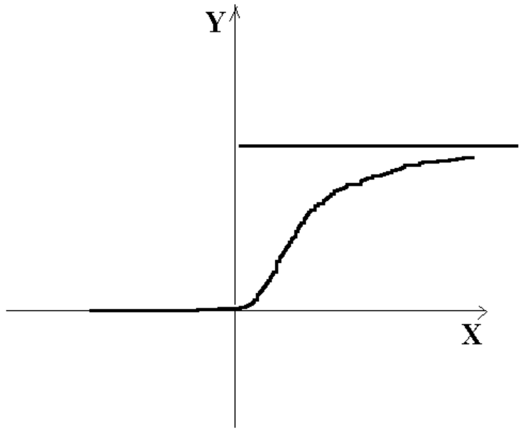
Построим пример бесконечно дифференцируемой функции, не представимой рядом Тейлора. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{при } x > 0 \\ 0, & \text{при } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Покажем, что данная функция бесконечно дифференцируема. Очевидно, что при $x < 0$ выполнено $f^{(n)}(x) = 0$ для всех натуральных n. Кроме того, для $x > 0$ имеем:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad f''(x) = -\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$f'''(x) = \frac{24}{x^5}e^{-\frac{1}{x^2}} - \frac{36}{x^7}e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{8}{x^9}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$



Продолжая операцию дифференцирования, получим, что при $x > 0$ производная $f^{(n)}(x)$ – сумма выражений вида

$$\frac{const}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где m – натуральные числа. Проверим существование производных в $x = 0$. Находим

$$f'(0) = \lim_{x \to +0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0;$$

$$f''(0) = \lim_{x \to +0} \frac{-\frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0.$$

Аналогично, из равенства

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

получаем, что все производные функции $f(x)$ в нуле равны нулю. Таким образом коэффициенты ряда Тейлора с центром в $x = 0$ для этой функции равны нулю.

Так как функция $f(x)$ не равна тождественно 0, то равенство (1) не может иметь место для этой функции. □

§13. Разложения функций $e^x, \sin x, \cos x$ в ряд Маклорена

ТЕОРЕМА 13.1. *Для любого вещественного x выполнено*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \qquad (1)$$

Доказательство. Отметим сначала, что для всех x выполнено
$$(e^x)^{(k)} = e^x$$
и ряд Маклорена, построенный для данной функции имеет вид:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{2}$$
Покажем, что при любом x сумма ряда (2) равна e^x. Фиксируем x_0. Подберем окрестность $U_\varepsilon(0)$ так, что $x_0 \in U_\varepsilon(0)$. Т.к. e^x бесконечно дифференцируема, то для доказательства теоремы достаточно показать, что $\forall\, x \in U_\varepsilon(0)$ выполнено
$$\left| \frac{(e^x)^{(k)}}{k!} \varepsilon^k \right| \leq A,$$
где A – константа, не зависящая от k.

Мы имеем
$$\frac{(e^x)^{(k)}}{k!} \varepsilon^k = \frac{e^x}{k!} \varepsilon^k < \frac{e^\varepsilon}{k!} \varepsilon^k. \tag{3}$$

Так как
$$\lim_{k\to\infty} \frac{(\varepsilon^k)}{k!} = 0,$$
то существует константа A такая, что для всех $k = 0, 1, 2, ...$ выполнено
$$\frac{\varepsilon^k}{k!} \leq A.$$

Поэтому из (3) следует, что для всех $x \in U_\varepsilon(0)$ выполнено
$$\left| \frac{(e^x)^{(k)}}{k!} \varepsilon^k \right| < Ae^\varepsilon = A_1.$$
Пользуясь результатами предыдущего параграфа заключаем, что для всех $x \in U_\varepsilon(0)$ и, в частности, для $x = x_0$ сумма ряда (2) равна e^x, что и требовалось доказать. □

ТЕОРЕМА 13.2. *Для всех $x \in \mathbf{R}$ справедливо равенство*
$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}. \tag{4}$$

Доказательство. Отметим сначала, что для всех x справедливы следующие равенства:
$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\sin x)'' = -\sin x,$$

$$(\sin x)''' = -\cos x, \qquad (\sin x)^{(4)} = \sin x,$$

или

$(\sin x)^{(k)} = \cos x, \quad k = 1, 5, ..., 4n+1, ...$
$(\sin x)^{(k)} = -\sin x, \quad k = 2, 6, 10, ..., 4n+2, ...$
$(\sin x)^{(k)} = -\cos x, \quad k = 3, 7, 11, ..., 4n+3, ...$
$(\sin x)^{(k)} = \sin x, \quad k = 4, 8, 12, ..., 4n, ...$

Более кратко данные равенства можно записать следующим образом:

$$(\sin x)^{(k)} = \sin(x + k\frac{\pi}{2}). \tag{5}$$

Таким образом в нашем случае справедливы равенства

$$f'(0) = 1, \ f''(0) = 0, \ f'''(0) = -1, \ f^{(4)}(0) = 0...,$$

или

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, \ \text{ при } k = 2n \\ (-1)^{n-1}, \ \text{ при } k = 2n-1. \end{cases}$$

В результате, ряд Маклорена для функции $y = \sin x$ имеет вид

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}. \tag{6}$$

Покажем, что для всех x сумма этого ряда будет равна $\sin x$. Для этого зафиксируем некоторую точку x_0 и подберем окрестность $U_\varepsilon(0)$ такую, чтобы $x_0 \in U_\varepsilon(0)$. Тогда для всех $x \in U_\varepsilon(0)$ имеем:

$$\frac{|(\sin x)^{(k)}|}{k!}\varepsilon^k < \frac{\varepsilon^k}{k!} < A;$$

где A не зависит от k.

Таким образом, всюду на окрестности $U_\varepsilon(0)$, в том числе и при $x = x_0$ сумма ряда (6) равна $\sin x$. □

ТЕОРЕМА 13.3. *Для всех $x \in \mathbf{R}$ справедлива формула:*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots .$$

Доказательство. Заметим, что $(\cos x)^{(k)} = \cos(x + k\frac{\pi}{2})$, то есть

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2n-1 \\ (-1)^n, & \text{при } k = 2n. \end{cases}$$

Закончите доказательство данной теоремы самостоятельно. □

§14. Разложение функции $y = \mathrm{arctg} x$ в ряд Маклорена

ТЕОРЕМА 14.1. *Для всех $x \in [-1, 1]$ выполнено*

$$\mathrm{arctg}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \tag{1}$$

СЛЕДСТВИЕ. Справедливо равенство

$$\mathrm{arctg}\, 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

Доказательство. При $|x| < 1$, по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии, получаем:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}. \tag{2}$$

Ряд (2) имеет радиус сходимости $R = 1$, так как

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n|} = 1.$$

Таким образом внутри интервала сходимости $(-1, 1)$ мы можем данный ряд интегрировать почленно. Следовательно для всех $x_0 \in (-1, 1)$ имеем

$$\mathrm{arctg}(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^{x_0} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x_0^{2k+1}}{2k+1}.$$

Тем самым формула (1) доказана для всех $x \in (-1, 1)$.

Покажем, что данная формула верна и при $x = 1$ (после этого, в силу нечетности функции, будет очевидно, что она верна и при $x = -1$). Функция $y = \mathrm{arctg}\, x$ определена и непрерывна в точке $x = +1$. Если мы покажем, что функция

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \tag{3}$$

также непрерывна в точке $x = 1$ слева, то тем самым нужное будет доказано. Изучим поведение последовательности частичных сумм $S_n(x)$ ряда (3) на отрезке $[-1, 1]$.

Прежде всего отметим, что поскольку для всех $x \in [0, 1]$ выполнено

$$\frac{x}{1} \geq \frac{x^3}{3} \geq \frac{x^5}{5} \geq ... \geq \frac{x^{2k-1}}{2k-1} \geq ...,$$

то

$$S_0(x) \geq S_2(x) \geq ... \geq S_{2n}(x) \geq ... \geq S(x),$$

$$S_1(x) \leq S_3(x) \leq ... \leq S_{2n-1}(x) \leq ... \leq S(x).$$

Таким образом получаем:

$$S_{2n-1}(x) \leq S(x) \leq S_{2n}(x). \tag{4}$$

Далее, для всех $x \in [0, 1]$ справедливо

$$|S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x)| = \frac{|x|^{4n+1}}{4n+1} \leq \frac{1}{4n+1}. \tag{5}$$

Зададим $\varepsilon > 0$. Так как справедливо неравенство (5), то найдется $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполнено:

$$|S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in [0, 1].$$

Учитывая (4), получаем

$$|S_{2n}(x) - S(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in [0, 1],$$

и

$$|S(x) - S_{2n-1}(x)| < \varepsilon \qquad \forall\, x \in [0, 1].$$

Отсюда получаем, что последовательность частичных сумм $S_n(x)$ сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$ к $S(x)$. Так как все $S_n(x)$ – непрерывные функции, то $S(x)$ – непрерывная на $[0, 1]$ функция. Таким образом, получаем требуемое. □

§15. Разложение функции $y = \ln(1 + x)$ в ряд Маклорена

ТЕОРЕМА 15.1. *Для всех $x \in (-1, 1]$ выполнено*

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}. \tag{1}$$

СЛЕДСТВИЕ. Справедливо равенство

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ... + (-1)^{k-1}\frac{1}{k} + ...$$

Доказательство. При $|x| < 1$ по формуле для суммы бесконечной геометрической прогрессии имеем

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^{k-1}. \tag{2}$$

Ряд (2) имеет радиус сходимости $R = 1$. Поэтому для всех $x_0 \in (-1, 1)$ имеем

$$\ln(1+x_0) = \int_0^{x_0} \frac{dx}{1+x} = \int_0^{x_0} \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x^{k-1}dx = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x_0^k}{k}.$$

Тем самым формула (1) доказана для всех $x_0 \in (-1, 1)$.

Покажем, что эта формула справедлива при $x = 1$. Поскольку эта функция непрерывна при $x = 1$, то нам достаточно установить непрерывность при $x = 1$ функции $S(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ слева.

Доказательство этого факта дословно повторяет рассуждения предыдущей теоремы (проведите его самостоятельно). □

§16. Биномиальный ряд

ТЕОРЕМА 16.1. *Для всех $x \in (-1, 1)$ и всех $m \in \mathbf{R}$ выполнено*

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k = 1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+...+\binom{m}{k}x^k+..., \tag{1}$$

где

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)...(m-k+1)}{k!};\ \binom{m}{0} = 1.$$

Доказательство. Обозначим

$$f(x) = (1+x)^m.$$

Отметим, что для всех x выполнено

$$\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^m = k!\binom{m}{k}(1+x)^{m-k}, \tag{2}$$

то есть

$$f^{(k)}(0) = k!\binom{m}{k}. \tag{3}$$

Рассмотрим ряд Маклорена функции $(1+x)^m$. В этом случае

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}x^k. \tag{4}$$

Покажем, что данный ряд сходится для всех $x \in (-1, 1)$.

Фиксируем $x_0 \in (-1, 1)$, $x_0 \neq 0$ и воспользуемся признаком Даламбера. Тогда, полагая $a_n = \binom{m}{n}x_0^n$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{m}{n+1}x_0^{n+1}}{\binom{m}{n}x_0^n}\right| = |x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{m}{n+1}}{\binom{m}{n}}\right| =$$

$$= |x_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!m(m-1)...(m-n-1+1)}{(n+1)!m(m-1)...(m-n+1)}\right| =$$

$$= |x_0|\lim_{n\to\infty}\frac{|m-n|}{(n+1)} = |x_0|.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В данном случае мы нашли радиус сходимости степенного ряда, не используя формулы Коши-Адамара. Впрочем заметим, что данная задача была ранее сформулирована в упражнении.

При $x = \pm 1$ общий член ряда $a_n \not\to 0$, следовательно ряд расходится. Таким образом, ряд (4) сходится при $|x_0| < 1$ и расходится при $|x_0| \geq 1$.

Покажем теперь, что сумма ряда (4) совпадает с $f(x)$ на интервале $(-1, 1)$. Продифференцируем обе части равенства (4). Тогда для всех $x \in (-1, 1)$ справедливо равенство

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}k\binom{m}{k}x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k+1}x^k(k+1).$$

Замечая, что

$$(k+1)\binom{m}{k+1} = m\binom{m-1}{k},$$

получаем

$$S'(x) = m\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m-1}{k}x^k. \tag{5}$$

Отметим также, что

$$(1+x)S'(x) = m\sum_{k=0}^{\infty}\tbinom{m-1}{k}x^k(1+x) = m[\sum_{k=0}^{\infty}\tbinom{m-1}{k}x^k +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\tbinom{m-1}{k}x^{k+1}] = m[\sum_{k=0}^{\infty}\tbinom{m-1}{k}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\tbinom{m-1}{k-1}x^k] =$$

$$= m[1+\sum_{k=1}^{\infty}\tbinom{m-1}{k}x^k+\sum_{k=1}^{\infty}\tbinom{m-1}{k-1}x^k] = m[1+\sum_{k=1}^{\infty}\{\tbinom{m-1}{k}+\tbinom{m-1}{k-1}\}x^k].$$

Нетрудно показать (покажите!), что

$$\tbinom{m-1}{k} + \tbinom{m-1}{k-1} = \tbinom{m}{k}.$$

В результате получаем

$$(1+x)S'(x) = mS(x). \tag{6}$$

Рассмотрим функцию

$$\frac{S(x)}{(1+x)^m} = H(x).$$

Эта функция дифференцируема на $(-1, 1)$, и

$$H'(x) = \frac{S'(x)(1+x) - mS(x)}{(1+x)^{m+1}}.$$

В силу (6) справедливо равенство

$$H'(x) = 0.$$

Таким образом $H(x) = const$ и

$$S(x) = const \cdot (1+x)^m.$$

Так как из (4) следует $S(0) = 1$, то $const = 1$ и

$$S(x) = (1+x)^m.$$

□

§17. Формула Стирлинга

ПРИМЕР 1. Разложим в ряд Маклорена функцию

$$y = \ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Пусть $|x| < 1$. Тогда имеем:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} - ... .$$

Отсюда получаем

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...+$$

$$+x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ... =$$

$$= 2x + 2\frac{x^3}{3} + ... + 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...$$

Таким образом справедливо равенство

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x(1 + \frac{x^2}{3} + ... + \frac{x^{2n}}{2n+1} + ...). \qquad (1)$$

□

ТЕОРЕМА 17.1 (формула Стирлинга[3]). *Для всех натуральных n справедливо равенство*

$$n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\frac{\theta}{12n}},$$

где $0 < \theta = \theta(n) < 1$.

Доказательство. Положим в формуле (1)

$$x = \frac{1}{2n+1},\ n = 1, 2, ...$$

Тогда

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}} = \frac{n+1}{n}$$

и мы получаем

$$\ln\frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1}(1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + ...)$$

или

[3]Стирлинг Джеймс (1692-5.12.1770) – шотландский математик, член Лондонского королевского общества. Работал в Шотландском горном обществе. В области математики его основная работа – "Разностный метод"(1730). Важную роль в математике играет *формула Стирлинга*.

$$(n+\frac{1}{2})\ln(\frac{n+1}{n}) = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5}\frac{1}{(2n+1)^4} + \dots .$$

Отсюда ясно, что

$$1 < (n+\frac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{n}) < 1 + \frac{1}{3}[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + ...] =$$

$$= 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2}\frac{1}{1-\frac{1}{(2n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

Потенцируя находим:

$$e < (1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}. \tag{2}$$

Введем последовательность

$$\alpha_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Тогда

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} = \frac{n!e^n(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}(n+1)!e^{n+1}} = \frac{1}{e}(1+\frac{1}{n})^{n+\frac{1}{2}}.$$

Пользуясь (2), имеем

$$1 < \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$$

Следовательно $\alpha_1 > \alpha_2 > ... > \alpha_n > ... > 0$. Таким образом, последовательность $\{\alpha_n\}$ – убывает и ограничена снизу нулем, то есть существует

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$$

С другой стороны

$$\alpha_n e^{-\frac{1}{12n}} < \alpha_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

Таким образом, последовательность $\{\alpha_n e^{-\frac{1}{12n}}\}$ возрастает и, очевидно, стремится к α. В результате для всех $n = 1, 2, ...$ выполнено

$$\alpha_n e^{-\frac{1}{12n}} < \alpha < \alpha_n$$

и, следовательно, существует $\theta = \theta(n) \in (0,1)$ для которого

$$\alpha_n e^{-\frac{\theta(n)}{12n}} = \alpha.$$

Пользуясь определением α_n получаем

$$n! = \alpha\sqrt{n}(\frac{n}{e})^n e^{\frac{\theta(n)}{12n}}, \qquad 0 < \theta < 1. \tag{3}$$

Нашей задачей теперь является определение числа α. Воспользуемся доказанной ранее формулой Валлиса.

ЗАМЕЧАНИЕ (формула Валлиса). Справедливо следующее соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, справедливы равенства

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{(2n)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

Подставим в эту формулу вместо $n!$ его выражение из (3), а вместо $(2n)!$ аналогичное выражение

$$(2n)! = \alpha\sqrt{2n}(\frac{2n}{e})^{2n} e^{\frac{\theta(2n)}{24n}},$$

где $0 < \theta(2n) < 1$. Получаем

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2^{2n}\alpha^2 n(\frac{n}{e})^{2n} e^{\frac{\theta(n)}{6n}}}{\alpha\sqrt{2}\sqrt{n}(\frac{n}{e})^{2n}2^{2n}e^{\frac{\theta(2n)}{24n}}} = \frac{\alpha\sqrt{n}}{\sqrt{2}} e^{\frac{4\theta(n)-\theta(2n)}{24n}}.$$

Поэтому по формуле Валлиса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{\alpha^2}{2} n e^{\frac{4\theta(n)-\theta(2n)}{12n}} = \frac{\alpha^2}{4},$$

то есть

$$\alpha = \sqrt{2\pi}.$$

Подставляя найденное значение α в (3) приходим к формуле Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \qquad 0 < \theta = \theta(n) < 1.$$

$\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула Стирлинга позволяет легко оценивать величину факториала $n!$ при больших значениях n.

Глава 15

Несобственные интегралы

§1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $f(x)$ определена на $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом $[a, b] \subset [a, +\infty)$, то есть интеграл

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

имеет смысл при любом $b > a$. Предел этого интеграла при $b \to +\infty$ (конечный или бесконечный) называют *несобственным интегралом* функции $f(x)$ от a до $+\infty$ и обозначают

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Говорят, что несобственный интеграл сходится, если этот предел конечен, и расходится если предел бесконечен или не существует.

ПРИМЕР 1. Несложно проверить (проверьте!), что

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{при } p > 1 \\ \text{расходится}, & \text{при } p \leq 1. \end{cases}$$

$\square$

Аналогично определяется интеграл функции $f(x)$ от $-\infty$ до a, а именно,

$$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{b \to -\infty} \int\limits_b^a f(x)dx.$$

Точно так же, определяем интеграл функции $f(x)$ от $-\infty$ до $+\infty$, а именно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

В последнем случае, учитывая аддитивность интеграла Римана, т.е.

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx,$$

интеграл от $-\infty$ до $+\infty$ можно определить равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

ПРИМЕР 2.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty}(-\operatorname{arctg} a) + \lim_{a\to+\infty} \operatorname{arctg} a = \pi.$$

□

Пусть $f(x)$ определена на $[a,+\infty)$ и интегрируема на любом $[a,b] \subset [a,+\infty)$. Предположим, что для $f(x)$ существует первообразная функция $F(x)$ на всем $[a,+\infty)$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b.$$

Таким образом получаем, что

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a) = F(x)\big|_a^{+\infty},$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$.

Заметим, что между несобственными интегралами $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и числовыми рядами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ существует достаточно серьезная аналогия. Проиллюстрируем это таблицей.

общий член ряда a_n	подинтегральная функция $f(x)$
частичная сумма ряда $\sum\limits_1^N a_n$	собственный интеграл $\int\limits_a^A f(x)dx$
сумма ряда $\sum\limits_1^\infty a_n$ как предел частичной суммы при $N \to \infty$	несобственный интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ как предел предыдущего интеграла при $A \to \infty$
остаток ряда $\sum\limits_{N+1}^\infty a_n$	интеграл $\int\limits_A^\infty f(x)dx$

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a, +\infty)$ и интегрируемы на любом $[a, b] \subset [a, +\infty)$. Справедливы следующие утверждения.*

1) Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_b^{+\infty} f(x)dx$, где $b > a$, и наоборот. При этом справедлива формула

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^{b} f(x)dx + \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx.$$

2) Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_b^{+\infty} f(x)dx = 0.$$

3) Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится и c – произвольная константа, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} cf(x)dx$ также сходится, причем

$$\int\limits_a^{+\infty} cf(x)dx = c\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

4) Если сходятся интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$, то сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx$, причем

$$\int\limits_a^{+\infty} (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} g(x)dx.$$

Доказательство. Данные утверждения несложно получить, используя указанную аналогию и методы, примененные при доказательстве подобных утверждений для числовых рядов.

Подробное доказательство проведите самостоятельно. □

УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулируйте и докажите формулу замены переменной и формулу интегрирования по частям для несобственных интегралов.

§2. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов

Рассмотрим теперь функции, заданные на ограниченном множестве $[a, B)$, но неограниченные на нем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $f(x)$ определена на $[a, B)$ и интегрируема на любом $[a, b] \subset [a, B)$. Предел интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $b \to B - 0$ (конечный или бесконечный) называют *несобственным интегралом* функции $f(x)$ от a до B и обозначают

$$\int\limits_a^B f(x)dx = \lim_{b \to B-0} \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_a^{B-\varepsilon} f(x)dx.$$

Говорят, что несобственный интеграл сходится, если этот предел конечен, и расходится если предел бесконечен или не существует.

В этом случае точку B называют *особой точкой.*

Пусть теперь $f(x)$ определена на $(A, b]$ и интегрируема на любом $[a, b] \subset (A, b]$. Предел интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ при $a \to A + 0$ (конечный или бесконечный) называют *несобственным интегралом* функции $f(x)$ от A до b и обозначают

$$\int\limits_A^b f(x)dx = \lim_{a \to A+0} \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{A+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

В данном случае точку A называют *особой точкой.*

ПРИМЕР 1. Несложно проверить (проверьте!), что

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{при } p < 1 \\ \text{расходится}, & \text{при } p \geq 1. \end{cases}$$

□

В более общем случае, на отрезке $[A, B]$ может быть конечное число особых точек, т.е. точек, вблизи которых функция $f(x)$ неограничена, но внутри каждой части этого отрезка, не содержащей особых точек, функция ограничена и интегрируема. С целью простоты изложения, ограничимся рассмотрением случая трех особых точек, причем две из них совпадают с концами A и B, а третья точка $C \in (A, B)$. Тогда

$$\int\limits_A^B f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to +0 \\ \varepsilon_2 \to +0}} \int\limits_{A+\varepsilon_1}^{C-\varepsilon_2} f(x)dx + \lim_{\substack{\varepsilon_3 \to +0 \\ \varepsilon_4 \to +0}} \int\limits_{C+\varepsilon_3}^{B-\varepsilon_4} f(x)dx.$$

Можно подобный интеграл определить иначе. А именно, пусть $A < a < C < b < B$, где a и b не являются особыми точками. Тогда

$$\int\limits_A^B f(x)dx = \int\limits_A^a f(x)dx + \int\limits_a^C f(x)dx + \int\limits_C^b f(x)dx + \int\limits_b^B f(x)dx.$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема по Риману (иначе, в собственном смысле) на $[a, B]$. Тогда значения интеграла $\int\limits_a^B f(x)dx$ понимаемого как в собственном, так и несобственном смысле, совпадают.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, B]$. Тогда функция $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ непрерывна на $[a, B]$, что доказывает утверждение теоремы. $\square$

Попробуем объединить определения несобственного интеграла от неограниченной функции и несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $[a, \omega)$ – конечный или бесконечный промежуток. Пусть $f(x)$ определена на $[a, \omega)$ и интегрируема на любом $[a, b] \subset [a, \omega)$. Величина

$$\int\limits_a^\omega f(x)dx = \lim_{b \to \omega} \int\limits_a^b f(x)dx$$

называется несобственным интегралом функции $f(x)$ от a до ω.

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним критерий Коши существования предела функции слева.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела предел при $x \to x_0 - 0$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x' и x'' для которых $0 < x_0 - x' < \delta(\varepsilon),\ 0 < x_0 - x'' < \delta(\varepsilon)$ выполнялось

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

ТЕОРЕМА 2.2 (критерий Коши). *Пусть $f(x)$ определена на $[a, \omega)$ и интегрируема на любом $[a, b] \subset [a, \omega)$. Интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ сходится тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $B = B(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $b_1, b_2 \in [a, \omega), \quad b_1 > B, \quad b_2 > B$ имеет место соотношение*

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Напомним, что сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)dx$, равносильна существованию предела функции $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ при $b \to \omega - 0$. Заметим, что

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)dx = \int\limits_a^{b_2} f(x)dx - \int\limits_a^{b_1} f(x)dx = F(b_2) - F(b_1).$$

Учитывая критерий Коши существования предела функции в точке, получаем требуемое. $\square$

§3. Абсолютная сходимость несобственного интеграла

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Говорят, что несобственный интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ сходится абсолютно, если сходится интеграл $\int\limits_a^\omega |f(x)|dx$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите, что если несобственный интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $f(x)$ определена на $[a,\omega)$, интегрируема на любом $[a,b] \subset [a,\omega)$ и $f(x) \geq 0$ на $[a,\omega)$. Для сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ необходимо и достаточно, чтобы существовала такая константа $M > 0$, что*

$$\int\limits_a^\tau f(x)dx \leq M$$

для всех $\tau \in [a,\omega)$.

Доказательство. Так как $f(x) \geq 0$, то функция

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$$

монотонно неубывает. Отсюда следует, что она имеет предел при $b \to \omega - 0$ тогда и только тогда, когда она ограничена сверху. Последнее доказывает теорему. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним формулировку интегрального признака сходимости числового ряда.

Если функция $f(x)$, определенная при всех $x \geq 1$, неотрицательна и невозрастает, то ряд

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

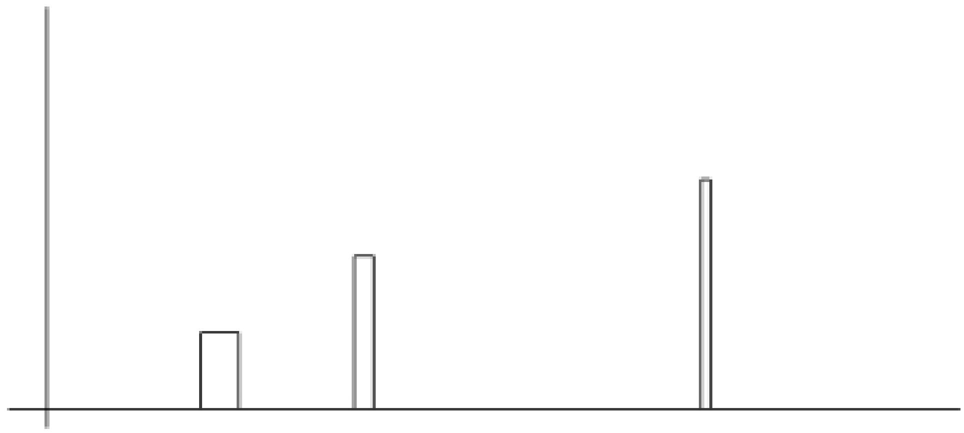
сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_1^\infty f(x)dx.$$

ПРИМЕР 1. Покажем, что существует неотрицательная на $[0,+\infty)$ функция $f_0(x)$, для которой интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f_0(x)dx$ – сходится, но $f_0(x) \not\to 0$ при $x \to \infty$. Действительно, пусть

$$f_0(x) = \begin{cases} n & \text{при } x \in [2^n, 2^n + \frac{1}{2^n}] \\ 0 & \text{при остальных } x \end{cases}$$

Очевидно, что данная функция не стремится к нулю при $x \to$



∞. Таким образом нам достаточно найти такую константу M, что для всех $b \in [0, \infty)$ выполнено

$$\int_0^b f_0(x)dx \leq M.$$

Например, в качестве такой константы можно предъявить

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} < \infty.$$

$\square$

ТЕОРЕМА 3.2 (сравнения). *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a, \omega)$ и интегрируемы на любом $[a, b] \subset [a, \omega)$. Если всюду на $[a, \omega)$ выполнено $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^\omega g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ и справедливость неравенства*

$$\int_a^\omega f(x)dx \leq \int_a^\omega g(x)dx,$$

а из расходимости интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^\omega g(x)dx$.

Доказательство. Ясно, что всюду на $[a, \omega)$ выполнено неравенство

$$F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx = G(b).$$

Заметим также, что функции $F(x)$ и $G(x)$ – неубывающие. Дальнейшие рассуждения очевидны, проведите их самостоятельно. $\square$

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a, \omega)$ и интегрируемы на любом $[a, b] \subset [a, \omega)$. Пусть, кроме того, всюду на $[a, \omega)$ выполнено $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Если существует предел*

$$\lim_{x \to \omega - 0} \frac{f(x)}{g(x)} = K \qquad (0 \leq K \leq +\infty),$$

то из сходимости интеграла $\int\limits_a^\omega g(x)dx$, при $K < \infty$, следует сходимость интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)dx$, а из расходимости первого интеграла, при $K > 0$, следует расходимость второго. Таким образом, при $0 < K < \infty$ оба интеграла сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. Необходимые рассуждения почти дословно повторяют доказательство аналогичной теоремы для числовых рядов. Проведите их самостоятельно. $\square$

ПРИМЕР 2. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + x^4}} dx.$$

Учитывая, что при $x \to \infty$ выполнено

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 + x^4}} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

получаем сходимость данного интеграла. $\square$

ПРИМЕР 3. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Учитывая, что

$$|\frac{\cos x}{x^2}| \leq \frac{1}{x^2}$$

получаем абсолютную сходимость данного интеграла. □

ПРИМЕР 4. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Учитывая, что при $x \geq 1$ выполнено $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, получаем сходимость заданного интеграла. □

ПРИМЕР 5. Исследуем на сходимость интеграл Эйлера

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx.$$

Учитывая, что при $x \to +0$ справедливы следующие соотношения

$$|\ln \sin x| \sim |\ln x| < \frac{1}{\sqrt{x}},$$

получаем сходимость данного интеграла. □

§4. Условная сходимость несобственного интеграла

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Если несобственный интеграл сходится, но не абсолютно, то говорят, что он сходится условно.

ПРИМЕР 1. Исследуем на сходимость интеграл

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Заметим вначале, что

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Последний интеграл сходится, значит сходится и интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. С другой стороны

$$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{b} |\frac{\sin x}{x}| dx \geq \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{b} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ является сходящимся (проверяется интегрированием по частям, как в начале примера). Отсюда получаем, что интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}| dx$ расходится. Таким образом получаем, что первоначальный интеграл сходится условно. □

ЗАМЕЧАНИЕ. В дальнейшем нам потребуется так называемая *вторая теорема о среднем.* Приведем ее формулировку (с доказательством рекомендуем разобраться самостоятельно).

Теорема. Если $g(x)$ – монотонна на $[a, b]$, а $f(x)$ – интегрируема, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)dx = g(a) \int\limits_{a}^{\xi} f(x)dx + g(b) \int\limits_{\xi}^{b} f(x)dx,$$

где ξ – некоторая точка из $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 4.1 (признак Абеля). *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a, \omega)$ и интегрируемы на любом $[a, b] \subset [a, \omega)$. Если интеграл $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)dx$ сходится, а функция $g(x)$ – монотонна и ограничена на $[a, \omega)$, то интеграл $\int\limits_{a}^{\omega} f(x)g(x)dx$ сходится.*

Доказательство. Из ограниченности функции $g(x)$ следует существование такой константы $M > 0$, что для всех $x \in [a, \omega)$ выполнено $|g(x)| \leq M$. По второй теореме о среднем значении, для любых $b_1, b_2 \in [a, \omega), \quad b_1 < b_2$, выполнено

$$\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx = g(b_1) \int\limits_{b_1}^{\xi} f(x)dx + g(b_2) \int\limits_{\xi}^{b_2} f(x)dx,$$

где $b_1 < \xi < b_2$. Далее воспользуемся сходимостью несобственного интеграла $\int\limits_a^\omega f(x)dx$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $B \in [a, \omega)$, что при $b_1 > B$ выполнено

$$|\int\limits_{b_1}^{\xi} f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2M}, \qquad |\int\limits_{\xi}^{b_2} f(x)dx| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Таким образом получаем

$$|\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)g(x)dx| \leq |g(b_1)||\int\limits_{b_1}^{\xi} f(x)dx| + |g(b_2)||\int\limits_{\xi}^{b_2} f(x)dx| \leq$$

$$\leq M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Применяя критерий Коши сходимости несобственных интегралов, получаем требуемое. □

ТЕОРЕМА 4.2 (признак Дирихле). *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a, \omega)$ и интегрируемы на любом $[a, b] \subset [a, \omega)$. Если функция $F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx$ ограничена на $[a, \omega)$, а функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to \omega$, то интеграл $\int\limits_a^\omega f(x)g(x)dx$ – сходится.*

Доказательство. Необходимые рассуждения вполне аналогичны предыдущей теореме, проведите их самостоятельно. □

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите сходимость интегралов

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx \quad \text{и} \quad \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}dx,$$

при $p > 0$.

§5. Главное значение несобственного интеграла

Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и имеет единственную особую точку $c \in (a, b)$. Напомним что несобственный интеграл $f(x)$ на $[a, b]$ определяется равенством

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\varepsilon_1\to+0\\ \varepsilon_2\to+0}} \{ \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx \}.$$

В случае, когда указанный предел не существует, иногда бывает полезным применение несколько иного подхода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $f(x)$ определена всюду на отрезке $[a, b]$, кроме, может быть, точки $c \in (a, b)$, и интегрируема на любом отрезке, не содержащем точки c. Говорят, что функция $f(x)$ интегрируема (по Коши), если существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \{ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \} = V.p. \int_a^b f(x)dx,$$

называемый *главным значением* интеграла. (V.p. – начальные буквы от "Valeur principale", означающих по-французски "главное значение".)

Заметим, что если интеграл существует как несобственный, то он очевидно существует и в смысле главного значения. Обратное, вообще говоря, не верно.

ПРИМЕР 1. Интеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ как несобственный не существует. С другой стороны

$$V.p. \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0} \{ \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \} = 0.$$

□

Аналогично можно определить интеграл в смысле главного значения на числовой прямой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Пусть $f(x)$ определена всюду на прямой $\mathbf{R}$ и интегрируема на любом отрезке, принадлежащем этой прямой. Говорят, что функция $f(x)$ интегрируема (по Коши), если существует предел

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx,$$

называемый *главным значением* интеграла.

ПРИМЕР 2. Легко показать, что

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0.$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 1. Покажите, что если $f(x)$ определена всюду на прямой $\mathbf{R}$, интегрируема на любом отрезке, принадлежащем этой прямой, и является нечетной, то она интегрируема по Коши и главное значение интеграла от нее равно нулю.

Глава 16

Ряды Фурье

§1. Ортонормированные системы функций

Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}[a,b]$ — множество всех кусочно-непрерывных на $[a,b]$ функций.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите, что множество всех кусочно-непрерывных на $[a,b]$ функций является линейным пространством.

Для всех $f(x), g(x) \in \mathcal{F}\ [a,b]$ определим величину

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx,$$

которую будем называть скалярным произведением функций $f(x)$ и $g(x)$ на $[a,b]$.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Докажите, что введенная выше величина действительно является скалярным произведением (т.е. для нее выполнены все аксиомы скалярного произведения).

Далее, для произвольной функции $f(x) \in \mathcal{F}[a,b]$ определим ее норму следующим образом

$$||f|| = \sqrt{\langle f, f\rangle} = \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 3. Докажите, что введенная выше величина действительно является *нормой* (т.е. для нее выполнены все аксиомы нормы).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функции $f(x)$ и $g(x) \in \mathcal{F}[a,b]$ называются ортогональными, если $\langle f, g\rangle = 0$. Функция $f(x) \in \mathcal{F}[a,b]$ называется нормированной, если ее $||f|| = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Система функций $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется нормированной, если:

$$||\omega_n(x)|| = 1 \ \forall\, n = 0, 1, 2, \ldots .$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Система функций $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется ортогональной, если:

$$\langle \omega_n, \omega_m \rangle = 0 \ \forall\, n \neq m.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Система функций $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется ортонормированной, если:

$$\langle \omega_n, \omega_m \rangle = \delta_m^n = \begin{cases} 1, & \text{при } m = n \\ 0, & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

ПРИМЕР 1. Система функций $1, \cos x, \sin x, \ \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ является ортогональной на отрезке $[0, 2\pi]$. Действительно, легко видеть, что при $n \neq m$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos nx dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi} = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi} \sin nx dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]dx = 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]dx = 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x]dx = 0.$$

$\square$

УПРАЖНЕНИЕ 4. Докажите, что система функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots \qquad (1)$$

является ортогональной на отрезке $[-\pi, \pi]$.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Покажите, что система функций (1) не является ортогональной на отрезке $[0, \pi]$.

ЛЕММА 1.1. *Пусть $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — система попарно ортогональных на $[a, b]$ функций и $||\omega_n|| = \lambda_n > 0$ для всех $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. Тогда система функций $\left\{\frac{\omega_n(x)}{\lambda_n}\right\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной на $[a, b]$.*

Доказательство. Ясно, что

$$\langle\frac{\omega_n}{\lambda_n}, \frac{\omega_m}{\lambda_m}\rangle = \frac{1}{\lambda_n\lambda_m}\ \langle\omega_n, \omega_m\rangle = \frac{1}{\lambda_n\lambda_m}\begin{cases} \lambda_n^2, & \text{при } n = m \\ 0, & \text{при } n \neq m \end{cases} =$$

$$= \delta_m^n = \begin{cases} 1, & \text{при } m = n \\ 0, & \text{при } m \neq n. \end{cases}$$

□

ПРИМЕР 2. Покажем, что система функций

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

является ортонормированной на $[0, 2\pi]$. Для доказательства данного утверждения достаточно заметить, что

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kxdx = \pi; \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2 kxdx = \pi.$$

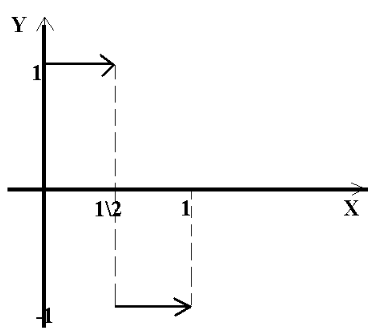
□

§2. Система Уолша

Рассмотрим на $[0, 1)$ функцию

$$r_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & \text{при } x \in [\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$$

и продолжим ее периодически с периодом единица на всю числовую ось.



Определим функцию $r_k(x) = r_0(2^k x), k = 0, 1, 2, ...$ представляющую собой сжатие функции $r_0(x)$ вдоль оси Ox в 2^k раз.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функция $r_k(x)$ называется функцией Радемахера[1]. Ясно, что

$$r_{k+m}(x) = r_0(2^{k+m}x) = r_0(2^k(2^m x)) = r_k(2^m x). \qquad (1)$$

Функция $r_k(x)$ имеет период $\frac{1}{2^k}$, постоянна на всяком полуинтервале $[\frac{m}{2^{k+1}}, \frac{m+1}{2^{k+1}})$, где $m \in \mathbf{Z}$ и принимает на этих интервалах попеременно значения $+1$ и -1.

В точках вида $\frac{m}{2^{k+1}}$, являющихся для нее точками разрыва, функция $r_k(x)$ непрерывна справа.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите, что для всех целых m и $k \geq 0$ выполнено

$$\int_{\frac{m}{2^k}}^{\frac{m+1}{2^k}} r_k(x)dx = 0. \qquad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Системой функций Уолша[2] $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется множество функций, получаемых в результате всевозможных перемножений между собой функций Радемахера.

При этом договоримся лишь о следующей нумерации функций Уолша (нумерация Пэли[3]).

Положим $\omega_0(x) = 1$. Чтобы определить $\omega_n(x)$ при $n \geq 1$ представим натуральное число n в двоичной записи, т.е. в виде

$$n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i 2^i, \qquad (3)$$

где $\varepsilon_k = 1, \quad \varepsilon_i = 0 \quad$ либо $\quad 1$, при $i = 0, 1, ..., k-1$. Отсюда очевидно следует, что

$$n - 2^k = \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i 2^i.$$

Учитывая определение функций Уолша, получаем

$$\omega_n(x) = r_k(x)\omega_{n-2^k}(x). \qquad (4)$$

[1]Радемахер Ганс Адольф (3.04.1892–7.02.1969). Род. в Гамбурге (Германия). Научная деятельность протекала в Бреслау, Германия (ныне Вроцлав, Польша), с 1936 года работал в США (Пенсильванский университет, Филадельфия). Основные работы относятся к теории функций действительного переменного и теории ортогональных рядов.

[2]Уолш Джозеф Леонард (21.9.1895–6.12.1973) – американский математик. Род. в Вашингтоне (США). Работал в основном в Гарвардском и Чикагском университетах. Основные труды относятся к теории функций и топологии.

[3]Пэли Раймонд Эдвард Алан Христофер (8.1.1907–7.4.1933). Род. в Борнмуте (Англия). Работал в Кембридже и Массачусетсском технологическом институте. Основные труды относятся к теории рядов и интегралов Фурье, ортогональным и гармоническим функциям.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для функции* $\omega_n(x)$, *где* $2^k \le n < 2^{k+1}$ $(k \ge 0)$ *и всякого полуинтервала* $[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}), m = 0, 1, ..., 2^k - 1$ *выполнено*

$$\int_{\frac{m}{2^k}}^{\frac{m+1}{2^k}} \omega_n(x)dx = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Представим $\omega_n(x)$ в виде произведения (4). Тогда в силу (3) функция $\omega_{n-2^k}(x)$ постоянна на полуинтервале $[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k})$ и принимает на нем значения $+1$ или -1. (Проверьте!)

Отсюда, учитывая (2), получаем

$$\int\limits_{\frac{m}{2^k}}^{\frac{m+1}{2^k}} \omega_n(x)dx = \int\limits_{\frac{m}{2^k}}^{\frac{m+1}{2^k}} r_k(x)dx = 0.$$

□

СЛЕДСТВИЕ. Справедливо равенство

$$\int_0^1 \omega_n(x)dx = \begin{cases} 1, \text{ при } n = 0 \\ 0, \text{ при } n \ge 1. \end{cases} \tag{6}$$

ТЕОРЕМА 2.2. *Система функций Уолша является ортонормированной на* $[0, 1)$, *т.е.*

$$\langle \omega_n(x), \omega_m(x) \rangle = \begin{cases} 1, & \textit{при } n = m \\ 0, & \textit{при } n \ne m. \end{cases}$$

Доказательство. Так как при всяком $i = 0, 1, 2, ...$ выполнено $r_i^2(x) = 1$, то достаточно проверить ортогональность системы. Сделайте это самостоятельно. □

§3. Понятие ряда Фурье по ортонормированной системе функций

Пусть $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$– ортогональная на $[a, b]$ система функций и пусть $f(x) \in \mathcal{F}[a, b]$– произвольная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Числа

$$\alpha_n = \frac{1}{\| \omega_n \|^2} langlef, \omega_n \rangle \tag{1}$$

называются коэффициентами Фурье[4] функции $f(x)$ в системе $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \omega_n(x), \tag{2}$$

где коэффициенты подсчитываются по формуле (1), называется рядом Фурье для функции $f(x)$ в системе $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Тот факт, что ряд (2) порождается функцией $f(x)$ в системе $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ обозначается следующим образом:

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \omega_n(x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Ряд Фурье, порождаемый функцией $f(x)$ в системе $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...$, ортогональной на отрезке $[0, 2\pi]$, называется тригонометрическим рядом Фурье, порожденным функцией $f(x)$ и обозначается

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если ряд Фурье порожден функцией $f(x)$, то его сумма может как совпадать с $f(x)$, так и не совпадать. Существуют примеры непрерывных $f(x)$, ряд Фурье которых расходится на множестве всех рациональных точек. В дальнейшем будут указаны условия, обеспечивающие совпадение $f(x)$ с суммой порождаемого ею ряда Фурье.

[4] Фурье Жан Батист Жозеф (21.3.1768 – 16.5.1830) – французский математик. Его основной труд "Аналитическая теория теплоты" содержал выведенное им уравнение теплопроводности и метод разделения переменных (метод Фурье). Ключом в методе Фурье является разложение функции в тригонометрический ряд. Исследованием возможности такого разложения занимались впоследствии многие крупные математики. Это, в частности, привело к созданию теории функций действительного переменного, теории множеств, а также способствовало развитию понятия функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Многочлен вида

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

где a_k и b_k – произвольные коэффициенты (не обязательно коэффициенты Фурье некоторой функции) называется тригонометрическим многочленом. Ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

называется тригонометрическим рядом.

§4. Свойство минимальности отрезков ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Сходимость "в среднем". Равенство Парсеваля

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть* $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ *ортонормированная на отрезке* $[a,b]$ *система функций. Пусть*

$$S_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\alpha_m\omega_m(x) \tag{1}$$

есть частичная сумма ряда Фурье для функции $f(x)$, *и пусть*

$$T_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\beta_m\omega_m(x) \tag{2}$$

— произвольный многочлен. Тогда

$$\int_a^b(f(x)-S_n(x))^2dx\le\int_a^b(f(x)-T_n(x))^2dx. \tag{3}$$

Причем равенство имеет место в том и только том случае, когда

$$\beta_m=\alpha_m,\quad\forall\, m=0,1,\dots n.$$

Доказательство. Мы имеем:

$$\int_a^b f(x)T_n(x)dx=\int_a^b f(x)\sum_{m=0}^{n}\beta_m\omega_m(x)dx=$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \beta_m \int\limits_a^b f(x)\omega_m(x)dx = \sum_{m=0}^{n} \alpha_m \beta_m.$$

Так как система $\{\omega_n\}\big|_{n=0}^{\infty}$ ортонормирована, то

$$\int\limits_a^b T_n^2(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{m=0}^{n} \beta_m \omega_m(x)\right)^2 dx =$$

$$= \sum_{k,m=0}^{n} \beta_m \beta_k \int\limits_a^b \omega_m(x)\omega_k(x)dx = \sum_{l=0}^{n} \beta_l^2.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_a^b (f(x) - T_n(x))^2 dx = \int\limits_a^b f^2(x)dx - 2\int\limits_a^b f(x)T_n(x)dx +$$

$$+ \int\limits_a^b T_n^2(x)dx = \int\limits_a^b f^2(x)dx - 2\sum_{m=0}^{n} \alpha_m \beta_m + \sum_{m=0}^{n} \beta_m^2 =$$

$$= \int\limits_a^b f^2(x)dx - \sum_{m=0}^{n} \alpha_m^2 + \sum_{m=0}^{n} (\alpha_m - \beta_m)^2. \qquad (4)$$

Полагая здесь $\beta_m = \alpha_m$, получаем $T_n(x) = S_n(x)$ и

$$\int\limits_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx = \int\limits_a^b f^2(x)dx - \sum_{m=0}^{n} \alpha_m^2. \qquad (5)$$

Сопоставив (4) и (5) приходим к соотношению

$$\int\limits_a^b (f(x) - S_n(x))^2 dx = \int\limits_a^b (f(x) - T_n(x))^2 dx - \sum_{m=0}^{n} (\alpha_m - \beta_m)^2$$

Нужное заключение полностью следует из этого равенства. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ (неравенство Бесселя). Из равенства (5) вытекает, что

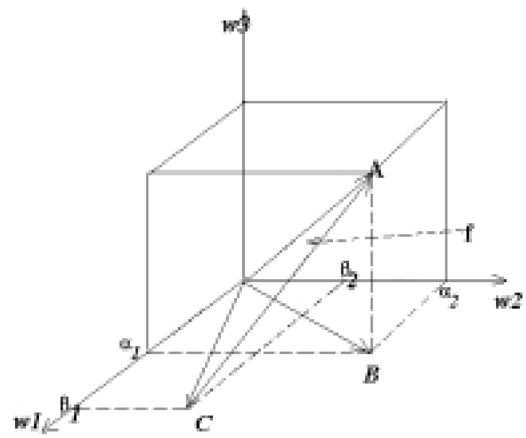
$$\sum_{m=0}^{n} \alpha_m^2 \le \int\limits_a^b f^2(x)dx. \qquad (6)$$

Устремляя $n \to \infty$, получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m^2 \le \int\limits_a^b f^2(x)dx. \qquad (7)$$

Данное соотношение называется неравенством Бесселя[5].

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 4.1 допускает следующую геометрическую интерпретацию.



$$S_2(x) = \alpha_1\omega_1(x) + \alpha_2\omega_2(x)$$
$$T_2(x) = \beta_1\omega_1(x) + \beta_2\omega_2(x)$$

$\sqrt{\int\limits_a^b (f(x) - S_2(x))^2 dx}$ — длина перпендикуляра AB.

$\sqrt{\int\limits_a^b (f(x) - T_2(x))^2 dx}$ — длина отрезка AC

Теорема 4.1 утверждает, что длина перпендикуляра не больше длины наклонной.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из неравенства Бесселя (7) вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2$ сходится. Таким образом общий член ряда $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. *коэффициенты Фурье кусочно-непрерывной функции стремятся к 0.*

[5] Бессель Фридрих Вильгельм (22.7.1784 – 17.3.1846) – немецкий астроном. Род. в Миндене (Германия). В 20 лет вычислил орбиту кометы Галлея. Работал в Кенигсберге (ныне Калининград). При обработке астрономических наблюдений широко применял теорию вероятностей и способ наименьших квадратов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Если для частичных сумм ряда Фурье выполнено

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b (f-S_n)^2dx=0,$$

то говорят, что $S_n \to f$ "в среднем".

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $S_n \to f$ "в среднем", то как следует из (5),

$$\int\limits_a^b f^2(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2.$$

Данное соотношение называется условием замкнутости ортонормированной системы функций $\{\omega_n\}$ или равенством Парсеваля[6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Если равенство Парсеваля справедливо для любой непрерывной функции f, то система функций $\{\omega_n\}$ называется замкнутой.

§5. Интеграл Дирихле

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Функция $f(x)$, определенная на всей прямой называется 2π-периодической, если $f(x+2\pi)=f(x)$ для всех $x\in\mathbf{R}$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Если $f(x)$ – 2π-периодическая функция, то интеграл*

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx$$

не зависит от α.

Доказательство. Мы имеем

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{0} f(x)dx+\int\limits_{0}^{2\pi} f(x)dx+\int\limits_{2\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)dx.$$

[6]Парсеваль Марк Антуан (27.4.1755 – 16.8.1836) – французский математик. Род. в Розьер-о-Салин (Франция). Основные труды относятся к дифференциальным уравнениям и теории функций действительного переменного.

Однако

$$\int\limits_{2\pi}^{\alpha+2\pi} f(x)dx = \left| \begin{array}{c} x = 2\pi + t \\ dx = dt \end{array} \right| = \int\limits_{0}^{\alpha} f(t+2\pi)dt = \int\limits_{0}^{\alpha} f(t)dt.$$

Пользуясь предыдущим соотношением получаем нужное. □

ТЕОРЕМА 5.2. *Если $f(x)$ — 2π-периодическая функция, то ее коэффициенты Фурье вычисляются по формулам:*

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)dx, \qquad b_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(mx)dx.$$

Доказательство. Данное утверждение легко следует из теоремы 5.1 и выражения для коэффициентов Фурье функции $f(x)$, которые даны ранее (определение 3.3). Подробные выкладки проделайте самостоятельно. □

ТЕОРЕМА 5.3. *Пусть $f(x) \in \mathcal{F}[-\pi,\pi]$,*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k \sin kx),$$

а

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)$$

— частичная сумма ряда Фурье. Тогда

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{\sin\frac{t-x}{2}}dt.$$

Доказательство. Фиксируем произвольно x. Тогда

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k \sin kx) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\cos kx dt + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\sin kx dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx)\right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right\} dt.$$

Обозначим

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt.$$

Ранее показывалось (см. пример 3 параграфа "Теорема Лейбница. Абсолютная и неабсолютная сходимость"), что для всех n и $t \neq 2\pi m$ справедливо равенство

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}. \qquad (1)$$

Очевидно также, что

$$D_n(0) = n + \frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Поэтому

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{\sin\frac{t-x}{2}} dt.$$

$\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{\sin\frac{t-x}{2}} dt$$

называется *интегралом Дирихле.*
Выражение

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt$$

называется *ядром Дирихле.* Очевидно, что $D_n(t)$ – непрерывная, четная, 2π-периодическая функция. Кроме того, справедливы формулы (1) и (2). Заметим также, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt = \pi.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1.$$

ТЕОРЕМА 5.4. *Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая, кусочно непрерывная функция,*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

и

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Тогда

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \left[f(x+t) + f(x-t)\right] D_n(t)dt.$$

Доказательство. На основании теоремы 5.3

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{\sin\frac{t-x}{2}}dt.$$

Учитывая сформулированное выше замечание констатируем, что функция

$$f(t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{\sin\frac{t-x}{2}}$$

является 2π-периодической, как функция переменной t. Поэтому, учитывая теорему 5.1, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{\sin\frac{t-x}{2}}dt = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{\sin\frac{t-x}{2}}dt.$$

Кроме того, справедливы следующие равенства

$$\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{\sin\frac{t-x}{2}}dt = \left|\begin{array}{l} t-x=\tau \\ dt=d\tau \end{array}\right| =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{0} f(x+\tau)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}d\tau + \int\limits_{0}^{\pi} f(x+\tau)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}d\tau. \quad (3)$$

Кроме того

$$\int\limits_{-\pi}^{0} f(x+\tau)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}d\tau = \left|\begin{array}{l} \tau=-t \\ d\tau=-dt \end{array}\right| =$$

$$= -\int\limits_{\pi}^{0} f(x-t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(-t)}{\sin\frac{-t}{2}}dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} f(x-t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt. \quad (4)$$

Объединяя равенства (3) и (4), получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \left(f(x+\tau)+f(x-\tau)\right)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}d\tau,$$

что и требовалось доказать. □

§6. Теорема о локализации

Следующая теорема показывает, что поведение частичных сумм ряда Фурье в точке x зависит лишь от значений функции в сколь угодно малой окрестности этой точки, т.е. от локального строения функции в этой точке.

ТЕОРЕМА 6.1 (теорема о локализации). *Пусть* $f(x) \in \mathcal{F}[-\pi, \pi]$ *и пусть* $x \in (-\pi, \pi)$ *— произвольная точка. Тогда для любого* $\delta > 0$ *такого, что* $-\pi \le x - \delta \le x + \delta \le \pi$, *выполнено*

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_n(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{\sin\frac{t-x}{2}}dt\right) = 0.$$

Доказательство. Справедливы следующие равенства

$$S_n(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{\sin\frac{t-x}{2}}dt = \left|\begin{array}{l} t-x=\tau \\ dt = d\tau \end{array}\right| =$$

$$= S_n(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+\tau)\frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}d\tau - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+\tau)\frac{\sin\,(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta} f(x+\tau)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}d\tau + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi} f(x+\tau)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\tau}{\sin\frac{\tau}{2}}d\tau.$$

Обозначим через $q(\tau)$ функцию:

$$q(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ |\tau| < \delta \\ \frac{f(x+\tau)}{\sin\frac{\tau}{2}}, & \text{если } \ \delta \le |\tau| \le \pi. \end{cases}$$

Данная функция является кусочно-непрерывной, поэтому из предыдущего соотношения имеем

$$S_n(x) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} q(\tau)\sin(2n+1)\frac{\tau}{2}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} q(\tau)(\sin(n\tau)\cos\frac{\tau}{2} + \cos(n\tau)\sin\frac{\tau}{2})d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} q(\tau)\cos\frac{\tau}{2}\sin(n\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} q(\tau)\sin\frac{\tau}{2}\cos(n\tau)d\tau =$$

$$I_n^{'} + I_n^{''}.$$

Так как функции $q(\tau)\cos\frac{\tau}{2}$ и $q(\tau)\sin\frac{\tau}{2}$ являются кусочно-непрерывными, то $I_n^{'}$ и $I_n^{''}$ являются n-ми коэфициентами Фурье этих функций. А потому стремятся к нулю при $n \to \infty$. В результате получаем требуемое утверждение. □

§7. Представление 2π-периодической функции рядом Фурье

ЛЕММА 7.1. *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на конечном интервале (a, b), т.е. существует такая константа k, что для всех $x',\ x'' \in (a, b)$ выполнено*

$$|f(x') - f(x'')| \le k|x' - x''|.$$

Тогда ее можно продолжить по непрерывности на $[a, b]$. Причем продолженная функция также удовлетворяет условию Липшица.

Доказательство. Несложно показать (покажите!), что из условия Липшица следует выполнение условий критерия Коши существования предела функции в точке. Таким образом, на основании критерия Коши, получаем существование следующих величин

$$f(a) \equiv \lim_{x \to a+0} f(x), \qquad f(b) \equiv \lim_{x \to b-0} f(x). \tag{1}$$

Следовательно, функция $f(x)$ продолжима по непрерывности. Поэтому для доказательства леммы нам достаточно проверить, что

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| \le k|x - a|, \quad \forall\, x \in [a, b], \\ |f(x) - f(b)| \le k|x - b|, \quad \forall\, x \in [a, b]. \end{aligned}$$

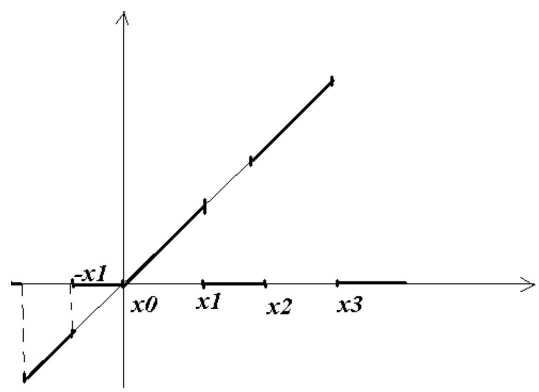
Пусть $y \in (a, b)$ – произвольная точка. Тогда выполнено

$$|f(x) - f(y)| \le k|x - y|.$$

Переходя в данном неравенстве к пределу при $y \to a + 0$ или $y \to b-0$ и пользуясь соответствием (1) получаем нужное. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Будем говорить, что $f(x)$ кусочно-липшицева на $[a,b]$, если существует такое разбиение $[a,b]$ на отрезки $[a,x_1]$, $[x_1,x_2],\dots[x_{n-1},b]$, что на каждом из отрезков разбиения функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица. При этом при определении липшицевости на частичном сегменте $[x_{k-1},x_k]$ в качестве значений функции на концах сегмента следует брать предельные значения $f(x_{k-1}+0)$ и $f(x_k-0)$.

Будем говорить, что $f(x)$ — кусочно-липшицева на всей числовой прямой $(-\infty,\infty)$, если она обладает этим свойством на всяком отрезке $[a,b]$.



ЛЕММА 7.2. *Если $f(x)$ — кусочно-липшицева, то для всех точек x_0 существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=f(x_0\pm 0)$.*

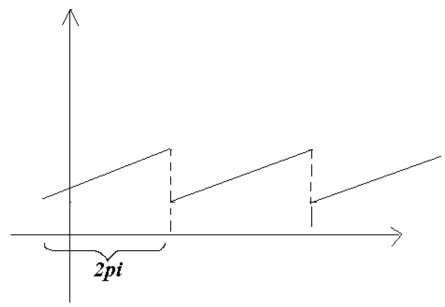
Доказательство. Данное утверждение сразу следует из Леммы 7.1. □

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть $f(x)$ — 2π-периодическая и кусочно-липшицева функция. Тогда для всех x_0 ее ряд Фурье имеет конечную сумму $S(x_0)$, причем*

$$S(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}. \tag{2}$$

Доказательство. Как было доказано ранее (теорема 5.4):

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt. \tag{3}$$



Точно так же, как в параграфе "Интеграл Дирихле" можно доказать (докажите!), что

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt = 1. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что для произвольного x_0:

$$S_n(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{[f(x_0+t)+f(x_0-t)]-[f(x_0+0)+f(x_0-0)]}{2}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}dt \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} g(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt,$$

где

$$g(t) = \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Покажем, что функция $g(t)$ принадлежит классу $\mathcal{F}[0,\pi]$. Так как $f(x)$ кусочно-липшицева, то на всяком отрезке $[a,b]$ эта функция имеет конечное число точек разрыва I-го рода.

Рассмотрим сначала случай, в котором x_0 является точкой непрерывности $f(x)$. Тогда функция $g(t)$ имеет конечное число точек разрыва на $(0,\pi]$. Покажем интегрируемость $g(t)$ на отрезке $[0,\pi]$. Так как $g(t)$ кусочно-непрерывна, то достаточно показать, что $g(t)$ ограничена в окрестности точки $t=0$.

При достаточно малых $t > 0$ выполнено

$$\begin{gathered}|f(x_0+t)-f(x_0)| \le kt,\\ |f(x_0-t)-f(x_0)| \le kt.\end{gathered}$$

Поэтому

$$|g(t)| \le k\frac{t}{\sin\frac{t}{2}},$$

то есть является ограниченной в окрестности нуля.

Рассмотрим второй случай, в котором x_0 — точка разрыва $f(x)$. Тогда при достаточно малых $t > 0$

$$\begin{gathered}|f(x_0+t)-f(x_0+0)| \le k_1 t\\ |f(x_0-t)-f(x_0-0)| \le k_2 t\end{gathered}$$

т.е. справа и слева от x_0 функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Мы имеем:

$$|g(t)| \le \frac{(k_1+k_2)}{2}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}$$

Вывод: функция $g(t)$ кусочно-непрерывна на $(0,\pi]$, а в окрестности нуля ограничена.

Покажем, что

$$\int\limits_0^\pi g(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt \to 0, \qquad n\to\infty. \qquad (5)$$

Имеем:

$$\int\limits_0^\pi g(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt = \int\limits_0^\pi g(t)\sin(nt)\cos\frac{t}{2}dt+\int\limits_0^\pi g(t)\cos nt\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} g_1(t)\sin(nt)dt + \int\limits_0^{2\pi} g_2(t)\cos(nt)dt = I_n^{'} + I_n^{''}, \qquad (6)$$

где

$$g_1(t) = \begin{cases} g(t)\cos\frac{t}{2}, & t\in[0,\pi],\\ 0, & t\in(\pi,2\pi]\end{cases}$$

$$g_2(t) = \begin{cases} g(t)\sin\frac{t}{2}, & t\in[0,\pi],\\ 0, & t\in(\pi,2\pi].\end{cases}$$

Заметим, что интегралы $I_n^{'}$ и $I_n^{''}$ суть коэффициенты Фурье функций $g_1(t)$ и $g_2(t)$, то есть $I_n^{'}$ и $I_n^{''} \to 0$, при $n\to\infty$. Таким образом, получаем, что

$$S_n(x_0) - \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} \to 0$$

при $n \to \infty$, что и требовалось доказать. □

§8. Представление функции рядом Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть $f(x)$ — функция, удовлетворяющая условию Липшица на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда ее ряд Фурье имеет конечную сумму $S(x)$, причем*

$$S(x) = f(x)$$

для всех $x \in (-\pi, \pi)$, и

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Явлением Гиббса[7] принято называть описываемую ниже особенность поведения частичных сумм тригонометрического ряда Фурье.

Пусть $S_n(x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, и пусть при $n \to \infty$ последовательность $S_n(x) \to f(x)$ в проколотой окрестности $0 < |x-\xi| < \delta$ точки ξ, в которой функция $f(x)$ имеет односторонние пределы $f(\xi+0)$ и $f(\xi-0)$. Для определенности будем считать, что $f(\xi-0) \le f(\xi+0)$. Говорят, что в точке ξ имеет место *явление Гиббса* для частичных сумм $S_n(x)$, если

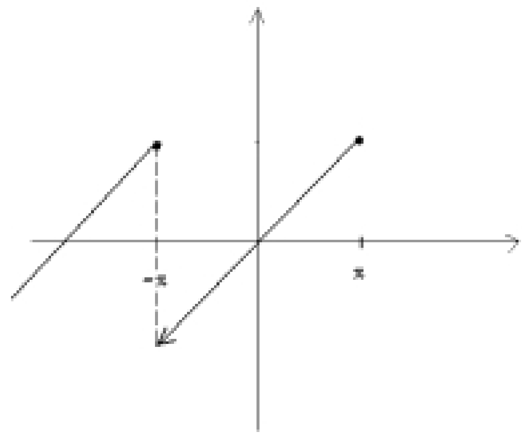
$$\liminf_{n\to\infty} S_n(x) < f(\xi-0) \le f(\xi+0) < \limsup_{n\to\infty} S_n(x).$$

Попробуйте доказать, что для любой функции вида $\varphi(x) + c\,\mathrm{sign}(x-\xi)$, где $c \neq 0$, $\quad |\xi| < \pi$, $\quad \varphi(x) \in C^1[-\pi, \pi]$, в точке ξ имеет место явление Гиббса.

Доказательство. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$\tilde f(x) = \begin{cases} f(x), \ \forall\, x \in (-\pi, \pi] \\ f(\pi), \ x = -\pi. \end{cases}$$

[7]Гиббс Джозайя Уиллард (11.2.1839 – 28.4.1903) – физик, механик и математик. Род. в Нью-Хейвене (США). Работал в Йельском университете. Один из основоположников термодинамики и статистической механики. Как математик разрабатывал вопросы векторного анализа, внес известный вклад в развитие математической физики.



Данная функция принимает на концах отрезка равные значения. Поэтому мы можем продолжить ее по периодичности на всю числовую прямую. Полученную в результате продолжения функцию обозначим через $\varphi(x)$.

Функция $\varphi(x)$ – 2π-периодична и кусочно-липшицева. Ряд Фурье, построенный для $\varphi(x)$ совпадает с рядом Фурье для $f(x)$. (Функцию изменили в одной точке, но ее коэффициенты Фурье остались теми же самыми, поскольку изменение функции в одной точке не влияет на значение интеграла.)

Применим теорему предыдущего параграфа. Пусть $x_0 \in (-\pi, \pi)$. Тогда

$$S(x_0) = \frac{\varphi(x_0+0) + \varphi(x_0-0)}{2} = f(x_0).$$

Пусть теперь $x_0 = -\pi$, то есть x_0 – точка разрыва для $\varphi(x)$. Замечаем, что

$$\varphi(x_0+0) = \varphi(-\pi+0) = \lim_{x\to-\pi+0} \varphi(x) = f(-\pi),$$

а

$$\varphi(x_0-0) = \lim_{x\to-\pi-0} \varphi(x) = f(\pi).$$

Тем самым

$$S(-\pi) = \frac{\varphi(-\pi+0) + \varphi(-\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2}.$$

Аналогичным образом проверяется и утверждение для точки $x_0 = \pi$. Теорема доказана. $\square$

§9. Представление функции рядом Фурье на произвольном отрезке

Предположим, что функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l, l]$. Применим подстановку $x = \frac{ly}{\pi}$, где $y \in [-\pi, \pi]$. Таким образом получаем, что функция $f(\frac{ly}{\pi})$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$, и мы имеем право применить к ней результаты предыдущего параграфа. А именно, при соблюдении некоторых условий (сформулируйте какие-нибудь из них!) ее можно разложить в ряд Фурье. В частности справедливо следующее соотношение:

$$f(\frac{ly}{\pi}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos ny + b_n \sin ny),$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\frac{ly}{\pi}) \cos ny \, dy,$$

и

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\frac{ly}{\pi}) \sin ny \, dy.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

и

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Случай, когда функция $f(x)$ задана на отрезке $[0, 2l]$, а также на отрезке $[a, b]$ разберите самостоятельно.

Пусть теперь $f(x)$ – нечетная функция, заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда, очевидно,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0.$$

Более того, функции $\{f(x)\cos nx\}$ являются нечетными и, стало быть,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0.$$

Заметим также, что функции $\{f(x)\sin nx\}$ являются четными и, стало быть,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \tag{1}$$

В результате получаем, что

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где коэффициенты Фурье определяются формулой (1).

УПРАЖНЕНИЕ 2. Получите аналогичные утверждения для четных функций самостоятельно.

§10. Теорема Фейера

Пусть $f(x)$ — непрерывная, 2π-периодическая функция, и пусть $S_n(x)$ — частичные суммы ее ряда Фурье. Положим

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + ... + S_n(x)}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(x).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. Величина $\sigma_n(x)$, равная среднему арифметическому частичных сумм ряда Фурье, называется частичной суммой Фейера[8] порядка n.

ТЕОРЕМА 10.1. *Сумма Фейера порядка n подсчитывается по формуле*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}}dt. \tag{1}$$

[8] Фейер Липот (9.2.1880 – 15.10.1959) – венгерский математик. Автор ряда работ по теории функций, теории тригонометрических рядов, теории интерполирования, теории специальных функций.

ЗАМЕЧАНИЕ. Величину

$$F_n(x) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2}x}{2(n+1)\sin^2 \frac{x}{2}}$$

называют ядром Фейера порядка n.

Доказательство. Как было доказано ранее

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt.$$

Поэтому

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{(n+1)\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt. \tag{2}$$

Преобразуем сумму

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}(\sin kt\cos\frac{t}{2} + \cos kt\sin\frac{t}{2}) =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\sum_{k=0}^{n}\sin kt + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos kt =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}A_n + \frac{1}{2}B_n. \tag{3}$$

Подсчитаем величину A_n. Имеем:

$$A_n = \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin kt\sin\frac{t}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}(\cos(kt-\frac{t}{2}) - \cos(kt+\frac{t}{2})) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\{\cos(-\frac{t}{2}) - \cos(\frac{t}{2}) + \cos\frac{t}{2} - \cos\frac{3}{2}t + \ldots + \cos(n-\frac{1}{2})t -$$

$$-\cos(n+\frac{1}{2})t\} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}. \tag{4}$$

Подсчитаем величину B_n. Имеем:

$$B_n = \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\cos kt\sin\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\{\sin(kt+\frac{t}{2}) - \sin(kt-\frac{t}{2})\} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}(\sin(n+\frac{1}{2})t + \sin\frac{t}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}. \qquad (5)$$

Объединяя $(3), (4), (5)$ находим:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}[\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}] + \frac{1}{2}[\frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}] =$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}[1 - \cos\frac{t}{2}\cos(n+\frac{1}{2})t + \sin\frac{t}{2}\sin(n+\frac{1}{2})t] =$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}(1 - \cos(n+1)t) = \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2})t}{2\sin^2\frac{t}{2}}. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (2), получаем (1), что и требовалось доказать. □

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите, что ядро Фейера обладает следующими свойствами:
α) $F_n(t) \geq 0$ и является четной функцией.
β) $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1.$

ТЕОРЕМА 10.2 (Фейера). *Пусть $f(x)$ — непрерывная, 2π — периодическая функция. Тогда суммы Фейера $\{\sigma_n(x)\}$ сходятся равномерно к $f(x)$.*

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt = 1,$$

то

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_n(t)dt - f(x)\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x+t) - f(x))F_n(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}(f(x+t)-f(x))F_n(t)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta}(f(x+t)-f(x))F_n(t)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\delta}(f(x+t)-f(x))F_n(t)dt = I'_n + I''_n + I'''_n, \qquad (7)$$

где последнее равенство верно для всех достаточно малых $\delta > 0$. Кроме того справедливы оценки

$$| I'_n |= \frac{1}{\pi} \mid \int\limits_{\delta}^{\pi}(f(t+x)-f(x))\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}}dt \mid\le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}(| f(x+t) | + | f(x) |)\frac{dt}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}} \le \frac{(\pi-\delta)\max|f(x)|}{\pi(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}. \quad (8)$$

Аналогично доказывается, что

$$| I'''_n |\le \frac{(\pi-\delta)\max | f(x) |}{\pi(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}. \qquad (9)$$

Оценим интеграл I''_n. Имеем

$$| I''_n |\le \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\delta}^{\delta} | f(x+t)-f(x) | F_n(t)dt \le$$

$$\le \frac{1}{\pi}\max_{t\in[-\delta,\delta]} | f(x+t)-f(x) | \int\limits_{-\delta}^{\delta} F_n(t)dt \le$$

$$\le \max_{t\in[-\delta,\delta]} | f(x+t)-f(x)|. \qquad (10)$$

Объединяя (7) – (10) получаем, что для всех $x \in (-\infty,\infty)$ выполнено

$$|\sigma_n(x)-f(x)| \le 2\frac{\max|f(x) |}{(n+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} + \max_{t\in[-\delta,\delta]} | f(x+t)-f(x)|. \quad (11)$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Так как $f(x)$ — 2π-периодическая и непрерывная, то, учитывая теорему Кантора, она равномерно непрерывна на $(-\infty,\infty)$. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что для всех $x', x'', | x' - x'' |< \delta$ выполнено

$$| f(x') - f(x'') |< \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда, при $t \in [-\delta,\delta]$ выполнено $| (x+t)-(x) |=| t |< \delta$ и, соответственно,

$$\max_{t\in[-\delta,\delta]} | f(x+t)-f(x) |< \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (12)$$

Далее по $\varepsilon > 0$ найдем $N : \forall\, n > N$ выполнено

$$\frac{2 \max \mid f(x) \mid}{(n+1) \sin^2 \frac{\delta}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Из (11) — (13) следует, что при $n > N$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$ выполнено

$$\mid \sigma_n(x) - f(x) \mid < \varepsilon.$$

Тем самым $\sigma_n(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $(-\infty, \infty)$ и теорема доказана. □

СЛЕДСТВИЕ. Если две непрерывные 2π–периодические функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют равные коэффициенты Фурье, то $f(x) \equiv g(x)$.

Доказательство. Так как коэффициенты Фурье совпадают, то совпадают частичные суммы ряда Фурье и, следовательно, их средние арифметические, т.е суммы Фейера. Так как по теореме Фейера $\sigma_n(f)$ сходится равномерно к $f(x)$, $\sigma_n(g)$ сходится равномерно к $g(x)$, то $f(x) \equiv g(x)$. □

§11. Полнота тригонометрической системы функций

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Пусть X — некоторое множество функций, определенных на $[a, b]$. Система функций $\omega_0(x), \omega_1(x)$, ..., $\omega_n(x)$, ... называется полной для множества X (в смысле равномерного приближения), если для всякой функции $f(x) \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое конечное число функций $\omega_{n_1}(x), \omega_{n_2}(x), ..., \omega_{n_k}(x)$ и такие числа $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, ..., \lambda_{n_k}$, что

$$|f(x) - (\lambda_{n_1}\omega_{n_1}(x) + \lambda_{n_2}\omega_{n_2}(x) + \cdots + \lambda_{n_k}\omega_{n_k}(x))| < \varepsilon$$

для всех $x \in [a, b]$.

ПРИМЕР 1. Система функций $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...$ не является полной в классе всех непрерывных на отрезке $[-\pi, \pi]$. Это ясно поскольку всякая функция $f(x) : f(-\pi) \neq f(\pi)$ не может быть равномерно приближена тригонометрическим многочленом. □

ТЕОРЕМА 11.1. *Система функций* $1, \cos x, \sin x, ...$ *полна в классе всех непрерывных на числовой прямой* 2π-*периодических функций.*

Доказательство. Согласно теореме Фейера всякая непрерывная, 2π-периодическая функция равномерно приближается суммами Фейера, являющимися линейными комбинациями тригонометрической системы функций. Последнее доказывает теорему. □

ТЕОРЕМА 11.2. *Система функций* $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, ..., \cos nx, ...$ *полна в классе всех непрерывных на отрезке* $[0, \pi]$ *функций.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная на $[0, \pi]$ функция. Продолжим ее четным образом на отрезке $[-\pi, \pi]$. Полученную функцию обозначим через $\tilde{f}(x)$. Функция $\tilde{f}(x)$ принимает на концах отрезка равные значения и мы можем продолжить ее по периодичности на всю числовую прямую и получить в результате непрерывную 2π-периодическую функцию. Согласно теореме Фейера, для любого $\varepsilon > 0$ существует сумма Фейера $\sigma_n(x)$ такая, что

$$|\tilde{f}(x) - \sigma_n(x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in [-\pi, \pi]$. Далее заметим, что $\sigma_n(x)$ — среднее арифметическое частичных сумм ряда Фурье, равных

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где

$$b_k = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \sin kx dx.$$

Однако функция $\tilde{f}(x) \sin kx$ нечетна, и поэтому все $b_k = 0$. Тем самым в нашем случае

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k coskx$$

и суммы Фейера $\sigma_n(x)$ являются линейными комбинациями лишь функций $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$. □

§12. Связь между алгебраическими и тригонометрическими многочленами. Многочлены Чебышева

По формуле Муавра[9] имеем:

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos\theta)^n +$$

$$+iC_n^1(\cos\theta)^{n-1}\sin\theta + i^2C_n^2(\cos\theta)^{n-2}(\sin\theta)^2 + ... + i^nC_n^n\sin^n\theta.$$

Члены этого равенства , стоящие на четных местах действительны, а на нечетных – мнимы. Замечая, что для всех $m = 1, 2, ...$ выполнено

$$\sin^{2m}\theta = (1-\cos^2\theta)^m$$

имеем

$$\cos n\theta = (\cos\theta)^n -$$

$$-C_n^2(\cos\theta)^{n-2}(1-\cos^2\theta) + C_n^4(\cos\theta)^{n-4}(1-\cos^2\theta)^2 -$$

$$-... \equiv Q_n(\cos\theta),$$

где

$$Q_n(x) = \cos(n\arccos x) = \alpha_0^{(n)} + \alpha_1^{(n)}x + ... + \alpha_n^{(n)}x^n$$

— алгебраический многочлен степени n с действительными коэффициентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Многочлены $Q_n(x)$ называются *многочленами Чебышева.*

ПРИМЕР 1. Ясно, что

$$Q_0(x) = 1, \quad Q_1(x) = \cos(\arccos x) = x, \quad Q_2(x) = \cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1.$$

□

Очевидно, что всякий четный тригонометрический многочлен

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cos kx$$

при помощи подстановки $x = \arccos y$ непрерывно и взаимнооднозначно переводящей отрезок $[-1, 1]$ на отрезок $[0, \pi]$, преобразуется в алгебраический многочлен

$$P_n(y) = T_n(\arccos y) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_kQ_k(y).$$

[9] Муавр де Абрахам (26.5.1667 – 27.11.1754). Род. в Витри-ле-Франсуа (Франция). Много лет жил и работал в Лондоне, член Лондонского королевского общества. Работал в области теории рядов, теории вероятностей, комплексных чисел.

§13. Теорема Вейерштрасса (о равномерном приближении непрерывной функции многочленами)

ТЕОРЕМА 13.1 (Вейерштрасса). *Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция может быть равномерно приближена на этом отрезке многочленами $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ или, говоря иначе, система функций $1, x, x^2, x^3, \ldots$ полна в пространстве всех непрерывных на $[a, b]$ функций.*

Доказательство. Докажем сначала данное утверждение для отрезка $[-1, 1]$. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[-1, 1]$ функция. Тогда $f(\cos t)$ — непрерывная функция на $[0, \pi]$. Так как система функций $1, \cos t, \cos 2t, \ldots$ полна в пространстве непрерывных на $[0, \pi]$ функций, то для любого $\varepsilon > 0$ существует четный тригонометрический многочлен

$$T_n(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kt$$

такой, что

$$|f(\cos t) - T_n(t)| < \varepsilon$$

для всех $t \in [0, \pi]$. Однако, согласно предыдущему параграфу, многочлен $T_n(t)$ можно записать в виде $T_n(t) = P_n(\cos t)$, где $P_n(x)$ — алгебраический многочлен степени n. Таким образом,

$$|f(\cos t) - P_n(\cos t)| < \varepsilon$$

для всех $t \in [0, \pi]$, или

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in [-1, 1]$. Таким образом теорема для отрезка $[-1, 1]$ доказана. Рассмотрим общий случай непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$. Сделаем подстановку

$$x = a + \frac{b-a}{2}(z+1),$$

взаимно однозначно и непрерывно переводящую отрезок $[-1, 1]$ в $[a, b]$. Тогда функция $F(z) = f(a + \frac{b-a}{2}(z+1))$ непрерывна на $[-1, 1]$ и, по доказанному выше, существует многочлен $P_n(z)$ такой, что

$$|F(z) - P_n(z)| < \varepsilon$$

для всех $z \in [-1, 1]$. Обратная подстановка

$$z = \frac{2(x-a)}{b-a} - 1$$

превращает определенную функцию $F(z)$ в функцию $f(x)$ на $[a, b]$, а многочлен $P_n(z)$ в некоторый новый многочлен

$$R_n(x) = P_n(\frac{2(x-a)}{b-a} - 1),$$

заданый на $[a, b]$. Для них имеем

$$|f(x) - R_n(x)| < \varepsilon$$

для всех $x \in [a, b]$, что и требовалось доказать. $\square$

§14. Другие доказательства теоремы Вейерштрасса.

Приведенное выше доказательство принадлежит Л. Фейеру. Ниже мы приводим доказательство аппроксимационной теоремы Вейерштрасса, принадлежащее С.Н. Бернштейну.

ТЕОРЕМА 14.1. *Для произвольной функции $f \in C[0, 1]$ последовательность полиномов*

$$B_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

равномерно на $[0, 1]$ сходится к f при $n \to \infty$.

Доказательство. Продифференцируем при $n \geq 2$ дважды по переменной a тождество

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Тогда имеем

$$n(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k\tbinom{n}{k} a^{k-1} b^{n-k},$$

$$n(n-1)(a+b)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\tbinom{n}{k} a^{k-2} b^{n-k}.$$

Первое из равенств умножим на a, а второе — на a^2 и положим $a = x$ и $b = 1 - x$. Мы имеем

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-$$

$$-\frac{2x}{n}\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+$$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=$$

$$= x^2 - \frac{2x}{n}nx + \frac{1}{n^2}[n(n-1)x^2+nx] = \frac{x(1-x)}{n}.$$

Пусть $f \in C[0,1]$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу равномерной непрерывности f существует $\delta > 0$ такое, что

$$|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

А если $\max|f(x)| = M$, то при $|x-y| \geq \delta$ находим

$$|f(x)-f(y)| \leq 2M \leq 2M\frac{(x-y)^2}{\delta^2}.$$

Таким образом, для произвольных $x, y \in [0,1]$ выполнено

$$|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon + 2M\frac{(x-y)^2}{\delta^2}.$$

Отсюда получаем

$$|f(x)-B_n(f,x)| = \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq$$

$$\leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}\cdot\frac{x(1-x)}{n}.$$

Теперь очевидно, что при достаточно больших n правая часть соотношения станет меньше 2ε сразу для всех $x \in [0,1]$. $\square$

Полиномы B_n называются полиномами Бернштейна или, по предложению Н.Н. Лузина — изящными.

Интересно заметить, что только до 1913 года свои доказательства теоремы Вейерштрасса были предложены Лебегом, Пикаром, Фрагменом, Миттаг – Леффлером, Лерчем, Вольтерра. См. препринт Р.М. Тригуба "Вокруг аппроксимационной теоремы К. Вейерштрасса", стр. 19, Донецк: изд-во ДонГУ, 2005.

§15. Замкнутость тригонометрической системы функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15.1. Если для каждой непрерывной (интегрируемой) на $[a, b]$ функции $f(x)$ выполнено условие замкнутости, иначе говоря, справедливо равенство Парсеваля

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^2,$$

то ортонормированная система функций $\{\omega_n(x)\}$ называется замкнутой. Здесь $\{\alpha_n\}$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$ в системе $\{\omega_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

ТЕОРЕМА 15.1. *Тригонометрическая система функций $1, \cos x, \sin x, \ldots$ является замкнутой на $[-\pi, \pi]$.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная на $[-\pi, \pi]$ функция, а $S_n(x)$ — частичные суммы ее ряда Фурье. Система замкнута тогда и только тогда (см. параграф "Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля."), когда

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), \ \forall\, x \in (-\pi + \alpha, \pi], \\ (kx + b), \ \forall\, x \in [-\pi, -\pi + \alpha]. \end{cases}$$

где $k, b = const$ выбраны так, чтобы $\tilde{f}(x)$ была непрерывной на $[-\pi, \pi]$ и принимала на его концах равные значения, т. е.

$$\begin{cases} k(-\pi) + b = f(\pi), \\ k(-\pi + \alpha) + b = f(-\pi + \alpha). \end{cases}$$

Продолжим $\tilde{f}(x)$ по периодичности на всю числовую прямую. Обозначим через $\tilde{S}_n(x)$ частичную сумму ряда Фурье функции $\tilde{f}$. Заметим, что

$$(S_n(x)-f(x))^2 = (S_n(x)-\tilde{S}_n(x)+\tilde{S}_n(x)-\tilde{f}(x)+\tilde{f}(x)-f(x))^2 =$$

$$= (\tilde{S}_n(x)-\tilde{f}(x))^2 + (\tilde{f}(x)-f(x))^2 + (S_n(x)-\tilde{S}_n(x))^2 +$$

$$+2(\tilde{S}_n(x)-\tilde{f}(x))(\tilde{f}(x)-f(x))+2(S_n(x)-\tilde{S}_n(x))(\tilde{f}(x)-f(x))+$$

$$+2(\tilde{S}_n(x)-\tilde{f}(x))(\tilde{S}_n(x)-S_n(x)).$$

Учитывая неравенство Коши

$$2ab \le a^2 + b^2,$$

получаем

$$(S_n(x)-f(x))^2 \le$$

$$\le 3(\tilde{S}_n(x)-\tilde{f}(x))^2 + 3(\tilde{f}(x)-f(x))^2 + 3(\tilde{S}_n(x)-S_n(x)).$$

Интегрируя данное соотношение, получаем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (S_n(x)-f(x))^2 dx \le$$

$$\le 3\int\limits_{-\pi}^{\pi} (S_n(x)-\tilde{f}(x))^2 dx + 3\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\tilde{f}(x)-f(x))^2 dx +$$

$$+3\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\tilde{S}_n(x)-S_n(x))^2 dx. \qquad (2)$$

Далее полагаем $\alpha = \frac{1}{n^2}$ и заметим, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\tilde{f}(x)-f(x))^2 dx = \int\limits_{-\pi}^{-\pi+\alpha} (kx+b-f(x))^2 dx \le \int\limits_{-\pi}^{-\pi+\alpha} (|kx+b|+|f(x)|)^2 dx \le$$

$$\le \int\limits_{-\pi}^{-\pi+\alpha} (2\max_{[-\pi,\pi]}|f(x)|)^2 dx \le 4(\max_{[-\pi,\pi]}|f(x)|)^2 \frac{1}{n^2}. \qquad (3)$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Из неравенства (3) сразу следует, что найдется число $N_1(\varepsilon)$, такое, что при $n > N_1(\varepsilon)$ второе слагаемое в (2) будет меньше $\frac{\varepsilon}{3}$.

Далее, учитывая теорему Фейера, найдется $N_2(\varepsilon) : \forall\, n > N(\varepsilon)$ выполнено

$$|\tilde{\sigma}_n(x) - \tilde{f}(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{18\pi}}$$

для всех $x \in (-\infty, \infty)$, где $\tilde{\sigma}_n(x)$ – суммы Фейера функции $\tilde{f}(x)$. Поэтому для всех $n > N_2(\varepsilon)$ выполнено

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\tilde{\sigma}_n(x) - \tilde{f}(x))^2 dx \le \frac{\varepsilon}{9}. \tag{4}$$

Учитывая свойство минимальности отрезков ряда Фурье, получаем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\tilde{S}_n(x) - \tilde{f}(x))^2 dx \le \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\tilde{\sigma}_n(x) - \tilde{f}(x))^2 dx.$$

Тогда, в силу (4), справедливо соотношение

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\tilde{S}_n(x) - \tilde{f}(x))^2 dx < \frac{\varepsilon}{9}$$

для всех $n > N_2(\varepsilon)$. Оценим теперь последнее слагаемое в правой части неравенства (2). Для этого отметим сначала, что из определения ядра Дирихле $D_n(t)$ следует оценка

$$|D_n(t)| \le n + \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$|\tilde{S}_n(x) - S_n(x)| = \frac{1}{2\pi} |\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\tilde{f}(x) - f(x)) D_n(t-x) dt| =$$

$$= \frac{1}{2\pi} | \int\limits_{-\pi}^{-\pi+\alpha} (\tilde{f}(x) - f(x)) D_n(t-x) dt| \le \frac{(2n+1) \max\limits_{[-\pi,\pi]} |f(x)|}{2\pi n^2}.$$

Следовательно, найдется $N_3(\varepsilon)$ такое, что при $n > N_3(\varepsilon)$ выполнено

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} (\tilde{S}_n(x) - S_n(x))^2 dx < \frac{\varepsilon}{9}.$$

Таким образом, для всех $n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon), N_3(\varepsilon)\}$ из неравенства (2) получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} (S_n(x) - f(x))^2 dx < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

что доказывает теорему. □

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать, что равенство (1) имеет место для кусочно-непрерывных функций на отрезке $[-\pi, \pi]$.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Попробуйте доказать приведенное выше утверждение для интегрируемых с квадратом функций.

Заметим, что строгое доказательство (для ограниченных функций) впервые было дано А.М. Ляпуновым[10].

§16. Комплексная форма записи ряда Фурье

ЗАМЕЧАНИЕ. Напомним формулу Эйлера

$$e^{i\tau} = \cos\tau + i\sin\tau.$$

Отсюда, учитывая

$$e^{-i\tau} = \cos\tau - i\sin\tau,$$

легко получаем, что

$$2\cos\tau = e^{i\tau} + e^{-i\tau}, \quad 2i\sin\tau = e^{i\tau} - e^{-i\tau},$$

или

$$\cos\tau = \frac{e^{i\tau} + e^{-i\tau}}{2}, \quad \sin\tau = \frac{e^{i\tau} - e^{-i\tau}}{2i}.$$

Пусть a_k, b_k — коэффициенты Фурье кусочно-непрерывной функции $f(x)$. На основании формулы Эйлера имеем:

$$a_k\cos kx + b_k\sin kx = a_k\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} + b_k\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} =$$

$$= c_k e^{ikx} + c_{-k}e^{-ikx}, \tag{1}$$

где

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

[10] Ляпунов Александр Михайлович (6.6.1857 – 3.11.1918) – русский математик и механик, академик Петербургской АН (1901). Род. в Ярославле. Окончил Петербургский университет. Работал в Харьковском и Петербургском университетах. Один из создателей современной теории устойчивости. Получил ряд фундаментальных результатов в области дифференциальных уравнений, математической физики, теории вероятностей.

Из формулы (1) получаем

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\cos kt - i\sin kt)f(t)dt \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt,$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(\cos kt + i\sin kt)f(t)dt \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{ikt}dt.$$

Следовательно, для всех $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ выполнено

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt. \tag{2}$$

Таким образом коэффициенты c_k вычисляются по единой формуле для всех k.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $f(x)$ — действительно-значная функция, то коэффициенты a_k, b_k—действительные, а числа c_k, c_{-k} хотя и комплексные, но комплексно сопряжены, т. е.

$$c_k = \overline{c_{-k}}. \tag{3}$$

Обратно (проверьте!), комплексная сопряженность c_k, c_{-k} влечет за собой действительность коэффициентов Фурье a_k, b_k у функции $f(x)$.

Учитывая (1) выводим, что n-ая частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ может быть записана в виде

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \tag{4}$$

а сам ряд Фурье для $f(x)$ в виде *ряда с двумя входами*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{5}$$

Будем говорить, что ряд (5) сходится при данном значении x, если существует

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

Заметим, что комплексные функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}, k = 0, \pm1, ... \tag{6}$$

образуют ортонормированную систему функций на $[0, 2\pi]$. Действительно (проверьте!),

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ilx} dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k-l)x} dx = \delta_k^l.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16.1. Числа c_k, определяемые формулой (2), называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ в системе

$$\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{k=\infty}. \tag{7}$$

Ряд (5), полученный из обычного тригонометрического ряда Фурье, является рядом Фурье функции $f(x)$ в системе (6). Его называют тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ в комплексной форме записи.

§17. Дифференцирование и интегрирование рядов Фурье

Пусть $y = f(x)$ — непрерывная, 2π–периодическая функция с кусочно-непрерывной производной. Применяя формулу интегрирования по частям, для всех $k = \pm 1, \pm 2, ...$ имеем:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \left(f(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik}\right)\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+ \frac{1}{ik2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f'(t) e^{-ikt} dt = \frac{1}{ik} c_k', \tag{1}$$

где

$$c_k' = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f'(t) e^{-ikt} dt \tag{2}$$

— коэффициенты Фурье производной $f'(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Ранее нами была доказана формула интегрирования по частям для функций, имеющих непрерывную производную. Та же формула верна и для функции с кусочно-непрерывной производной (проверить!).

Если функция $f(x)$ является 2π–периодической и имеет кусочно-непрерывную производную порядка $s > 1$, то процесс интегрирования по частям (1) можно повторить s раз, и мы получим

$$c_k = \frac{1}{(ik)^s} c_k^{(s)},$$

где

$$c_k^{(s)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f^{(s)}(t) e^{-ikt} dt$$

— коэффициент Фурье производной $f^{(s)}(x)$.

ТЕОРЕМА 17.1. *Пусть $y = f(x)$ — непрерывная, 2π-периодическая функция с кусочно-непрерывной производной, и пусть*

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} \tag{3}$$

— ее разложение в ряд Фурье. Тогда $f'(x)$ порождает ряд $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} c'_k e^{ikx}$ или

$$f'(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} (ik) c_k e^{ikx}. \tag{4}$$

Доказательство. Производная $f'(x)$ — кусочно-непрерывная и 2π— периодическая функция. Поэтому

$$f'(x) \sim \sum_{k \neq 0, k=-\infty}^{\infty} c'_k e^{ikx}. \tag{5}$$

Нулевой член в сумме отсутствует, поскольку

$$c'_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f'(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left(f(t)\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}[f(2\pi) - f(0)] = 0.$$

Заметим, что ряд в правой части (5), вообще говоря, в отдельных точках может не сходиться к $f'(x)$. Если функция имеет кусочно-непрерывную производную, то эта производная ограничена и значит $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица. С другой стороны, при каждом $k \neq 0$ справедливо (1), и потому

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik) c_k e^{ikx},$$

что доказывает (5). □

ТЕОРЕМА 17.2. *Пусть $\varphi(x)$ — кусочно-непрерывная, 2π-периодическая функция такая, что*

$$\int_0^{2\pi} \varphi(x)dx = 0. \tag{6}$$

Пусть, кроме того,

$$\varphi(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k e^{ikx}. \tag{7}$$

Положим

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t)dt,$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx, \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt, k = \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{8}$$

Тогда

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx} = c_0 + \sum_{k=-\infty, k\neq 0}^{\infty} \frac{c'_k}{ik} e^{ikx}. \tag{9}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема означает, что ряд (7) можно почленно интегрировать. И получившийся ряд будет рядом Фурье для $f(x) - c_0$, где c_0 вычисляется по формуле (8).

Доказательство. В силу известных свойств интегралов с переменным верхним пределом функция $f(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную. Заметим, что как интеграл с переменным верхним пределом от интегрируемой функции, функция $f(x)$ – непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$. Кроме того,

$$f(2\pi) - f(0) = \int_0^x \varphi(t)dt \Bigg|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \varphi(t)dt = c'_0 = 0,$$

т. е $f(x)$ принимает на концах отрезка $[0, 2\pi]$ равные значения и следовательно может быть продолжена 2π-периодичной на $(-\infty, \infty)$. Пользуясь предыдущей теоремой, получаем нужное. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Разберитесь самостоятельно со случаем, когда условие (6) не выполнено.

Дополнительная литература:

1) Г.Г. Харди, В.В. Рогозинский, Ряды Фурье, Пер. с англ. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: КомКнига, 2006.
2) Р. Эдвардс, Ряды Фурье в современном изложении, Пер. с англ. В двух томах, М.: Мир, 1985.

Глава 17

Интегралы, зависящие от параметра

§1. Семейства функций, зависящих от параметра

Пусть $X \subset \mathbf{R}$ и $T \subset \mathbf{R}$ – некоторые числовые множества. Напомним, что декартовым произведением множеств $X \times T = M$ называется множество всевозможных точек (x, t), где $x \in X, \quad t \in T$.

Если функция $f(x, t)$ двух переменных задана на декартовом произведении $M = X \times T$, то для любого фиксированого $t \in T$ ее можно рассматривать как функцию переменной x с областью определения X. Таким образом $f(x, t)$ можно рассматривать как семейство функций, определенных на множестве X и зависящих от параметра $t \in T$. Будем обозначать это семейство следующим образом: $f(x, t)$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим последовательность функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, определенных на множестве X. Эту последовательность можно рассматривать также и как семейство функций, зависящих от параметра $n \in \mathbf{N}$. $\Box$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $f(x, t)$ — семейство функций, определенных на множестве X и зависящих от параметра $t \in T$. Пусть t_0 — точка сгущения множества T. Предположим, что при $t \to t_0$ существует конечная предельная функция

$$\varphi(x) = \lim_{t \to t_0} f(x, t).$$

Говорят, что $f(x, t)$ сходится равномерно к $\varphi(x)$ на множестве X при $t \to t_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t \in T$ таких, что $0 < |t - t_0| < \delta(\varepsilon)$, и всех $x \in X$ выполнено

$$|f(x, t) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулируйте аналогичное определение в случае, когда $t_0 = \pm\infty$.

ТЕОРЕМА 1.1 (критерий Коши). *Пусть $f(x,t)$ — семейство функций, определенных на X и зависящих от параметра $t \in T$, и пусть t_0—точка сгущения множества T. Для того, чтобы $f(x,t)$ при $t \to t_0$ имела предельную функцию и сходилась к ней равномерно на X необходимо и достаточно, чтобы $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) : \quad \forall\, t', t'' \in T$, $0 < |t' - t_0| < \delta(\varepsilon), \quad 0 < |t'' - t_0| < \delta(\varepsilon)$ и для всех $x \in X$ выполнялось*

$$|f(x,t') - f(x,t'')| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что существует предельная функция $\varphi(x)$, причем $f(x,t) \to \varphi(x)$ при $t \to t_0$ равномерно на X. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists\, \delta(\varepsilon) : \forall\, t \in T, 0 < |t - t_0| < \delta(\varepsilon)$ выполнено

$$|f(x,t) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall\, x \in X.$$

Поэтому для всех $t', t'' \in T$ таких, что $0 < |t' - t_0| < \delta(\varepsilon)$, $0 < |t'' - t_0| < \delta(\varepsilon)$ при $\quad \forall\, x \in X$ получаем

$$|f(x,t') - f(x,t'')| \le |f(x,t') - \varphi(x)| +$$

$$+ |\varphi(x) - f(x,t'')| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Достаточность. Предположим, что выполнены условия Коши. Тогда фиксируя $x_0 \in X$ имеем функцию $f(x_0,t)$ переменного t, определенную на T. На основании критерия Коши для функции одного переменного заключаем существование конечного предела.

$$\lim_{t \to t_0} f(x_0,t) = \varphi(x_0).$$

Покажем, что $f(x,t) \to \varphi(x)$ при $t \to t_0$ равномерно на X. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta(\varepsilon)$ такое, что для всех t', $t'' \in T$ таких, что $0 < |t' - t_0| < \delta(\varepsilon)$, $0 < |t'' - t_0| < \delta(\varepsilon)$ выполнено

$$|f(x,t') - f(x,t'')| < \varepsilon, \qquad \forall\, x \in X.$$

Следовательно,

$$f(x,t'') - \varepsilon < f(x,t') < f(x,t'') + \varepsilon, \qquad \forall\, x \in X.$$

Переходя к пределу в этом двойном неравенстве при $t' \to t_0$, получаем

$$f(x,t'') - \varepsilon \le \varphi(x) \le f(x,t'') + \varepsilon \qquad \forall\, x \in X,$$

или

$$|f(x,t'') - \varphi(x)| \le \varepsilon \qquad \forall\, x \in X, \ \forall\, t'' \in T : 0 < |t'' - t_0| < \delta(\varepsilon),$$

что и требовалось доказать. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 2. Сформулируйте аналог этой теоремы для случая $t_0 = \pm\infty$.

ТЕОРЕМА 1.2 (об эквивалентности). *Для того, чтобы функция $f(x,t)$ при $t \to t_0$ сходилась к $\varphi(x)$ равномерно на X, необходимо и достаточно чтобы для любой последовательности $\{t_n\}, t_n \in T, t_n \neq t_0, t_n \to t_0$, соответствующая последовательность функций $\{f(x,t_n)\} \to \varphi(x)$ равномерно на X.*

Доказательство. Необходимые для доказательства данного утверждения рассуждения почти дословно повторяют доказательство теоремы об эквивалентности определений предела функции в точке по Коши и по Гейне. Проведите их самостоятельно. □

ТЕОРЕМА 1.3. *Если $f(x,t)$ для любого $t \in T$ непрерывна по x в точке $x_0 \in X$ и при $t \to t_0$ стремится равномерно на X к функции $\varphi(x)$, то $\varphi(x)$ также непрерывна в x_0.*

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $\{t_n\} \to t_0$. По предыдущей теореме $f(x,t_n) \to \varphi(x)$ равномерно на X. По соответствующей теореме для функциональных последовательностей заключаем, что $\varphi(x)$ непрерывна. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Будем говорить, что $f(x,t)$ монотонно возрастает при возрастании параметра t (убывании t), если $\forall\, t' < t'' \quad (t' > t'')$ выполнено $f(x,t') \leq f(x,t'')$ $\forall\, x \in X$. Аналогично определяется и монотонное убывание $f(x,t)$ при возрастании, либо убывании параметра t. Будем говорить, что параметр $t \to t_0$ монотонно, если он стремится к t_0 либо монотонно возрастая, либо монотонно убывая. Будем говорить, что $f(x,t) \to \varphi(x)$ монотонно, при монотонном стремлении $t \to t_0$, если она стремится к $\varphi(x)$ либо монотонно возрастая, либо монотонно убывая.

ТЕОРЕМА 1.4 (Дини). *Пусть $f(x,t)$ при $\forall\, t \in T$ непрерывна по переменной x на замкнутом ограниченном множестве X. Предположим, что при монотонном стремлении $t \to t_0$ функция $f(x,t)$ монотонно стремится к непрерывной функции $\varphi(x)$. Тогда эта сходимость является равномерной на X.*

Доказательство. Пусть $\{t_n\} \to t_0$ монотонно, тогда $f(x,t_n) \to \varphi(x)$ монотонно и по теореме Дини для функциональных последовательностей заключаем, что $f(x,t_n) \to \varphi(x)$ равномерно на X. Нетрудно показать (покажите!), что

$f(x, t_n) \to \varphi(x)$ равномерно на X при любой (не обязательно монотонной) последовательности $\{t_n\} \to t_0$. На основании теоремы 1.2 заключаем, что $f(x, t) \to \varphi(x)$ равномерно на X. □

§2. Перестановка предельных переходов в семействах функций, зависящих от параметра

ТЕОРЕМА 2.1. *Предположим, что существуют пределы*

$$\lim_{x\to x_0, t\to t_0} f(x,t)$$

и

$$\lim_{t\to t_0} f(x,t) \quad \forall\, x \in X.$$

Тогда существуют повторные пределы, причем

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{t\to t_0} f(x,t) = \lim_{t\to t_0}\lim_{x\to x_0} f(x,t).$$

Доказательство. Данное утверждение уже было доказано нами ранее (см. параграф "Повторные пределы"). □

ТЕОРЕМА 2.2. *Предположим, что для всех $x \in X$ существует предел*

$$\lim_{t\to t_0} f(x,t) = \varphi(x),$$

и для всех $t \in T$ существует предел

$$\lim_{x\to x_0} f(x,t) = \psi(t).$$

Если при $t \to t_0$ функция $f(x,t) \to \varphi(x)$ равномерно на X, то существуют и равны оба повторных предела

$$\lim_{t\to t_0} \psi(t) = \lim_{x\to x_0} \varphi(x).$$

Доказательство. Будем предполагать, что x_0, t_0 — конечные точки (случай $x_0, t_0 = \pm\infty$ разберите самостоятельно).
I. Покажем, что существует

$$\lim_{t\to t_0} \psi(t).$$

Для всех $t_1, t_2 \in T$ имеем

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| \le |\psi(t_1) - f(x,t_1)| + |f(x,t_1) - f(x,t_2)| + |f(x,t_2) - \psi(t_2)| =$$

$$= I + II + III.$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Так как $f(x,t) \to \varphi(x)$ равномерно на X, то по критерию Коши найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t_1, t_2 \in T$, для которых справедливо

$$0 < |t_1 - t_0| < \delta(\varepsilon), \quad 0 < |t_2 - t_0| < \delta(\varepsilon)$$

для всех $x \in X$ выполняется

$$II = |f(x,t_1) - f(x,t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Зафиксируем t_1, t_2. Так как

$$\lim_{x \to x_0} f(x,t_1) = \psi(t_1),$$

то при x достаточно близких к x_0 выполнено

$$I = |f(x,t_1) - \psi(t_1)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

и аналогично

$$III = |f(x,t_2) - \psi(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом для всех $t_1, t_2 \in T \backslash \{t_0\}$ при некотором $\delta_1(\varepsilon)$ (уточните, каком) выполнено

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| < \varepsilon,$$

и по критерию Коши для функции одного переменного заключаем о существовании предела $\psi(t)$ при $t \to t_0$.

II. Пусть теперь $t_n \to t_0$ — произвольная последовательность. Последовательность функций $\{f(x,t_n)\} \to \varphi(x)$ равномерно на X, и, по соответствующей теореме для функциональных последовательностей (вспомните ее формулировку), выполнено

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \psi(t_n).$$

По доказанному выше, для любой последовательности $\{t_n\} \to t_0$ выполнено

$$\lim_{n \to \infty} \psi(t_n) = \lim_{t \to t_0} \psi(t).$$

Таким образом мы, получаем

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{t \to t_0} \psi(t).$$

$\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите, что в условиях теоремы существует двойной

$$\lim_{t \to t_0, x \to x_0} f(x,t),$$

равный повторному.

§3. Предельный переход под знаком интеграла

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $f(x,t)$ — семейство функций переменной x, определенных на $[a,b]$ и зависящих от параметра $t \in T$. Предположим , что для всех $t \in T$ функция $f(x,t)$ непрерывна по переменной x на $[a,b]$ и при $t \to t_0$ стремится равномерно на $[a,b]$ к функции $\varphi(x)$. Тогда*

$$\lim_{t\to t_0} \int_a^b f(x,t)dx = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $\{t_n\}$ – произвольная последовательность, сходящаяся к t_0. Положим

$$\Phi(t) = \int_a^b f(x,t)dx.$$

Требуется доказать, что

$$\lim_{t\to t_0} \Phi(t) = \lim_{t_n\to t_0} \int_a^b f(x,t_n)dx = \int_a^b \phi(x)dx.$$

Поскольку последовательность $\{t_n\}$ произвольная, то пользуясь соответствующей теоремой для функциональных последовательностей, получаем необходимое утверждение. □

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите теорему 3.1, заменив предположение о непрерывности $f(x,t)$ по переменной x, предложением о ее интегрируемости.

СЛЕДСТВИЕ. Предположим, что в условиях теоремы 3.1 функция $\phi(x) = f(x,t_0)$. Тогда интеграл

$$\Phi(t) = \int_a^b f(x,t)dx$$

непрерывен по параметру t в точке t_0.

ЛЕММА 3.1. *Пусть $f(x,y)$ — функция двух переменных, определенная и непрерывная на замкнутом прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$. Тогда для любой точки $y_0 \in [c,d]$ функция $f(x,y) \to f(x,y_0)$ при $y \to y_0$ равномерно на $[a,b]$.*

Доказательство. По теореме Кантора $f(x,y)$ равномерно непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)$: $\forall\,(x',y'),(x'',y'')$ принадлежащих прямоугольнику, из неравенства

$$\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}<\delta(\varepsilon)$$

следует

$$|f(x',y')-f(x'',y'')|<\varepsilon.$$

В частности, для любых пар точек прямоугольника $(x,y'),(x,y'')$ таких, что $|y'-y''|<\delta(\varepsilon)$ выполнено

$$|f(x,y')-f(x,y'')|<\varepsilon$$

для всех $x\in[a,b]$, т.е. $f(x,y')\to f(x,y'')$ равномерно на $[a,b]$ при $y'\to y''$.В частности, это справедливо для $y''=y_0$. □

ТЕОРЕМА 3.2. *Если $f(x,t)$ определена и непрерывна как функция двух переменных на $[a,b]\times[c,d]$, то*

$$\lim_{t\to t_0}\int\limits_a^b f(x,t)dx=\int\limits_a^b f(x,t_0)dx,$$

т.е. интеграл $\Phi(t)=\int\limits_a^b f(x,t)dx$ непрерывен по параметру t на $[c,d]$.

Доказательство. Утверждение сразу следует из леммы 3.1 и следствия к предыдущей теореме. □

§4. Дифференцирование под знаком интеграла

ТЕОРЕМА 4.1 (формула Лейбница). *Пусть $f(x,t)$ определена на замкнутом прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$ и непрерывна по x на $[a,b]$ для всех $t\in[c,d]$. Предположим, что существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$, непрерывная как функция двух переменных на прямоугольнике. Тогда для всех $t\in[c,d]$ выполнено:*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_a^b f(x,t)dx=\int\limits_a^b\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx.$$

Доказательство. Фиксируем произвольно $t_0 \in [c, d]$. Нам нужно доказать, что

$$\lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0} [\int_a^b f(x,t)dx - \int_a^b f(x,t_0)dx] = \int_a^b f'_t(x,t_0)dx$$

или

$$\lim_{t \to t_0} \int_a^b \frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} dx = \int_a^b f'_t(x,t_0)dx.$$

В соответствии с теоремой 3.1. предыдущего пункта, нам достаточно установить, что разностное отношение

$$\frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0}$$

стремится равномерно по x на $[a, b]$ при $t \to t_0$ к $f'_t(x, t_0)$. Фиксируя $x \in [a, b]$ и рассматривая $f(x, t)$ как функцию параметра t на $[t_0, t]$, на основании теоремы Лагранжа имеем

$$f(x,t) - f(x,t_0) = f'_t(x, \xi_x)(t - t_0),$$

где $\xi_x \in (t_0, t)$.
Поэтому

$$|\frac{f(x,t) - f(x,t_0)}{t - t_0} - f'_t(x,t_0)| = |f'_t(x,\xi_x) - f'_t(x,t_0)|,$$

где

$$|\xi_x - t_0| \le |t - t_0|.$$

Поскольку $f'_t(x, t)$ равномерно непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $(x, t_1), (x, t_2)$ для которых $|t_1 - t_2| < \delta$ выполнено

$$|f'_t(x,t_1) - f'_t(x,t_2)| < \varepsilon,$$

в частности,

$$|f'_t(x,\xi_x) - f'_t(x,t_0)| < \varepsilon.$$

Это означает равномерную сходимость на $[a, b]$ нашего разностного отношения к $f'_t(x, t_0)$ при $t \to t_0$. Пользуясь теоремой 3.1 получаем нужное. □

ПРИМЕР 1 (Контрпример к формуле Лейбница). Покажем, что в условиях теоремы нельзя отказаться от непрерывности $f'_t(x, t)$ как функции двух переменных. Рассмотрим функцию

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{t^3}{x^2} \exp\{-\frac{t^2}{x}\}, x > 0 \\ 0, x = 0, \end{cases}$$

заданную в квадрате $[0,1]\times[0,1]$. Ее производная равна

$$f'_t(x,t)=\begin{cases}\frac{3t^2}{x^2}e^{-\frac{t^2}{x}}-\frac{2t^4}{x^3}e^{-\frac{t^2}{x}}, x>0,\\ 0, x=0\end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной в отдельности, однако терпит разрыв в точке $(0,0)$ по совокупности переменных (проверьте!). Для всех $t\in[0,1]$ имеем (проверьте!)

$$\Phi(t)=\int_0^1 f(x,t)dx=te^{-t^2}$$

и, следовательно,

$$\Phi'(t)=e^{-t^2}(1-2t^2)$$

для всех $t\in[0,1]$. Если $t\neq 0$, то (проверьте!)

$$\int_0^1 f'_t(x,t)dx=e^{-t^2}(1-2t^2).$$

Если же $t=0$, то принимая во внимание, что $f'_t(x,0)=0$. Следовательно

$$\Phi'(0)=1, \qquad \int_0^1 f'_t(x,0)dx=0.$$

□

§5. Обобщенная формула Лейбница (случай, когда пределы интегрирования зависят от параметра)

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $f(x,t)$ – определена и непрерывна как функция двух переменных в прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$. Предположим, что $\alpha(t),\beta(t)$ непрерывные на $[c,d]$ функции такие, что $a\le\alpha(t)\le b$, $\quad a\le\beta(t)\le b$. Тогда интеграл*

$$\Phi(t)=\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx \tag{1}$$

непрерывен по параметру $t\in[c,d]$.

Доказательство. Пусть $t_0 \in [c, d]$ – произвольно. Имеем:

$$\Phi(t) = \int\limits_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x,t)dx + \int\limits_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x,t)dx - \int\limits_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(x,t)dx =$$

$$= \Phi_1(t) + \Phi_2(t) - \Phi_3(t).$$

Функция $\Phi_1(t)$ непрерывна по следствию теоремы о непрерывности интеграла по параметру. Для доказательства непрерывности $\Phi(t)$ достаточно установить непрерывность $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$ в точке t_0. Мы имеем:

$$|\int\limits_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x,t)dx| \leq M|\beta(t) - \beta(t_0)|,$$

где

$$M = \max_{[a,b]\times[c,d]} |f(x,t)|.$$

Следовательно из непрерывности $\beta(t)$ в точке t_0 следует непрерывность $\Phi_2(t)$ в этой точке. Аналогично проверяется непрерывность функции $\Phi_3(t)$, а именно, данное свойство сразу следует из неравенства

$$|\int\limits_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(x,t)dx| \leq M|\alpha(t) - \alpha(t_0)|.$$

Поскольку $\Phi_1(t), \Phi_2(t), \Phi_3(t)$ непрерывны в t_0, то то же самое верно и для $\Phi(t)$. $\square$

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы 5.1 и, кроме того, существуют производные $\alpha'(t), \beta'(t)$ и непрерывная по совокупности переменных производная $f'_t(x,t)$. Тогда существует производная*

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t)dx = \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f'_t(x,t)dx + f(\beta(t),t)\beta'(t) - f(\alpha(t),t)\alpha'(t). \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $t_0 \in [c, d]$ — произвольно. Установим справедливость (2) в точке $t = t_0$. Как и в предыдущей теореме полагаем

$$\Phi(t) = \int\limits_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f(x,t)dx + \int\limits_{\beta(t_0)}^{\beta(t)} f(x,t)dx - \int\limits_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t)} f(x,t)dx =$$

$$= \Phi_1(t) + \Phi_2(t) - \Phi_3(t).$$

В силу условий теоремы, по формуле Лейбница, существует

$$\Phi_1'(t_0) = \int\limits_{\alpha(t_0)}^{\beta(t_0)} f_t'(x,t_0)dx. \tag{3}$$

Далее, по теореме о среднем, существует τ, заключенное между $\beta(t_0)$ и $\beta(t)$ такое, что

$$\Phi_2(t) = f(\tau,t)(\beta(t) - \beta(t_0)),$$

и поэтому

$$\Phi_2'(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0}[\Phi_2(t) - \Phi_2(t_0)] =$$

$$= \lim_{t\to t_0} \frac{1}{t-t_0} f(\tau,t)(\beta(t)-\beta(t_0)) = f(\beta(t_0),t_0)\beta'(t_0). \tag{4}$$

Аналогично

$$\Phi_3'(t_0) = f(\alpha(t_0),t_0)\alpha'(t_0). \tag{5}$$

Объединяя (3), (4), (5) приходим к (2). □

§6. Интегрирование интеграла, зависящего от параметра

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть $f(x,t)$ — функция, определенная в прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$ и непрерывна в нем, как функция двух переменных. Тогда*

$$\int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,t)dx\right) dt = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,t)dt\right) dx. \tag{1}$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что поскольку $f(x,t)$ непрерывна по совокупности переменных, то каждый из интегралов, стоящих в круглых скобках, является функцией, непрерывной по соответствующему параметру. Это вытекает из теоремы о непрерывности интеграла по параметру. Пусть $\tau \in [c,d]$— произвольное число. Покажем, что справедливо более общее равенство

$$\int_c^\tau \left(\int_a^b f(x,t)dx \right) dt = \int_a^b \left(\int_c^\tau f(x,t)dt \right) dx. \tag{2}$$

Положим

$$\int_a^b f(x,t)dx = \Phi(t).$$

Поскольку $\Phi(t)$ непрерывна на $[c,d]$, то

$$\left(\int_c^\tau \Phi(t)dt \right)'_\tau = \Phi(\tau) = \int_a^b f(x,\tau)dx. \tag{3}$$

Обозначим через

$$\Psi(x,\tau) = \int_c^\tau f(x,t)dt.$$

Функция $\Psi(x,\tau)$ непрерывна по x для всех $\tau \in [c,d]$ и ее производная

$$\Psi'_\tau(x,\tau) = f(x,\tau)$$

– непрерывна в прямоугольнике, как функция двух переменных. Поэтому на основании теоремы о дифференцировании под знаком интеграла (правило Лейбница), имеем

$$\frac{d}{d\tau} \int_a^b \Psi(x,\tau)dx = \int_a^b \Psi'_\tau(x,\tau)dx = \int_a^b f(x,\tau)dx. \tag{4}$$

Из (3), (4) заключаем, что

$$\frac{d}{d\tau} \int_c^\tau \Phi(t)dt = \frac{d}{d\tau} \int_a^b \Psi(x,\tau)dx.$$

Следовательно, для всех $\tau \in [c,d]$ выполнено

$$\int_c^\tau \Phi(t)dt = \int_a^b \Psi(x,\tau)dx + const. \tag{5}$$

Поскольку при $\tau = c$ каждый из интегралов в (5) равен нулю, то и $const = 0$. Тем самым

$$\int\limits_c^\tau \Phi(t)dt = \int\limits_a^b \Psi(x,\tau)dx.$$

подставляя в данное равенство значения функций Φ и Ψ, убеждаемся в справедливости (2). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ (об обозначениях). Обозначим

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)dy \right) dx \equiv \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Используя данное обозначение, равенство (1) можно переписать в виде

$$\int\limits_c^d dt \int\limits_a^b f(x,t)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,t)dt.$$

Данные интегралы принято называть *повторными интегралами.*

Глава 18

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

§1. Понятие равномерной сходимости несобственного интеграла по бесконечному промежутку

Пусть $f(x,y)$ — функция двух переменных, определенная на декартовом произведении $[a,\infty)\times Y$, т. е для любого фиксированного $x \in [a,\infty)$ ее областью определения как функции переменной y является множество Y, и для любого фиксированного $y \in Y$ ее областью определения как функции переменной x является $[a,\infty)$. Предположим, что при каждом $y \in Y$ существует несобственный интеграл

$$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx, \tag{1}$$

т.е.

$$I(y) = \lim_{A\to\infty} F(A,y),$$

где

$$F(A,y) = \int\limits_a^A f(x,y)dx. \tag{2}$$

Обратим внимание, что интеграл $F(A,y)$ является функцией от A и y, причем при любом фиксированном y и $A\to\infty$ имеет пределом $I(y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Говорят, что несобственный интеграл (1) сходится равномерно на множестве Y (относительно параметра y), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое A_0, что для всех $A > A_0$ и любого $y \in Y$ выполнено

$$\left|\int\limits_a^\infty f(x,y)dx - \int\limits_a^A f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

Иначе, если стремление $F(A,y)$ к $I(y)$ при $A \to \infty$ происходит равномерно относительно y в области Y, то интеграл $I(y)$ называют равномерно сходящимся на Y.

ЗАМЕЧАНИЕ. Несобственный интеграл (1) сходится равномерно на множестве Y тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое A_0, что для всех $A > A_0$ и любого $y \in Y$ выполнено

$$\left|\int\limits_A^\infty f(x,y)dx\right| < \varepsilon.$$

ПРИМЕР 1. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^\infty ye^{-xy}dx. \tag{3}$$

Покажем, что данный несобственный интеграл сходится для всех $y \in [0,\infty)$. Действительно, полагая

$$xy = t, \quad dt = ydx,$$

имеем

$$\int\limits_0^\infty ye^{-xy}dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_0^A ye^{-xy}dx =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\int\limits_0^{Ay} e^{-t}dt = \lim_{A\to\infty}[-\,e^{-t}]\Big|_0^{Ay} =$$

$$= \lim_{A\to\infty}[1 - e^{-Ay}] = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad y > 0, \\ 0, & \text{при} \quad y = 0. \end{cases}$$

Отметим попутно следующий достаточно интересный факт. Функция

$$I(y) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad y > 0, \\ 0, & \text{при} \quad y = 0, \end{cases}$$

может быть задана единой формулой

$$I(y) = \int\limits_0^\infty ye^{-xy}dx,$$

т.е. одна и та же функция $I(y)$ оказывается заданной с помощью двух разных выражений.

Покажем, что несобственный интеграл (3) сходится равномерно на любом полуинтервале $[\varepsilon_0, \infty)$, где $\varepsilon_0 > 0$ — фиксированное число. Отметим, что

$$F(A, y) = \int\limits_0^A ye^{-xy}dx = (1 - e^{-Ay}).$$

Требуется доказать, что $F(A, y)$ стремится равномерно на $[\varepsilon_0, \infty)$ к функции

$$I(y) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad y > 0, \\ 0, & \text{при} \quad y = 0. \end{cases}$$

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и будем искать $A(\varepsilon)$ такое, чтобы для любых $A > A(\varepsilon)$ и $y \in [\varepsilon_0, \infty)$ было выполнено

$$|F(A, y) - I(y)| < \varepsilon,$$

или

$$|1 - e^{-Ay} - 1| = e^{-Ay} < \varepsilon.$$

Поскольку функция e^{-Ay} монотонно убывает при возрастании y, то для справедливости последнего неравенства достаточно чтобы было выполнено

$$e^{-A\varepsilon_0} < \varepsilon.$$

Отсюда находим $A(\varepsilon)$, такое, что

$$-A\varepsilon_0 < ln\varepsilon,$$

или

$$A\varepsilon_0 > ln\frac{1}{\varepsilon},$$

что эквивалентно

$$A > \frac{1}{\varepsilon_0}ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Таким образом можно выбрать число

$$A(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon_0}ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Тем самым равномерная сходимость несобственного интеграла (3) на $[\varepsilon_0, \infty)$ доказана.

Покажем, что несобственный интеграл (3) сходится неравномерно на всяком отрезке $[0, \varepsilon]$ и, следовательно, сходится неравномерно на всем промежутке $[0, \infty)$.

Предположим противное, т.е. $F(A, y) \to I(y)$ равномерно на $[0, \varepsilon]$ при $A \to \infty$. Поскольку все $F(A, y)$ непрерывны по y на $[0, \varepsilon]$, то предельная функция $I(y)$ должна оказаться непрерывной на $[0, \varepsilon]$. В результате получили противоречие. □

§2. Критерий Коши и достаточный признак равномерной сходимости несобственного интеграла

ТЕОРЕМА 2.1 (критерий Коши). *Для того чтобы несобственный интеграл*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx \tag{1}$$

сходился равномерно на множестве Y необходимо и достаточно чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $A(\varepsilon)$ такое, что для всех $A', A'' > A(\varepsilon)$ и всех $y \in Y$ было выполнено

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x, y)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Равномерная сходимость интеграла (1) на Y эквивалентна равномерной сходимости на Y функции

$$F(A, y) = \int_a^A f(x, y)dx$$

при $A \to \infty$. Применяя критерий Коши равномерной сходимости семейства функций, зависящих от параметра, и пользуясь равенством

$$\left| \int_a^{A'} f(x, y)dx - \int_a^{A''} f(x, y)dx \right| = \left| \int_{A'}^{A''} f(x, y)dx \right|,$$

получаем требуемое. □

ТЕОРЕМА 2.2. *Предположим, что существует функция $\varphi(x)$ такая, что для всех $y \in Y$ и всех $x \geq a$ выполнено*

$$|f(x,y)| \leq \varphi(x),$$

а несобственный интеграл

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx < \infty. \tag{2}$$

Тогда несобственный интеграл (1) сходится равномерно на множестве Y.

Доказательство. Утверждение сразу следует из критерия Коши равномерной сходимости несобственного интеграла (1), критерия Коши сходимости несобственного интеграла (2) и неравенства

$$|\int_{A'}^{A''} f(x,y)dx| \leq \left|\int_{A'}^{A''} \varphi(x)dx\right|.$$

□

ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях теоремы говорят, что несобственный интеграл (1) мажорируется сходящимся интегралом (2).

ПРИМЕР 1. Несобственный интеграл

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{k^2 + x^2} dx,$$

где $k \neq 0$, $\quad a \in (-\infty, \infty)$ сходится равномерно относительно параметра a на $(-\infty, \infty)$, поскольку этот интеграл мажорируется сходящимся интегралом

$$\int_0^\infty \frac{dx}{k^2 + x^2}.$$

□

§3. Понятие равномерной сходимости интегралов с конечными пределами

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $f(x,y)$ — функция двух переменных, определенная при каждом $y \in Y$ как функция x

всюду на $[a,b]$ за возможным исключением точки $x_0 \in [a,b]$. Предположим, что для любого $y \in Y$ существует

$$I(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx \tag{1}$$

понимаемый в собственном либо несобственном смысле. Говорят, что (1) сходится равномерно на Y при $x = x_0$, если каждый из интегралов

$$I_1(\tau, y) = \int\limits_{x_0+\tau}^b f(x,y)dx$$

и

$$I_2(\tau, y) = \int\limits_a^{x_0-\tau} f(x,y)dx,$$

сходится равномерно на Y при $\tau \to +0$ к

$$I_1(y) = \int\limits_{x_0}^b f(x,y)dx$$

и

$$I_2(y) = \int\limits_a^{x_0} f(x,y)dx$$

соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как правило, нас будет интересовать равномерная сходимость интеграла (1) на Y при $x = x_0$, когда x_0 является особой точкой для интеграла (1). Однако определение содержательно и в случае, когда точка x_0 не является особой точкой.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{y}{x^2+y^2}dx.$$

Заметим, что для всех $y \in [0,h]$ данный интеграл существует как собственный. Однако для указанного множества изменения y этот интеграл не будет сходиться равномерно при $x = 0$.

Действительно

$$I(y) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad y = 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{y}, & \text{при} \quad y \neq 0, \end{cases}$$

а

$$I(\tau, y) = \int\limits_{\tau}^{1} \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad y = 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{y} - \operatorname{arctg} \frac{\tau}{y}, & \text{при} \quad y \neq 0. \end{cases}$$

Семейство функций $I(\tau, y)$ сходится к $I(y)$ неравномерно на $[0, h]$, так как неравенство

$$\operatorname{arctg} \frac{\tau}{y} < \varepsilon$$

нельзя удовлетворить одновременно для всех значений $y > 0$, если $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Действительно, сколь бы малое τ мы не взяли, при достаточно малых y левая часть указанного неравенства будет близка к $\frac{\pi}{2}$. $\square$

§4. Предельный переход по параметру под знаком несобственного интеграла

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, определенная на множестве $[a, \infty) \times Y$ и обладающая следующими свойствами:*
α) для всех $y \in Y$ функция $f(x, y)$ непрерывна по переменной x;
β) при $y \to y_0$ функция $f(x, y) \to \varphi(x)$ равномерно по x на любом $[a, A]$;
γ) интеграл

$$\int\limits_{a}^{\infty} f(x, y) dx \tag{1}$$

сходится равномерно относительно $y \in Y$. Тогда

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_{a}^{\infty} f(x, y) dx = \int\limits_{a}^{\infty} \varphi(x) dx. \tag{2}$$

Доказательство. Покажем вначале, что функция $\varphi(x)$ интегрируема на $[a, \infty)$. Поскольку несобственный интеграл (1) сходится равномерно относительно $y \in Y$, то пользуясь критерием Коши получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует

$A_0(\varepsilon)$ такое, что для всех $A', A'' > A_0(\varepsilon)$ и всех $y \in Y$ выполнено

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

Но $f(x,y)$ сходится к $\varphi(x)$ равномерно на $[A', A'']$ при $y \to y_0$, и по теореме о предельном переходе под знаком собственного интеграла имеем

$$\left| \int_{A'}^{A''} \varphi(x)dx \right| = \left| \lim_{y \to y_0} \int_{A'}^{A''} f(x,y)dx \right| \leq \varepsilon.$$

Пользуясь критерием Коши о сходимости несобственного интеграла заключаем о сходимости интеграла

$$\int_a^{\infty} \varphi(x)dx. \tag{3}$$

Далее, для всех $A > a$ имеем

$$\left| \int_a^{\infty} f(x,y)dx - \int_a^{\infty} \varphi(x)dx \right| \leq \left| \int_a^{A} f(x,y)dx - \int_a^{A} \varphi(x)dx \right| +$$
$$+ \left| \int_A^{\infty} f(x,y)dx - \int_A^{\infty} \varphi(x)dx \right| \leq \left| \int_a^{A} f(x,y)dx - \int_a^{A} \varphi(x)dx \right| +$$
$$+ \left| \int_A^{\infty} f(x,y)dx \right| + \left| \int_A^{\infty} \varphi(x)dx \right|. \tag{4}$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Из равномерной сходимости несобственного интеграла (1) следует существование такого $A_1(\varepsilon)$, что для всех $A > A_1(\varepsilon)$ и всех $y \in Y$ выполнено

$$\left| \int_A^{\infty} f(x,y)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Из сходимости несобственного интеграла (3) следует существование такого $A_2(\varepsilon)$, что для всех $A > A_2(\varepsilon)$ выполнено

$$\left| \int_A^{\infty} \varphi(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Зафиксируем произвольно $A > \max\{A_1(\varepsilon), A_2(\varepsilon)\}$. Поскольку по условию $f(x,y)$ сходится к $\varphi(x)$ при $y \to y_0$ равномерно на $[a, A]$, то существует такое $\delta(\varepsilon)$, что для всех $y \neq y_0$: $|y - y_0| < \delta(\varepsilon)$ выполнено

$$\left| \int\limits_a^A f(x,y)dx - \int\limits_a^A \varphi(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Объединяя (5), (6), (7), на основании (4), заключаем о существовании такого $\delta(\varepsilon)$, что для всех $y \neq y_0$: $|y - y_0| < \delta(\varepsilon)$ выполнено

$$\left| \int\limits_a^\infty f(x,y)dx - \int\limits_a^\infty \varphi(x)dx \right| < \varepsilon.$$

таким образом равенство (2) доказано. □

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите теорему 4.1 для случая $y_0 = \pm\infty$.

ПРИМЕР 1. Покажем, что условие γ) теоремы существенно даже если условие β) заменить более жестким требованием: $f(x,y) \to \varphi(x)$ равномерно на $[a, \infty)$. Рассмотрим функцию

$$f(x,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}, & \text{при} \quad x \le \tau, \\ 0, & \text{при} \quad x > \tau. \end{cases}$$

При $\tau \to \infty$ функция $f(x,\tau) \to 0$ равномерно на $[0, \infty)$. Однако для всех τ выполнено

$$\int\limits_0^\infty f(x,\tau)dx = \int\limits_0^\tau \frac{1}{\tau}dx = 1.$$

Таким образом,

$$\lim_{\tau\to\infty} \int\limits_0^\infty f(x,\tau)dx \neq \int\limits_0^\infty \lim_{\tau\to\infty} f(x,\tau)dx.$$

Ясно, что $f(x,\tau)$ может быть сделана и непрерывной по x при каждом $\tau \in (0, \infty)$, с сохранением указанного свойства. □

ТЕОРЕМА 4.2. *Пусть $f(x, y)$ определена и непрерывна как функция двух переменных на полуполосе $[a, \infty) \times [c, d]$. Если интеграл*

$$\int_a^\infty f(x, y)dx \tag{8}$$

сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$, то он является непрерывной по параметру $y \in [c, d]$ функцией.

Доказательство. Фиксируем произвольно $y_0 \in [c, d]$ и полагаем

$$\varphi(x) = f(x, y_0).$$

Проверим выполнение условий теоремы 4.1.

Во-первых, функция $f(x, y)$ непрерывна по x для всех $y \in [c, d]$.

Во-вторых, для всех $A > a$ функция $f(x, y)$ непрерывна как функция двух переменных на прямоугольнике $[a, A] \times [c, d]$ и, стало быть, $f(x, y) \to \varphi(x)$ при $y \to y_0$ равномерно относительно x на $[a, A]$ (см. лемму 3.1 параграфа "Предельный переход под знаком интеграла" предыдущей главы).

В-третьих интеграл (8) сходится равномерно по условию.

Тем самым на основании теоремы 4.1 заключаем

$$\lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty f(x, y_0)dx,$$

что и требовалось доказать. □

ТЕОРЕМА 4.3 (аналог теоремы Дини). *Пусть $f(x, y)$ определена и непрерывна как функция двух переменных на множестве $[a, \infty) \times [c, d]$. Предположим, что $f(x, y) \geq 0$ и несобственный интеграл*

$$I(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx \tag{9}$$

есть непрерывная на $[c, d]$ функция. Тогда интеграл (9) сходится равномерно относительно $y \in [c, d]$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(A,y) = \int\limits_a^A f(x,y)dx.$$

Данная функция непрерывна как функция переменной y, монотонно возрастает с ростом A и стремится к непрерывной функции $I(y)$ при $A \to \infty$. По теореме Дини для семейства функций, зависящих от параметра, $F(A,y) \to I(y)$ равномерно на $[c,d]$, что и требовалось доказать. $\square$

§5. Интегрируемость несобственного интеграла по параметру (случай конечных пределов интегрирования)

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть $f(x,y)$ — функция двух переменных, определенная и непрерывная в полуполосе $[a,\infty) \times [c,d]$. Если интеграл*

$$\int\limits_a^\infty f(x,y)dx \tag{1}$$

сходится равномерно относительно y на $[c,d]$, то

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,y)dy. \tag{2}$$

Доказательство. Для всех $A > a$ имеем

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_a^\infty f(x,y)dx = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^A f(x,y)dx + \int\limits_A^\infty f(x,y)dx \right) dy =$$

$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_a^A f(x,y)dx + \int\limits_c^d dy \int\limits_A^\infty f(x,y)dx =$$

$$= \int\limits_a^A dx \int\limits_c^d f(x,y)dy + \int\limits_c^d dy \int\limits_A^\infty f(x,y)dx. \tag{3}$$

Покажем, что

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_A^\infty f(x,y)dx \to 0.$$

Действительно, так как несобственный интеграл (1) сходится равномерно относительно y, то функция

$$F(A,y) = \int\limits_a^A f(x,y)dx$$

при $A \to \infty$ сходится равномерно к функции

$$I(y) = \int\limits_a^\infty f(x,y)dx.$$

Это означает, что разность

$$I(y) - F(A,y) = \int\limits_A^\infty f(x,y)dx \to 0$$

при $A \to \infty$ равномерно относительно y на $[c,d]$, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ существует $A(\varepsilon)$ такое, что для любого $A > A(\varepsilon)$ и для всех $y \in [c,d]$ выполнено

$$\left| \int\limits_A^\infty f(x,y)dx \right| < \varepsilon.$$

Следовательно для любого $A > A(\varepsilon)$ выполнено

$$\left| \int\limits_c^d dy \int\limits_A^\infty f(x,y)dx \right| < \varepsilon(d-c).$$

Переходя к пределу при $A \to \infty$ видим, что правая часть соотношения (3) стремится к

$$\int\limits_a^\infty dx \int\limits_c^d f(x,y)dy,$$

что и требовалось доказать. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f(x, y)$ – непрерывная неотрицательная функция двух переменных, заданная на полуполосе $[a, \infty) \times [c, d]$. Если несобственный интеграл (1) непрерывен по y, то справедливо равенство (2).
Доказательство следует непосредственно из аналога теоремы Дини, приведенного в предыдущем пункте, и данной теоремы.

§6. Интегрирование несобственного интеграла по параметру (случай бесконечного предела интегрирования)

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть $f(x, y)$ — непрерывная, неотрицательная функция двух переменных, определенная на $[a, \infty) \times [b, \infty)$. Предположим, что каждый из интегралов*

$$\int\limits_a^\infty f(x, y)dx, \quad \int\limits_b^\infty f(x, y)dy \tag{1}$$

является непрерывной функцией соответствующего параметра. Тогда, если существует хотя бы один из двух повторных интегралов

$$\int\limits_b^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x, y)dx, \quad \int\limits_a^\infty dx \int\limits_b^\infty f(x, y)dy, \tag{2}$$

то существует и второй и эти интегралы равны между собой.

Доказательство. Предположим, что существует первый из интегралов (2). Тогда для любого $A > a$ имеем

$$\int\limits_b^\infty dy \int\limits_a^\infty f(x, y)dx = \int\limits_b^\infty dy \int\limits_a^A f(x, y)dx + \int\limits_b^\infty dy \int\limits_A^\infty f(x, y)dx.$$

Поскольку второй из интегралов (1) непрерывен по x, то пользуясь следствием к предыдущей теореме, получаем

$$\int\limits_b^\infty dy \int\limits_a^A f(x, y)dx = \int\limits_a^A dx \int\limits_b^\infty f(x, y)dy$$

и в силу предыдущего равенства приходим к соотношению

$$\int_b^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)dx = \int_a^A dx \int_b^\infty f(x,y)dy + \int_b^\infty dy \int_A^\infty f(x,y)dx. \qquad (3)$$

Как и при доказательстве предыдущей теоремы нам достаточно теперь установить, что второй из интегралов в правой части (3) стремится к 0 при $A \to \infty$. Это следует из равномерной сходимости первого из интегралов (1), неотрицательности $f(x,y)$ и сходимости первого из повторных интегралов (2). Действительно, рассматривая интеграл

$$F(A,y) = \int_A^\infty f(x,y)dx,$$

отметим следующие его свойства. Во-первых, для всех $A > a$ функция $F(A,y)$ есть непрерывная функция переменной $y \in [b,\infty)$. Это ясно поскольку она является разностью двух непрерывных функций

$$F(A,y) = \int_a^\infty f(x,y)dx - \int_a^A f(x,y)dx.$$

Во-вторых, при $A \to \infty$ по обобщенной теореме Дини $F(A,y) \to 0$ равномерно относительно y на любом отрезке $[b,B]$.

В-третьих, несобственный интеграл

$$\int_b^\infty F(A,y)dy$$

сходится равномерно относительно параметра $A \in [a,\infty)$, поскольку мажорируется сходящимся интегралом:

$$\int_b^\infty F(A,y)dy \le \int_b^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)dx.$$

В результате, выполнены все требования теоремы о предельном переходе под знаком несобственного интеграла и мы получаем

$$\lim_{A\to\infty} \int_b^\infty F(A,y)dy = \lim_{A\to\infty} \int_b^\infty dy \int_A^\infty f(x,y)dx = 0.$$

Таким образом, второй из интегралов правой части (3) стремится к 0 при $A \to \infty$ и, переходя к пределу при $A \to \infty$, выводим, что второй из несобственных интегралов в (2) существует и равен первому несобственному интегралу в (2). $\square$

§7. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть $f(x,y)$ — функция двух переменных, определенная на $[a,\infty)\times[c,d]$ и непрерывная по x на $[a,\infty)$ для любого $y\in[c,d]$. Предположим, что существует производная $f'_y(x,y)$ непрерывная по совокупности переменных на полуполосе $[a,\infty)\times[c,d]$, и, кроме того, интеграл*

$$I(y)=\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx$$

сходится при всех $y\in[c,d]$, а интеграл

$$\Phi(y)=\int\limits_a^{\infty} f'_y(x,y)dx$$

сходится равномерно относительно $y\in[c,d]$. Тогда для всех $y\in[c,d]$ справедлива формула:

$$I'(y)=\Phi(y).$$

Доказательство. Для всех $y\in[c,d]$ по теореме 5.1 имеем:

$$\int\limits_c^{y} dy\int\limits_a^{\infty} f'_y(x,y)dx=\int\limits_a^{\infty} dx\int\limits_c^{y} f'_y(x,y)dy=\int\limits_a^{\infty}[f(x,y)-f(x,c)]dx=$$

$$=\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx-\int\limits_a^{\infty} f(x,c)dx.$$

Дифференцируя обе части данного равенства по y находим

$$\int\limits_a^{\infty} f'_y(x,y)dx=\frac{d}{dy}\int\limits_a^{\infty} f(x,y)dx.$$

Здесь мы воспользовались также непрерывностью левого интеграла как функции y, вытекающей из теоремы 5.1. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Соответствующие утверждения о несобственных интегралах с конечными пределами интегрирования (непрерывность по параметру, изменение порядка интегрирования, дифференцирование по параметру) сформулируйте самостоятельно.

ПРИМЕР 1 (интеграл вероятностей). Вычислим несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Если попытаться вычислить этот интеграл путем поиска первообразной, то данный путь тупиковый, поскольку первообразная в элементарных функциях не выражается. Прежде всего заметим, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2I.$$

Положим $x = ut, \quad dx = udt$, где $u > 0$ — параметр. Тогда

$$I = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-u^2t^2} udt.$$

Умножая обе части равенства на $e^{-u^2}du$ и интегрируя, получаем:

$$\int\limits_{0}^{\infty} Ie^{-u^2} du = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-u^2} \left(\int\limits_{0}^{\infty} e^{-u^2t^2} udt\right) du.$$

Однако

$$\int\limits_{0}^{\infty} Ie^{-u^2} du = I\int\limits_{0}^{\infty} e^{-u^2} du = I^2.$$

Таким образом, получаем

$$I^2 = \int\limits_{0}^{\infty} ue^{-u^2} \left(\int\limits_{0}^{\infty} e^{-u^2t^2} dt\right) du = \int\limits_{0}^{\infty} du \int\limits_{0}^{\infty} ue^{-u^2(t^2+1)} dt. \quad (1)$$

Если бы удалось нам поменять местами порядок интегрирования в правой части (1), то мы бы пришли к равенству

$$I^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty u e^{-u^2(t^2+1)} du. \tag{2}$$

Далее заметим, что

$$\int_0^\infty u e^{-u^2(t^2+1)} du = \left| u^2(t^2+1) = \tau, \quad d\tau = 2u(t^2+1)du \right| =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\tau} d\tau}{2(t^2+1)} = \frac{1}{2(t^2+1)} \int_0^\infty e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{2(t^2+1)}.$$

Пользуясь (2) выводим

$$I^2 = \int_0^\infty \frac{dt}{2(t^2+1)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

и, тем самым,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Нам остается обосновать переход от (1) к (2), связанный с изменением порядка интегрирования.

Попробуем воспользоваться теоремой 6.1, что кажется наиболее естественным. Проверим выполнение ее условий. Обозначим

$$f(t, u) = e^{-u^2(t^2+1)} u.$$

Во-первых, эта функция непрерывна как функция двух переменных на $[0, \infty) \times [0, \infty)$.

Во-вторых, интеграл

$$\int_0^\infty u e^{-u^2(t^2+1)} du = \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2}$$

непрерывен по переменной t.

Однако интеграл

$$\int\limits_0^\infty ue^{-u^2(t^2+1)}dt = e^{-u^2}u\int\limits_0^\infty e^{-u^2t^2}dt = \begin{cases} e^{-u^2}I, & \text{при} \quad u>0, \\ 0, & \text{при} \quad u=0. \end{cases}$$

является разрывной функцией в точке $u = 0$. Поэтому воспользоваться теоремой 6.1 напрямую нельзя. Применим эту теорему к множеству $[u_0,\infty)\times[0,\infty)$ и перейдем к пределу при $u_0\to +0$. В результате получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Заметим, что существование одного из повторных интегралов, что необходимо для применения теоремы 6.1, нами было доказано (мы его просто посчитали). □

§8. Интеграл Эйлера первого рода

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. B("Бета")-функцией (интегралом Эйлера первого рода) называется функция

$$B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,$$

где $a>0, \quad b>0$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите, что данный интеграл сходится тогда и только тогда, когда $a>0$ и $b>0$.

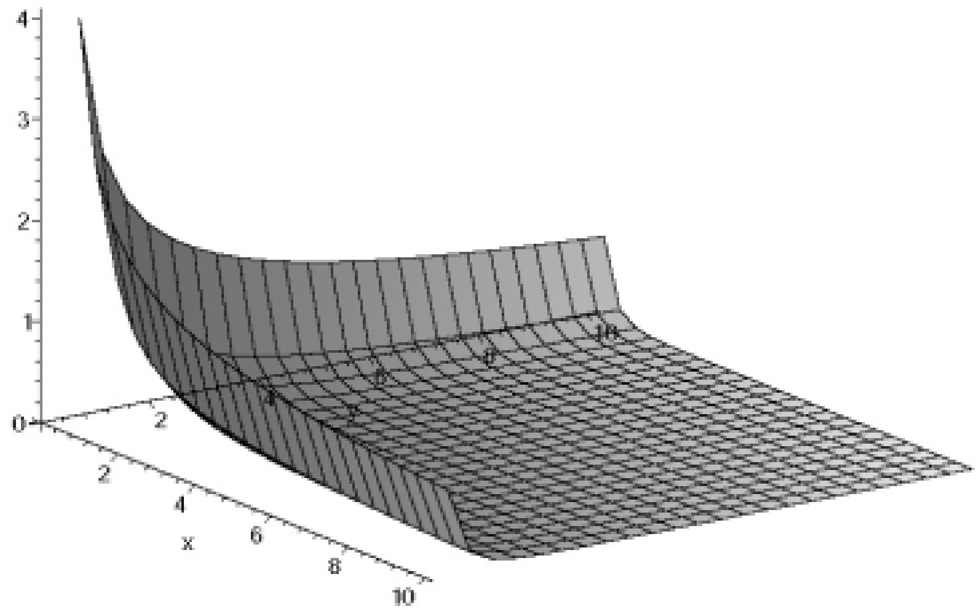
ЗАМЕЧАНИЕ. При $a<1$, либо при $b<1$, данный интеграл является несобственным интегралом, зависящим от параметра.

ТЕОРЕМА 8.1. *Для любых $a>0, \quad b>0$ справедливо равенство*

$$B(a,b) = B(b,a).$$

Доказательство.

$$B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = |1-x=y, -dx=dy| =$$



$$= -\int_1^0 (1-y)^{a-1} y^{b-1} dy = \int_0^1 y^{b-1}(1-y)^{a-1} dy = B(b,a).$$

$\square$

ТЕОРЕМА 8.2. *Для любых* $a > 0, \quad b > 1$ *справедливо равенство*

$$B(a,b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1).$$

Доказательство.

$$B(a,b) = \int_0^1 (1-x)^{b-1} d\left(\frac{x^a}{a}\right) = \frac{x^a}{a}(1-x)^{b-1}\Big|_0^1 + \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^a(1-x)^{b-2}dx =$$

$$= \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}(1-(1-x))dx =$$

$$= \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-2}dx - \frac{b-1}{a}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx =$$

$$= \frac{b-1}{a}B(a,b-1) - \frac{b-1}{a}B(a,b).$$

Таким образом

$$\left(1 + \frac{b-1}{a}\right)B(a,b) = \frac{b-1}{a}B(a,b-1),$$

откуда получаем нужное □

ТЕОРЕМА 8.3. *Для любых $a > 0$ и $n \in \mathbf{N}$ справедливо равенство*

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1}\frac{n-2}{a+n-2}\cdots\frac{1}{a+1}\frac{1}{a} = \frac{(n-1)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(a+k-1)}.$$

Доказательство. Применяя последовательно теорему 8.2 получаем:

$$B(a,n) = \frac{n-1}{a+n-1}\frac{n-2}{a+n-2}B(a,n-2) = ...$$

$$... = \frac{n-1}{a+n-1}\frac{n-2}{a+n-2}\cdots B(a,1).$$

Однако

$$B(a,1) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^0dx = \frac{1}{a},$$

откуда получаем нужное. □

ТЕОРЕМА 8.4. *Для любых натуральных m, n справедливо равенство*

$$B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(n+m-1)!}.$$

Доказательство. Согласно теореме 8.3 имеем:

$$B(m,n) = \frac{(n-1)!}{\prod\limits_{k=1}^{n}(m+k-1)} = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(n+m-1)!}.$$

□

ТЕОРЕМА 8.5. *Для любых $a > 0$, $b > 0$ справедливо равенство*

$$B(a,b) = \int\limits_0^{\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy.$$

Доказательство. Мы имеем

$$B(a,b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \left| x = \frac{y}{1+y}, \quad dx = \frac{1}{(1+y)^2}dy \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{a-1} (1 - \frac{y}{1+y})^{b-1} \frac{dy}{(1+y)^2} = \int\limits_0^{\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy.$$

□

УПРАЖНЕНИЕ 2. Из предыдущей теоремы следует, что при $0 < a < 1$

$$B(a, 1-a) = \int\limits_0^{\infty} \frac{y^a}{1+y} dy.$$

Попробуйте доказать, что

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

§9. Интеграл Эйлера второго рода

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Γ("Гамма")-функцией (интегралом Эйлера второго рода) называется функция

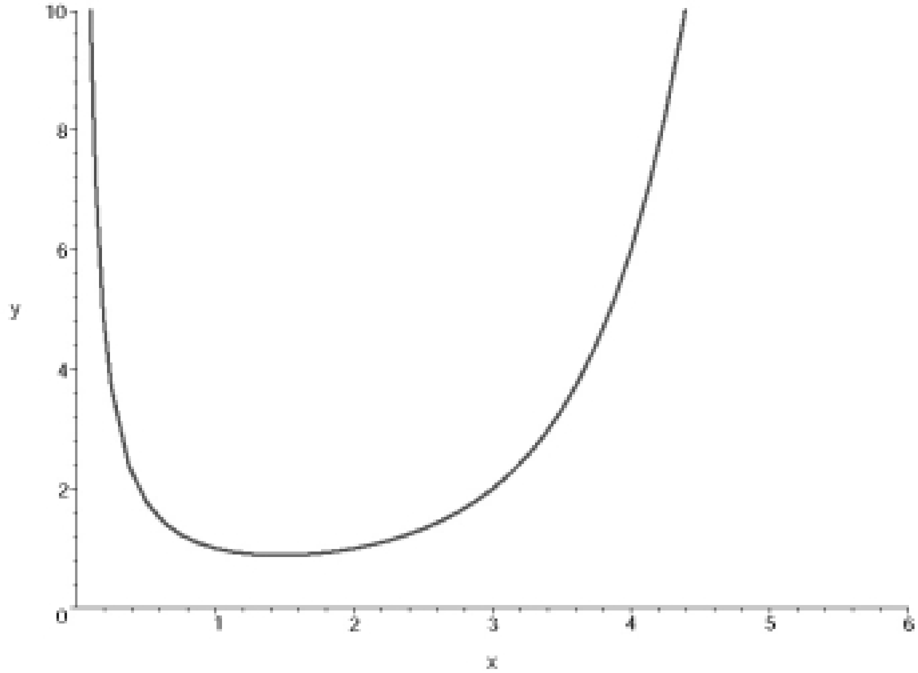
$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx,$$

где $a > 0$.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите, что данный интеграл сходится тогда и только тогда, когда $a > 0$.

ТЕОРЕМА 9.1. *Для всех $a > 0$ справедливо равенство*

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$



Доказательство.

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = \int\limits_0^\infty e^{-x}d(\frac{x^a}{a}) = \frac{x^a}{a}e^{-x}|_0^\infty + \int\limits_0^\infty \frac{x^a}{a}e^{-x}dx =$$

$$= \frac{1}{a}\int\limits_0^\infty x^a e^{-x}dx = \frac{1}{a}\Gamma(a+1).$$

□

ТЕОРЕМА 9.2. *Для всех натуральных n справедливо равенство*

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Доказательство.

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = ... = n(n-1)...1\Gamma(1).$

Учитывая, что

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^\infty e^{-x}dx = -\,e^{-x}\Big|_0^\infty = 1,$$

получаем требуемое. □

ТЕОРЕМА 9.3. *Для любых $a > 0, \quad b > 0$ справедливо равенство*

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Доказательство. Подстановкой $x = ty, t > 0$ преобразуем

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = \int_0^\infty (ty)^{a-1}e^{-ty}tdy = t^a \int_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}dy,$$

или

$$\frac{\Gamma(a)}{t^a} = \int_0^\infty y^{a-1}e^{-ty}dy.$$

Данное равенство верно для всех $a > 0$ и всех $t > 0$. Полагая здесь $a = a_1 + b, \quad t = t_1 + 1$, получаем:

$$\frac{\Gamma(a_1+b)}{(t_1+1)^{a_1+b}} = \int_0^\infty y^{a_1+b-1}e^{-(t_1+1)y}dy$$

или

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(t+1)^{a+b}} = \int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}dy. \qquad (1)$$

Умножая обе части данного равенства на t^{a-1} и интегрируя, находим

$$\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(t+1)^{a+b}}dt = \int_0^\infty \left(t^{a-1}\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}dy\right)dt.$$

Но в силу теоремы 8.5 предыдущего пункта

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(t+1)^{a+b}}dt = B(a,b)$$

и, следовательно,

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int_0^\infty \left(t^{a-1}\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}dy\right)dt.$$

Переставляя интегралы по y и по t, находим

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int\limits_0^\infty y^{a+b-1}dy \int\limits_0^\infty t^{a-1}e^{-(t+1)y}dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}dy \int\limits_0^\infty t^{a-1}e^{-ty}dt.$$

Далее

$$\int\limits_0^\infty t^{a-1}e^{-ty}dt = |ty = x, \quad y > 0, \quad ydt = dx| =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\frac{x}{y}\right)^{a-1} e^{-x}\frac{dx}{y} = \frac{1}{y^a}\int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx = \frac{\Gamma(a)}{y^a}. \tag{2}$$

Подставляя данное выражение в предыдущий интеграл, приходим к равенству

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \int\limits_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}\frac{\Gamma(a)}{y^a}dy =$$

$$= \Gamma(a)\int\limits_0^\infty y^{b-1}e^{-y}dy = \Gamma(a)\Gamma(b),$$

и окончательно находим

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Для завершения доказательства нам осталось обосновать перемену порядка интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_0^\infty t^{a-1}dt \int\limits_0^\infty y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}dy.$$

Сделаем это сначала в предположении $a > 1, \quad b > 1$. Для функции

$$f(t,y) = t^{a-1}y^{a+b-1}e^{-(t+1)y}$$

выполнены все условия теоремы 6.1.

Во-первых подынтегральная функция $f(t, y)$ – неотрицательная и непрерывная.

Во-вторых интеграл

$$\int_0^\infty t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy = t^{a-1} \int_0^\infty y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dy =$$

$$= \Gamma(a+b) \frac{t^{a-1}}{(t+1)^{a+b}},$$

непрерывен по t на множестве $t \geq 0$. Заметим, что второе равенство здесь следует из (1).

В-третьих, интеграл

$$\int_0^\infty t^{a-1} y^{a+b-1} e^{-(1+t)y} dt = e^{-y} y^{a+b-1} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-ty} dt =$$

$$= e^{-y} y^{a+b-1} \frac{\Gamma(a)}{y^a}$$

непрерывен по y на множестве $y > 0$. Заметим, что второе равенство здесь следует из (2).

Кроме того, один из повторных интегралов сходится и мы его вычислили. Тем самым перестановка порядка интегрирования при $a > 1, b > 1$ определена и следовательно формула

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

полностью обоснована для $a > 1, b > 1$.

Пусть теперь $a > 0, b > 0$ — произвольны. По доказанному выше,

$$B(a+1, b+1) = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}. \tag{3}$$

Но

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad \Gamma(b+1) = b\Gamma(b),$$

и

$$\Gamma(a+b+2) = (a+b+1)(a+b)\Gamma(a+b).$$

Кроме того, в силу теоремы 8.2

$$B(a, b) = \frac{b-1}{a+b-1} B(a, b-1).$$

Отсюда

$$B(a+1, b+1) = \frac{b}{a+b+1} B(a+1, b) =$$

$$= \frac{b}{a+b+1} B(b, a+1) = \frac{b}{a+b+1} \frac{a}{a+b} B(a, b).$$

Таким образом, исходя из (3), получаем

$$B(a, b) \frac{b}{a+b} \frac{a}{a+b+1} = \frac{a\Gamma(a) b\Gamma(b)}{(a+b+1)(a+b)\Gamma(a+b)},$$

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

и утверждение доказано для всех $a > 0, \quad b > 0$. □

ТЕОРЕМА 9.4 (формула Лежандра[1]). *Для любых $a > 0$ справедливо равенство*

$$\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}} \Gamma(2a).$$

Доказательство. Если в интеграле

$$B(a, a) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1} dx = \int\limits_0^1 [\frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - x)^2]^{a-1} dx$$

сделать подстановку

$$\left| \frac{1}{2} - x = \frac{1}{2}\sqrt{t}, \quad -dx = \frac{dt}{4\sqrt{t}} \right|,$$

мы получим

$$B(a, a) = 2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} [\frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - x)^2]^{a-1} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int\limits_1^0 [\frac{1}{4} - \frac{t}{4}]^{a-1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \frac{1}{2^{2a-2}} \int\limits_0^1 (1-t)^{a-1} \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{2^{2a-1}} \int\limits_0^1 t^{\frac{-1}{2}} (1-t)^{a-1} dt = \frac{1}{2^{2a-1}} B(\frac{1}{2}, a).$$

[1] Лежандр Адриен Мари (18.9.1752 – 10.1.1833). Род. в Париже. Обосновал и развил теорию геодезических измерений. Получил ряд значительных результатов в области математического анализа, теории чисел, вариационном исчислении.

Таким образом,

$$B(a,a) = \frac{B(\frac{1}{2},a)}{2^{2a-1}}.$$

Заменяя здесь в обеих частях равенства функцию B ее выражением через Γ, находим

$$\frac{\Gamma^2(a)}{\Gamma(2a)} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(a)}{2^{2a-1}\Gamma(\frac{1}{2}+a)}.$$

Однако

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = \left| \sqrt{x} = \tau, d\tau = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}} \right| = 2\int\limits_0^\infty e^{\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}.$$

Поэтому

$$\Gamma(a)\Gamma(a+\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

$\square$

Глава 19

Преобразование Фурье

Дополнительная литература:

1) Л.Д. Кудрявцев, "Курс математического анализа", Т. 1–3, М.: Высшая школа, 1988.
2) Г. Бремерман, "Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье", М.: Мир, 1968.
3) П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский, "Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход", М.: Мир, 1976.

§1. Основные определения

Пусть $y = f(x)$ – периодическая функция с периодом T (т.е. длиной периода, равной T). Предположим, что $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица на периоде.

Раскладывая тогда $f(x)$ в ряд Фурье, имеем

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos k\omega_0 x + b_k \sin k\omega_0 x\right), \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (1)$$

где

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx, \quad a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos \frac{2\pi}{T} k\,x\,dx,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2\pi}{T} k\,x\,dx.$$

Воспользуемся формулой Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi.$$

Тогда

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right), \quad \sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right)$$

и

$$a_k\,\cos k\omega_0 x + b_k\,\sin k\omega_0 x =$$
$$= \frac{a_k}{2}\left(e^{ik\omega_0 x} + e^{-ik\omega_0 x}\right) + \frac{b_k}{2i}\left(e^{ik\omega_0 x} + e^{-ik\omega_0 x}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(a_k - i\,b_k)e^{ik\omega_0 x} + \frac{1}{2}(a_k + i\,b_k)e^{-ik\omega_0 x}.$$

Отсюда,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + i\,b_k)\,e^{ik\omega_0 x} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - i\,b_k)\,e^{ik\omega_0 x} =$$
$$= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,e^{ik\omega_0 x} + \sum_{k=1}^{\infty}\overline{c_k}\,e^{-ik\omega_0 x},$$

где обозначено

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{1}{2}(a_k - i\,b_k) = c_k, \quad \frac{1}{2}(a_k + i\,b_k) = \overline{c_k}.$$

Замечая теперь, что

$$c_k = |c_k|\,e^{i\arg c_k}, \quad \overline{c_k} = |c_k|\,e^{-i\arg c_k},$$

находим

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,e^{ik\omega_0 x + i\arg c_k} + \sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,e^{-ik\omega_0 x - i\arg c_k} =$$
$$= c_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|\,\cos(k\omega_0 x + \arg\,c_k), \tag{2}$$

или по-другому,

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\,e^{ik\omega_0 x}, \quad c_{-k} = \overline{c_k}. \tag{3}$$

Замечание. *Терминология теории колебаний:*

$$f(x) - \text{сигнал}\,;$$

$$a_0 = 2c_0 = \frac{1}{T}\int\limits_T f(x)\,dx - \text{среднее значение по периоду};$$

$$2c_k\,\cos(k\omega_0 x + \arg c_k) - k\text{-гармонические компоненты}$$

$$\text{с частотой } \frac{k}{T}, \quad \text{круговой частотой } \ k\omega_0 = \frac{2\pi k}{T},$$

$$\text{амплитудой } \ 2|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{и фазой } \ \arg c_k = -\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k}.$$

Разложение сигнала на сумму простых гармонических колебаний называется *гармоническим анализом функции* $f(x)$. Совокупность чисел c_k в этом разложении называются *спектром функции* f. Таким образом, липшицева периодическая функция имеет *дискретный* спектр.

Наводящие соображения. Посмотрим, что происходит при неограниченном увеличении периода T функции f. Положим

$$l = \frac{T}{2} \quad \text{и} \quad \alpha_k = k\frac{\pi}{l} = \frac{2\pi k}{T}.$$

На основании (3) можем записать

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k\, e^{ik\frac{\pi}{l}x} = \sum_{-\infty}^{+\infty}\left(c_k\frac{l}{\pi}\right)\, e^{ik\frac{\pi}{l}x}\,\frac{\pi}{l} =$$

$$= \frac{\pi}{l}\sum_{-\infty}^{+\infty}\left(c_k\frac{l}{\pi}\right)\, e^{i\alpha_k x}. \tag{4}$$

Заметим, что

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - i\,b_k) =$$

$$= \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\frac{2\pi k}{T}x\,dx - \frac{i}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi k}{T}x\,dx =$$

$$= \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)\left(\cos\frac{2\pi k}{T}x - i\,\sin\frac{2\pi k}{T}x\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} f(x)\,e^{-i\frac{2k\pi x}{T}}dx = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,e^{-i\alpha_k x}\,dx.$$

Отсюда,

$$c_k \frac{l}{\pi} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-l}^{l} f(x)\, e^{-i\alpha_k x} dx. \tag{5}$$

Предполагая, что $T = 2l \to +\infty$, приходим в пределе к рассмотрению произвольной, абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$. Введем вспомогательную функцию

$$c(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x} dx, \tag{6}$$

значения которой в точках $\alpha = \alpha_k$ "мало отличаются" от величины $c_k \frac{l}{\pi}$ в (5). В данном случае на основании (4) имеем

$$f(x) \approx \sum_{-\infty}^{+\infty} c(\alpha_k)\, e^{i\, \alpha_k x} \frac{\pi}{l},$$

где

$$\alpha_k = k\frac{\pi}{l}, \quad \alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\pi}{l}.$$

Полученная сумма напоминает интегральную сумму и при измельчении разбиения, происходящем при $T \to \infty$, получаем

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c(\alpha)\, e^{i\, \alpha x}\, d\alpha. \tag{7}$$

Данные рассуждения носят название "правдоподобных". Именно рассуждения такого типа чаще всего предваряют строгие математические доказательства. С помощью подобных рассуждений была выведена Фурье формула (7) для разложения функции f в "непрерывную" линейную комбинацию гармоник переменной частоты и фазы.

Дадим *точные определения.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функция

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\,\xi\, x} dx \tag{8}$$

называется преобразованием Фурье функции $y = f(x)$.

Подчеркнем, что интеграл (8) понимается в смысле главного значения по Коши, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)e^{-i\xi x}dx. \tag{9}$$

При этом, если данный интеграл существует как несобственный от $|f(x)|$, то он, очевидно, существует и в смысле главного значения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Если $\widehat{f}(\xi)$ – преобразование Фурье функции $y = f(x)$, определяемое на $\mathbf{R}$, то сопоставляемый $f(x)$ интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi, \tag{10}$$

понимаемый в смысле главного значения по Коши, называется интегралом Фурье функции $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Понимаемые в смысле главного значения по Коши интегралы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\cos\xi x\,dx$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\sin\xi x\,dx$$

называются cos и sin – преобразованиями Фурье для функции $f(x)$.

ПРИМЕР 1. Функция $y = f(x)$, определенная на всей числовой прямой $\mathbf{R}$, называется *финитной*, если она обращается тождественно в 0 при всех достаточно больших x.

Найдем преобразование Фурье от следующей финитной функции

$$f(x) = \begin{cases} h & \text{при} \quad |x| \le a, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > a. \end{cases} \qquad (a > 0)$$

По формуле (8) имеем

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} e^{-i\xi x} dx =$$

$$= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right) |_{-a}^{a} = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{i\xi a} - e^{-i\xi a}}{i\xi} = \frac{2h}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \xi a}{\xi}.$$

Найдем интеграл Фурье от функции $f(x)$. По формуле (10) запишем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi x} d\xi = \frac{h}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi a}{\xi} e^{i\xi x} d\xi =$$

$$= \frac{h}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi a}{\xi} (\cos \xi x + i \sin \xi x)\, d\xi =$$

$$= \frac{h}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi a}{\xi} \cos \xi x \, d\xi + i \frac{h}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi a}{\xi} \sin \xi x \, d\xi = \frac{h}{\pi} I_1 + i \frac{h}{\pi} I_2.$$

Вычислим каждый из интегралов. Так как подынтегральное выражение в I_2 есть нечетная функция, то $I_2 = 0$. Учитывая четность подынтегрального выражения в I_1, имеем

$$I_1 = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} \frac{\sin \xi a \, \cos \xi x}{\xi} d\xi = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin \xi a \, \cos \xi x}{\xi} d\xi =$$

$$= |\, 2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \,| =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(a + x)\xi}{\xi} \, d\xi + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin(a - x)\xi}{\xi} \, d\xi = I_3 + I_4.$$

Далее, полагая $(a+x)\xi = t$, $(a+x)\,d\xi = dt$, находим

$$I_3 = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \quad \text{при} \quad a+x>0, \\ 0 \quad \text{при} \quad a+x=0, \\ \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\sin t}{t}\,dt \quad \text{при} \quad a+x<0 \end{cases}$$

и

$$I_3 = \operatorname{sgn}(a+x) \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Аналогично,

$$I_4 = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(a-x)\,\xi}{\xi}\,d\xi = \operatorname{sgn}(a-x) \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Справедливо равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2},$$

которым мы воспользуемся без доказательства. Интеграл в левой части носит название интеграла Дирихле. Проверку справедливости данного равенства можно найти в других учебниках по математическому анализу.

Следовательно,

$$I_3 + I_4 = \frac{\pi}{2}\left(\operatorname{sgn}(a+x) + \operatorname{sgn}(a-x)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x>a, \\ 0 \quad \text{при} \quad x<-a, \\ 2 \quad \text{при} \quad |x|<a, \\ 1 \quad \text{при} \quad |x|=a \end{cases}$$

и потому для интеграла Фурье для функции $f(x)$ выполнено

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi = \frac{h}{\pi}\frac{\pi}{2}\begin{cases} 0 & \text{при} \quad |x| > a, \\ 1 & \text{при} \quad |x| = a, \\ 2 & \text{при} \quad |x| < a, \end{cases}$$

$$= h\begin{cases} 1 & \text{при} \quad |x| < a, \\ \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad |x| = a, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > a. \end{cases}$$

§2. Условие представимости функции интегралом Фурье

ТЕОРЕМА 2.1. *Если функция $y = f(x)$ кусочно липшицева на $(-\infty, +\infty)$ и*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx < \infty,$$

то ее интеграл Фурье сходится в каждой точке, причем

$$\frac{1}{2}\left[f(x+0) + f(x-0)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)\,e^{i\xi x}d\xi. \qquad (1)$$

Доказательство проведем в частном случае, когда функция $y = f(x)$ финитна. Общий случай предлагается рассмотреть самостоятельно, либо найти в математической литературе.

ЛЕММА 2.1. *(Риман) Если кусочно непрерывная функция $f(x)$ финитна, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,e^{i\lambda x}dx \to 0 \quad \text{\textit{при}} \quad \lambda \to \infty.$$

Доказательство. Так как $f(x)$ финитна, то существует постоянная $a > 0$ такая, что $f(x) = 0$ при $|x| > a$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\lambda x} dx = \int\limits_{-a}^{a} f(x)\, e^{i\lambda x} dx. \tag{2}$$

Заметим теперь, что $f(x)$ интегрируема на $[-a, a]$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется нижняя сумма Дарбу

$$\sum_{i=0}^{n-1} m_i\, \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x)$$

такая, что

$$0 \le \int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx - \sum_{i=0}^{n-1} m_i\, \Delta x_i < \varepsilon. \tag{3}$$

Положим

$$g(x) = m_i \quad \text{при} \quad x \in [x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Данная функция кусочно постоянна на $[-a, a]$, причем

$$g(x) \le f(x) \quad \text{при} \quad x \in [-a, a].$$

Отсюда, в силу (3), получаем

$$0 \le \left| \int\limits_{-a}^{a} f(x)\, e^{i\lambda x} dx - \int\limits_{-a}^{a} g(x)\, e^{i\lambda x} dx \right| \le$$

$$\le \int\limits_{-a}^{a} |f(x) - g(x)|\, |e^{i\lambda x}|\, dx = \int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx - \int\limits_{-a}^{a} g(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} f(x)\, dx - \sum_{i=0}^{n-1} m_i\, \Delta x_i < \varepsilon. \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{-a}^{a} g(x)\, e^{i\lambda x} dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} m_i\, e^{i\lambda x} dx =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} m_j \left(\frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda} \right)_{x=x_j}^{x=x_{j+1}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} m_j \frac{e^{i\lambda x_{j+1}} - e^{i\lambda x_j}}{i\lambda} \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty \quad (n\text{--—фиксировано}).$$

Сопоставляя найденное свойство с соотношениями (2) и (4), получаем нужное. □

Замечания. 1. Утверждение остается в силе и для кусочно непрерывных функций, обладающих свойством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

2. Пользуясь формулой Эйлера, легко заключаем, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x\, dx \to 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x\, dx \to 0.$$

ЛЕММА 2.2. *Если кусочно непрерывная функция* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *финитна, то*

(*a*) *ее преобразование Фурье* $\widehat{f}(\xi)$ *непрерывно при всех* $\xi \in \mathbf{R}$;

(*b*) $\sup\limits_{\xi \in \mathbf{R}} |\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$;

(*c*) $\widehat{f}(\xi) \to 0$ *при* $\xi \to \infty$.

Доказательство. Для доказательства утверждения (*a*) заметим, что

$$\widehat{f}(\xi + \Delta\xi) - \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i(\xi+\Delta\xi)x} dx -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} \left(e^{-i(\Delta\xi)x} - 1 \right) dx.$$

Предположим, что $f(x)$ обращается в 0 вне отрезка $[-a, a]$, $a > 0$. Тогда

$$|\widehat{f}(\xi + \Delta\xi) - \widehat{f}(\xi)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-a}^{a} |f(x)| \, |\cos(\Delta\xi)x - 1 - i\,\sin(\Delta\xi)x| \, dx \leq$$

$$\leq \frac{2a}{\sqrt{2\pi}} \sup_{[-a,a]} |f(x)| \max_{x\in[-a,a]} \sqrt{(\cos(\Delta\xi)x - 1)^2 + \sin^2(\Delta\xi)x}.$$

Поскольку при $x \in [-a, a]$ величина $|(\Delta\xi)\, x|$ не превышает $|a|\,|\Delta\xi|$, то при $\Delta\xi \to 0$ выполнено

$$\sin(\Delta\xi)x \to 0 \quad \text{и} \quad \cos(\Delta\xi)x \to 1,$$

что влечет непрерывность $\widehat{f}$ в точке ξ.

Докажем утверждение (b). Справедливо неравенство

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)\, e^{-i\xi x}| \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, dx.$$

Для доказательства утверждения (c) воспользуемся леммой 2.1. Тогда

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} dx \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty.$$

и лемма доказана. □

Доказательство теоремы. По лемме 2.2 преобразование Фурье непрерывно на $(-\infty, +\infty)$ и, значит, интегрируемо на всяком отрезке $[-A, A]$, $A > 0$. Поэтому

$$I_A \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A}^{A} \widehat{f}(\xi)\, e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A}^{A} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-it\xi} dt \right) e^{i\xi x} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-A}^{A} f(t) e^{i\xi x} e^{-it\xi} d\xi \right) dt.$$

Смена порядка интегрирования законна, поскольку f финитна и, тем самым, интегрирование производится по конечному промежутку, а подынтегральная функция непрерывна.

Далее имеем,

$$I_A = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int\limits_{-A}^{A} e^{i(x-t)\xi} d\xi\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{e^{i(x-t)A} - e^{-i(x-t)A}}{i(x-t)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin(x-t)A}{x-t}\, dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} [f(x-u)+f(x+u)]\frac{\sin Au}{u}\, du.$$

Здесь мы воспользовались преобразованиями:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}\, du = |u=-v, du=-dv| =$$

$$= -\int\limits_{+\infty}^{0} f(x-v)\frac{\sin Av}{v}\, dv = \int\limits_{0}^{+\infty} f(x-v)\frac{\sin Av}{v}\, dv.$$

Применим формулу Дирихле

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, du = \frac{\pi}{2}.$$

Мы имеем

$$\left| I_A(x) - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} [f(x+u)+f(x-u)]\frac{\sin Au}{u}\, du - \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\, du\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(x+u)-f(x+0)}{u}\sin Au\, du + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(x-u)-f(x-0)}{u}\sin Au\, du\right|.$$

Положим

$$g_{\pm}(u) = \begin{cases} \dfrac{f(x \pm u) - f(x \pm 0)}{u} & \text{при} \quad u > 0, \\ 0 & \text{при} \quad u \le 0. \end{cases}$$

Так как функция $f(x)$ кусочно липшицева, то функции $g_{\pm}(u)$ ограничены и кусочно непрерывны. Отсюда следует, что

$$\left| I_A(x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_+(u) \sin Au \, du + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_-(u) \sin Au \, du \right|.$$

Правая часть стремится к 0 при $A \to \infty$ (см. замечание после леммы 2.1) и потому

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi} d\xi = \lim_{A \to +\infty} I_A(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

что и требуется. □

§3. Гладкость функции и скорость убывания ее преобразования Фурье

ТЕОРЕМА 3.1. *Если функция $f(x)$ определена на $(-\infty, +\infty)$, k раз непрерывно дифференцируема и*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f^{(s)}(x)| \, dx < \infty \quad \text{при всех} \quad s = 0, 1, \ldots, k,$$

то для любого $s = 0, 1, \ldots, k$ выполнено

$$\widehat{f^{(s)}}(\xi) = (i\xi)^s \, \widehat{f}(\xi) \tag{1}$$

и

$$\widehat{f}(\xi) = \overline{o}\left(\frac{1}{\xi^k}\right) \quad \text{при} \quad \xi \to \infty. \tag{2}$$

Доказательство проведем для случая, когда функция $f(x)$ финитна. В общем случае — провести самостоятельно, либо найти в математической литературе. Пусть $k = 0$. Тогда утверждение (1) тривиально, а утверждение (2) следует из леммы Римана.

Предположим, что $k > 0$. На основании формулы интегрирования по частям имеем

$$\widehat{f^{(k)}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x)\, e^{-i\xi x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(f^{(k-1)}(x)\, e^{-i\xi x} \right)_{-\infty}^{+\infty} + (i\xi) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-1)}(x)\, e^{-i\xi x} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[(i\xi) \left(f^{(k-2)}(x)\, e^{-i\xi x} \right)_{-\infty}^{+\infty} + (i\xi)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{(k-2)}(x)\, e^{-i\xi x} dx \right] =$$

$$= \ldots = \frac{(i\xi)^k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} dx = (i\xi)^k\, \widehat{f}(\xi),$$

что доказывает (1).

Тем самым,

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(i\xi)^k} \widehat{f^{(k)}}(\xi).$$

Но по лемме Римана $\widehat{f^{(k)}}(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$, что доказывает (2). □

ПРИМЕР 1. Решим уравнение

$$a_0\, u''(x) + a_1\, u'(x) + a_2\, u(x) = g(x),$$

где a_0, a_1, a_2 – постоянные и $g(x)$ – кусочно непрерывная на $(-\infty, +\infty)$ функция такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, dx < \infty.$$

Применяя к обеим частям равенства преобразование Фурье, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (a_0\, u''(x) + a_1\, u'(x) + a_2\, u(x))\, e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-i\xi x} dx$$

и по формуле (1)

$$a_0(i\xi)^2\,\widehat{u}(\xi) + a_1(i\xi)\,\widehat{u}(\xi) + a_2\,\widehat{u}(\xi) = \widehat{g}(\xi).$$

Отсюда

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{g}(\xi)}{a_0(i\xi)^2 + a_1(i\xi) + a_2}.$$

Пользуясь теперь интегралом Фурье, находим

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{u}(\xi)\,e^{i\xi x}d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\widehat{g}(\xi)e^{i\xi x}}{a_0(i\xi)^2 + a_1(i\xi) + a_2}\,d\xi.$$

Таким образом, вместо решения уравнения нам достаточно вычислить интеграл.

Замечание. Априори нам не известно удовлетворяет ли решение $u(x)$ необходимым условиям для применимости нужных формул. Поэтому после того как решение $u(x)$ будет найдено необходима проверка. Кроме того, данным приемом можно отыскать только решения, достаточно быстро стремящиеся к 0 при $x \to \infty$. $\square$

ТЕОРЕМА 3.2. *Предположим, что при некотором $k = 0, 1, 2, \dots$ функция $x^k f(x)$ кусочно непрерывна и абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. Тогда*

(i) преобразование Фурье $\widehat{f(x)}(\xi)$ является k раз непрерывно дифференцируемым;

(ii) справедливо равенство

$$\widehat{f}^{(k)}(\xi) = (-i)^k\,\widehat{x^k f(x)}(\xi). \tag{3}$$

Доказательство. Доказательство, как и выше, проведем лишь для случая финитной $f(x)$. При $k = 0$ утверждение очевидно. Пусть $k \geq 1$. Мы имеем

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-i\xi x}\,dx.$$

Пользуясь теоремой о дифференцировании по параметру интеграла с конечными пределами интегрирования, находим

$$(\widehat{f}(\xi))' = \frac{(-i)}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,e^{-i\xi x}\,dx\,;$$

. . . .

$$(\widehat{f}(\xi))^{(k)} = \frac{(-i)^k}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k\, f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx = (-i)^k \widehat{x^k\, f(x)}(\xi).$$

По лемме 2.2 последняя величина непрерывна по ξ при всех $\xi \in (-\infty, +\infty)$. Теорема доказана. □

ПРИМЕР 2. Ранее было найдено преобразование Фурье для функции

$$f(x) = \begin{cases} h & \text{при} \quad |x| \le a, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > a. \end{cases}$$

Именно

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2h}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \xi a}{\xi}.$$

Найдем преобразование Фурье функции $x^k f(x)$. Пользуясь (3), имеем

$$\widehat{x^k f(x)}(\xi) = i^k \widehat{f(x)}^{(k)}(\xi) = i^k \cdot \frac{\sqrt{2}h}{\pi} \left(\frac{\sin \xi a}{\xi} \right)^{(k)}.$$

□

§4. Пространство быстро убывающих функций

4.1. Пространство S

Говорят, что функция φ, определенная на $(-\infty, +\infty)$, принадлежит *пространству* S (Л. Шварц[1]), если она комплекснозначна (т.е. $\varphi = \varphi_1 + i\,\varphi_2$, φ_1, φ_2 – действительны), бесконечно дифференцируема и для произвольной пары неотрицательных чисел $(l,\, k)$, k-целое, выполнено

$$\sup_x (1 + |x|^l)\, |\varphi^{(k)}(x)| < \infty. \tag{1}$$

[1]Шварц Лоран (5.3.1915–4.7.2002) – французский математик, член группы "Бурбаки". Основные труды по топологии, гармоническому и функциональному анализу, математической физике. Большое значение имеет его теория распределений (теория обобщенных функций).

ПРИМЕР 1. Функция $\varphi(x) = e^{-x^2}$ принадлежит пространству S.
$\square$

ПРИМЕР 2. Всякая бесконечно дифференцируемая, финитная функция $\varphi(x) \in S$ (привести пример). $\square$

Если функции φ_m, $\varphi \in S$ при $m = 1, 2, \dots$ и для произвольной пары чисел (l, k) (здесь и далее подразумеваются пары (l, k) указанного выше вида) выполнено

$$\sup_x (1 + |x|^l)\, |\varphi_m^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| \to 0, \tag{2}$$

то говорят, что последовательность $\{\varphi_m\}$ *сходится к* φ *в топологии пространства* S.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из (2) следует, что при любом $k = 0, 1, \dots$

$$\sup_x |\varphi_m^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty,$$

т.е. сами функции $\varphi_m(x)$ и любые их производные сходятся к $\varphi(x)$ (и ее производным) равномерно на $(-\infty, +\infty)$.

Отметим, что *пространство* S *линейно*, т.е. из условия φ, $\psi \in S$ и a, b – комплексные числа следует, что линейная комбинация $a\varphi + b\psi$ принадлежит пространству S (проверить!).

4.2. Понятие оператора

Пусть S_1, S_2 – некоторые пространства. Если задано правило A, по которому каждому элементу $\varphi \in S_1$ ставится в соответствие элемент $\psi \in S_2$, то говорят, что задан *оператор* A *с областью определения* S_1 *и областью значений* S_2 *и пишут* $\psi = A\varphi$.

ПРИМЕР 3. Оператор дифференцирования $D\varphi = \varphi'$ действует из S в S (проверить!). $\square$

Оператор $A : S_1 \to S_2$ называется *линейным*, если для любых φ, $\psi \in S_1$ и произвольных комплексных чисел a, b выполнено

$$A(a\varphi + b\psi) = a\, A\varphi + b\, A\psi.$$

ПРИМЕР 4. Оператор дифференцирования $D\varphi = \varphi'$ линеен (проверить!). $\square$

Оператор $A : S_1 \to S_2$ называется *непрерывным*, если для произвольной последовательности $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \to \varphi$ в топологии пространства S_1 выполнено

$$A\varphi_m \to A\varphi \quad \text{в топологии пространства} \quad S_2.$$

ЛЕММА 4.1. *Если оператор $A : S \to S$ линеен и для любой пары (l, k) найдется система пар $(l_1, k_1), \ldots, (l_n, k_n)$ такая, что для всех $\varphi \in S$ выполнено*

$$\sup_x (1 + |x|^l)\, |(A\varphi)^{(k)}| \le c_{l,k} \sum_{j=1}^{n} \sup_x (1 + |x|^{l_j})\, |\varphi^{(k_j)}(x)|, \quad (3)$$

где $c_{l,k}$ – постоянная, не зависящая от φ, то A непрерывен.

Доказательство. Пусть $\varphi_m \to \varphi$ в топологии S. Требуется доказать, что для любой пары (l, k) выполнено

$$\sup_x (1 + |x|^l)\, |(A\varphi_m)^{(k)} - (A\varphi)^{(k)}| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Так как оператор A линеен, то

$$(A\varphi_m)^{(k)} - (A\varphi)^{(k)} = (A\varphi_m - A\varphi)^{(k)} = (A(\varphi_m - \varphi))^{(k)}$$

и, пользуясь условием (3), получаем

$$\sup_x (1 + |x|^l)\, \left|(A\varphi_m)^{(k)} - (A\varphi)^{(k)}\right| = \sup_x (1 + |x|^l)\, \left|(A(\varphi_m - \varphi))^{(k)}\right| \le$$

$$\le c_{l,k} \sum_{j=1}^{n} \sup_x (1 + |x|^{l_j})\, |\varphi_m^{(k)} - \varphi^{(k)}|.$$

Принимая во внимание, что $\varphi_m \to \varphi$ в топологии S, заключаем, что правая часть стремится к 0 при $m \to \infty$ (каждое из слагаемых стремится к 0). Лемма доказана. $\square$

4.3. Преобразование Фурье как оператор

ТЕОРЕМА 4.1. *Преобразование Фурье*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{-i\xi x} dx$$

является линейным непрерывным оператором, отображающим S <u>на</u> S и притом взаимно однозначно.

Обозначение: $\widehat{\mathcal{F}} : \varphi \in S \to \widehat{\varphi} \in S$.

Доказательство проведем в четыре этапа. 1) Проверим, что $\widehat{\mathcal{F}}$ есть отображение S <u>в</u> S или, другими словами, из условия $\varphi \in S$ следует, что $\widehat{\varphi} \in S$. С этой целью заметим сначала, что по теореме 3.2 функция $\widehat{\varphi}(x)$ бесконечно дифференцируема.

Это ясно, поскольку для любого $l \geq 0$ выполняется

$$|x|^l |\varphi(x)| = \frac{1}{1+|x|^2} (|x|^l + |x|^{l+2})\, |\varphi(x)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{1+|x|^2} \sup_x (|x|^l + |x|^{l+2})\, |\varphi(x)| <$$

$$< \frac{1}{1+|x|^2} \sup_x (1 + |x|^l + |x|^{l+2})\, |\varphi(x)| = \frac{\mathrm{const}}{1+|x|^2}.$$

Правая часть данного соотношения интегрируема по $(-\infty, +\infty)$ и мы вправе воспользоваться теоремой 3.2.

Далее заметим, что операция умножения на x^l $(l \geq 0)$ и операция дифференцирования не выводят функцию из пространства S. Это означает, что при любых (l, k) из условия $\varphi \in S$ следует, что функция $\left(x^l\, \varphi(x)\right)^{(k)}$ принадлежит пространству S.

Нам достаточно считать здесь, что $k, l \geq 0$ – целые. (Проверить!) По лемме Римана ее преобразование Фурье стремится к 0 при $\xi \to \infty$. Пользуясь последовательно доказанными в предыдущем разделе теоремами, находим

$$\left[\widehat{(x^l \varphi(x))^{(k)}}\right](\xi) = (i\xi)^k \left[\widehat{x^l \varphi(x)}\right](\xi) = \frac{(i\xi)^k}{(-i)^l} \widehat{\varphi}^{(l)}(\xi) =$$

$$= -i^{l+k} \xi^k \widehat{\varphi}^{(l)}(\xi) \tag{4}$$

и правая часть также стремится к 0 при $\xi \to \infty$, т.е. $\widehat{\varphi} \in S$.

2) Покажем теперь, что преобразование Фурье $\widehat{\mathcal{F}} : S \to S$ отображает пространство S на все пространство S. Это означает, что каждая из функций $\chi \in S$ является образом некоторой функции $\varphi \in S$.

Сказанное ясно, поскольку если $\chi \in S$, то она бесконечно гладкая и интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, а потому ее можно рассматривать как преобразование Фурье от функции $\widehat{\chi}(-\xi)$.

3) Покажем, что отображение $\widehat{\mathcal{F}} : S \to S$ взаимно однозначно. Предположим противное, т.е. найдутся $\varphi_1 \neq \varphi_2 \in S$ такие, что
$$\widehat{\varphi_1}(\xi) = \widehat{\varphi_2}(\xi).$$
Легко видеть, что отображение $\widehat{\mathcal{F}} : S \to S$ линейно, а потому
$$0 = \widehat{\varphi_2}(\xi) - \widehat{\varphi_1}(\xi) = (\widehat{\varphi_2 - \varphi_1})(\xi).$$
Вычисляя интеграл Фурье от обеих частей равенства, находим
$$0 = \varphi_2(x) - \varphi_1(x), \quad \text{т.е.} \quad \varphi_2(x) = \varphi_1(x).$$
Противоречие.

4) Нам осталось показать, что отображение $\widehat{\mathcal{F}} : S \to S$ непрерывно. Воспользуемся леммой 4.1. Нам нужно доказать, что
$$\sup_{\xi}(1 + |\xi|^l)|\widehat{\varphi}^{(k)}(\xi)| \leq c_{l,k} \sum_{j=1}^{n} \sup_{x}(1 + |x|^{l_j})|\varphi^{(k_j)}(x)|. \tag{5}$$
Согласно соотношению (4)
$$\xi^l \widehat{\varphi}^{(k)}(\xi) = \frac{-1}{i^{k+l}} \left[(\widehat{x^k \varphi(x))}^{(l)} \right](\xi),$$
то есть,
$$|\xi|^l \left| \widehat{\varphi}^{(k)}(\xi) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x^k \varphi(x)\right)^{(l)} e^{-i\xi x} dx \right| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x^k \varphi(x)\right)^{(l)} (1 + |x|^2) \frac{e^{-i\xi x}}{1 + |x|^2} dx \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left| \left(x^k \varphi(x)\right)^{(l)} (1 + |x|^2) \right| \left| \frac{e^{-i\xi x}}{1 + |x|^2} \right| dx \leq$$

$$\le \sup_x \left| \left(x^k \varphi(x)\right)^{(l)} (1+|x|^2) \right| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+|x|^2} \le$$

$$(\text{Проверить !}) \le c_{l,k} \sum_{j=1}^{n} \sup_x (1+|x|^{l_j}) |\varphi^{(k_j)}(x)|.$$

Теорема доказана полностью. □

§5. Обратный оператор Фурье

Так как оператор Фурье $\widehat{\mathcal{F}} : S \to S$ взаимно однозначен, то существует обратный оператор $\widetilde{\mathcal{F}} : S \to S$. Мы с ним уже знакомы. Это –

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\, e^{i\xi x} d\xi. \qquad (1)$$

Для произвольных двух функций φ, $\psi \in S$ введем их "скалярное произведение" (терминология будет оправдана после интерпретации функций класса S как векторов в некотором бесконечномерном пространстве)

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \psi(x)\, dx. \qquad (2)$$

ТЕОРЕМА 5.1. *Справедливы соотношения (аналоги равенства Парсеваля)*

$$\langle \varphi, \widetilde{\psi} \rangle = \langle \widetilde{\varphi}, \psi \rangle, \quad \langle \varphi, \widehat{\psi} \rangle = \langle \widehat{\varphi}, \psi \rangle. \qquad (3)$$

Доказательство проведем только для финитных функций. Мы имеем

$$\langle \varphi, \tilde{\psi} \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \widetilde{\psi}(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Так как функции финитны, то оба интеграла являются собственными и мы вправе их переставить. Таким образом,

$$\langle \varphi, \widetilde{\psi} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi)\, d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\xi x} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) \widetilde{\varphi}(\xi)\, d\xi =$$

$$= \langle \psi, \widetilde{\varphi} \rangle = \langle \widetilde{\varphi}, \psi \rangle.$$

Второе равенство доказывается аналогично. □

ТЕОРЕМА 5.2. *Имеет место формула обращения*

$$\widehat{\widetilde{\varphi}} = \widetilde{\widehat{\varphi}} = \varphi \quad \text{для всякой} \quad \varphi \in S, \tag{4}$$

и для любых φ, $\psi \in S$ *выполнено*

$$\langle \varphi', \psi \rangle = -\langle \varphi, \psi' \rangle, \tag{5}$$

$$\varphi'(x) = -i(\widehat{x\widetilde{\varphi}(x)}) = i(\widetilde{\xi\widehat{\varphi})(\xi}). \tag{6}$$

Доказательство. Равенство (4) проверить самостоятельно.

Равенство (5) следует из формулы интегрирования по частям, поскольку

$$\langle \varphi', \psi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\,\psi(x)\,dx = \varphi(x)\,\psi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\psi'(x)\,dx = -\langle \varphi, \psi' \rangle.$$

Для доказательства (6) воспользуемся формулой обращения. Имеем

$$\varphi' = \left(\widetilde{\widehat{\varphi}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \right)'_x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(\xi)(i\xi) e^{i\xi x} d\xi = i\widetilde{\xi\widehat{\varphi}(\xi)}.$$

Аналогично,

$$\varphi' = \left(\widehat{\widetilde{\varphi}}\right)' = -i(\widehat{x\widetilde{\varphi}(x)}).$$

Сопоставляя найденные равенства, приходим к (6). □

ТЕОРЕМА 5.3. *Для любой $\varphi \in S$ выполнено*

a) $\widehat{e^{-i\mu x}\widetilde{\varphi}(x)} = \widetilde{e^{i\mu x}\widehat{\varphi}(x)} = \varphi(\mu+\xi) \quad \forall\, \mu \in \mathbf{R}$;

b) $\widehat{\varphi(-t)} = \widetilde{\varphi}(t)$;

c) $\widetilde{\varphi(-t)} = \widehat{\varphi}(t)$;

d) $\widetilde{\varphi(at)} = \frac{1}{|a|}\widetilde{\varphi}(\frac{t}{a}) \quad (a \neq 0)$;

e) $\widehat{\varphi(at)} = \frac{1}{|a|}\widehat{\varphi}(\frac{t}{a}) \quad (a \neq 0)$.

Доказательство. Докажем равенство a). Имеем

$$\widehat{e^{-i\mu x}\widetilde{\varphi}(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu x}\widetilde{\varphi}(x)e^{-i\xi x}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\mu+\xi)x}\widetilde{\varphi}(x)\,dx = \widehat{\widetilde{\varphi}}(\mu+\xi) = \varphi(\mu+\xi).$$

Аналогично,

$$\widetilde{e^{i\mu x}\widehat{\varphi}(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu x}\widehat{\varphi}(x)e^{i\xi x}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\mu+\xi)x}\widehat{\varphi}(x)\,dx = \widetilde{\widehat{\varphi}}(\mu+\xi) = \varphi(\mu+\xi).$$

Остальные формулы проверить самостоятельно. □

§6. Свертка и ее преобразование Фурье

Пусть φ и K – функции пространства S. Операция

$$K \star \varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-t)\,\varphi(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t)K(t)\,dt = \varphi \star K$$

называется *сверткой функций* K и φ.

Тот факт, что $K(x-t)\,\varphi(t)$ и $\varphi(x-t)\,K(t)$ суть функции класса S проверьте самостоятельно.

ТЕОРЕМА 6.1. *Справедливы равенства*

$$\widehat{\widetilde{K}\,\widetilde{\varphi}} = \widetilde{\widehat{K}\,\widehat{\varphi}} = K \star \varphi.$$

Доказательство проведем для случая финитных K и φ. Мы имеем

$$\widetilde{\widehat{K}\widehat{\varphi}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs}ds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(u)e^{-su}du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)e^{-sv}dv =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs}ds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(u)\,du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(v)e^{-i(u+v)s}dv =$$

$$\left(\text{замена переменных:} \qquad \begin{array}{l} u+v=\xi \\ v=\xi-u \\ dv=d\xi \end{array}\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs}ds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(u)du \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi-u)e^{-\xi s}\,d\xi.$$

Так как K и φ финитны, то последние два интеграла можно поменять местами. Таким образом,

$$\widetilde{\widehat{K}\widehat{\varphi}} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs}ds \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s}d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(u)\varphi(\xi-u)\,du =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ixs}ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi s}d\xi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(u)\varphi(\xi-u)\,du.$$

Однако, $\widetilde{\widehat{f}} = f$ и, полагая

$$f = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(u)\varphi(\xi-u)\,du,$$

находим

$$\widetilde{\widehat{K}\widehat{\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widetilde{\widehat{f}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - u)\varphi(u)\,du = K \star \varphi.$$

Далее получаем

$$\widehat{\widetilde{K}\widetilde{\varphi}} = \widehat{\widehat{K(-t)}\widehat{\varphi(-t)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{K}(-t)\widehat{\varphi}(-t)e^{-i\xi t}dt =$$

$$\text{(замена переменных:} \qquad -t = u, dt = -du\,)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{K}(u)\,\widehat{\varphi}(u)e^{i\xi u}\,du = \widetilde{\widehat{K}\widehat{\varphi}} = K \star \varphi.$$

Теорема доказана. □

§7. Пространство S' обобщенных функций

7.1. Понятие обобщенной функции

Если каждой из функций $\varphi \in S$ по некоторому правилу F ставится в соответствие комплексное число (F, φ), зависящее от φ линейно и непрерывно (в топологии пространства S), то говорят, что *на пространстве S определен линейный функционал F*, или определена *обобщенная функция F* над S.

Напоминания: a) функционал F линеен (над полем комплексных чисел), если для любых комплексных чисел α, β выполнено

$$(F, \alpha\,\varphi + \beta\,\psi) = \alpha\,(F, \varphi) + \beta\,(F, \psi)\,;$$

b) функционал F непрерывен, если для всякой последовательности $\{\varphi_m\} \to \varphi$ в топологии S выполнено

$$(F, \varphi_m) \to (F, \varphi) \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Совокупность всех указанных функционалов (обобщенных функций) обозначается символом S'.

ЛЕММА 7.1. *Пусть F – линейный функционал на пространстве S. Предположим, что существуют постоянная C и конечный набор пар чисел (l_1, k_1), …, (l_m, k_m), для которых при любой $\varphi \in S$ выполнено*

$$|(F, \varphi)| \leq C \sum_{j=1}^{m} \sup_x (1 + |x|^{l_j})\, |\varphi^{(k_j)}(x)|. \tag{1}$$

Тогда функционал F непрерывен в топологии S.

Доказательство. Так как F есть линейный функционал, то

$$(F, \varphi_n) - (F, \varphi) = (F, \varphi_n - \varphi).$$

Пользуясь условием (1) отсюда находим

$$|(F, \varphi_n) - (F, \varphi)| \leq C \sum_{j=1}^{m} \sup_x (1 + |x|^{l_j})\, |(\varphi_n - \varphi)^{(k_j)}(x)| =$$

$$= C \sum_{j=1}^{m} \sup_x (1 + |x|^{l_j})\, |\varphi^{(k_j)}(x) - \varphi^{(k_j)}(x)|.$$

Если $\varphi_n \to \varphi$ в топологии пространства S, то правая часть стремится к 0, а потому

$$(F, \varphi_n) - (F, \varphi) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Лемма доказана. □

7.2. Кусочно непрерывные функции как обобщенные

Пусть $F(x)$ – кусочно непрерывная на $(-\infty, +\infty)$ комплекснозначная функция, для которой при некотором $l \geq 0$ выполнено

$$|F(x)| \leq C\,(1 + |x|^l), \tag{2}$$

где C – постоянная, не зависящая от x.

Если $\varphi \in S$, то функция $F(x)\varphi(x)$ убывает при $|x| \to \infty$, причем для любого $m \geq 0$ имеем

$$|F(x)\varphi(x)| \leq C\,(1 + |x|^l)\, |\varphi(x)| =$$

$$= C\,(1 + |x|^l)(1 + |x|^m)\, \frac{|\varphi(x)|}{1 + |x|^m} \leq$$

$$\leq C_1 \, (1 + |x|^{l+m}) \, \frac{|\varphi(x)|}{1+|x|^m} \leq$$

$$\leq \frac{C_1}{1+|x|^m} \sup_x (1 + |x|^{l+m}) \, |\varphi(x)| = \frac{C_2(m)}{1+|x|^m}.$$

Отсюда следует, что произведение $F(x)\varphi(x)$ интегрируемо по $(-\infty, +\infty)$ для любой $\varphi \in S$, и мы можем определить на S функционал

$$(F, \varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\varphi(x) \, dx. \tag{3}$$

Очевидна линейность функционала (3). Проверим его непрерывность. Воспользуемся леммой 7.1. Имеем

$$|(F, \varphi)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\varphi(x) \, dx \right| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(x)| \, |\varphi(x)| \, dx \leq$$

$$(\text{в силу } \ (2)) \leq C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|^l)(1 + |x|^2) \, |\varphi(x)| \, dx =$$

$$= C \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|^l) \frac{|\varphi(x)|}{1+|x|^2} \, dx \leq C_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|^{l+2}) \, \frac{|\varphi(x)|}{1+|x|^2} \, dx \leq$$

$$\leq C_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+|x|^2} \, \sup_x (1 + |x|^{l+2}) \, |\varphi(x)| =$$

$$= \pi \, C_1 \sup_x (1 + |x|^{l+2}) \, |\varphi(x)|,$$

что и требуется.

Таким образом, *функционал (3) определяет обобщенную функцию над S.* Данную функцию будем обозначать той же буквой F.

Задача. Могут ли две различные кусочно гладкие функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, удовлетворяющие предположению (2), определять один и тот же функционал над S. (Ответ: могут, если, например, они отличаются значениями в конечном числе точек.)

ТЕОРЕМА 7.1. *Для того, чтобы две кусочно непрерывные на $(-\infty, +\infty)$ функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ представляли при помощи равенства (3) обобщенные функции $F_1 = F_2 \in S'$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$F_1(x) = F_2(x)$$

в каждой точке, где обе функции непрерывны.

Доказательство. Достаточность. На всяком отрезке $[a, b]$ имеется лишь конечное число точек разрыва функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Поэтому для любой $\varphi \in S$

$$\int\limits_a^b F_1(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_a^b F_2(x)\varphi(x)\,dx.$$

Переходя к пределу при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$, заключаем, что для произвольной $\varphi \in S$ выполнено

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_2(x)\varphi(x)\,dx,$$

т.е. функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ определяют один и тот же функционал вида (3).

Необходимость. Предположим, что в некоторой точке x_0, где $F_1(x)$ и $F_2(x)$ непрерывны, выполнено $F_1(x) \neq F_2(x)$, однако для всякой $\varphi \in S$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_1(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_2(x)\varphi(x)\,dx.$$

Тогда для всякой $\varphi \in S$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (F_2(x) - F_1(x))\varphi(x)\,dx = 0.$$

Так как функция $F_2(x) - F_1(x)$ непрерывна в x_0, то существует окрестность $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ этой точки, в которой $F_2(x) - F_1(x)$ не меняет знака. Не умаляя общности, будем считать, что

$$F_2(x) - F_1(x) \geq q > 0 \quad \text{при всех} \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Построим функцию $\varphi_0(x)$ со свойствами:

$\varphi_0(x)$ бесконечно дифференцируема;

$\varphi_0(x) > 0$ при всех $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ и $\varphi_0(x) = 0$ при всех $x \neq (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

(Такого типа функция может быть бесконечно дифференцируемой, но не аналитической. Почему?)

Ясно, что $\varphi_0 \in S$. Тогда имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F_2(x) - F_1(x))\varphi_0(x)\,dx \geq q \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x)\,dx > 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Обобщенную функцию F, представимую посредством интеграла (3) и кусочно непрерывной функции $F(x)$, обычно отождествляют с самой $F(x)$. К примеру, функции $\cos x$, $\ln x$, $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ с одной стороны суть обычные функции, а с другой – обобщенные функции, принадлежащие пространству S'.

7.3. δ-функция Дирака

Функционал

$$\delta \ = (\delta, \varphi) = \varphi(0) \quad \text{для всякой} \quad \varphi \in S \tag{4}$$

называется *δ-функцией* Дирака.

Понятно, что этот функционал линеен.

Для доказательства непрерывности функционала (4) достаточно воспользоваться леммой 7.1, что возможно, поскольку

$$|(\delta, \varphi)| = |\varphi(0)| \leq \sup_x |\varphi(x)|.$$

(Непрерывность очевидна и непосредственно из определения сходимости в S.) Таким образом, функционал $\delta \in S'$. Можно показать, что этот функционал не представим в виде (3) ни для какой кусочно непрерывной (или даже интегрируемой по Риману) функции $F(x)$, т.е.

$$\delta \in S' \setminus S.$$

§8. Операции над обобщенными функциями

8.1. Умножение на функцию

Пусть $g(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция, заданная на $(-\infty,+\infty)$ и удовлетворяющая условию (2) вместе с производными любого порядка. Тогда можно определить произведение $g(x)$ на обобщенную функцию $F \in S'$ по правилу

$$g(x)F = (gF,\varphi) = (F, g\varphi) \tag{1}$$

для любой $\varphi \in S$.

Ясно, что функционал $(F, g\varphi)$ линеен по φ. Докажем непрерывность. Предположим, что $\varphi_m \to \varphi$ в топологии S. Тогда $g\varphi_m \to g\varphi$ в топологии S. (Проверить !) Однако, функционал $(F, g\varphi)$ непрерывен в топологии S, а потому

$$(F, g\varphi_m) \to (F, g\varphi).$$

Это означает, что функционал (gF,φ) также непрерывен в S и $gF \in S'$.

В случае обычных кусочно непрерывных функций введенное определение операции умножения согласуется с определением обычной функции как обобщенной. Действительно, если $F(x)$ – кусочно непрерывна, то

$$(F,\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\varphi(x)\,dx.$$

Отсюда,

$$(F, g\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x) g\varphi\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (gF(x))\,\varphi\,dx = (gF,\varphi).$$

8.2. Определение производной обобщенной функции

Пусть $F \in S'$. Производная F' по определению вводится равенством

$$(F',\varphi) = -(F,\varphi') \quad \text{для любой} \quad \varphi \in S, \tag{2}$$

а производная порядка $k > 1$ – равенством

$$(F^{(k)},\varphi) = (-1)^k (F,\varphi^{(k)}) \quad \text{для любой} \quad \varphi \in S. \tag{3}$$

Линейность и непрерывность в топологии S правых частей в равенствах (2), (3) легко проверяется.

8.3. Производная функции Хевисайда

Найдем производную функции Хевисайда[2]

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Пользуясь соотношением (2), запишем

$$(H', \varphi) = -(H, \varphi') \quad \text{для всякой} \quad \varphi \in S.$$

Так как $H(x)$ кусочно непрерывна, то в соответствии с формулой (3) функционал в правой части имеет вид

$$(H', \varphi) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\,dx \quad \text{для всякой} \quad \varphi \in S.$$

Отсюда,

$$(H', \varphi) = -\int\limits_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = -\varphi(x)\big|_0^{+\infty} =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) - \lim_{x\to+0} \varphi(x).$$

Но $\varphi \in S$, а потому $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$. Функция φ непрерывна и, следовательно,

$$\lim_{x\to+0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} \varphi(x) = \varphi(0).$$

Таким образом,

$$(H', \varphi) = \varphi(0),$$

т.е. *производная функции Хевисайда есть δ-функция.*

8.4. Сходимость в пространстве обобщенных функций

Говорят, что *последовательность обобщенных функций* $F_n \in S'$ *сходится к функции* $F \in S'$ (в топологии S'), если

$$\lim_{n\to\infty} (F_n, \varphi) = (F, \varphi) \quad \text{для всякой} \quad \varphi \in S. \tag{4}$$

---

[2]Хевисайд Оливер (18.05.1850 - 3.02.1925) – английский физик, инженер и математик, член Лондонского королевского об-ва (с 1891 г.) Получил элементарное школьное образование (1866 г.) Самостоятельно изучил математику и физику. Работал инженером по технике слабых токов. В области математики внес существенный вклад в векторное исчисление и разработал основы операционного исчисления. Считал математику экспериментальной наукой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из определения сходимости (4) ясно, что если $F_n \to F$ в топологии S', то для любого $k \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty}(F_n^{(k)}, \varphi) = (-1)^k \lim_{n\to\infty}(F_n, \varphi^{(k)}) =$$

$$(\text{в силу } (4)) \quad = (-1)^k (F, \varphi^{(k)}) =$$

$$\text{в силу } (3) \quad = (F^{(k)}, \varphi).$$

Таким образом, можно утверждать, что *из сходимости $F_n \to F$ в топологии S' следует сходимость любых из производных $F_n^{(k)} \to F^{(k)}$ в S'.*

Рассмотрим последовательность кусочно непрерывных функций

$$f_n(x) = \begin{cases} n \quad \text{при} \quad 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 \quad \text{при всех остальных} \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{cases}$$

Данная функция принадлежит также и пространству обобщенных функций S'. Посмотрим не имется ли предела у данной последовательности в топологии пространства S'. Пользуясь соотношением (3), имеем

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n \varphi \, dx = \lim_{n\to\infty} n \int\limits_{0}^{1/n} \varphi \, dx =$$

$$(\text{по теореме о среднем}) \quad = \lim_{n\to\infty} n \, \varphi(\xi_n)(\frac{1}{n} - 0) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\xi_n),$$

где ξ_n – некоторая точка отрезка $[0, \frac{1}{n}]$. Но функция φ непрерывна и потому $\varphi(\xi_n) \to \varphi(0)$ при $n \to \infty$. Тем самым, для всякой $\varphi \in S$

$$\lim_{n\to\infty}(f_n, \varphi) = \varphi(0)$$

и

$$f_n \to \delta - \text{функции в топологии } S'.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Первоначальное определение δ-функции в физике было следующим. Это есть "функция", равная 0 при всех $x \neq 0$, обращающаяся в ∞ при $x = 0$ и такая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \, dx = 1.$$

§9. Сжатие видеоинформации

Цифровое видео уже давно применяется в различных областях человеческой деятельности. Основные его достоинства – удобство хранения, воспроизведения и редактирования видеоинформации. Исходный видеопоток на практике использовать нецелесообразно ввиду большой избыточности. Например, изображения (как и видео) занимают намного больше места в памяти, чем текст. Так, скромная, не очень качественная иллюстрация на обложке книги размером 500х800 точек, занимает 1.2 Мб — столько же, сколько художественная книга из 400 страниц (60 знаков в строке, 42 строки на странице). Решением этой проблемы является сжатие видеоданных. Наиболее распространенным из -за своей универсальности и открытости является семейство алгоритмов сжатия MPEG. Одной из основных подсистем кодера является подсистема устранения пространственной избыточности. Основу сжатия составляет блок дискретного косинус-преобразования (ДКП) – для получения спектральных коэффициентов и устранения пространственной корреляции пикселей. ДКП является дискретным аналогом косинус-преобразования Фурье. Прямое ДКП применяется для блока размера $M \times N$ исходного изображения и имеет вид

$$B(p,q) = \alpha_p \alpha_q \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} A(m,n) \cos \frac{\pi(2m+1)p}{2M} \cos \frac{\pi(2n+1)q}{2N},$$

где $B(p,q)$ – значения спектральных коэффициентов,

$$\alpha_p = \begin{cases} 1/\sqrt{M} & p = 0 \\ \sqrt{2/M} & 1 \le p \le M-1, \end{cases}$$

$$\alpha_q = \begin{cases} 1/\sqrt{N} & q = 0 \\ \sqrt{2/N} & 1 \le q \le N-1 \end{cases},$$

(m,n) – координаты пикселей в исходном блоке изображения, (p,q) – индексы коэффициентов в преобразованном блоке, $A(m,n)$ – значения пикселов в исходном блоке.

В результате исходный блок точек преобразуется в матрицу частотных коэффициентов ДКП такого же размера.

Обратное ДКП определяется следующим образом

$$A(m,n) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_p \alpha_q B(p,q) \cos \frac{\pi(2m+1)p}{2M} \cos \frac{\pi(2n+1)q}{2N}.$$

Само сжатие достигается устранением спектральных коэффициентов, соответствующих высокочастотным составляющим изображения. При условии, что в изображении присутствуют только плавные переходы цвета, высокочастотные коэффициенты будут малы, поэтому они удаляются. Дальнейшее сжатие происходит с применением других алгоритмов компрессии без потери информации.

Глава 20

Теория интегрирования в $\mathbb{R}^n$

Дополнительная литература:

1) Г.М. Фихтенгольц, "Курс дифференциального и интегрального исчисления", Т. I-III, М.: Наука, 1969.
2) Л. Шварц, "Анализ", Т. I=II, М.: Мир, 1972.
3) В.А. Зорич, "Математический анализ", Т. I-II, М.: Фазис, 1997.

§1. Интеграл по параллелепипеду

1.1. Определение и простейшие свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Замкнутым параллелепипедом размерности n (или n-мерным замкнутым параллелепипедом) называется множество

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть P_1 — разбиение отрезка $[a_1, b_1]$ точками

$$a_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b_1,$$

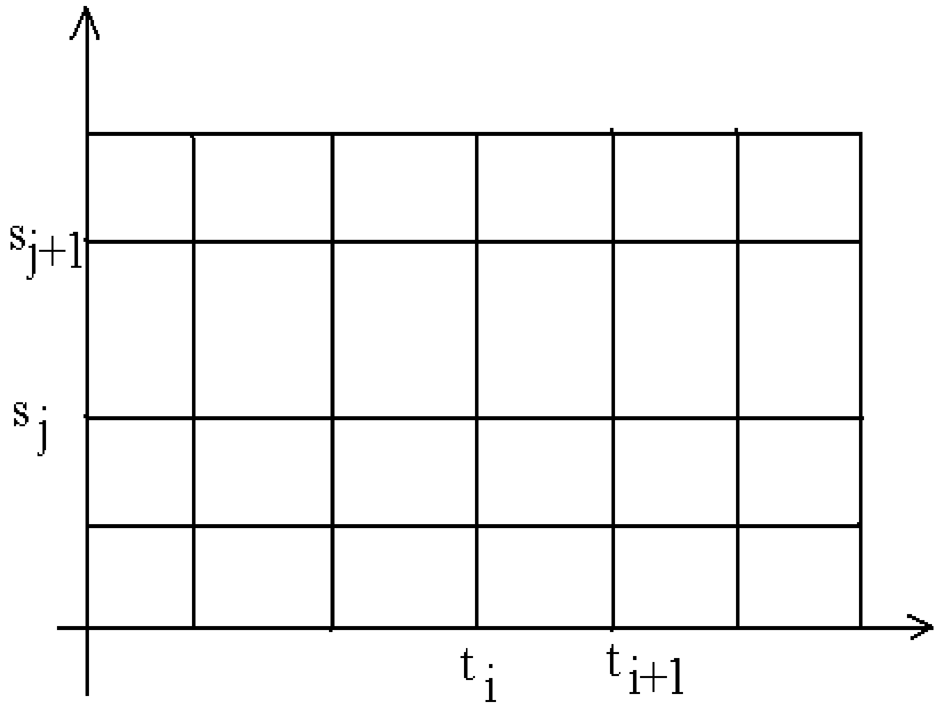
и $P_2, \ldots, P_n$ — разбиения отрезков $[a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n]$. Совокупность $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ называется разбиением параллелепипеда A.

ПРИМЕР 1. Пусть $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ — прямоугольник в $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим разбиения

$$P_1 : \ a_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b_1,$$

$$P_2 : \ a_2 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_l = b_2.$$

Очевидно при этом прямоугольник $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ разбивается на прямоугольники $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$.



В общем случае параллелепипед A разбивается на параллелепипеды T, которые будем называть параллелепипедами разбиения. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Объемом параллелепипеда (точнее n-мерным объемом параллелепипеда) $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ будем называть число

$$v(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_n - a_n).$$

Пусть функция $f(x)$ определена в A и ограничена. Положим

$$m_T(f) = \inf_{x \in T} f(x), \qquad M_T(f) = \sup_{x \in T} f(x),$$

где T — параллелепипед разбиения P.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Верхней и нижней суммами Дарбу функции $f(x)$ по параллелепипеду A называются величины

$$\overline{S}(f, P) = \sum_T M_T(f) v(T)$$

и

$$\underline{S}(f, P) = \sum_T m_T(f) v(T),$$

соответственно. Здесь суммы берутся по всем $T \in P$.

ПРИМЕР 2. Пусть $A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ — прямоугольник в $\mathbb{R}^2$, ограниченная функция $f(x)$ определена в A, а P — разбиение A :

$$a_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b_1,$$

$$a_2 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_l = b_2.$$

Обозначим через $T_{ij} = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}],\ i = 0, \ldots, k-1,\ j = 0, \ldots, l-1$,

$$M_{ij} = \sup_{x \in T_{ij}} f(x), \quad m_{ij} = \inf_{x \in T_{ij}} f(x).$$

Тогда

$$\overline{S}(f, P) = \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{i=0}^{k-1} M_{ij}(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j),$$

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{i=0}^{k-1} m_{ij}(t_{i+1} - t_i)(s_{j+1} - s_j).$$

□

Заметим, что $\overline{S}$ и $\underline{S}$ всегда существуют, т.к. $f(x)$ ограничена.

Будем говорить, что разбиение P' является измельчением разбиения P, (или следует за разбиением P), если каждый параллелепипед из P' содержится в некотором параллелепипеде из P.

ЛЕММА 1.1. *Предположим, что разбиение P' является измельчением разбиения P. Тогда*

$$\underline{S}(f, P) \le \underline{S}(f, P'),$$

$$\overline{S}(f, P) \ge \overline{S}(f, P').$$

Доказательство. Пусть T — параллелепипед разбиения P. Тогда существуют параллелепипеды $T_1, T_2, \ldots, T_\alpha$ разбиения P', такие что

$$\bigcup_{i=1}^{\alpha} T_i = T.$$

Из того, что

$$\inf_{x \in T} f(x) \le \inf_{x \in T_i} f(x), \quad \forall\ i = 1, \ldots, \alpha$$

выполнено

$$m_T(f)v(T) = m_T(f)(v(T_1) + v(T_2) + \ldots + v(T_\alpha)) =$$
$$= m_T(f)v(T_1) + m_T(f)v(T_2) + \ldots + m_T(f)v(T_\alpha) \le$$
$$\le m_{T_1}(f)v(T_1) + m_{T_2}(f)v(T_2) + \ldots + m_{T_\alpha}(f)v(T_\alpha).$$

Суммируя данное неравенство по всем параллелепипедам T разбиения P, в левой части неравенства получим нижнюю сумму Дарбу относительно разбиения P, а в правой части неравенства получим нижнюю сумму Дарбу относительно разбиения P', т.е.

$$\underline{S}(f, P) \le \underline{S}(f, P').$$

Для верхних сумм Дарбу доказательство аналогично. □

ЛЕММА 1.2. *Пусть P, P' — произвольные разбиения параллелепипеда A, тогда*

$$\underline{S}(f, P) \le \overline{S}(f, P').$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение P'', которое является измельчением разбиений P и P'. Тогда в силу леммы 1.1 имеем

$$\underline{S}(f, P) \le \underline{S}(f, P'') \le \overline{S}(f, P'') \le \overline{S}(f, P').$$

□

СЛЕДСТВИЕ. Точная верхняя грань всех нижних сумм Дарбу функции f не больше точной нижней грани всех верхних сумм Дарбу функции f :

$$\sup_P \underline{S}(f, P) \le \inf_P \overline{S}(f, P).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется интегрируемой по параллелепипеду A, если

$$\sup_P \underline{S}(f, P) = \inf_P \overline{S}(f, P).$$

Данное общее значение называется определенным интегралом функции $f(x)$ по параллелепипеду A и обозначается

$$\int\limits_A f(x)\,dx = \int\limits_A f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n.$$

В случае $n = 2$ интеграл по прямоугольнику называется двойным интегралом и обозначается

$$\iint\limits_A f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2.$$

В общем случае интеграл называется n-кратным.

ТЕОРЕМА 1.1. *Ограниченная функция $y = f(x)$ интегрируема по A тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение P параллелепипеда A такое, что*

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon\,.$$

Доказательство. Предположим вначале, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется разбиение P такое, что

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon\,.$$

Тогда

$$0 \le \inf_{P'} \overline{S}(f, P') - \sup_{P''} \underline{S}(f, P'') \le \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon\,.$$

В силу произвольности ε получаем, что f интегрируема.

Далее предположим, что $f(x)$ интегрируема по A. Тогда, учитывая определения точной верхней и точной нижней граней получаем, что $\forall\ \varepsilon > 0\quad \exists$ разбиения P' и P'' такие, что

$$\overline{S}(f, P') < \int\limits_A f(x)\, dx + \varepsilon\,, \quad \underline{S}(f, P'') > \int\limits_A f(x)\, dx - \varepsilon\,.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$\int\limits_A f(x)dx - \varepsilon\ < \underline{S}(f, P'') \le \overline{S}(f, P') < \int\limits_A f(x)dx + \varepsilon\,.$$

Рассмотрим разбиение P, которое является измельчением разбиений P' и P''. Тогда пользуясь леммой 1.2, получаем

$$\int\limits_A f(x)dx - \varepsilon\ < \underline{S}(f, P'') \le \underline{S}(f, P) \le \overline{S}(f, P) \le \overline{S}(f, P') <$$

$$< \int\limits_A f(x)\, dx + \varepsilon\,.$$

Таким образом

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < 2\varepsilon\,.$$

Теорема доказана. $\square$

ПРИМЕР 3. Пусть $f(x) = c \equiv \text{const},\ x \in A$. Тогда

$$\overline{S}(f,P) = \sum_T cv(T) = c\sum_T v(T) = cv(A),$$

$$\underline{S}(f,P) = \sum_T cv(T) = cv(A).$$

Таким образом, $f(x)$ интегрируема и ее интеграл

$$\int\limits_A c\,dx = cv(A).$$

□

ПРИМЕР 4. Рассмотрим функцию $f(x_1,x_2)$, такую что

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 1, & x_1,x_2 \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x_1 \text{ или } x_2 - \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Покажем, что данная функция неинтегрируема в прямоугольнике A. Пусть $A = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2]$, P — произвольное разбиение. Очевидно, что $\forall\ T$ разбиения P существует точка $(x_1,x_2) \in T$ такая, что $x_1,x_2 \in \mathbf{Q}$, и существует точка $(x_1',x_2') \in T$ такая, что или x_1' или x_2' — иррационально. Следовательно,

$$\underline{S}(f,P) = \sum_T v(T)m_T(f) = 0,$$

$$\overline{S}(f,P) = \sum_T M_T(f)v(T) = \sum_T v(T) = v(A).$$

Таким образом,

$$\inf \overline{S}(f,P) = v(A) \neq 0 = \sup \underline{S}(f,P).$$

□

1.2. Условие интегрируемости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Пусть F — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что система параллелепипедов $\{U_1,U_2,\ldots,U_k\}$ покрывает множество F, если

$$\bigcup_{i=1}^k U_i \supset F.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что в данном определении параллелепипеды $U_1,U_2,\ldots,U_k$ не обязательно имеют ребра, параллельные осям координат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Будем говорить, что множество F имеет нулевой объем и писать $v(F) = 0$, если $\forall\ \varepsilon > 0$ существует его покрытие параллелепипедами $U_1, U_2, \ldots, U_k$:

$$\sum_{i=1}^{k} v(U_i) < \varepsilon \,.$$

ПРИМЕР 5. Рассмотрим отрезок в $\mathbb{R}^2$. Он имеет нулевой объем, т.к. его можно покрыть прямоугольником сколь угодно малой ширины. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В предыдущем определении вместо произвольных параллелепипедов U_i можно брать параллелепипеды у которых ребра параллельны осям координат. Кроме того, можно брать как открытые так и замкнутые параллелепипеды.

ЛЕММА 1.3. *Пусть A — замкнутое множество, $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое. Тогда множество $A \setminus U$ замкнутое.*

Доказательство. Пусть дана последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ точек из $A \setminus U$, сходящаяся к некоторой точке x_0. Покажем, что $x_0 \in A \setminus U$. Так как множество A — замкнуто, и последовательность $\{x_k\} \subset A,\ x_k \to x_0$ при $k \to \infty$, то точка $x_0 \in A$. Следовательно, достаточно показать, что $x_0 \notin U$.

Предположим противное, т.е. $x_0 \in U$. Тогда в силу открытости множества U, найдется ε-окрестность $B_\varepsilon(x_0)$ точки x_0, такая что $B_\varepsilon(x_0) \subset U$. Так как $\{x_k\} \subset A \setminus U$, то $\{x_k\}$ не лежат в $B_\varepsilon(x_0)$. Получаем противоречие со сходимостью $x_k \to x_0$. $\square$

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый параллелепипед, $f(x)$ — ограниченная функция на A, B — множество точек разрыва функции $f(x)$. Тогда если $v(B) = 0$, то функция $f(x)$ интегрируема по параллелепипеду A.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\forall\ \varepsilon > 0$ существует разбиение P параллелепипеда A такое, что

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon \,.$$

Зафиксируем произвольно $\varepsilon > 0$. Так как $v(B) = 0$, то существует система открытых параллелепипедов $U_1, U_2, \ldots, U_k$, таких, что

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i, \qquad \sum_{i=1}^{k} v(U_i) < \varepsilon \,.$$

Будем считать, что параллелепипеды U_i имеют ребра, параллельные осям координат. Тогда

$$\sum_{i=1}^{k} (M_{U_i}(f) - m_{U_i}(f))\, v(U_i) \le \operatorname{osc}(f, A) \sum_{i=1}^{k} v(U_i) \le \operatorname{osc}(f, A)\varepsilon\,, \tag{1}$$

где

$$\operatorname{osc}(f, A) = \sup_A f - \inf_A f.$$

Рассмотрим множество $A \setminus \cup_{i=1}^{k} U_i$. Данное множество является замкнутым по лемме 1.3. Следовательно, по теореме Кантора функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на множестве $A \setminus \cup_{i=1}^{k} U_i$, т.е.

$$\exists\ \delta(\varepsilon\,) > 0: \quad \forall\ x', x'' \in A \setminus \bigcup_i U_i, \quad |x' - x''| < \delta(\varepsilon\,),$$

выполнено

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon\,.$$

Здесь $|x' - x''|$ – расстояние между точками x' и x''.

Рассмотрим разбиение P, которое содержит параллелепипеды U_i. Пусть T — параллелепипеды разбиения P, $T \notin \{U_1, \ldots, U_k\}$. Разобьем, если нужно, U_i на параллелепипеды, которые пересекались бы только по своим границам. Тогда, используя (1), имеем

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_T (M_T(f) - m_T(f)) v(T) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} (M_{U_i}(f) - m_{U_i}(f)) v(U_i) \le \sum_T (M_T(f) - m_T(f)) v(T) +$$

$$+\varepsilon \operatorname{osc}(f, A).$$

Выберем разбиение P таким, что $\operatorname{diam} T < \delta(\varepsilon\,)$, где

$$\operatorname{diam} T = \sup_{x', x'' \in T} |x' - x''|.$$

Тогда, используя равномерную непрерывность функции $f(x)$ на множестве $A \setminus \cup_{i=1}^{k} U_i$, получаем

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \le \varepsilon \sum_T v(T) + \varepsilon \operatorname{osc}(f, A) \le$$

$$\le \varepsilon\, (v(A) + \operatorname{osc}(f, A)).$$

В силу произвольности $\varepsilon\, > 0$ и теоремы 1.1, имеем $\overline{S}(f, P) = \underline{S}(f, P)$. Теорема доказана. □

§2. Интегрирование по множеству

2.1. Множества, измеримые по Жордану

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть задано множество $A \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{A}$ — замыкание множества A, $\partial A = \overline{A} \setminus A$ — граница множества A. Множество A называется измеримым по Жордану[1], если n-мерный объем ∂A равен нулю.

ПРИМЕР 1. Пусть задана непрерывная функция $y = h(x) > 0$ на $[a, b]$. Тогда множество

$$A = \{(x, y) : \ a < x < b, \ 0 < y < h(x)\}$$

является измеримым по Жордану. □

Доказательство. Достаточно показать, что график функции $h(x)$ имеет нулевую площадь, т.к. отрезки $\{x = a, \, 0 < y < f(a)\}$, $\{x = b, \, 0 < y < f(b)\}$ и $\{a < x < b, \, y = 0\}$, очевидно имеют нулевую площадь. Так как $h(x)$ — непрерывна, то она интегрируема на $[a, b]$. Поэтому $\forall \ \varepsilon > 0$, $\exists$ разбиение отрезка $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b,$$

такое что

$$\sum_{i=0}^{k-1} M_i \Delta x_i - \sum_{i=0}^{k-1} m_i \Delta x_i < \varepsilon \, , \tag{1}$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ и

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} h(x), \qquad m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} h(x).$$

Очевидно, что график функции $h(x)$ покрывается прямоугольниками вида $[x_i, x_{i+1}] \times [m_i, M_i]$, причем сумма площадей этих прямоугольников равна

$$\sum_{i=0}^{k-1} (M_i - m_i) \Delta x_i < \varepsilon$$

в силу неравенства (1). □

ПРИМЕР 2. Рассмотрим непрерывные функции $h(x)$ и $g(x)$ такие, что $h(x) > g(x)$, $\forall \ x \in [a, b]$. Тогда множество

$$\{(x, y) : \ a < x < b, \ g(x) < y < h(x)\}$$

является измеримым по Жордану. □

[1] Жордан Камиль Мари Эдмон (5.1.1838 – 21.1.1922). Род. в Лионе (Франция). Его работы относятся к алгебре, теории чисел, теории функций, геометрии, топологии, дифференциальным уравнениям, кристаллографии.

ТЕОРЕМА 2.1. *Пусть $A, B \subset \mathbb{R}^n$ открытые множества, измеримые по Жордану. Тогда множества $A \cup B$ и $A \cap B$ открытые и измеримые по Жордану.*

Доказательство. Самостоятельно доказать, что $A \cup B$ и $A \cap B$ открытые.

Для доказательства измеримости достаточно показать, что граница объединения лежит в объединении границ, и граница пересечения лежит в объединении границ, т.е.

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B, \qquad \partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B.$$

Покажем первое вложение. Пусть $x_0 \in \partial(A \cup B)$. Тогда x_0 — точка сгущения множества $A \cup B$ и $x_0 \notin A \cup B$. Поэтому точка x_0 является точкой сгущения либо множества A, либо B. Предположим, что x_0 — точка сгущения множества A и в то же время $x_0 \notin A$. Тогда $x_0 \in \partial A$.

Второе вложение доказывается аналогично. □

2.2. Интеграл по произвольному множеству

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное, открытое, измеримое по Жордану множество. Пусть на множестве $\overline{A}$ задана функция $f(x)$. Рассмотрим параллелепипед $\mathcal{C}$, с ребрами, параллельными осям координат, такой что $\mathcal{C} \supset \overline{A}$, и функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \overline{A} \\ 0, & x \in \mathcal{C} \setminus \overline{A}. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Функция $f(x)$ называется интегрируемой по Риману на множестве A, если функция $f^*(x)$ интегрируема по параллелепипеду $\mathcal{C}$. По определению полагаем

$$\int\limits_A f(x)\,dx = \int\limits_{\mathcal{C}} f^*(x)\,dx.$$

ТЕОРЕМА 2.2. *В приведенном выше определении интегрируемость функции $f(x)$ по множеству A и ее интеграл не зависят от выбора параллелепипеда $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на ограниченном, открытом, измеримом по Жордану множестве A. Рассмотрим параллелепипеды B и $\mathcal{C}$ такие, что $A \subset B$, $A \subset \mathcal{C}$. Достаточно рассмотреть случай, когда параллелепипед $B \subset \mathcal{C}$. Покажем, что интегралы от функции

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \overline{A} \\ 0, & x \in \mathcal{C} \setminus \overline{A} \end{cases}$$

по B и по $\mathcal{C}$ совпадают. Положим

$$I = \int\limits_B f^*(x)\,dx.$$

Покажем, что

$$I = \inf_P \overline{S}(f^*, P),$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным разбиениям P параллелепипеда $\mathcal{C}$.

1) Пусть P' — произвольное разбиение параллелепипеда $\mathcal{C}$. Через P обозначим разбиение параллелепипеда B, порожденное разбиением P'. Тогда

$$\overline{S}(f^*, P') = \overline{S}(f^*, P) \geq I.$$

2) Так как

$$I = \inf \overline{S}(f^*, P),$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным разбиениям параллелепипеда B, то для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение P, такое что

$$\overline{S}(f^*, P) \leq I + \varepsilon\,. \tag{2}$$

Пусть P' — разбиение параллелепипеда $\mathcal{C}$, такое что каждый параллелепипед разбиения P является параллелепипедом разбиения P'. Обозначим

1. T — параллелепипеды разбиения P' : $T \cap \partial A \neq \emptyset$;
2. T' — параллелепипеды разбиения P' : $T' \cap \partial A = \emptyset$ и $T' \subset B$;
3. T'' — параллелепипеды разбиения P' : $T'' \cap \partial A = \emptyset$ и $T'' \subset \overline{\mathcal{C} \setminus B}$.

Будем считать, что

$$\sum_T v(T) < \varepsilon\,.$$

Учитывая, что множество A — измеримо по Жордану, последнее легко достигается за счет выбора разбиения P.

Таким образом получаем

$$\overline{S}(f^*, P) = \sum_T M_T(f^*)v(T) + \sum_{T'} M_{T'}(f^*)v(T') + \sum_{T''} M_{T''}(f^*)v(T'') \leq$$

$$\leq \sup_{\overline{A}} |f| \sum_T v(T) + \overline{S}(f^*, P) \leq I + (1 + \sup_{\overline{A}} |f|)\varepsilon\,.$$

В результате получаем требуемое. $\square$

ТЕОРЕМА 2.3. *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ ограничено, открыто и измеримо по Жордану, а функция $y = f(x)$ определена на множестве $\overline{A}$, ограничена и её множество точек разрыва B имеет нулевой объем. Тогда функция f интегрируема по множеству A.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}$ — параллелепипед, содержащий множество $\overline{A}$. Рассмотрим функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \overline{A} \\ 0, & x \in \mathcal{C} \setminus \overline{A}. \end{cases}$$

Понятно, что множество точек разрыва функции $f^*(x)$ лежит в $\partial A \cup B$. Следовательно, множество точек разрыва функции $f^*(x)$ имеет нулевой объем. Тогда функция $f^*(x)$ в силу теоремы 1.2 интегрируема по $\mathcal{C}$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть A — ограниченное, замкнутое, измеримое по Жордану связное множество из $\mathbb{R}^n$. Пусть C — замкнутый параллелепипед, содержащий A. Рассмотрим разбиение P параллелепипеда C на параллелепипеды T. В каждом параллелепипеде T выберем произвольную точку $\xi_T \in T$.

Величина

$$\sum_P f^*(\xi_T)v(T)$$

называется интегральной суммой Римана функции $f(x)$, соответствующей разбиению P с отмеченными точками ξ_T. Так же как и для интеграла по отрезку доказывается, что

$$\sup \underline{S}(f^*, P) = \inf \overline{S}(f^*, P)$$

тогда и только тогда, когда существует

$$\lim_{\mu(P)\to 0} \sum_P f^*(\xi_T)v(T),$$

где

$$\mu(P) = \max_T (\sup_{x',x''\in T} |x' - x''|)$$

— мелкость разбиения.

Далее n-мерным объемом измеримого по Жордану множества A будем называть величину

$$v(A) = \int_A dx.$$

2.3. Свойства интеграла по множеству

ТЕОРЕМА 2.4. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ — интегрируемы по параллелепипеду $\mathcal{C}$, а α – произвольное вещественное число. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$ и $\alpha f(x)$ – интегрируемы, причем справедливы равенства*

1. $\int\limits_{\mathcal{C}} \alpha f(x)\,dx = \alpha \int\limits_{\mathcal{C}} f(x)\,dx;$

2. $\int\limits_{\mathcal{C}} (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_{\mathcal{C}} f(x)\,dx \pm \int\limits_{\mathcal{C}} g(x)\,dx.$

Доказательство. 1) Рассмотрим произвольное разбиение параллелепипеда $\mathcal{C}$. Тогда для $\alpha \geq 0$ выполнено

$$\overline{S}(\alpha f, P) = \sum_T M_T(\alpha f) v(T) = \alpha \sum_T M_T(f) v(T) = \alpha \overline{S}(f, P). \qquad (3)$$

Аналогично

$$\underline{S}(\alpha f, P) = \alpha \underline{S}(f, P).$$

Точно так же, для $\alpha < 0$ выполнено

$$\overline{S}(\alpha f, P) = \sum_T M_T(\alpha f) v(T) = \alpha \sum_T m_T(f) v(T) = \alpha \underline{S}(f, P), \qquad (4)$$

и

$$\underline{S}(\alpha f, P) = \alpha \overline{S}(f, P).$$

Таким образом, из интегрируемости функции $f(x)$ получаем интегрируемость $\alpha f(x)$. Взяв точную нижнюю грань по всем разбиениям P в равенстве (3), получаем

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \alpha f(x)\,dx = \alpha \int\limits_{\mathcal{C}} f(x)\,dx.$$

Равенство при $\alpha < 0$ доказывается аналогично.
2) Покажем интегрируемость функции $f(x) + g(x)$. Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы, то существуют P' и P'', такие что

$$\overline{S}(f, P') - \underline{S}(f, P') < \varepsilon\,, \qquad \overline{S}(g, P'') - \underline{S}(g, P'') < \varepsilon\,.$$

Пусть P — разбиение, являющееся измельчением P' и P''. Тогда

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \varepsilon\,, \qquad \overline{S}(g, P) - \underline{S}(g, P) < \varepsilon\,.$$

Пусть T — параллелепипед разбиения P. Тогда

$$\overline{S}(f + g, P) - \underline{S}(f + g, P) =$$

$$= \sum_T M_T(f+g)v(T) - \sum_T m_T(f+g)v(T) \le$$
$$\le \sum_T (M_T(f) + M_T(g))v(T) - \sum_T (m_T(f) + m_T(g))v(T) =$$
$$= \overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) + \overline{S}(g,P) - \underline{S}(g,P) < 2\varepsilon\,.$$

Равенство

$$\int\limits_{\mathcal{C}} (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_{\mathcal{C}} f(x)\,dx \pm \int\limits_{\mathcal{C}} g(x)\,dx$$

докажите самостоятельно. □

ТЕОРЕМА 2.5. *Пусть $f(x), g(x)$ — произвольные функции, интегрируемые на ограниченном, замкнутом, измеримом по Жордану множестве $A \subset \mathbb{R}^n$ и $\alpha = \mathrm{const}$. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$ и $\alpha f(x)$ — интегрируемы, причем справедливы равенства*

1. $\int\limits_A \alpha f(x)\,dx = \alpha \int\limits_A f(x)\,dx$;
2. $\int\limits_A (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_A f(x)\,dx \pm \int\limits_A g(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{C}$ — параллелепипед, содержащий множество A. Положим

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \overline{A} \\ 0, & x \in \mathcal{C} \setminus \overline{A} \end{cases}$$

и

$$g^*(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \overline{A} \\ 0, & x \in \mathcal{C} \setminus \overline{A}. \end{cases}$$

Тогда по теореме 2.4, получаем

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \alpha f^*(x)\,dx = \alpha \int\limits_{\mathcal{C}} f^*(x)\,dx,$$

и, стало быть,

$$\int\limits_A \alpha f(x)\,dx = \alpha \int\limits_A f(x)\,dx.$$

Точно так же

$$\int\limits_A (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_{\mathcal{C}} (f^*(x) \pm g^*(x))\,dx =$$

$$= \int\limits_{C} f^*(x)\,dx \pm \int\limits_{C} g^*(x)\,dx = \int\limits_{A} f(x)\,dx \pm \int\limits_{A} g(x)\,dx.$$

□

ТЕОРЕМА 2.6. *(свойство аддитивности). Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на непересекающихся множествах $A \subset \mathbb{R}^n$ и $B \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $f(x)$ интегрируема на множестве $A \cup B$ и*

$$\int\limits_{A\cup B} f(x)\,dx = \int\limits_{A} f(x)\,dx + \int\limits_{B} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим параллелепипед C, содержащий множество $A \cup B$. Определим функции

$$f_1^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$$f_2^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$

$$f_3^*(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \cup B \\ 0, & x \notin A \cup B. \end{cases}$$

Так как A и B не пересекаются, то

$$f_3^*(x) = f_1^*(x) + f_2^*(x).$$

Следовательно,

$$\int\limits_{A\cup B} f(x)\,dx = \int\limits_{C} f_3^*(x)\,dx = \int\limits_{C} f_1^*(x)\,dx + \int\limits_{C} f_2^*(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{A} f(x)\,dx + \int\limits_{B} f(x)\,dx.$$

□

§3. Сведение кратного интеграла к повторному

3.1. Случай параллелепипеда

ТЕОРЕМА 3.1 (теорема Фубини[2]). *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ — замкнутые параллелепипеды и $z = f(x, y)$ — функция $(n+m)$ переменных, интегрируемая по параллелепипеду $A \times B$. Предположим, что $z = f(x, y)$ интегрируема по параллелепипеду B при любом фиксированном $x \in A$. Пусть*

$$g(x) = \int\limits_B f(x, y)\, dy.$$

Тогда функция $g(x)$ интегрируема по A, причем

$$\int\limits_A g(x)\, dx = \int\limits_{A\times B} f(x, y)\, dx\, dy.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Вообще-то данная теорема была доказана задолго до появления известной в теории функций теоремы Фубини, частным случаем которой она является. Однако в течение ряда лет, теоремы, позволяющие сводить вычисление кратных интегралов к вычислению повторных, принято называть теоремами типа теоремы Фубини.

Доказательство. Через P_A и P_B будем обозначать разбиения параллелепипедов A и B, соответственно. Пусть T_A — параллелепипед разбиения P_A. Разбиения P_A и P_B порождают разбиения P параллелепипеда $A \times B$, причем $T_A \times T_B$ — параллелепипед разбиения P.

Тогда

$$\underline{S}(f, P) = \sum_{T_A, T_B} m_{T_A\times T_B}(f) v(T_A \times T_B) = \sum_{T_A, T_B} m_{T_A\times T_B}(f) v(T_A) v(T_B) =$$

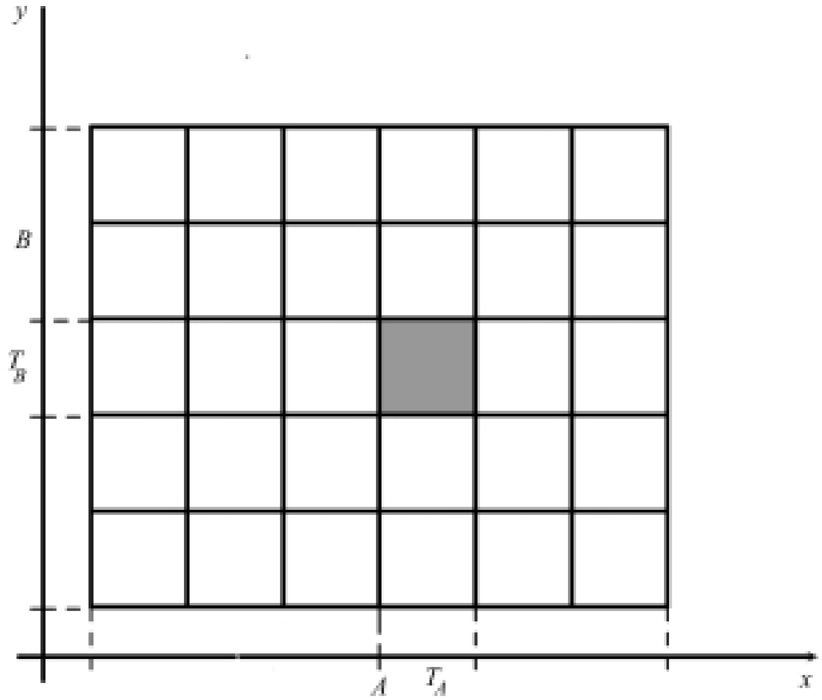
$$= \sum_{T_A} \left(\sum_{T_B} m_{T_A\times T_B}(f) v(T_B) \right) v(T_A). \tag{1}$$

Заметим, что для любого $x \in T_A$ справедливо неравенство:

$$m_{T_A\times T_B}(f) = \inf_{x\in T_A,\ y\in T_B} f(x, y) \le \inf_{y\in T_B} f(x, y).$$

---

[2]Фубини Гвидо (19.1.1879 – 6.6.1943). Род. в Венеции (Италия). Научные исследования Фубини относятся к теории функций и геометрии.



Тогда

$$\sum_{T_B} m_{T_A\times T_B}(f)v(T_B) \le \sum_{T_B} \inf_{y\in T_B} f(x,y)v(T_B) \le$$

$$\le \int\limits_B f(x,y)\,dy = g(x).$$

В силу произвольности x, из данного неравенства получаем

$$\sum_{T_B} m_{T_A\times T_B}(f)v(T_B) \le \inf_{x\in T_A} g(x).$$

Используя равенство (1) имеем

$$\underline{S}(f,P) \le \sum_{T_A} \inf_{x\in T_A} g(x)v(T_A). \tag{2}$$

Аналогично

$$\overline{S}(f,P) \ge \sum_{T_A} \sup_{x\in T_A} g(x)v(T_A). \tag{3}$$

Так как функция $f(x,y)$ интегрируема по $A\times B$, то для любого $\varepsilon>0$ существует разбиение P такое, что

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \varepsilon\,,$$

а из (2) и (3) получаем

$$\sum_{T_A} \sup_{x\in T_A} g(x)v(T_A) - \sum_{T_A} \inf_{x\in T_A} g(x)v(T_A) < \varepsilon\,.$$

Таким образом, $g(x)$ интегрируема по A. Из (2) имеем

$$\underline{S}(f,P) \le \sum_{T_A} \inf_{x\in T_A} g(x)v(T_A) \le \int\limits_A g(x)\,dx.$$

Переходя в данном неравенстве к точной верхней грани по разбиениям P, получаем

$$\int\limits_{A\times B} f(x,y)\,dxdy \le \int\limits_A g(x)\,dx.$$

Из (3) аналогично

$$\int\limits_{A\times B} f(x,y)\,dxdy \ge \int\limits_A g(x)\,dx.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_A g(x)\,dx.$$

□

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ — замкнутые параллелепипеды и $z = f(x,y)$ — непрерывная функция на $A \times B$. Тогда*

$$\int\limits_A dx \int\limits_B f(x,y)\,dy = \int\limits_B dy \int\limits_A f(x,y)\,dx = \int\limits_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Доказательство. Так как функция $f(x,y)$ непрерывна на $A\times B$, то она интегрируема на $A\times B$. Аналогично, из непрерывности по каждой переменной x и y, вытекает интегрируемость $f(x,y)$ по x и по y на B. По теореме 3.1 получаем нужное. □

ПРИМЕР 1. Вычислить $\int x_1x_2\dots x_n\,dx_1\,dx_2\dots dx_n$ по $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\dots\times[a_n,b_n]$. Применяя теорему 3.2, получаем

$$\int\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\dots\times[a_n,b_n]} x_1x_2\dots x_n\,dx_1\,dx_2\dots dx_n =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{[a_2,b_2]\times\ldots\times[a_n,b_n]} x_1 x_2 \ldots x_n \, dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} x_1 x_2 \ldots x_n \, dx_n =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} x_1 \, dx_1 \int_{a_2}^{b_2} x_2 \, dx_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} x_n \, dx_n = \frac{b_1^2 - a_1^2}{2} \frac{b_2^2 - a_2^2}{2} \ldots \frac{b_n^2 - a_n^2}{2}.$$

$\square$

3.2. Случай произвольного множества

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ — замкнутые параллелепипеды, $G \subset A \times B$ — произвольное измеримое по Жордану множество, а функция $z = f(x, y)$ — непрерывна на G. Предположим, что для любого $x \in A$ множество $G_x = \{y \in B : (x, y) \in G\}$ является измеримым по Жордану. Тогда*

$$\int_G f(x, y) \, dx \, dy = \int_A dx \int_{G_x} f(x, y) \, dy. \qquad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $G_x = \emptyset$, то полагаем

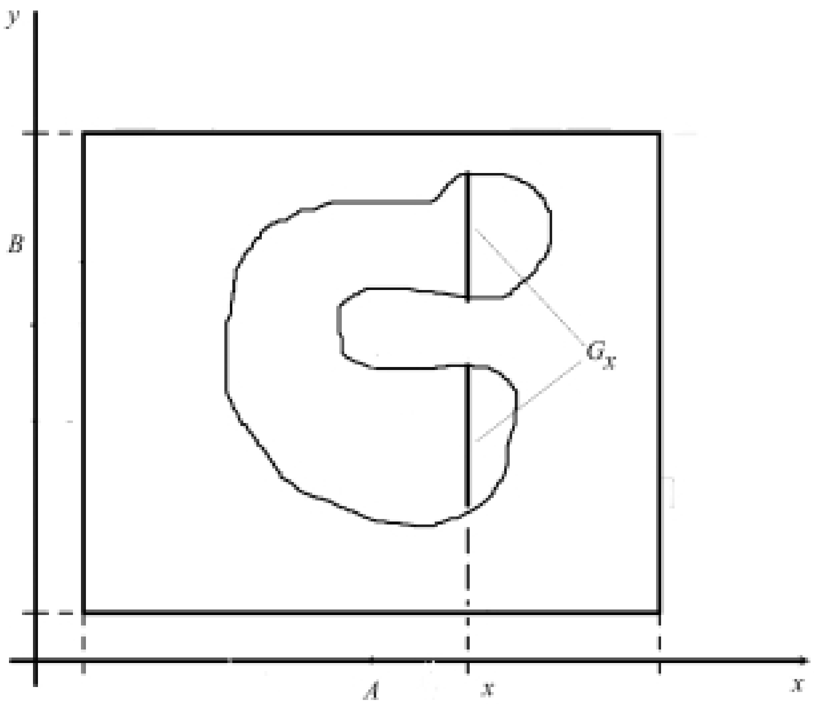
$$\int_{G_x} f(x, y) \, dy = 0.$$

Доказательство. Определим функцию

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \in (A \times B) \setminus \overline{G}. \end{cases}$$

Так как функция $f(x, y)$ непрерывна по y при заданном x и множество G_x измеримо по Жордану, то функция $f^*(x, y)$ интегрируема по B при фиксированном $x \in A$. При этом

$$\int_B f^*(x, y) \, dy = \int_{G_x} f(x, y) \, dy. \qquad (5)$$



В силу тех же аргументов, функция f^* интегрируема на $A\times B$ и

$$\int\limits_{A\times B} f^*(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{6}$$

Тогда

$$\int\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{A\times B} f^*(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{A} dx \int\limits_{B} f^*(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{A} dx \int\limits_{G_x} f(x,y)\,dy.$$

Учитывая (2) и (3), получаем требуемое. $\square$

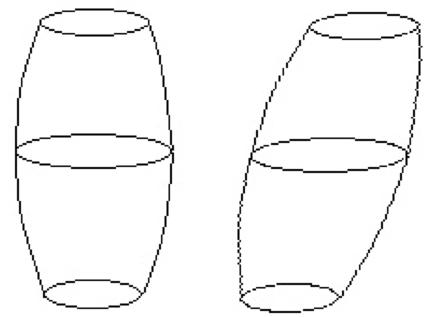
СЛЕДСТВИЕ (принцип Б. Кавальери[3]). Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы две фигуры одинаковой высоты (по переменной x_3) A и B, имеющие объемы V_1 и V_2.

Если для любого t сечения

$$S_A(t) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in A: \; x_3 = t\},$$

$$S_B(t) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in B: \; x_3 = t\}$$

имеют одинаковые площади, то $V_1 = V_2$.



Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что проекции A и B на ось Ox_3 равны отрезку $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$V_1 = \int\limits_A dx_1\,dx_2\,dx_3 = \int\limits_\alpha^\beta dx_3 \int\limits_{S_A(x_3)} dx_1\,dx_2 =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta dx_3 \int\limits_{S_B(x_3)} dx_1\,dx_2 = \int\limits_B dx_1\,dx_2\,dx_3 = V_2.$$

$\square$

ПРИМЕР 2. В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассмотрим множества

$$G = \{(x, y) : \ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\},$$

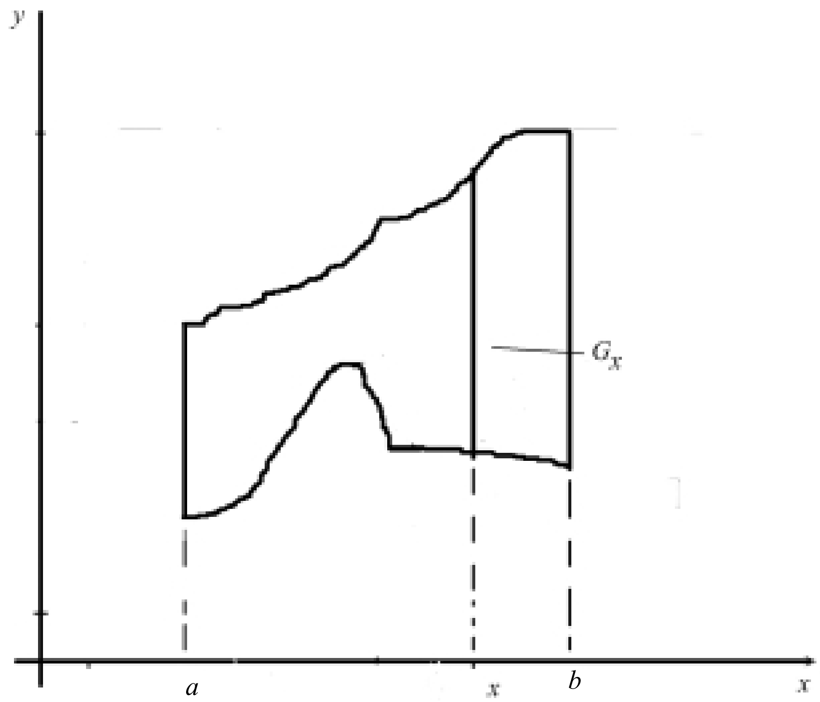
$$G_x = [\varphi(x), \psi(x)].$$

Тогда

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy.$$

$\square$

[3]Кавальери Бонавентура (1598 – 30.11.1647). Род. в Милане (Италия). В своем основном труде "Геометрия" он развил новый метод определения площадей и объемов, так называемый метод неделимых.



ПРИМЕР 3.

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,dx\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} |xy|\,dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} |x|\,dx \left(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} (-y)\,dy + \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy \right) =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} |x| \left(\frac{1-x^2}{2} + \frac{1-x^2}{2} \right) dx = \int\limits_{-1}^{1} |x|(1-x^2)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{-1}^{0} x(1-x^2)\,dx + \int\limits_{0}^{1} x(1-x^2)\,dx = -\int\limits_{-1}^{0} (x-x^3)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{0}^{1} (x-x^3)\,dx = -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{2}.$$

□

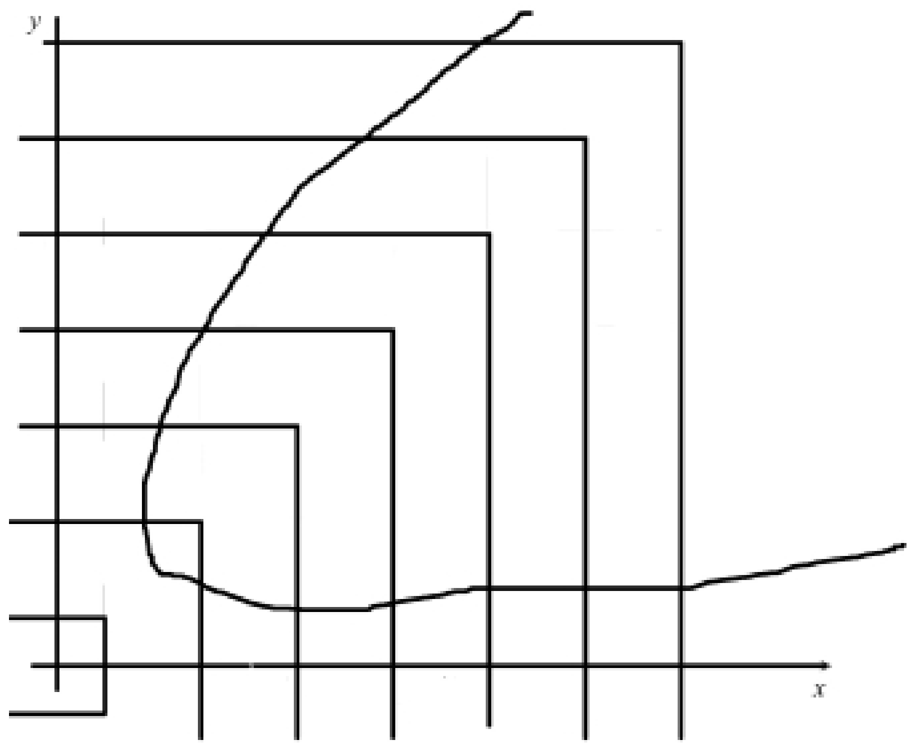
§4. Понятие о несобственном кратном интеграле

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ — неограниченная область и $f(x)$ — функция, заданная в D. Рассмотрим последовательность ограниченных открытых множеств $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$, таких что выполнены свойства

1. $\cup_{i=1}^{\infty} \Delta_i = \mathbb{R}^n$ — есть все пространство $\mathbb{R}^n$;

2. для всех $i = 1,\ 2,\ \ldots$ выполнено $\overline{\Delta}_i \subset \Delta_{i+1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Система множеств $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ со свойствами 1) и 2) называются исчерпанием пространства $\mathbb{R}^n$.



Всюду далее будем предполагать, что множества $D \cap \Delta_i$ для всех i измеримы по Жордану и функция $f(x)$ интегрируема на $D \cap \Delta_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Функция $f(x)$ называется интегрируемой в несобственном смысле в неограниченной области D, если существует

$$\lim_{i \to +\infty} \int\limits_{D \cap \Delta_i} f(x)\, dx,$$

не зависящий от выбора исчерпания $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$. Данный предел называется несобственным интегралом функции $f(x)$ по области D. При этом, если указанный предел конечен, то несобственный интеграл

$$\int\limits_D f(x)\,dx$$

называется сходящимся, а если не существует или равен $\pm\infty$, то интеграл называется расходящимся.

ТЕОРЕМА 4.1. *Если функция $f(x)$ неотрицательна и существует предел*

$$\lim_{i\to+\infty}\int\limits_{D\cap\Delta_i} f(x)\,dx$$

хотя бы для одного исчерпания $\{\Delta_i\}$, то этот предел существует для любого исчерпания $\{\Delta_i'\}$ и не зависит от его выбора.

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, в случае когда функция не меняет знак, достаточно проверить интегрируемость для какой-нибудь последовательности $\{\Delta_i\}$.

Доказательство. Пусть

$$A=\lim_{i\to+\infty}\int\limits_{D\cap\Delta_i} f(x)\,dx,$$

где $\{\Delta_i\}$ — некоторое исчерпание $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим произвольное исчерпание $\{\Delta_i'\}$. Ясно, что

$$\int\limits_{D\cap\Delta_{i+1}} f(x)\,dx \ge \int\limits_{D\cap\Delta_i} f(x)\,dx.$$

Очевидно, что для любого i существует $n:\ \Delta_i'\subset\Delta_n$. Так как функция $f(x)\ge 0$, то

$$\int\limits_{D\cap\Delta_i'} f(x)\,dx \le \int\limits_{D\cap\Delta_n} f(x)\,dx \le A. \tag{1}$$

Таким образом, существует

$$A_1=\lim_{i\to+\infty}\int\limits_{D\cap\Delta_i'} f(x)\,dx \le A.$$

Зафиксируем Δ_n. Тогда в силу условий 1) и 2) на систему $\{\Delta_n\}$ найдется $i = i(n)$: $\forall\ i > i(n)$ выполнено $\Delta_n \subset \Delta_i'$. Тогда так как $f(x) \geq 0$, то

$$\int\limits_{D\cap\Delta_n} f(x)\,dx \leq \int\limits_{D\cap\Delta_i'} f(x)\,dx \leq A_1. \tag{2}$$

В силу произвольности n, имеем $A \leq A_1$. Из доказанных неравенств следует, что $A = A_1$. Теорема доказана. $\square$

ПРИМЕР 1. Вычислить интеграл:

$$\iint\limits_D e^{-x-y}\,dx\,dy,$$

где $D = \{(x,y):\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.

Положим $\Delta_i = \{(x,y):\ |x| < i,\ |y| < i\}$. Тогда

$$\iint\limits_D e^{-x-y}\,dx\,dy = \lim_{i\to+\infty} \iint\limits_{D\cap\Delta_i} e^{-x-y}\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{i\to+\infty} \int\limits_0^i e^{-x}\,dx \int\limits_0^i e^{-y}\,dy = \lim_{i\to+\infty} \int\limits_0^i e^{-x}\,dx\,\left(-e^{-y}\right)|_0^i =$$

$$= \lim_{i\to+\infty} \int\limits_0^i \left(-e^{-x-i} + e^{-x}\right)\,dx = \lim_{i\to+\infty} (e^{-x-i}|_0^i - e^{-x}|_0^i) =$$

$$= \lim_{i\to+\infty} (e^{-2i} - e^{-i} - e^{-i} + 1) = 1.$$

$\square$

Пусть теперь D область в $\mathbb{R}^n$ и $x_0 \in D$. Пусть в $D \setminus \{x_0\}$ задана функция $y = f(x)$. Зададим произвольно последовательность областей Δ_i, такую что

1) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots$;
2) $\bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta_i = \{x_0\}$.

Далее будем считать, что Δ_i измеримы по Жордану. Множество $D \setminus \Delta_i$ измеримо по Жордану, если потребовать измеримость области D. Пусть функция $f(x)$ интегрируема по множеству $D \setminus \Delta_i$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Функция $f(x)$, определенная в $D \setminus \{x_0\}$, называется интегрируемой в несобственном смысле, если существует

$$\lim_{i\to+\infty} \int\limits_{D\setminus\Delta_i} f(x)\,dx,$$

не зависящий от выбора $\{\Delta_i\}$. Если данный предел конечен, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае — расходящимся.

§5. Теорема о среднем

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть D — ограниченная замкнутая область в $\mathbb{R}^n$, измеримая по Жордану, $f(x)$ — непрерывная функция в D. Тогда существует $\xi \in D$ такая, что*

$$\int\limits_D f(x)\,dx = f(\xi)v(D),$$

где $v(D)$ – объем множества D.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве, то она достигает своей точной нижней и точной верхней грани, т.е. найдутся точки $x', x'' \in D$:

$$f(x') = m = \inf_{x\in D} f(x), \qquad f(x'') = M = \sup_{x\in D} f(x).$$

Тогда выполнены следующие неравенства

$$mv(D) \le \int\limits_D f(x)\,dx \le Mv(D)$$

или

$$m \le \frac{1}{v(D)} \int\limits_D f(x)\,dx \le M.$$

Соединим точки x' и x'' ломанной, лежащей в D. Тогда по теореме о промежуточных значениях, функция $f(x)$ принимает на этой ломанной все значения между m и M. В частности, существует точка, принадлежащая ломанной, такая что

$$f(\xi) = \frac{1}{v(D)} \int\limits_D f(x)\,dx, \quad \text{т.е.} \quad \int\limits_D f(x)\,dx = f(\xi)v(D).$$

$\square$

§6. Криволинейные интегралы

6.1. Криволинейный интеграл I рода

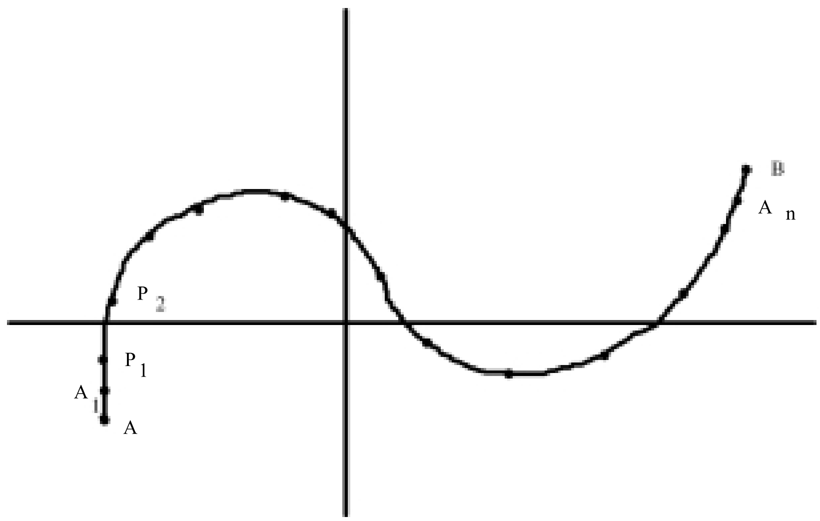
Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана кривая γ, т.е. образ непрерывной, взаимно однозначной вектор-функции:

$$\overline{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad t \in [a, b].$$

Пусть $A = \overline{r}(a)$, $B = \overline{r}(b)$. Предположим, что кривая γ спрямляема. Рассмотрим разбиение кривой γ точками: $A = p_0, p_1, \ldots, p_n = B$, такими что p_i принадлежит дуге $\widehat{p_{i-1}p_{i+1}}$, $i = \overline{1, n-1}$. Через ε_i обозначим длину дуги $\widehat{p_{i-1}p_i}$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть на кривой γ задана функция $f = f(M)$, где $M \in \gamma$. Выберем на каждой дуге $\widehat{p_{i-1}p_i}$ точку A_i и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(A_i)\varepsilon_i.$$



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Если существует величина

$$\lim_{\mu_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(A_i)\varepsilon_i,$$

где $\mu_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \varepsilon_i$, а предел не зависит от разбиения и от выбора точек $\{A_i\}$, то функция $f(M)$ называется интегрируемой по кривой γ, а значение предела называется криволинейным интегралом I-го рода и обозначается через

$$\int_{\gamma} f(M)\, ds.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Подчеркиваем, что в приведенном определении, не играет никакой роли направление, которое может быть указано на γ.

Пусть $M \in \gamma$. Тогда точке M соответствует единственное число s, равное длине дуги $\overset{\frown}{AM}$, т.е. $(x(s), y(s)) = M$. Рассмотрим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(A_i)\varepsilon_{\,i} = \sum_{i=1}^{n} f(A_i)(s_i - s_{i-1}),$$

где s_i — длина дуги $\overset{\frown}{AP_i}$. Если $\overline{s}_i$ — длина дуги $\overset{\frown}{AA_i}$, то получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} f(A_i)\varepsilon_{\,i} = \sum_{i=1}^{n} f(x(\overline{s}_i), y(\overline{s}_i))(s_i - s_{i-1}).$$

Таким образом, интегральная сумма в определении криволинейного интеграла совпадает с интегральной суммой функции $f(x(s), y(s))$ по отрезку $[0, |\gamma|]$, где $|\gamma|$ – длина γ. Следовательно, существование одного из интегралов влечет существование другого и, в силу данного равенства, получаем

$$\int\limits_{\gamma} f(M)\, ds = \int\limits_{0}^{|\gamma|} f(x(s), y(s))\, ds.$$

Пусть функции $\varphi(t), \psi(t)$ непрерывно дифференцируемы и $(\varphi(t), \psi(t))$ взаимно однозначное отображение, т.е. каждому значению $t \in [a, b]$ соответствует единственная точка $M \in \gamma$ и обратно, для любой точки $M \in \gamma$ существует единственное $t \in [a, b]$ такое, что $M = (\varphi(t), \psi(t))$. Из условия на функции $\varphi(t), \psi(t)$ следует, что γ является спрямляемой.

Пусть $s(t)$ — длина дуги $\overset{\frown}{AM(t)}$, $M(t) = (\varphi(t), \psi(t))$. Тогда

$$s'(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)},$$

если возрастание параметра t соответствует возрастанию параметра s (см. пункт "Вычисление длины дуги в декартовых координатах" параграфа "Кривые и дуги" главы "Приложения определенного интеграла"). Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(M)\, ds = \int\limits_{0}^{|\gamma|} f(x(s), y(s))\, ds =$$

$$= \int_a^b f(x(s(t)), y(s(t)))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt =$$

$$= \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

ПРИМЕР 1. Если $\gamma = (x, y)$, где $x \in [a, b]$ и $y = y(x)$, то

$$\int_\gamma f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx.$$

$\square$

ПРИМЕР 2. Вычислить интеграл: $\int\limits_\gamma xy\, ds$, где γ — четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при $x > 0,\ y > 0$. Параметризуем кривую $\gamma:\ x = x,\ y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},\ 0 \le x \le a$. Тогда

$$y' = -\frac{b}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{2x}{a^2} = -\frac{b}{a^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} x,$$

$$\sqrt{1 - y'^2} = \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a + \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}} = \sqrt{\frac{a^2(a^2 - x^2) + b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}{a^2(a^2 - x^2)}}.$$

Тогда

$$\int_\gamma xy\, ds = \int_0^a x\frac{b}{a^2}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\sqrt{\frac{a^4 - x^2(a^2 - b^2)}{a^2(a^2 - x^2)}}\, dx =$$

$$= \frac{b}{a^2}\int_0^a x\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}\, dx = \left|z = a^4 - (a^2 - b^2)x^2\right| =$$

$$-\frac{b}{2(a^2 - b^2)a^2}\int_0^a \sqrt{z}\, dz = -\frac{b}{2a^2(a^2 - b^2)}\left(\frac{2}{3}\sqrt{z^3}\,\Big|_{a^4}^{a^2b^2}\right) =$$

$$= \frac{b}{3a^2(a^2-b^2)}(a^6 - a^3b^3) = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

Заметим, что данную кривую можно параметризовать и другими способами, возможно более рациональными для вычисления указанного интеграла. Попробуйте сделать это. □

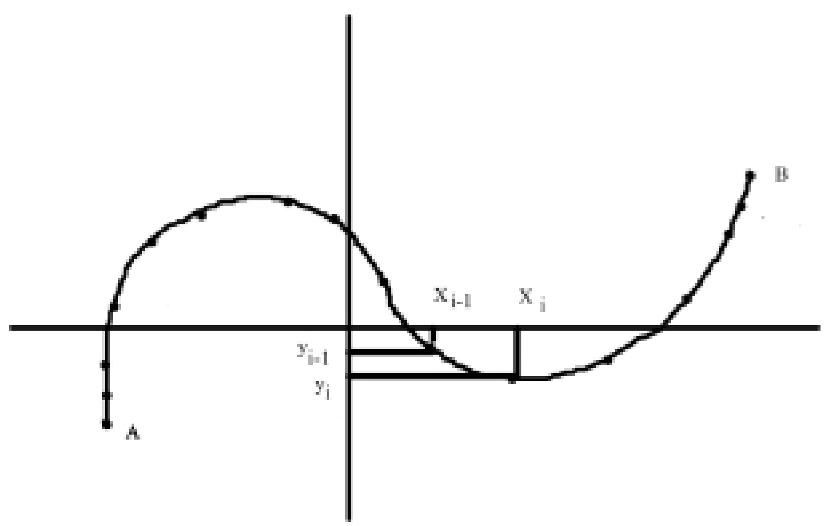
6.2. Криволинейный интеграл II рода

Пусть дана кривая γ на плоскости. Будем говорить, что γ ориентирована, если определено начало кривой и конец. Пусть A — начало γ, B — конец. В обозначениях предыдущего пункта составим интегральные суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} f(A_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(A_i)\Delta y_i, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1},$$

где (x_i, y_i) — координаты точки P_i.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. Если существуют величины

$$\lim_{\mu_n\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(A_i)\Delta x_i, \quad \lim_{\mu_n\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(A_i)\Delta y_i,$$

и не зависят от выбора разбиения кривой γ, то значения таких пределов называют криволинейными интегралами II-го рода и обозначают

$$\int_\gamma f(x,y)\,dx, \quad \int_\gamma f(x,y)\,dy.$$

Если заданы функции $P(x,y),\ Q(x,y)$ на кривой γ, то выражение

$$\int_\gamma P(x,y)\,dx + \int_\gamma Q(x,y)\,dy \equiv \int_\gamma P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

также называют криволинейным интегралом II-го рода.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно справедливо следующее свойство

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = -\int_{\widehat{BA}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Последнее подчеркивает отличие криволинейных интегралов II-го рода от интегралов I-го рода.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть кривая γ задана вектор-функцией $(\varphi(t),\psi(t))$, где $t\in[a,b]$, а функция $f(x,y)$ – непрерывна на γ. Пусть, кроме того,*

1. *$\varphi(t),\ \psi(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции на $[a,b]$;*
2. *выполнено $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$.*

Если $(\varphi(a),\psi(a))=A,\ (\varphi(b),\psi(b))=B$, то

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство. Обозначим

$$I=\int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$. Тогда найдется $\delta>0$ такое, что для всех разбиений P отрезка $[a,b]$, $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$, для которых $\mu(P)=\max\limits_{0\le i\le n-1}|t_{i+1}-t_i|<\delta$, и всех точек $\xi_i\in[t_i,t_{i+1}]$

выполнено

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i),\psi(\xi_i))\varphi'(\xi_i)\Delta t_i - I\right| < \varepsilon\,, \tag{1}$$

где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Так как функция $\varphi'(t)$ непрерывна на $[a,b]$, то она равномерно непрерывна, т.е. $\exists\ \delta_1(\varepsilon\,) > 0:\ \forall\ t', t'',\ |t' - t''| < \delta_1$ выполнено

$$|\varphi'(t') - \varphi'(t'')| < \varepsilon\,. \tag{2}$$

Рассмотрим разбиение P_1, такое что $\mu(P_1) < \delta_2 = \min(\delta, \delta_1)$. Тогда

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i),\psi(\xi_i))(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) - I\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{i=1}^{n} [f(\varphi(\xi_i),\psi(\xi_i))(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) - f(\varphi(\xi_i),\psi(\xi_i))\varphi'(\xi_i)\Delta t_i]\right| +$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i),\psi(\xi_i))\varphi'(\xi_i)\Delta t_i - I\right| \le$$

$$\le \varepsilon\, + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i),\psi(\xi_i))((\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) - \varphi'(\xi_i)\Delta t_i)\right|. \tag{3}$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях $\exists\, \theta_i \in [t_i, t_{i+1}]$ такие, что

$$\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i) = \varphi'(\theta_i)\Delta t_i.$$

Тогда из неравенств (2), (3), используя

$$|\theta_i - \xi_i| < \delta_2,$$

получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i),\psi(\xi_i))(\varphi(t_{i+1}) - \varphi(t_i)) - I\right| \le$$

$$\le \varepsilon\, + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i),\psi(\xi_i))(\varphi'(\theta_i) - \varphi'(\xi_i))\Delta t_i\right| \le$$

$$\le \varepsilon\, + \sup_{(x,y)\in\gamma} |f(x,y)|\varepsilon\,(b-a) = \varepsilon\,(1 + \sup_{(x,y)\in\gamma} |f(x,y)|(b-a)).$$

Таким образом,

$$\lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\xi_i),\psi(\xi_i))\Delta x_i = \int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

что и доказывает утверждение теоремы. □

Аналогичным образом доказывается формула

$$\int\limits_{\widehat{AB}} f(x,y)\,dy = \int\limits_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\,dt.$$

Окончательно получаем

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_a^b [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\,dt.$$

6.3. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру

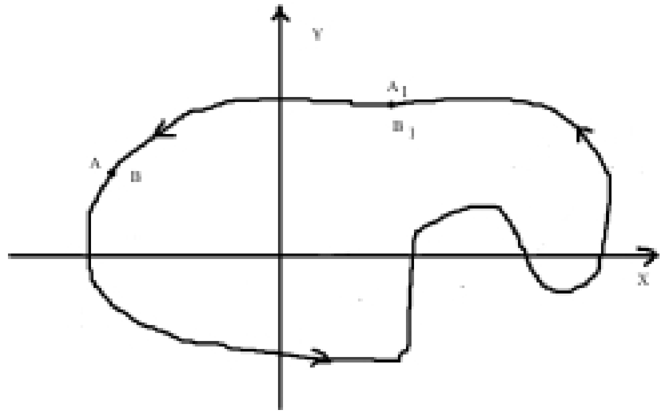
Рассмотрим замкнутую кривую K, т.е. кривую в которой начало A совпадает с концом B. Если задано направление обхода контура K, то однозначно определен интеграл:

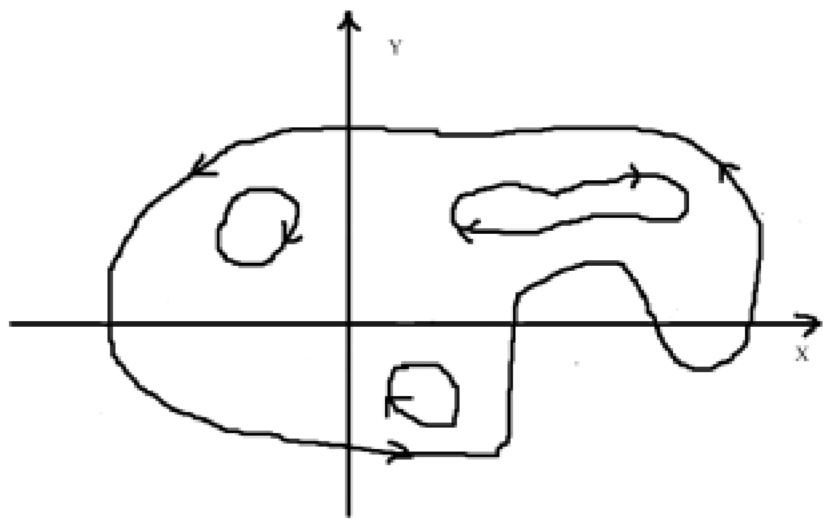
$$\int\limits_K f(x,y)\,dx. \tag{4}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что интеграл (4) не зависит от выбора начальной и конечной точек кривой K. Для доказательства данного факта достаточно рассмотреть разбиение контура K такое, что точки A, B, A', B' являются точками деления. Сделайте это самостоятельно.

Если задан контур K, но не определено направление, то даже задание начальной и конечной точек не определяет направление на K и (4) однозначно не вычисляется.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.3. Пусть K — контур (или несколько контуров) ограничивающий область D. Говорят, что контур K положительно ориентирован (при правой системе координат), если на этом контуре выбрано такое направление обхода, при котором область D остается слева. Контур K ориентирован отрицательно, если на нем выбрано направление обхода, при котором область D остается справа.





ЗАМЕЧАНИЕ. Само расположение координатных осей на плоскости всегда ставится в связь с ее ориентацией: ось Oy получается из оси Ox поворотом ее на $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки при правой ориентации плоскости и по часовой — при левой. В первом случае сама координатная система называется правой, а во втором — левой.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если задан контур K и не указано направление его обхода, то по определению считают, что он является границей ограниченной области.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если путь интегрирования есть контур K и не указано направление его обхода, то под символом

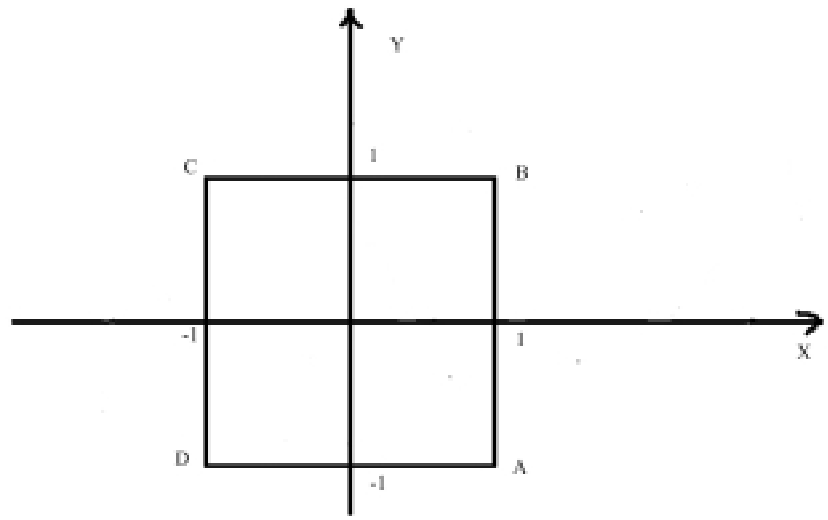
$$\int\limits_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad (5)$$

понимается интеграл, взятый в положительном направлении обхода. Отметим, что при изменении направления обхода, знак (5) меняется на противоположный.

ПРИМЕР 3. Пусть K — граница квадрата, $|x| < 1,\ |y| < 1$. Вычислим интеграл

$$\int\limits_K \sin(xy)\,dx + \cos(xy)\,dy,$$

где K — положительно ориентирован.



Получаем

$$\int\limits_K \sin(xy)\,dx + \cos(xy)\,dy =$$

$$= \int\limits_{\widehat{AB}} \sin(xy)\,dx + \cos(xy)\,dy + \int\limits_{\widehat{BC}} \sin(xy)\,dx + \cos(xy)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\widehat{CD}} \sin(xy)\,dx + \cos(xy)\,dy + \int\limits_{\widehat{DA}} \sin(xy)\,dx + \cos(xy)\,dy.$$

Вычисляя каждый интеграл отдельно, получаем

$$\int\limits_{\widehat{AB}} \sin xy\,dx + \cos xy\,dy = \int\limits_{-1}^{1} \cos t\,dt = \sin 1 - \sin(-1) = 2\sin 1,$$

$$\int\limits_{\widehat{BC}} \sin xy\,dx + \cos xy\,dy = -\int\limits_{-1}^{1} \sin(-t)\,dt = \cos t\Big|_{-1}^{1} = 0,$$

$$\int\limits_{\widehat{CD}} \sin xy\,dx+\cos xy\,dy = -2\sin 1, \quad \int\limits_{\widehat{DA}} \sin xy\,dx+\cos xy\,dy = 0.$$

Следовательно интеграл по контуру K равен 0. □

ПРИМЕР 4. Пусть K — граница круга $x^2+y^2 \le 1$. Вычислим

$$\int\limits_K y\,dx + x\,dy,$$

где K — отрицательно ориентирована.

$$\int\limits_K y\,dx + x\,dy = \int\limits_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t(-\cos t))\,dt =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} \cos(2t)\,dt = -\frac{1}{2}\sin 2t|_0^{2\pi} = 0.$$

□

Сделаем несколько небольших замечаний об криволинейных интегралах в $\mathbf{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.4. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана кривая γ, т.е. образ взаимно-однозначной вектор-функции $\overline{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [a,b]$. Пусть задана функция $y = f(x) = f(x_1,\ldots,x_n)$ на кривой γ. Предположим, что функции $x_i(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда *криволинейным интегралом I-го рода* по кривой γ от функции $f(x)$ называется

$$\int\limits_\gamma f(x)\,ds = \int\limits_a^b f(x_1(t),\ldots,x_n(t))\sqrt{{x'_1}^2(t)+\ldots+{x'_n}^2(t)}\,dt.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.5. Пусть на кривой γ заданы функции $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^n {x'_i}^2 \ne 0, \quad \forall\ t \in [a,b].$$

Криволинейным интегралом II-го рода по кривой γ называется

$$\int\limits_\gamma \sum_{i=1}^n P_i(x)\,dx_i = \int\limits_a^b \sum_{i=1}^n P_i(x_1(t),\ldots,x_n(t))x'_i(t)\,dt.$$

Это определение верно, если на γ задано направление интегрирования, т.е. начальная и конечная точки. Криволинейный интеграл II-го рода иногда указывается другим обозначением:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\,dx_i,$$

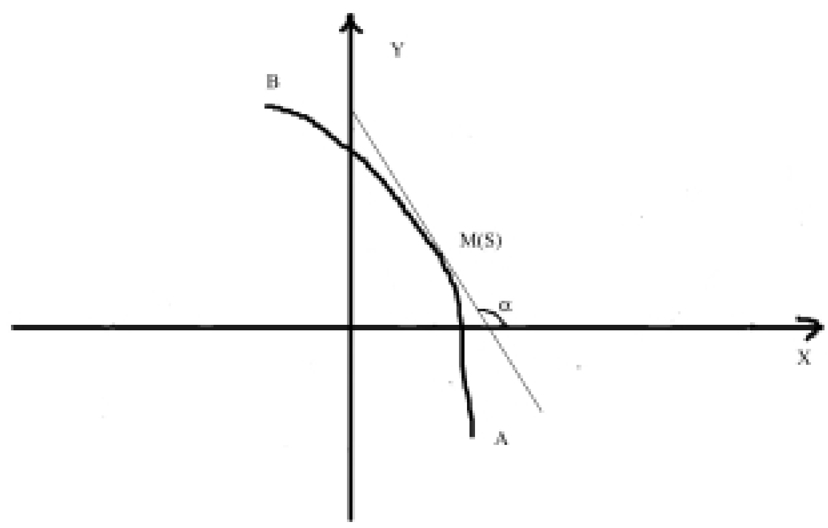
где $A = \overline{r}(a),\ B = \overline{r}(b)$.

6.4. Связь между криволинейными интегралами I и II рода

Рассмотрим кривую $\overset{\frown}{AB}$, имеющую касательную в каждой точке. Выберем в качестве параметра – длину дуги $s = |\overset{\frown}{AM}|$, т.е. натуральный параметр. Тогда кривую $\overset{\frown}{AB}$ можно представить в виде

$$\begin{cases} x = x(s); \\ y = y(s); \quad 0 \leq s \leq |\overset{\frown}{AB}|. \end{cases}$$

Обозначим через $\alpha(s)$ — угол между вектором касательной к $\overset{\frown}{AB}$ в точке $M(s)$ и осью Ox (касательный вектор направлен в сторону возрастания длины дуги).



Тогда известно, что

$$\begin{cases} x'(s) = \cos\alpha, \\ y'(s) = \sin\alpha. \end{cases}$$

Пусть на $\overset{\frown}{AB}$ задана непрерывная функция $f(M) = f(x, y)$.

Тогда

$$\int\limits_{\widehat{AB}} f(x,y)dx = \int\limits_0^{|\widehat{AB}|} f(x(s),y(s))x'(s)ds =$$

$$= \int\limits_0^{|\widehat{AB}|} f(x(s),y(s))\cos\alpha(s)ds.$$

Таким образом, криволинейный интеграл II-го рода сводится к криволинейному интегралу I-го рода, и справедлива формула

$$\int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\widehat{AB}} (P(M)\cos\alpha + Q(M)\sin\alpha)ds.$$

Подчеркнем, что во всех формулах, угол α связан с тем направлением касательной, который отвечает направлению кривой. Если изменить направление кривой, то не только интеграл слева изменит свой знак, но и интеграл справа.

6.5. Формула Грина

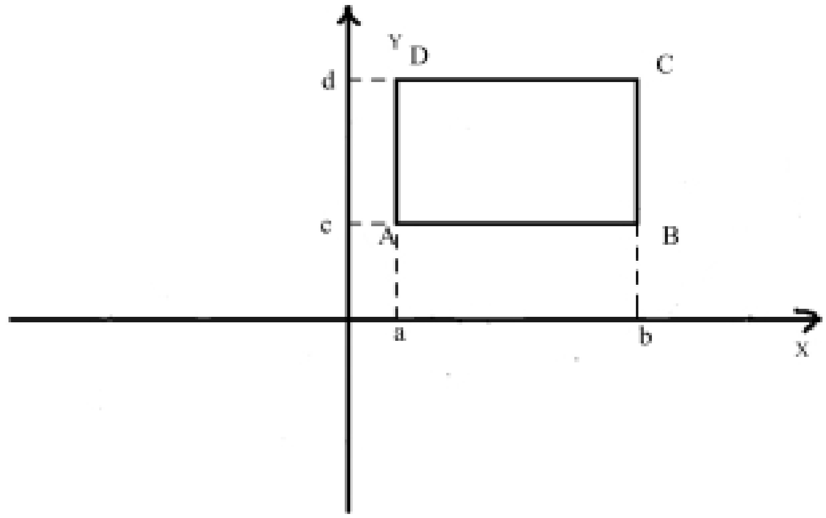
ТЕОРЕМА 6.2 (формула Грина[4]). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область с границей $\partial\Omega$. Предположим, что функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ непрерывны в замыкании области Ω, т.е. в $\overline{\Omega}$. Если граница $\partial\Omega$ состоит из конечного числа кусочно гладких контуров, то справедлива формула Грина:*

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy, \quad (6)$$

где $\partial\Omega$ — положительно ориентирована.

Доказательство. **А)** Вначале докажем формулу Грина (6) для прямоугольника. Пусть $\Delta = \{(x,y): \ a \le x \le b, \ c \le y \le d\}$.

[4]Грин Джорж (14.7.1783 – 31.3.1841). Род. в Снейтоне, близ Ноттингема (Англия). Самостоятельно изучал математику и лишь в 1837 окончил Кембриджский университет. В сочинении "Опыт применения математического анализа к теориям электричества и магнетизма" ввел понятие и термин "потенциал" и развил теорию электричества и магнетизма, опираясь на найденное им соотношение между интегралами по объему и по поверхности.



Тогда

$$\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{a}^{b} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx = \int\limits_{c}^{d} [Q(b,y) - Q(a,y)]\,dy =$$

$$= \int\limits_{c}^{d} Q(b,y)\,dy - \int\limits_{c}^{d} Q(a,y)\,dy = \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} Q(x,y)\,dy + \int\limits_{\overset{\frown}{DA}} Q(x,y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\overset{\frown}{CD}} Q(x,y)\,dy + \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Q(x,y)\,dy = \int\limits_{\partial\Delta} Q(x,y)\,dy.$$

Аналогично,

$$-\iint\limits_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$-\int\limits_{a}^{b} [P(x,d) - P(x,c)]\,dx = -\int\limits_{a}^{b} P(x,d)\,dx +$$

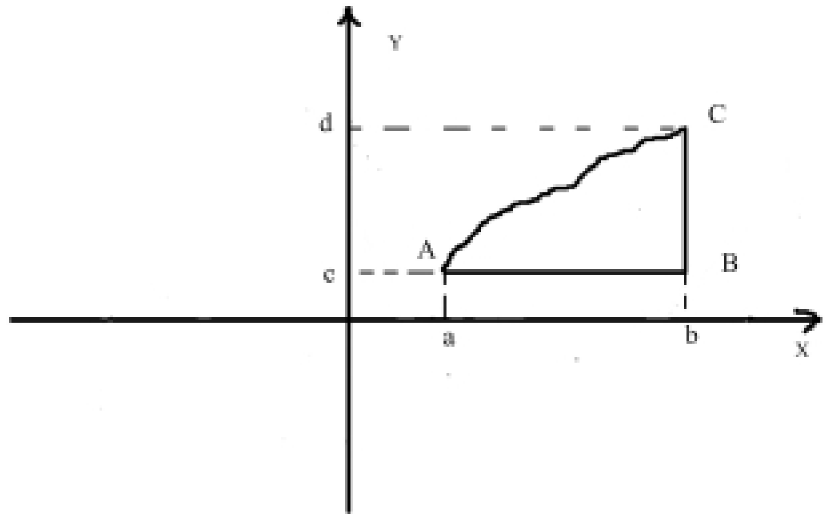
$$+ \int\limits_{a}^{b} P(x,c)\,dx = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{BC}} P(x,y)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{\overset{\frown}{CD}} P(x,y)\,dx + \int\limits_{\overset{\frown}{DA}} P(x,y)\,dx = \int\limits_{\partial\Delta} P(x,y)\,dx.$$

Складывая полученные формулы, получаем формулу Грина.
B) Докажем (6) для областей типа W, где

$$W = \{(x, y) : \ a \le x \le b, \ c \le y \le \lambda(x)\},$$

при этом $\lambda(a) = c, \ \lambda(b) = d, \ \lambda$ — возрастающая функция. Пусть $x = \mu(y)$ — обратная к $\lambda(x)$ функция, $y \in [c, d]$.



Тогда

$$\iint\limits_W \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\mu(y)}^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\,dx = \int\limits_c^d [Q(b, y) - Q(\mu(y), y)]\,dy =$$

$$= \int\limits_c^d Q(b, y)\,dy - \int\limits_c^d Q(\mu(y), y)\,dy = \int\limits_{\widehat{BC}} Q(x, y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\widehat{CA}} Q(x, y)\,dy + \int\limits_{\widehat{AB}} Q(x, y)\,dy = \int\limits_{\partial W} Q(x, y)\,dy.$$

Аналогично,

$$-\iint\limits_W \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int\limits_a^b dx \int\limits_c^{\lambda(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy =$$

$$= -\int\limits_a^b [P(x, \lambda(x)) - P(x, c)]\,dx = -\int\limits_a^b P(x, \lambda(x))\,dx +$$

$$+\int\limits_a^b P(x,c)\,dx = \int\limits_{\widehat{CA}} P(x,y)\,dx + \int\limits_{\widehat{AB}} P(x,y)\,dx +$$

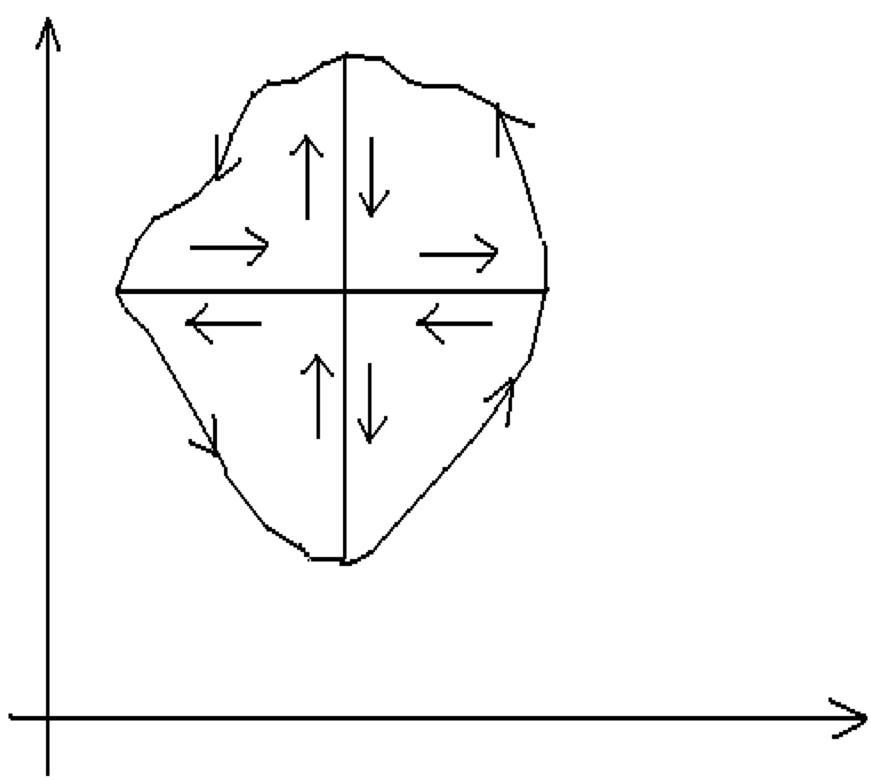
$$+\int\limits_{\widehat{BC}} P(x,y)\,dx = \int\limits_{\partial W} P(x,y)\,dx.$$

Суммируя полученные формулы, получаем формулу Грина.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичным образом устанавливается справедливость формулы Грина для областей, полученных из областей типа W посредством поворота вокруг начала координат на следующие углы: $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, которые вместе с прямоугольниками будем также называть областями типа W.

C) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область и $\partial\Omega$ — ее граница. Предположим, что Ω является объединением конечного числа областей типа W, пересекающихся разве лишь по границам.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Попробуйте привести пример ограниченной области с кусочно гладкой границей, которая не удовлетворяет условиям данного пункта теоремы.



Покажем теперь, что для области Ω справедлива формула Грина. Пусть

$$\Omega = \cup_{k=1}^{n}\Omega_k,$$

где Ω_k — области типа W. Учитывая, что для каждой области Ω_k справедлива формула Грина, получаем

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{\Omega_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega_k} P\,dx + Q\,dy.$$

Заметим, что граница $\partial\Omega_k$ состоит из части границы $\partial\Omega$ и конечного числа отрезков, являющихся общей границей двух соседних областей Ω_k. Причем интеграл по прямолинейным отрезкам берется дважды с противоположными направлениями интегрирования. Поэтому в сумме

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega_k} P\,dx + Q\,dy$$

интегралы по отрезкам компенсируются. Следовательно,

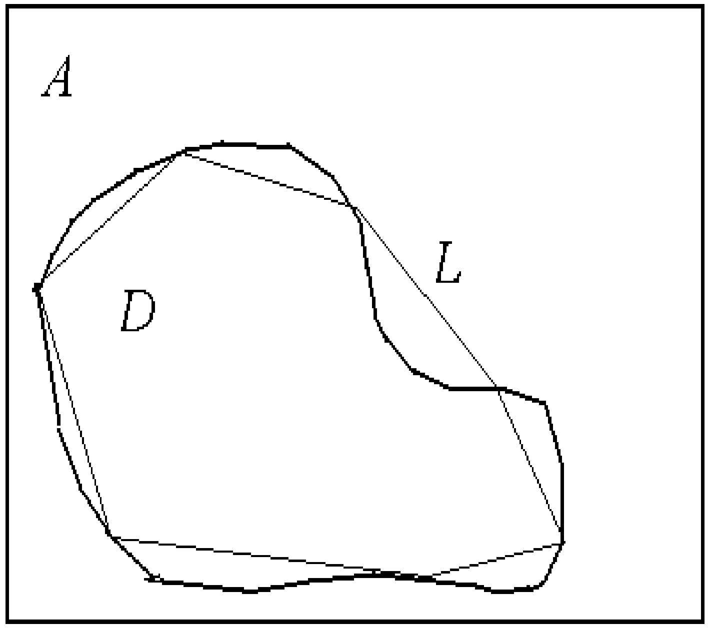
$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\partial\Omega_k} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy.$$

Получено нужное равенство.

D) Приведем только схему доказательства общего случая (подробное доказательство попробуйте воспроизвести сами!). Предположим для простоты, что функции

$$P(x,y),\ Q(x,y), \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y), \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

непрерывны не только в замыкании области Ω, но и в некоторой его окрестности, например в прямоугольнике $A \supset \overline{\Omega}$. Впишем в $\partial\Omega$ некоторую ломанную L. Пусть L ограничивает многоугольник $D \subset A$.



Выше доказано, что к многоугольной области применима формула Грина (например потому, что она может быть разложена на трапеции необходимого типа). Таким образом

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy. \tag{7}$$

Можно показать (попробуйте!), что когда длина наибольшей из сторон L стремится к нулю, выполнено

$$\int\limits_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy \quad \to \quad \int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

а

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \quad \to \quad \iint\limits_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Последнее доказывает общий случай теоремы. □

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область для которой применима формула Грина и $\partial\Omega$ — граница Ω. Тогда, для площади $|\Omega|$ области Ω, имеем

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} x\,dy - y\,dx,$$

где $\partial\Omega$ — положительно ориентирована.

Доказательство. Положим в формуле Грина $Q(x, y) = x$, $P(x, y) = -y$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega}\int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = 2|\Omega| = \int\limits_{\partial\Omega} x\, dy - y\, dx.$$

Следовательно,

$$|\Omega| = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial\Omega} x\, dy - y\, dx.$$

□

§7. Приложения интеграла

При помощи кратных интегралов можно вычислять такие физические величины, как масса, заряд, емкость, центр тяжести, момент инерции и т.д. Приведем некоторые примеры.

Пусть в некоторой ограниченной области D распределена некоторая масса с переменной плотностью $\rho(x, y, z)$. Иначе говоря, на $\overline{D}$ задана некоторая неотрицательная и непрерывная функция $\rho(x, y, z)$. Величину

$$m(D) = \iiint\limits_{D} \rho(x, y, z) dx\, dy\, dz$$

называют массой D.

Можно иначе. Допустим мы умеем вычислять массу тел (или их частей). И пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$. Говорят, что в D задано распределение масс с плотностью $\rho(x, y, z) \geq 0$, если $\forall\ P = (x, y, z) \in D$ выполнено

$$\lim_{r\to 0} \frac{m(B(P, r))}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \rho(P),$$

где $B(x, r)$ — шар с центром в точке x радиуса r, $\frac{4}{3}\pi r^3$ — объем этого шара.

Отметим, что в данном определении шары с центром в точке P можно заменить системой областей, стягивающихся в точку P.

Разобьем область D на подобласти $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, так что $D = \cup_{i=1}^{n} \overline{\Delta}_i$.

1. Моментом инерции I материальной точки M с массой m относительно некоторой точки O называется число $I = mr^2$, где r — расстояние от точки M до точки O.
2. Момент инерции системы материальных точек $M_1, \dots, M_n$ определяется как сумма моментов:

$$I = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2.$$

В каждой из подобластей Δ_i выберем точку ξ_i, тогда $\rho(\xi_i)$ приблизительно равна средней плотности Δ_i, а $r(\xi_i)$ приблизительно равняется расстоянию от точки O до области Δ_i. Тогда

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} r^2(\xi_i)\rho(\xi_i)v(\Delta_i).$$

Переходя к пределу при мелкости разбиения стремящейся к 0, получаем

$$I = \iiint\limits_D \rho(x,y,z) r^2(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

где $r(x,y,z) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$, $O = (x_0, y_0, z_0)$. В частности, если $\rho \equiv 1$, то

$$I = \iiint\limits_D ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)\,dx\,dy\,dz.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Величины:

$$I_x = \iiint\limits_D (y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz, \quad I_y = \iiint\limits_D (x^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z = \iiint\limits_D (y^2 + x^2)\,dx\,dy\,dz,$$

называются моментами инерции тела D, относительно Ox, Oy, Oz соответственно.

Аналогичным образом получаем формулу вычисления координат центра тяжести тела $D \subset \mathbb{R}^3$:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_D \rho(x,y,z) x\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_D \rho(x,y,z)y\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}, \quad z_c = \frac{\iiint\limits_D \rho(x,y,z)z\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}.$$

При этом используются формулы вычисления центра тяжести системы материальных точек (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), $\ldots$, (x_n, y_n, z_n) с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, соответственно:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i},$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Далее, пусть на плоскости задана кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ и функция $\rho(x,y)$ распределения масс на кривой γ. При этом плотность $\rho(x,y)$ в точке $(x,y) \in \gamma$ определяется как предел отношения Δm части дуги, лежащей в окрестности точки (x,y) к длине этой же части дуги Δl, когда окрестность стягивается к точке (x,y), т.е. $\Delta l \to 0$. Разбивая дугу γ на части γ_i и считая ρ постоянной на каждой дуге γ_i, можно найти массу $m(\gamma_i) \approx \rho(\xi_i)\cdot$ дл.γ_i, где $\xi_i \in \gamma_i$. Суммируя эти приближенные равенства и переходя к пределу при мелкости разбиения стремящейся к 0, находим

$$m(\gamma) = \int\limits_\gamma \rho(x,y)\,ds.$$

ПРИМЕР 1. Найти массу дуги $\gamma: \ y = \ln x, \ x \in [x_1, x_2]$, если плотность распределения равна квадрату абсциссы точки.

$$m = \int\limits_{x_1}^{x_2} x^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} x\sqrt{1+x^2}\,dx =$$

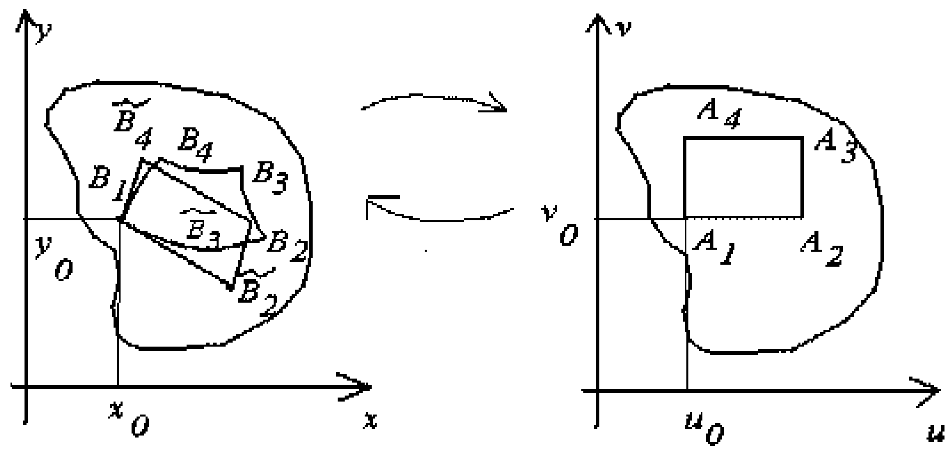
$$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{3}\left((1+x_2^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x_1^2)^{\frac{3}{2}}\right).$$

□

§8. Площадь в криволинейных координатах

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.1. Пусть даны функции $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, которые осуществляют непрерывное отображение области D плоскости (x,y) на область Δ плоскости (u,v). Предположим, что существует обратное отображение $x =$

$x(u,v)$, $y = y(u,v)$, которое также является непрерывным, и каждой точке $N = (u_0, v_0) \in \Delta$ соответствует единственная точка $M = (x_0, y_0) \in D$. Таким образом, если заданы числа (u_0, v_0), так что точка $N = (u_0, v_0) \in \Delta$, то эти числа полностью определяют положение точки $M = (x_0, y_0) \in D$. Эти числа (u_0, v_0) называются криволинейными координатами точки (x_0, y_0).



Приведем некоторые соображения (точнее, наводящие рассуждения) об изменении площадей элементарных площадок при подобных отображениях. Пусть

$$N = A_1 = (u_0, v_0), \quad A_2 = (u_0 + du, v_0),$$

$$A_3 = (u_0 + du, v_0 + dv), \quad A_4 = (u_0, v_0 + dv),$$

и

$$B_1 = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0)),$$

$$B_2 = (x(u_0 + du, v_0), y(u_0 + du, v_0)) \approx$$

$$\approx (x(u_0, v_0) + \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\, du, y(u_0, v_0) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\, du) = \widetilde{B}_2,$$

$$B_3 = (x(u_0 + du, v_0 + dv), y(u_0 + du, v_0 + dv)) \approx$$

$$\approx (x(u_0, v_0) + \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\, du + \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\, dv,$$

$$y(u_0, v_0) + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\, du + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\, dv) = \widetilde{B}_3,$$

$$B_4 = (x(u_0, v_0 + dv), y(u_0, v_0 + dv)) \approx$$

$$\approx (x(u_0, v_0) + \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\, dv, y(u_0, v_0) + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\, dv) = \widetilde{B}_4.$$

Четырехугольник $\widetilde{B}_1\widetilde{B}_2\widetilde{B}_3\widetilde{B}_4$ (здесь $\widetilde{B}_1 = B_1$) является параллелограммом, т.к. проекции его противоположных сторон равны между собой.

Тогда площадь криволинейной фигуры можно аппроксимировать следующим образом

$$|(B_1B_2B_3B_4)| \approx |\widetilde{B}_1\widetilde{B}_2\widetilde{B}_3\widetilde{B}_4| = |\overrightarrow{\widetilde{B}_1\widetilde{B}_2} \times \overrightarrow{\widetilde{B}_1\widetilde{B}_4}| =$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\,du & \frac{\partial y}{\partial u}\,du \\ \frac{\partial x}{\partial v}\,dv & \frac{\partial y}{\partial v}\,dv \end{pmatrix}\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right| |du\,dv|.$$

Очевидно, выполнено

$$|du\,dv| = |(A_1A_2A_3A_4)|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2. Величина

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

называется *якобианом отображения* $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. (Геометрический смысл модуля якобиана). Из всего вышесказанного можно заключить следующее предположение (в данный момент пока еще как гипотезу).

Модуль якобиана — коэффициент пропорциональности, с которым искажается элементарная площадка при отображении $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$. Из полученной приближенной формулы следует, что если вектор-функция $(x(u,v), y(u,v))$ взаимно однозначно отображает область Δ на область D и непрерывно дифференцируема на D, то справедлива формула:

$$|D| = \iint\limits_{\Delta} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть области D и Δ имеют кусочно-гладкие границы ∂D и $\partial\Delta$ соответственно, а отображение $x = x(u,v),\ y = y(u,v)$ взаимнооднозначно переводит $\overline{\Delta}$ на $\overline{D}$ и дважды непрерывно дифференцируемо. Если якобиан отображения не меняет знак, то справедлива формула*

$$|D| = \iint\limits_{\Delta} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$

Доказательство. Используя формулу Грина, получаем

$$|D| = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} x\,dy - y\,dx,$$

где ∂D — положительно ориентирована. Пусть $x = x(s),\ y = y(s),\ s \in [0, |\partial D|]$ — параметризация границы ∂D, такая что точка $(x(s), y(s))$ обходит в положительном направлении границу ∂D при изменении s от 0 до $|\partial D|$. Тогда

$$|D| = \frac{1}{2} \int\limits_0^{|\partial D|} (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\, ds. \qquad (1)$$

При отображении $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ граница ∂D перейдет в границу $\partial\Delta$, т.е. $u = u(x(s), y(s)),\ v = v(x(s), y(s))$ — параметризация $\partial\Delta$. Пусть σ — натуральный параметр границы $\partial\Delta :\ \sigma = \sigma(s)$. Рассмотрим обратную функцию $s = s(\sigma)$ и подставив данную замену в (1), получим

$$\int\limits_0^{|\partial\Delta|} (x(s(\sigma))y'(s(\sigma)) - y(s(\sigma))x'(s(\sigma)))s'(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^{|\partial\Delta|} (x(s(\sigma)){y'}_\sigma - y(s(\sigma)){x'}_\sigma)\, d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^{|\partial\Delta|} (x(s(\sigma))({y'}_u{u'}_\sigma + {y'}_v{v'}_\sigma) - y(s(\sigma))({x'}_u{u'}_\sigma + {x'}_v{v'}_\sigma))\, d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^{|\partial\Delta|} [(x(s(\sigma)){y'}_u - y(s(\sigma)){x'}_u){u'}_\sigma + (x(s(\sigma)){y'}_v - y(s(\sigma)){x'}_v){v'}_\sigma]\, d\sigma =$$

$$= \pm \int\limits_{\partial\Delta} (x{y'}_u - y{x'}_u)\, du + (x{y'}_v - y{x'}_v)\, dv,$$

где знак $'+'$ берется, если $(u(x(s), y(s)), v(x(s), y(s)))$ обходит $\partial\Delta$ в положительном направлении, $'-'$ — если в отрицательном. По формуле Грина последний интеграл равен

$$\mp 2 \iint\limits_\Delta ({x'}_u{y'}_v - {x'}_v{y'}_u)\, du\, dv.$$

Из (1) следует

$$|D| = \iint\limits_\Delta \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du\, dv,$$

т.к. $|D| > 0$, получаем нужное. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Так как $|D| > 0$ и якобиан не меняет знак, то заключаем, что знак ориентации контура $\partial\Delta$ совпадает со знаком якобиана. Вообще, при положительном якобиане отображения из положительной ориентации какого-либо контура в области плоскости (u, v) следует положительная ориентация его образа в области переменных (x, y). При отрицательном якобиане, ориентация контура меняется в противоположную сторону.

ПРИМЕР 1. Вычислить площадь фигуры, заключенной между двумя спиралями $r = \varphi,\ r = 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le c$, где (r, φ) — полярная система координат.

Заметим, что $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r$. Тогда

$$|D| = \iint\limits_{\Delta} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^c d\varphi \int\limits_{\varphi}^{2\varphi} r\,dr = \frac{1}{2}\int\limits_0^c (4\varphi^2 - \varphi^2)\,d\varphi =$$

$$= \frac{3}{2}\int\limits_0^c \varphi^2\,d\varphi = \frac{c^3}{2}.$$

□

§9. Замена переменных в кратном интеграле

Пусть R — прямоугольник со сторонами параллельными осям координат (u, v). Пусть $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ — дважды непрерывно дифференцируемое отображение в некоторой области, содержащей прямоугольник R вместе с границей и имеющее **положительный** якобиан. Предположим, что данное отображение взаимнооднозначно переводит прямоугольник R в некоторую область D с границей ∂D. Очевидно, что ∂D — кусочно-гладкая кривая. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 9.1. *Пусть $f(u, v)$ — произвольная интегрируемая по Риману на R функция. Тогда*

$$\iint\limits_{R} f(u, v)\,du\,dv = \iint\limits_{D} f(u(x, y), v(x, y))\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\,dx\,dy. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $u = u(x, y),\ v = v(x, y)$ обратное отображение к отображению $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$. Устроим разбиение P прямоугольника R прямыми параллельными осям координат, T_i — прямоугольники разбиения P. Так как отображение $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ взаимнооднозначно, то каждому прямоугольнику T_i соответствует область D_i с кусочно гладкой границей, причем

$$\bigcup_i \overline{D}_i = \overline{D}, \quad D_i \cap D_j = \emptyset,\ i \neq j.$$

Из свойства аддитивности интеграла получаем

$$\iint\limits_D f(u(x,y), v(x,y)) \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\, dx\, dy =$$

$$= \sum_i \iint\limits_{D_i} f(u(x,y), v(x,y)) \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\, dx\, dy.$$

Кроме того выполнены следующие неравенства

$$m_i \iint\limits_{D_i} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\, dx\, dy \le \iint\limits_{D_i} f(u(x,y), v(x,y)) \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\, dx\, dy \le$$

$$\le M_i \iint\limits_{D_i} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\, dx\, dy,$$

где

$$m_i = \inf_{D_i} f(x,y), \quad M_i = \sup_{D_i} f(x,y).$$

Заметим, что

$$|T_i| = \iint\limits_{D_i} \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} dx\, dy.$$

Таким образом, получаем неравенство

$$\sum_i m_i\, |T_i| \le \iint\limits_D f(u(x,y), v(x,y)) \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\, dx\, dy \le \sum_i M_i\, |T_i|. \qquad (2)$$

Так как

$$m_i = \inf_{(u,v)\in T_i} f(u,v), \quad M_i = \sup_{(u,v)\in T_i} f(u,v),$$

то величины стоящие в левой и правой частях неравенства (2) являются нижней и верхней суммой Дарбу интеграла

$$\iint\limits_R f(u,v)\, du\, dv.$$

Поэтому, учитывая (2), получаем

$$\iint\limits_R f(u,v)\,du\,dv = \sup_P \underline{S} \le \iint\limits_D f(u(x,y),v(x,y))\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\,dx\,dy \le$$

$$\le \inf_P \overline{S} = \iint\limits_R f(u,v)\,du\,dv.$$

Отсюда получаем равенство (1). □

УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение в случае, когда R – произвольная область, ограниченная кусочно-гладким контуром.

§10. Векторные поля

10.1. Потенциальные векторные поля

Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$ — область и в каждой точке $M \in G$ задан вектор $\vec{\varphi}(M)$. Говорят, что в области G задано векторное поле $\vec{\varphi}(M)$. Задание векторного поля равнозначно заданию n вещественнозначных функций $\varphi_1(M), \dots, \varphi_n(M)$, т.е.

$$\vec{\varphi}(M) = (\varphi_1(M), \dots, \varphi_n(M)).$$

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$, в этом случае $\vec{\varphi}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$. Предположим, что функции P, Q, R — непрерывны в G. Пусть $C \subset G$ — замкнутый контур. Тогда

$$\int\limits_C \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle = \int\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

где $\vec{ds} = (dx, dy, dz)$. Данный интеграл называется циркуляцией вектора $\vec{\varphi}$ вдоль контура C. Если C — замкнутая кривая, то

$$\int\limits_C \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle$$

называется линейным интегралом вектора $\vec{\varphi}$ вдоль C.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано векторное поле $(P, Q, R) = \vec{\varphi}$. Функция U называется потенциальной функцией векторного поля $\vec{\varphi}$, если U — непрерывно дифференцируема и выполнены равенства:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = R. \qquad (1)$$

В этом случае векторное поле $\vec{\varphi}$ называется потенциальным.

Равенства (1) равносильны тому что

$$\nabla U = \vec{\varphi} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

(только в случае декартовой системы координат).

ТЕОРЕМА 10.1. *Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3$ задано непрерывное векторное поле $\vec{\varphi} = (P, Q, R)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Векторное поле $\vec{\varphi}$ потенциально.*
2. *Вдоль любого замкнутого ориентированного контура C, лежащего в G выполнено*
$$\int\limits_C \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle = 0.$$
3. *Пусть $A_0 \in G$ — фиксированная точка. Тогда интеграл*
$$\int\limits_{C_{A_0A}} \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle$$
по каждой ориентированной кусочно-гладкой кривой $C_{A_0A} \subset G$ с началом в точке A_0 и концом в точке A зависит от точек A_0 и A, но не зависит от формы кривой. При этом
$$V(A) = V(x, y, z) = \int\limits_{C_{A_0A}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$
является потенциальной функцией векторного поля $\vec{\varphi}$.

Доказательство. Очевидно, что из условия 3) следует справедливость 1), т.к. $V(x, y, z)$ является потенциальной функцией.

Покажем, что из условия 1) следует выполнение условия 3). Из 1) следует существование непрерывно дифференцируемой функции $U(x, y, z)$, такой что $\nabla U = \vec{\varphi}$. Рассмотрим произвольную кривую C_{A_0A}, соединяющую точки A_0 и A. Предположим, что кривая C_{A_0A} задана параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases},$$

где $t \in [a,b]$. Пусть $(x(a),y(a),z(a)) = A_0,\ (x(b),y(b),z(b)) = A$. По формуле вычисления производных сложной функции имеем

$$\frac{d}{dt}U(x(t),y(t),z(t)) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Тогда

$$\int\limits_{C_{A_0A}} \langle\vec{\varphi},\vec{ds}\rangle = \int\limits_{C_{A_0A}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_a^b \left(P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right)dt =$$

$$= \int\limits_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right)dt = \int\limits_a^b \frac{d}{dt}(U(x(t),y(t),z(t)))\,dt =$$

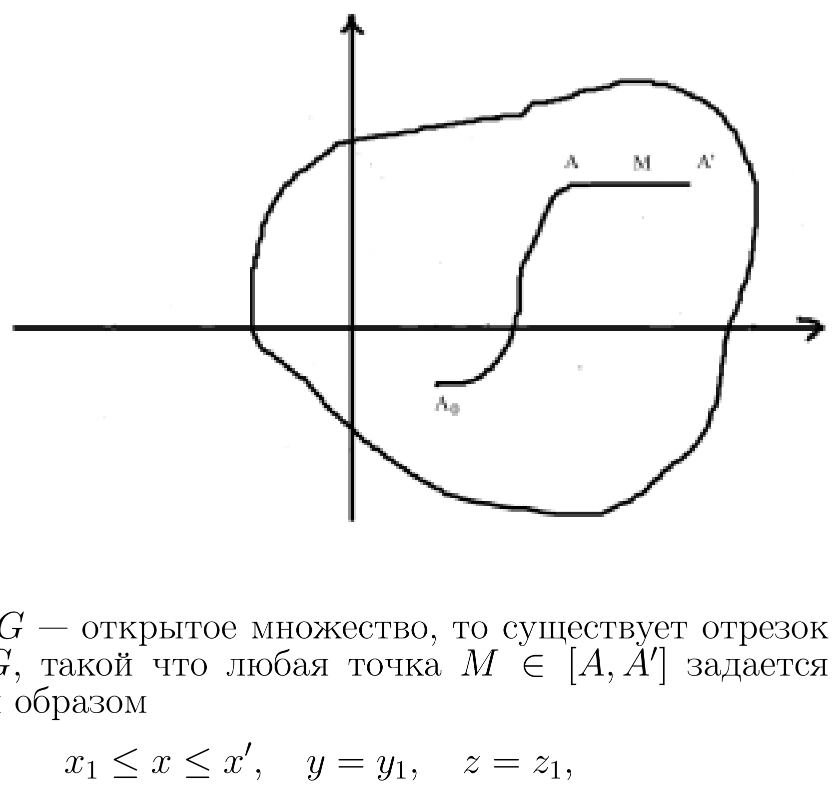
$$= U(A) - U(A_0),$$

т.е. $\int_{C_{A_0A}}\langle\vec{\varphi},\vec{ds}\rangle$ зависит только от A_0 и A. Рассмотрим функцию

$$V(A) = \int\limits_{C_{A_0A}} \langle\vec{\varphi},\vec{ds}\rangle,$$

где $A = (x_1,y_1,z_1),\ A_0 = (x_0,y_0,z_0)$. Докажем, что

$$\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} = P(x,y,z).$$



Так как G — открытое множество, то существует отрезок $[A,A'] \subset G$, такой что любая точка $M \in [A,A']$ задается следующим образом

$$x_1 \le x \le x', \quad y = y_1, \quad z = z_1,$$

где x', такая что $A' = (x', y_1, z_1)$. Соединим точку A_0 с точкой A некоторой кривой C_{A_0A}, ориентированной так, что A_0 — начальная точка, A — конечная точка. Рассмотрим кривую

$$\overline{C} = C_{A_0A} \cup [A, M], \quad M \in [A, A'].$$

Тогда

$$V(M) = V(x, y, z) = \int\limits_{\overline{C}} \langle \vec{\varphi}, \vec{ds} \rangle = \int\limits_{C_{A_0A}} \langle \vec{\varphi}, \vec{ds} \rangle +$$

$$+ \int\limits_{[A,M]} \langle \vec{\varphi}, \vec{ds} \rangle = \int\limits_{C_{A_0A}} \langle \vec{\varphi}, \vec{ds} \rangle + \int\limits_{x_1}^{x} P(t, y_1, z_1)\, dt.$$

Тогда диффиренцируя данное равенство по x и используя, что P — непрерывная функция, получаем

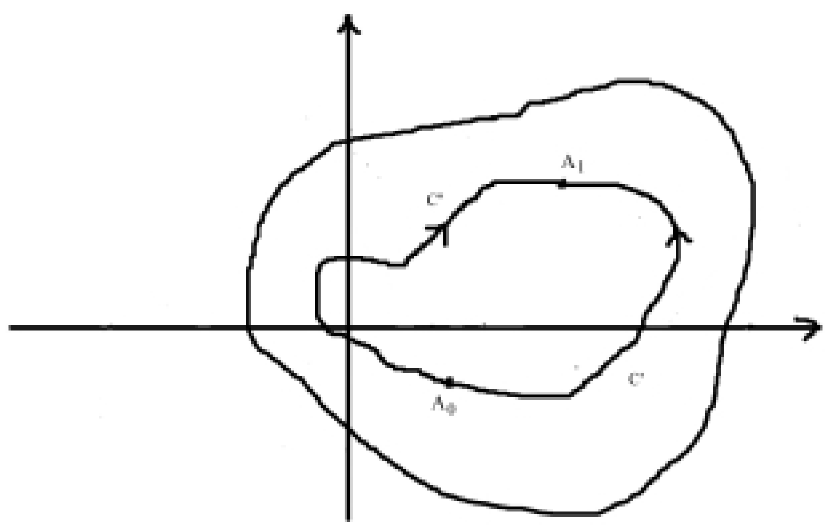
$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, y_1, z_1) = P(x, y_1, z_1),$$

т.е. $\frac{\partial V}{\partial x}(A) = P(A)$. Равенства

$$\frac{\partial V}{\partial y}(A) = Q(A), \quad \frac{\partial V}{\partial z}(A) = R(A)$$

доказываются аналогично.

Покажем теперь, что из условия 2) следует справедливость 3).



Пусть $C'_{A_0A_1}$ и $C''_{A_0A_1}$ две кусочно-гладкие кривые, ориентированные так, что A_0 — начало, A_1 — конец. Заметим, что

${C'}_{A_0A_1} \cup {C''}_{A_1A_0} = C$, где C – некоторый замкнутый кусочно-гладкий контур. Тогда

$$\int\limits_{{C'}_{A_0A_1}} \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle - \int\limits_{{C''}_{A_0A_1}} \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle =$$

$$= \int\limits_{{C'}_{A_0A_1}} \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle + \int\limits_{{C''}_{A_1A_0}} \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle = \int\limits_{C} \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle = 0.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{{C'}_{A_0A_1}} \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle = \int\limits_{{C''}_{A_0A_1}} \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle.$$

Теперь покажем, что из условия 3) следует справедливость 2). Пусть C — произвольный замкнутый контур, $C \subset G$. Пусть $A_0, A_1 \in C$ — произвольные точки, $A_0 \neq A_1$. Обозначим $C'_{A_0A_1}$ — часть контура C, соединяющую точки A_0 и A_1, ориентированную так что A_0 — начало, A_1 — конец. Пусть ${C''}_{A_1A_0}$ — другая часть контура C (A_1 — начало, A_0 — конец). Тогда

$$0 = \int\limits_{C'_{A_0A_1}} \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle - \int\limits_{{C''}_{A_0A_1}} \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle = \int\limits_{C'_{A_0A_1}} \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle +$$

$$+ \int\limits_{{C''}_{A_1A_0}} \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle = \int\limits_{C} \langle\vec{\varphi}, \vec{ds}\rangle.$$

$\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2. Пусть в области G задано векторное поле $\vec{\varphi} = (P, Q, R)$. Если функции P, Q, R непрерывно дифференцируемы, то определен вектор

$$\operatorname{rot}\vec{\varphi} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

который называется ротором вектора $\vec{\varphi}$.

Ясно, что

$$\operatorname{rot}\vec{\varphi} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 10.2. *Пусть векторное поле $\vec{\varphi}$ — непрерывно дифференцируемо в области G и*

$$\int\limits_C \langle \vec{\varphi}, \vec{ds} \rangle = 0$$

по каждому замкнутому контуру $C \subset G$. Тогда $\operatorname{rot} \vec{\varphi} = 0$.

Доказательство. Из условия данной теоремы и из предыдущей теоремы следует, что векторное поле $\vec{\varphi}$ — потенциально, т.е. существует непрерывно дифференцируемая функция $U(x, y, z)$, такая что

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Тогда

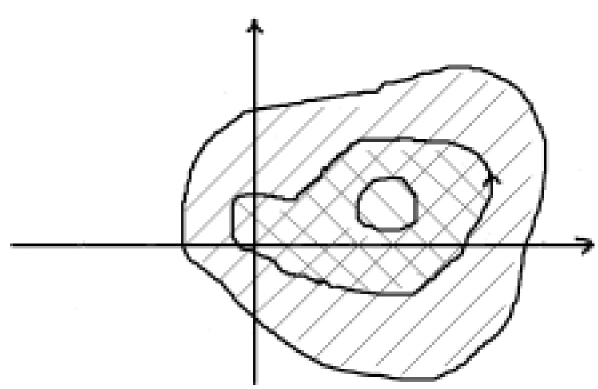
$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y\,\partial x} = 0.$$

□

10.2. Точный дифференциал

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3. Говорят, что область G — односвязна, если для любого простого замкнутого контура, лежащего в G, область, ограниченная данным контуром , целиком лежит в G.



ТЕОРЕМА 10.3. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — односвязная область и $\vec{\varphi} = (P, Q)$ — непрерывно дифференцируемое векторное поле в D. Поле $\vec{\varphi}$ является потенциальным тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{2}$$

Доказательство. Заметим, что $\vec{\varphi}$ потенциально тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = 0$$

для любого кусочно-гладкого замкнутого контура C, лежащего в D.

Фиксируем произвольно $C \subset D$. Тогда контур C ограничивает некоторую область D', такую что $\overline{D}' \subset D$ (что следует из односвязности D). Тогда по формуле Грина

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

Таким образом, получаем, что

$$\int\limits_C P\,dx + Q\,dy = 0,$$

для любого замкнутого контура $C \subset D$. Следовательно, поле $\vec{\varphi}$ потенциально.

Обратно, пусть поле $\vec{\varphi}$ потенциально. Предположим, что (2) не выполнено, т.е. существует $a \in D$:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(a) \neq 0.$$

Для определенности будем считать, что

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(a) > 0.$$

Тогда в силу непрерывности функции $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ найдется окрестность $U_\varepsilon(a)$ точки a, такая что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \geq c > 0$$

для всех $(x, y) \in U_\varepsilon(a)$. Тогда если C_ε — граница окрестности, $C_\varepsilon = \partial U_\varepsilon(a)$, то

$$\int\limits_{C_\varepsilon} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{U_\varepsilon(a)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy \geq c\pi\varepsilon^2 > 0.$$

Это противоречит потенциальности поля $\vec{\varphi}$. □

ПРИМЕР 1. Покажем существенность требования односвязности области D в доказанной теореме. Рассмотрим

$$\vec{\varphi} = \left\{-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right\},$$

где $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Тогда

$$\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)'_y = -\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)'_x = \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Следовательно, для данного векторного поля $\vec{\varphi}$ условие (2) выполняется. Пусть C — окружность:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Тогда

$$\int\limits_C -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t \cos t)\,dt = 2\pi \neq 0.$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.4. Выражение $P\,dx + Q\,dy$ называется точным дифференциалом, если существует функция $F(x, y)$, такая что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q,$$

т.е. выражение $P\,dx + Q\,dy$ есть дифференциал 1-го порядка некоторой функции $F(x, y)$.

Заметим, что не всякое выражение $P\,dx + Q\,dy$ является точным дифференциалом.

ТЕОРЕМА 10.4. *Пусть G — односвязная область на плоскости $\mathbb{R}^2$, $P(x,y), Q(x,y)$ — непрерывно дифференцируемые функции в области G. Для того, чтобы выражение $P\,dx + Q\,dy$ было точным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $(x,y) \in G$ выполнялось равенство*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Доказательство. Покажем вначале необходимость условия. Если выражение

$$P\,dx + Q\,dy$$

есть точный дифференциал, то существует функция $F(x,y)$, такая что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Покажем теперь достаточность условия. Предположим, что

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Рассмотрим векторное поле $\vec{\varphi} = (P, Q)$. Тогда по предыдущей теореме поле $\vec{\varphi}$ — потенциально, т.е. существует функция $F(x,y)$, такая что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q.$$

$\square$

§11. Понятие площади поверхности

11.1. Площадь поверхности, заданной графиком функции

Пусть S — поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная графиком функции $z = f(x,y)$, где $(x,y) \in G \subset \mathbb{R}^2$, G — измеримая по Жордану область. Пусть $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q$$

всюду в G. Проведем разбиение области G на конечное число замкнутых измеримых по Жордану подобластей $G_1, \ldots, G_N$, пересекающихся только по своим границам. Как и ранее, под мелкостью разбиения понимается величина

$$\max_{1 \le i \le N} (\operatorname{diam} G_i).$$

Пусть $(x_i, y_i) \in G_i$ — произвольная точка. Обозначим через L_i касательную плоскость к S в точке $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$. Построим на границе G_i цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz, т.е.

$$\Gamma_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x, y) \in \partial G_i\}.$$

Тогда на плоскости L_i цилиндрическая поверхность Γ_i вырезает некоторую область e_i, площадь которой обозначим $|e_i|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.1. Площадью поверхности S называется величина

$$|S| = \lim \sum_{i=1}^{N} |e_i|,$$

где предел берется при мелкости разбиения стремящейся к 0.

Заметим, что косинус острого угла между нормалью $\vec{n}_i$ к поверхности S в точке $(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ и осью Oz равен

$$\cos(\vec{n}_i, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}},$$

где $p_i = p(x_i, y_i)$, $q_i = q(x_i, y_i)$.

Очевидно, что область G_i есть проекция e_i на плоскость (x, y) и следовательно,

$$|G_i| = |e_i| \cos(\vec{n}_i, z)$$

или

$$|e_i| = |G_i| \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}.$$

Поэтому площадь поверхности S:

$$|S| = \lim \sum_{i=1}^{N} |e_i| = \lim \sum_{i=1}^{N} |G_i| \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} =$$

$$= \iint\limits_{G} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy. \qquad (1)$$

11.2. Площадь поверхности, заданной параметрически

Посмотрим как преобразуется интеграл (1), если в нем сделать подстановку

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad (u,v) \in \Omega,$$

осуществляющую непрерывно дифференцируемое взаимно-однозначное отображение области Ω на область G. Будем считать, что якобиан этого отображения

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = x_u y_v - x_v y_u > 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Тогда

$$|S| = \iint\limits_G \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\, dx\, dy = \iint\limits_\Omega \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, du\, dv. \qquad (2)$$

С другой стороны имеем

$$z_u = f_x x_u + f_y y_u, \quad z_v = f_x x_v + f_y y_v.$$

По правилу Крамера находим

$$f_x = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}, \quad f_y = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}.$$

Подставляя данные равенства в (2) находим

$$|S| = \iint\limits_\Omega \sqrt{1 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \Big/ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, du\, dv =$$

$$= \iint\limits_\Omega \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, du\, dv =$$

$$= \iint\limits_\Omega |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|\, du\, dv, \qquad (3)$$

где $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, и

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v.$$

Формула (3) может служить основанием для определения понятия площади поверхности, заданной параметрически посредством вектор-функции $r(u,v)$ и не обязательно однозначно проектирующейся на одну из координатных плоскостей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.2. Пусть задана поверхность S посредством вектор-функции

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v| > 0,$$

где (u,v) меняется в некоторой измеримой по Жордану области Ω, а функции $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ имеют непрерывные на Ω частные производные. Предположим, что вектор-функция $\vec{r}(u,v)$ осуществляет взаимнооднозначное отображение области Ω на поверхность S. Площадью поверхности S называется интеграл (3), а выражение

$$ds = |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\, du\, dv$$

называется дифференциальным элементом поверхности S.

Проверим, что (3) инвариантен относительно преобразований параметров (u,v). Пусть $u = \lambda(u',v')$, $v = \mu(u',v')$ — непрерывно дифференцируемые функции, осуществляющие взаимнооднозначное отображение области Ω' на Ω, причем

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')} > 0.$$

Тогда

$$\iint\limits_{\Omega} |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v|\, du\, dv =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, du\, dv =$$

$$= \iint\limits_{\Omega'} \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, \frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')}\, du'\, dv'. \quad (4)$$

Нетрудно получить, что

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u',v')} \Big/ \frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')},$$

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(x,z)}{\partial(u',v')} \Big/ \frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')},$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u',v')} \Big/ \frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')}.$$

Подставим данные равенства в (4), получаем

$$|S| = \iint\limits_{\Omega'} \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u',v')}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u',v')}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u',v')}\right)^2}\, \frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')}\, du'\, dv' =$$

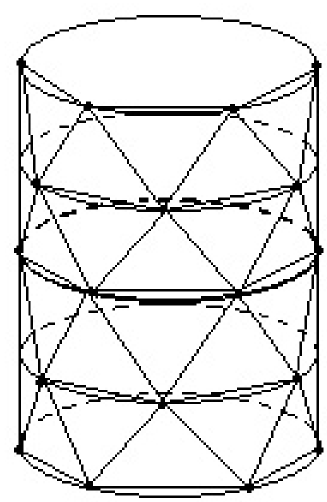
$$= \iint\limits_{\Omega'} |\vec{r}'_{u'} \times \vec{r}'_{v'}|\, du'\, dv'.$$

Таким образом, введенное выше определение площади поверхности является корректным.

11.3. Пример Шварца

В конце XIX века Шварцем[5] было показано, что нельзя определять площадь кривой поверхности как предел вписанной в нее многогранной поверхности при условии, что диаметры всех граней последней стремятся к нулю. Приведем этот весьма поучительный пример.

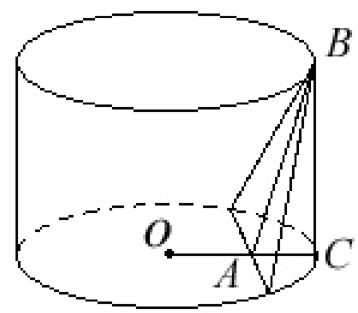
Пусть нам дан прямой цилиндр радиуса R и высоты H. Делим H на m равных частей и проводим плоскости, перпендикулярные оси цилиндра (на поверхности появились $m+1$ окружность). Каждую из окружностей делим на n равных частей так, чтобы точки деления вышележащей окружности находились над серединами дуг нижележащей окружности.



Образуем треугольники из хорд дуг и отрезков, соединяющих концы хорд с теми точками деления выше- и нижеле-

[5]Шварц Карл Герман Амандус (25.1.1843 – 30.11.1921). Род. в Хермсдорфе (Германия). Первые работы были посвящены изучению минимальных поверхностей. Дал строгую теорию интеграла Пуассона. В теории конформных отображений дал общее аналитическое выражение функций, преобразующих произвольный многоугольник в полуплоскость.

жащих окружностей, которые расположены как раз над или под серединами соответствующих дуг. В результате мы получили $2mn$ равных треугольников, которые образуют многогранную поверхность $\sum_{mn}$.



Вычислим площадь каждого треугольника. Основание данного треугольника - хорда с длиной $2R\sin\frac{\pi}{n}$. Далее найдем высоту. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}.$$

Здесь

$$AC = OC - OA = R(1 - \cos\frac{\pi}{n}), \quad BC = \frac{H}{m}.$$

Таким образом площадь одного треугольника вычисляется по формуле

$$\sigma = R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2 + (\frac{H}{m})^2},$$

а площадь поверхности $\sum_{mn}$, соответственно,

$$|\sum_{mn}| = 2mn\sigma = 2R(n\sin\frac{\pi}{n})\sqrt{R^2m^2(1-\cos\frac{\pi}{n})^2 + H^2}.$$

При m и n стремящихся к $+\infty$, диаметры всех треугольников стремятся к нулю. Проверим существование соответствующего предела.

Пусть $m \to \infty$ и $n \to \infty$ так, что существует предел

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \frac{m}{n^2} = q.$$

Тогда
$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \pi,$$
а
$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} m(1-\cos\frac{\pi}{n}) = \frac{\pi^2}{2}q.$$
Отсюда получаем, что
$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} |\sum_{mn}| = 2\pi R\sqrt{\frac{\pi^4 R^2}{4}q^2 + H^2}.$$
Таким образом, данный предел существенно зависит от q. В частности, если $q = 0$, то предел равен $2\pi RH$. Однако вместе с q он может быть равен бесконечности. Общий вывод — таким путем площадь кривой поверхности вычислять нельзя.

§12. Поверхностные интегралы

12.1. Поверхностный интеграл I рода

Пусть поверхность S определена вектор-функцией $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, где $(u,v) \in \overline{D} \subset \mathbb{R}^2$, D — измеримая по Жордану область, а функции $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$. Также будем предполагать, что отображение $\vec{r}(u,v)$ взаимнооднозначно переводит область $\overline{D}$ в поверхность S. Пусть на поверхности S задана функция $F(x,y,z)$. Рассмотрим разбиение области D на подобласти D_i, измеримые по Жордану, $i = 1,\dots,n$. Тогда каждой области D_i при отображении $\vec{r}(u,v)$ соответствует некоторая область S_i на поверхности S. Рассмотрим произвольную точку $A_i \in S_i$. Пусть $A_i = (x_i, y_i, z_i)$. Составим сумму
$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\,|S_i|. \tag{1}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Предел интегральной суммы (1) при мелкости разбиения
$$\mu = \max_{1\le i\le n} \operatorname{diam} S_i \to 0$$
называется интегралом I-го рода по поверхности S от функции F и обозначается
$$\iint\limits_S F(x,y,z)\,dS. \tag{2}$$

Покажем, что интеграл (2) существует, если функция $F(x, y, z)$ непрерывна и $|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v| > 0$. Из (1) для интегральной суммы имеем

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)\,|S_i| = \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) \iint\limits_{D_i} |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|\, du\, dv.$$

Так как функция $|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|$ непрерывна, то существует точка (u_i^*, v_i^*) для которой выполнено равенство:

$$\iint\limits_{D_i} |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|\, du\, dv = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|(u_i^*, v_i^*)|D_i|.$$

Предположим, что (u_i^*, v_i^*), такая что

$$x(u_i^*, v_i^*) = x_i, \quad y(u_i^*, v_i^*) = y_i, \quad z(u_i^*, v_i^*) = z_i.$$

В этом случае интегральная сумма имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} F(x(u_i^*, v_i^*), y(u_i^*, v_i^*), z(u_i^*, v_i^*))|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|(u_i^*, v_i^*)|D_i|$$

и является интегральной суммой для интеграла

$$\iint\limits_{D} F(x(u, v), y(u, v), z(u, v))|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|(u, v)\, du\, dv.$$

В общем случае точка (u_i^*, v_i^*) не совпадает с точкой (u_i, v_i), где $x(u_i, v_i) = x_i$, $y(u_i, v_i) = y_i$, $z(u_i, v_i) = z_i$. Введем обозначения:

$$m_i = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|(u_i, v_i), \quad m_i^* = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|(u_i^*, v_i^*).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)|S_i| = \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)(m_i^* - m_i + m_i)|D_i| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)m_i|D_i| + \sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)(m_i^* - m_i)|D_i|.$$

Покажем, что последняя сумма стремится к 0 при мелкости разбиения области D стремящейся к 0. Так как $\vec{r}(u, v)$ — непрерывно дифференцируема, то $|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|$ непрерывна в $\overline{D}$, и, стало быть, равномерно непрерывна. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для любого разбиения области D на подобласти D_i с мелкостью $\mu < \delta$ выполнено $|m_i^* - m_i| < \varepsilon$. Тогда

$$\left|\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i)(m_i^* - m_i)|D_i|\right| \leq \max_{(x,y,z)\in S} |F(x,y,z)||D|\varepsilon\,.$$

Таким образом, получаем, что суммы

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) m_i^* |D_i|$$

при $\mu(D) \to 0$ ведут себя также, как суммы:

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i, y_i, z_i) m_i |D_i|,$$

т.е. стремятся к двойному интегралу

$$\iint\limits_D F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|(u,v)\, du\, dv.$$

Таким образом, мы доказали, что интеграл (2) существует и вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\, dS =$$

$$= \iint\limits_D F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|\, du\, dv. \qquad (3)$$

Предположим теперь, что поверхность S задана в виде графика функции $z = f(x,y)$. Пусть $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в некоторой области D. Тогда

$$|\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y| = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y},$$

где $\vec{r}(x,y) = (x, y, f(x,y))$. Соответствующий поверхностный интеграл будет вычисляться по формуле:

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\, dS = \iint\limits_D F(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\, dx\, dy.$$

ПРИМЕР 1. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S z\, dS,$$

где S — часть конуса $x^2+y^2-z^2=0,\ 0\le z\le H$.

Так как $0\le z\le H$, то $\sqrt{x^2+y^2}\le H$. Вычисляем

$$z'_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z'_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$dS=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dx\,dy=\sqrt{2}\,dx\,dy.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S z\,dS=\iint\limits_{x^2+y^2\le H^2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\,dx\,dy=$$

$$\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^H r^2\,dr=\frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_0^{2\pi}H^3\,d\varphi=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}H^3.$$

□

12.2. Ориентация поверхности

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана гладкая поверхность S.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2. Ориентацией поверхности S называется непрерывное поле нормалей единичной длины к поверхности S. В таком случае поверхность называется ориентированной. Если на поверхности S нельзя построить непрерывного нормального векторного поля единичной длины, то поверхность S называется неориентируемой.

Естественно возникает вопрос — может быть на всякой гладкой поверхности существует непрерывное векторное поле нормали? Иначе, существуют ли неориентируемые поверхности?

ПРИМЕР 2. Лист Мёбиуса[6] — неориентируемая поверхность. Опишем его немного подробнее. Модель данной поверхности легко получить, если прямоугольный кусок бумаги $ABCD$, перекрутив один раз, склеить так, чтобы точка A совпала с точкой C, а B с D. Если полученное перекрученное кольцо начать красить в какой-нибудь цвет, то можно не переходя через границы, покрасить все кольцо этим цветом. □

[6] Мёбиус Август Фердинанд (17.11.1790 – 26.9.1868). Род. в Шульцфорте (Германия). Один из основоположников теории геометрических преобразований, а также топологии, теории векторов и многомерной геометрии. Ему также принадлежат важные результаты в теории чисел.

В $\mathbb{R}^3$ существуют две системы координат: (x, y, z) и (y, x, z). Отличие их друг от друга заключается в том, что невозможно осуществить такое движение одной из систем координат, чтобы в результате его оказались совмещенными точка O и одноименные положительные полуоси x, y, z обоих систем. Первую систему называют правой, вторую — левой. Если смотреть сверху вниз вдоль положительной полуоси z, то для совмещения положения оси x с положением y в кратчайшем направлении в первом случае можно вращать ось x в плоскости (x, y) против часовой стрелки, а во втором — по часовой стрелке. В каждой из рассматриваемых двух систем естественно ввести комбинацию, состоящую из единичного направленного в положительном направлении оси z вектора и ортогонального к оси Oz круга, на границе которого задано направление обхода от оси x к оси y в кратчайшем направлении. Данная комбинация называется штопором. Предположим, что основание штопора искривлено, т.е. вместо круга рассматривается кусок поверхности, необязательно плоский, но такой что ось z есть нормаль к этому куску в точке O. В этом случае данную комбинацию также будем называть правым или левым штопором. Определим такой штопор (правый или левый) с нормальным вектором, идущим в произвольном направлении, не обязательно совпадающим с осью z. Пусть в $\mathbb{R}^3$ задана система координат (правая или левая) и ориентированная поверхность S. Таким образом, в каждой точке $P \in S$ имеем единичный нормальный вектор $\vec{n}(P)$, непрерывно зависящий от точки P. Рассмотрим шар $V(P)$ достаточно малого радиуса с центром в точке P, который высекает из поверхности S некоторый связный кусок $\sigma(P)$, т.е. $V(P) \cap S = \sigma(P)$, содержащий точку P. На крае $\gamma(P)$ этого куска определим направление обхода так, что вектор $\vec{n}(P)$ и кусок $\sigma(P)$ образовывали штопор, ориентированный также как данная система координат, т.е. если система координат правая (левая), то и штопор должен быть правым (левым). Если на поверхности S есть край Γ, то созданная конструкция приводит к определенному направлению обхода на Γ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.3. Кусочно-гладкая поверхность S называется ориентированной, если каждый из ее гладких кусков ориентирован и возникающие при этом направления обходов контуров этих кусков согласованны, в том смысле, что вдоль каждой дуги, где два таких контура совпадают, направления их обхода противоположны.

Пусть поверхность S задана уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in D.$$

Тогда вектор нормали $\vec{n}(P)$ может быть вычислен одним из равенств:

$$\vec{n}(P) = \pm\frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}.$$

В дальнейшем будем всегда считать, что в данном равенстве выбран знак $'+'$. Это всегда можно достигнуть, поменяв местами параметры u и v. Тем самым, если задана гладкая ориентированная поверхность S, то всегда можно считать, что она описывается такой вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, что единичная нормаль $\vec{n}(P)$ выражается равенством:

$$\vec{n}(P) = \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Непосредственно проверяется, что если задана замена координат

$$u = u(u', v'), \quad v = v(u', v'),$$

отображающая $\overline{D}' \to \overline{D}$, непрерывно дифференцируемая и имеющая положительный якобиан, то формула нормали инвариантна, т.е.

$$\vec{n}(P) = \frac{\vec{r}'_{u'} \times \vec{r}'_{v'}}{|\vec{r}'_{u'} \times \vec{r}'_{v'}|}.$$

12.3. Интеграл по ориентированной плоской области

Пусть в $\mathbb{R}^2$ задана система координат (x, y) и область G, измеримая по Жордану. Пусть граница области G есть кусочно-гладкая кривая Γ.

Будем говорить, что G положительно ориентирована и обозначать G^+, если на Γ задана положительная ориентация, и G — отрицательно ориентирована и обозначать G^-, если на Γ задана отрицательная ориентация.

Пусть в области G задана интегрируемая функция $f(x, y)$. Введем обозначения

$$\iint\limits_{G^+} f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy,$$

$$\iint\limits_{G^-} f(x, y)\, dx\, dy = -\iint\limits_{G} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Рассмотрим в плоскости $\mathbb{R}^2$ систему координат $x', y' :\ x, y$ и x', y' — одинаково ориентированы. Пусть G — ориентированная область в плоскости (x, y) и задано непрерывно дифференцируемое преобразование

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y),$$

которое взаимнооднозначно отображает область G на G' в плоскости (x', y'). Пусть при этом граница Γ взаимнооднозначно отображается на границу Γ' области G'. Будем предполагать, что

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} \neq 0.$$

При этом преобразовании обход границы Γ индуцирует на Γ' вполне определенный обход. Следовательно, G' можно считать ориентированной областью. Если

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} > 0,$$

то при переходе от Γ к Γ' ориентация Γ не меняется, и если

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} < 0,$$

то ориентации Γ и Γ' противоположны. Несложно показать, что для любой $f(x, y)$ непрерывной на $\overline{G}$, выполнено

$$\iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G'} f(x(x',y'), y(x',y'))\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}\,dx'\,dy', \qquad (4)$$

где G' ориентирована с помощью преобразования, определенного выше. В этой формуле не нужно следить за знаком якобиана. Докажем (4) для $G = G^+$. Тогда

$$\iint\limits_{G^+} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \begin{cases} \iint\limits_{G'} f(x(x',y'), y(x',y'))J\,dx'\,dy' = \\ \iint\limits_{G'^+} f(x(x',y'), y(x',y'))J\,dx'\,dy', & J > 0, \\ -\iint\limits_{G'} f(x(x',y'), y(x',y'))J\,dx'\,dy' = \\ \iint\limits_{G'^-} f(x(x',y'), y(x',y'))J\,dx'\,dy', & J < 0, \end{cases}$$

где

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичным образом определяются интегралы для G^+, G^-, определенных на других координатных плоскостях (y, z), (z, x).

12.4. Поверхностный интеграл II рода

Пусть в области $H \subset \mathbb{R}^3$ задано непрерывное векторное поле:

$$\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k},$$

где (x,y,z) — прямоугольная система координат. Пусть в H задана гладкая ориентированная поверхность S^*:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k},$$

где $(u,v) \in \Omega$, $|\vec{r'}_u \times \vec{r'}_v| > 0$. В соответствии с ранее принятой договоренностью, единичная нормаль

$$\vec{n}(A) = \frac{\vec{r'}_u \times \vec{r'}_v}{|\vec{r'}_u \times \vec{r'}_v|},$$

где $A = (x,y,z) \in S^*$. Тогда косинусы углов между нормалью $\vec{n}(A)$ и осями координат x, y, z вычисляются по формулам:

$$\cos(\vec{n}, x) = \kappa \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},$$

$$\cos(\vec{n}, y) = \kappa \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},$$

$$\cos(\vec{n}, z) = \kappa \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

где

$$\kappa = \frac{1}{|\vec{r'}_u \times \vec{r'}_v|}.$$

Данные равенства легко следуют из формулы:

$$\vec{r'}_u \times \vec{r'}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\vec{k}.$$

Через S обозначим ту же поверхность S^*, но без ориентации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.4. Потоком вектора $\vec{a}$ через ориентированную поверхность S^* называется интеграл I-го рода по поверхности S от скалярного произведения

$$\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle = P\cos(\vec{n}, x) + Q\cos(\vec{n}, y) + R\cos(\vec{n}, z).$$

Обозначим поток вектора

$$\iint\limits_{S^*} \langle \vec{a}, \vec{ds} \rangle = \iint\limits_{S} \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle \, dS,$$

так как $\langle \vec{a}, \vec{n} \rangle$ — непрерывная функция, то интеграл в правой части существует.

Справедливо равенство:

$$\iint\limits_S \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle \, dS = \iint\limits_S (P\cos(\vec{n}, x) + Q\cos(\vec{n}, y) + R\cos(\vec{n}, z)) \, dS =$$

$$= \iint\limits_\Omega \left(P\kappa \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\kappa \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\kappa \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) |r'_u \times r'_v| \, du \, dv =$$

$$= \iint\limits_\Omega \left(P \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right) du \, dv. \qquad (5)$$

Здесь в правой части равенства стоит обычный двойной интеграл по области G, в которой функции P, Q и R зависят от $x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$.

Рассмотрим частный случай потока. Предположим, что гладкий кусок S' поверхности S взаимнооднозначно проектируется на каждую из координатных плоскостей $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$, соответственно в области S'_x, S'_y, S'_z, причем каждая из этих областей измерима по Жордану. Таким образом, гладкий кусок S' описывается любой из трех функций:

$$x = f_1(y,z), \quad (y,z) \in S'_x,$$

$$y = f_2(z,x), \quad (z,x) \in S'_y,$$

$$z = f_3(x,y), \quad (x,y) \in S'_z.$$

Обозначим через S'^*_x, S'^*_y, S'^*_z, соответствующим образом ориентированные проекции, ориентированной поверхности S'^*. Нормаль $\vec{n}$ к куску поверхности S' образует угол с осью Oz, косинус которого равен:

$$\cos(\vec{n}, z) = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

где

$$p = \frac{\partial f_3}{\partial x}, \ q = \frac{\partial f_3}{\partial y}$$

и знак $'+'$ или $'-'$ выбирается в зависимости от ориентации S'^*. Тогда

$$\iint\limits_{S'} R\cos(\vec{n}, z) \, ds =$$

$$= \iint\limits_{S'_z} R(x,y,f_3(x,y)) \left(\pm \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \right) \sqrt{1+p^2+q^2}\, dx\, dy =$$

$$= \pm \iint\limits_{S'_z} R(x,y,f_3(x,y))\, dx\, dy = \iint\limits_{S'^*_z} R(x,y,f_3(x,y))\, dx\, dy.$$

Здесь последний интеграл берется по ориентированной области.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.5. Введем обозначение

$$\iint\limits_{S'^*} R(x,y,z)\, dx\, dy = \iint\limits_{S'^*_z} R(x,y,f_3(x,y))\, dx\, dy.$$

Интеграл в левой части последнего равенства называется поверхностным интегралом II-го рода.

Аналогичные рассуждения справедливы и для остальных двух интегралов:

$$\iint\limits_{S'} P\cos(\vec{n},x)\, ds = \iint\limits_{S'^*_x} P(f_1(y,z),y,z)\, dy\, dz =$$

$$= \iint\limits_{S'^*} P(x,y,z)\, dy\, dz,$$

$$\iint\limits_{S'} Q\cos(\vec{n},y)\, ds = \int\limits_{S'^*_y} Q(x,f_2(x,z),z)\, dz\, dx =$$

$$= \iint\limits_{S'^*} Q(x,y,z)\, dz\, dx.$$

Таким образом, поток вектора $\vec{a}$ через ориентированную поверхность S^* может быть вычислен по формуле:

$$\iint\limits_{S} \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle\, ds = \iint\limits_{S^*} P(x,y,z)\, dy\, dz + Q(x,y,z)\, dz\, dx +$$

$$+ R(x,y,z)\, dx\, dy. \tag{6}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если поверхность S^* может быть разрезана на конечное число частей $S^* = \cup_k S^*_k$, каждая из которых проектируется однозначно на все три координатные плоскости, то для того, чтобы вычислить поток вектора $\vec{a}$ через поверхность S^*, нужно вычислить потоки $\vec{a}$ через все S^*_k и их сложить.

ЗАМЕЧАНИЕ. Связь поверхностных интегралов второго рода с поверхностными интегралами первого рода дана уже в определении.

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds =$$

$$= \iint\limits_{S^*} P(x,y,z)\,dy\,dz + Q(x,y,z)\,dx\,dz + R(x,y,z)\,dx\,dy,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали, направленной в соответствии с выбранной стороной поверхности (т.е. ориентацией).

12.5. Формула Гаусса-Остроградского

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей S, и на $\overline{G}$ определено векторное поле

$$\vec{a}(x,y,z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}.$$

Будем предполагать, что функции

$$P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z),\ \frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)$$

непрерывны в $\overline{G}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.6. Дивергенцией векторного поля $\vec{a}$ называется скалярная функция

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Далее будем считать, что поверхность S ориентирована с помощью единичной внешней нормали (внешней относительно к G).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.7. Область G будем называть элементарной областью относительно Oz, или z-областью, если существуют такие функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$, определенные в области $\Lambda_z \subset Oxy$, что

$$G = \{(x,y,z): \quad (x,y) \in \Lambda_z, \quad \varphi(x,y) < z < \psi(x,y)\}.$$

Заметим, что граница z-области может быть представлена следующим образом

$$\partial G = S = S_1 \cup S_2 \cup S_0,$$

где S_1 — представима в виде $z = \psi(x, y)$, S_2 — представима в виде $z = \varphi(x, y)$, а S_0 — поверхность, являющаяся частью цилиндра с основанием $\partial\Lambda_z$ и образующими, параллельными оси Oz.

Точно так же определяются элементарные области относительно осей Ox и Oy.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.8. Области, элементарные относительно всех координатных осей, будем называть элементарными.

ТЕОРЕМА 12.1 (Гаусса[7]-Остроградского). *Пусть G – элементарная область и на $\overline{G}$ заданы функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$, непрерывные вместе со своими частными производными*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z),\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z),\ \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z).$$

Тогда

$$\iiint\limits_G \operatorname{div} \vec{a}\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_S \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle\, ds, \tag{7}$$

где интеграл в правой части формулы берется по внешней стороне границы $\partial G = S$, (т.е. $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S).

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула (1) называется формулой Гаусса—Остроградского, или, в векторном анализе, теоремой о дивергенции.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формулу Гаусса-Остроградского иначе можно записать в следующей форме

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy. \tag{8}$$

Доказательство. **а)** Покажем справедливость формулы (7) для случая, когда $P = 0,\ Q = 0$ и G является z-областью, т.е. существуют функции $\lambda_1(x, y),\ \lambda_2(x, y),\ (x, y) \in \Lambda_z$, такие, что

$$G = \{(x, y, z):\ (x, y) \in \Lambda_z,\ \lambda_1(x, y) \le z \le \lambda_2(x, y)\}.$$

Пусть S^+ — граница области G ориентированная с помощью внешней нормали. Тогда для области G имеет место равен-

[7]Гаусс Карл Фридрих (30.4.1777 – 23.2.1855) – немецкий математик, астроном, физик и геодезист. Род. в Брауншвейге (Германия). В его творчестве органично сочетались исследования по теоретической и прикладной математике. Работы Гаусса оказали большое влияние на дальнейшее развитие высшей алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории притяжения, классической теории электричества и магнетизма, геодезии, теоретической астрономии.

ство:

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\Lambda_z} dx\,dy \int\limits_{\lambda_1(x,y)}^{\lambda_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z)\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\Lambda_z} R(x,y,\lambda_2(x,y))\,dx\,dy - \iint\limits_{\Lambda_z} R(x,y,\lambda_1(x,y))\,dx\,dy.$$

Введем обозначения: σ_1^+ — ориентированная поверхность графика функции $z=\lambda_1(x,y)$, σ_2^+ — ориентированная поверхность графика функции $z=\lambda_2(x,y)$, σ^+ — ориентированная боковая поверхность, т.е. $S^+=\sigma_1^+\cup\sigma_2^+\cup\sigma^+$. Обозначим через $\sigma_{1,z}^+$, $\sigma_{2,z}^+$ — проекции кусков σ_1^+ и σ_2^+ на плоскость $z=0$ ориентированные соответствующим образом ($\sigma_{1,z}^+$ — ориентирована отрицательно, $\sigma_{2,z}^+$ — положительно). Пользуясь формулой предыдущего параграфа, получаем

$$\iint\limits_{\Lambda_z} R(x,y,\lambda_2(x,y))\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma_{2,z}^+} R(x,y,\lambda_2(x,y))\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_2^+} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{\sigma_2} R(x,y,z)\cos(\vec{n},z)\,ds.$$

Аналогично получаем

$$\iint\limits_{\Lambda_z} R(x,y,\lambda_1(x,y))\cos(\vec{n},z)\,ds = -\iint\limits_{\sigma_1} R(x,y,z)\cos(\vec{n},z)\,ds.$$

Следовательно,

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_1} R(x,y,z)\cos(\vec{n},z)\,ds + \iint\limits_{\sigma_2} R(x,y,z)\cos(\vec{n},z)\,ds.$$

Замечая, что $\cos(\vec{n},z)=0$ на боковой поверхности σ, имеем:

$$\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\sigma_1} R(x,y,z)\cos(\vec{n},z)\,ds +$$

$$+\iint\limits_{\sigma_2} R(x,y,z)\cos(\vec{n},z)\,ds + \iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)\cos(\vec{n},z)\,ds =$$

$$= \iint\limits_{S} R(x,y,z)\cos(\vec{n},z)\,ds.$$

b) Аналогичным образом можно для x-области и y-области доказать формулы:

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S} P(x,y,z)\cos(\vec{n},x)\,ds,$$

$$\iiint\limits_{G} \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{S} Q(x,y,z)\cos(\vec{n},y)\,ds.$$

Если область G является одновременно x-областью, y-областью и z-областью, то складывая полученные формулы, получаем формулу Гаусса-Остроградского:

$$\iiint\limits_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iint\limits_{S} \left(P\cos(\vec{n},x) + Q\cos(\vec{n},y) + R\cos(\vec{n},z)\right) ds.$$

$\square$

Можно доказать, что формула Гаусса-Остроградского справедлива для любой ограниченной области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. В данном случае мы ограничимся лишь формулировкой.

ТЕОРЕМА 12.2. *Пусть граница ∂G ограниченной области G состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей, и на $\overline{G}$ заданы функции $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$, непрерывные вместе со своими частными производными*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z).$$

Тогда

$$\iiint\limits_{G} \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G} \langle\vec{a},\vec{n}\rangle\,ds,$$

где n – внешняя нормаль к ∂G.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула Гаусса-Остроградского позволяет найти выражение для объема области через соответствующий поверхностный интеграл. Положим в формуле (8) $P = x,\ Q = y,\ R = z$. Тогда

$$3|G| = 3\iiint\limits_G dx\,dy\,dz =$$

$$\iint\limits_S (x\cos(\vec{n},x) + y\cos(\vec{n},y) + z\cos(\vec{n},z))\,ds =$$

$$= \iint\limits_{S^+} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

ПРИМЕР 3. Пусть $G = \{x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$. Тогда

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\int\limits_S\int\left(\frac{x^2}{R}+\frac{y^2}{R}+\frac{z^2}{R}\right)ds = \frac{R}{3}|S|.$$

Следовательно, $|S| = 4\pi R^2$. $\square$

12.6. Геометрический смысл дивергенции

ТЕОРЕМА 12.3. *Пусть в области G определено непрерывно дифференцируемое вектороное поле $\vec{a} = \vec{a}(M)$. Пусть $M_0 \in G$ и D — область с кусочно-гладкой границей $\partial D = S$ такая, что $M_0 \in D, \overline{D} \subset G$. Обозначим через S^+ — поверхность S, ориентированную с помощью внешней нормали, а через $d(D)$ – диаметр D. Тогда*

$$\operatorname{div}\vec{a}(M_0) = \lim_{d(D)\to 0}\frac{\iint\limits_{S^+}\langle\vec{a},\vec{ds}\rangle}{|D|}. \tag{9}$$

Доказательство. По формуле Гаусса–Остроградского получаем

$$\iiint\limits_D \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_S\langle\vec{a},\vec{n}\rangle\,ds = \iint\limits_{S^+}\langle\vec{a},\vec{ds}\rangle.$$

С другой стороны, по интегральной теореме о среднем получаем

$$\iiint\limits_D \operatorname{div}\vec{a}\,dx\,dy\,dz = \operatorname{div}\vec{a}(M)|D|,$$

где M – некоторая точка, принадлежащая D. Таким образом

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \frac{\iint\limits_{S^+} \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle \, dS}{|D|}.$$

Переходя к пределу при $d(D) \to 0$, получаем требуемое. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В правой части формулы (9) стоят величины, не зависящие от выбора системы координат. В результате получаем, что дивергенция векторного поля не зависит от выбора системы координат.

ЗАМЕЧАНИЕ. Точки векторного поля $\vec{a}$ в которых $\operatorname{div} \vec{a} \neq 0$ называются источниками векторного поля. Как видно из последней формулы, поток такого векторного поля через любую достаточно малую поверхность, окружающую источник, не равен нулю.

ПРИМЕР 4. Пусть $u = f(x, y, z)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция в области $\overline{G}$, где $S = \partial G$ — кусочно-гладкая поверхность. Пусть $\nabla u = (f_x, f_y, f_z)$. Тогда по формуле Гаусса—Остроградского поток ∇u через S вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \iint\limits_S \langle \nabla u, \vec{n} \rangle \, ds = \iiint\limits_G \operatorname{div} \nabla u \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iiint\limits_G \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right) dx \, dy \, dz.$$

Отметим, что выражение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$$

называется оператором Лапласа[8] от функции $f(x, y, z)$. $\square$

12.7. Формула Стокса

Пусть $S \subset \mathbf{R}^3$ — дважды непрерывно дифференцируемая поверхность, а $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ — ее представление. Будем считать, что $(u, v) \in \overline{D}$, где D — плоская ограниченная область

[8]Лаплас Пьер Симон (23.3.1749 – 5.3.1827) – французский математик, физик и астроном. Род. в Нормандии (Франция). Ему принадлежат многочисленные фундаментальные работы по математике, экспериментальной и математической физике и небесной механике. В области математики Лаплас получил значительные результаты по теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей, теории потенциала и др.

для которой справедлива формула Грина. Пусть ∂D — один простой кусочно-гладкий контур, Γ_0 — положительно ориентированный контур ∂D, и

$$\begin{cases} u = u(t); \\ v = v(t); \quad a \le t \le b \end{cases}$$

— представление Γ_0. Зададим через

$$\vec{n} = \frac{\vec{r'}_u \times \vec{r'}_v}{|\vec{r'}_u \times \vec{r'}_v|}$$

— ориентацию на S. Таким образом $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. Также обозначим S^* — поверхность S с выбранной на ней нормалью $\vec{n}$, а Γ — контур с представлением $\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))$, где $t \in [a, b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.9. При введенных выше обозначениях говорят, что контур Γ ограничивает поверхность S, или, что поверхность S натянута на Γ.

Пусть в области $G \subset \mathbf{R}^3$ такой, что $S \subset G$, задано векторное поле

$$\vec{a}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Будем предполагать, что функции P, Q, R непрерывно дифференцируемы. Напомним, что

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix}.$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 12.4 (формула Стокса[9]). *Пусть функции P, Q, R непрерывно дифференцируемы в G. Тогда справедлива формула Стокса:*

$$\iint\limits_S \langle \operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n}\rangle\, ds = \int\limits_\Gamma \langle \vec{a}, \vec{dr}\rangle,$$

т.е. поток вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$ через ориентированную поверхность S^* равен циркуляции вектора $\vec{a}$ вдоль границы Γ этой поверхности, ориентированной соответственно ориентации S^*.

[9]Стокс Джорж Габриэль (13.8.1819 – 1.2.1903). Род. в Скрине (Ирландия). Работал преимущественно в области оптики, гидродинамики и математической физики. Особо следует отметить вывод Стоксом одной из важнейших формул в векторном анализе.

ЗАМЕЧАНИЕ. Другими словами, справедливо

$$\iint\limits_{S^*} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

или

$$\iint\limits_{S} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(\vec{n}, x) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(\vec{n}, y) +\right.$$

$$\left.\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos(\vec{n}, z)\right] ds = \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Отметим, что в случае, если S — область в плоскости (x, y) и $\vec{n} = (0, 0, 1)$, тогда формула Стокса принимает вид:

$$\iint\limits_{S^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy,$$

т.е. получаем формулу Грина. Таким образом, формула Стокса это обобщение формулы Грина на случай кривых поверхностей, лежащих в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Справедливы следующие равенства

$$\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)\,dx =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} P[x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))]x'_t(u(t), v(t))dt =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_0} P[x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v)du + \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)dv\right) =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_0} P\frac{\partial x}{\partial u}(u, v)du + P\frac{\partial x}{\partial v}(u, v)dv.$$

Применяя к правой части данного равенства формулу Грина, получаем

$$\int\limits_{\Gamma_0} P\frac{\partial x}{\partial u}(u, v)du + P\frac{\partial x}{\partial v}(u, v)dv = \iint\limits_{D} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(P\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right] dudv =$$

$$= \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + P\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \right) - \left(\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + P\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right) \right] dudv =$$

$$= \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial x}{\partial v} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} \right] dudv =$$

$$= \iint\limits_D \left[\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial (z,x)}{\partial (u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} \right] dudv =$$

$$= \iint\limits_{S^*} \frac{\partial P}{\partial z} dzdx - \iint\limits_{S^*} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos(\vec{n}, y) - \frac{\partial P}{\partial y} \cos(\vec{n}, z) \right) ds.$$

Таким образом,

$$\int\limits_\Gamma P(x,y,z)\, dx = \iint\limits_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos(\vec{n}, y) - \frac{\partial P}{\partial y} \cos(\vec{n}, z) \right) ds. \qquad (10)$$

Аналогично доказываются формулы:

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos(\vec{n}, z) - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos(\vec{n}, x) \right) ds = \int\limits_\Gamma Q(x,y,z)\, dy. \qquad (11)$$

$$\iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos(\vec{n}, x) - \frac{\partial R}{\partial x} \cos(\vec{n}, y) \right) ds = \int\limits_\Gamma R(x,y,z)\, dz. \qquad (12)$$

Объединяя формулы (10), (11) и (12), получаем формулу Стокса. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула Стокса остается справедливой, если в ней взять противоположную ориентацию контура и противоположные нормали.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула Стокса остается справедливой и для ориентируемых кусочно-гладких поверхностей. Условие *дважды* непрерывной дифференцируемости S наложено *только* для простоты доказательства.

ПРИМЕР 5. Пусть $\vec{a} = \nabla u(x,y,z)$, где u — дважды непрерывно дифференцируема. Тогда

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} =$$

$$= (u_{zy} - u_{yz})\vec{i} + (-u_{zx} + u_{xz})\vec{j} + (u_{yx} - u_{xy})\vec{k}.$$

Так как u является дважды непрерывно дифференцируемой, то смешанные производные равны и поэтому $\operatorname{rot} \nabla u = 0$. Из формулы Стокса получаем

$$\int\limits_{\Gamma} \langle \nabla u, \vec{dr} \rangle = \iint\limits_{S} \langle \operatorname{rot} \nabla u, \vec{n} \rangle \, ds = 0.$$

Таким образом, если Γ — кусочно-гладкая кривая в $\mathbf{R}^3$, ограничивающая гладкую поверхность S, то интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} \langle \nabla u, \vec{dr} \rangle = 0.$$

$\square$

ПРИМЕР 6. Пусть $\vec{a} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$, $S = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z > 0\}$. Вычислим поток вектора $\operatorname{rot} \vec{a}$ через S.

$$\iint\limits_{S} \langle \operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n} \rangle \, ds = \int\limits_{\Gamma} \langle \vec{a}, \vec{dl} \rangle = \int\limits_{\Gamma} -\frac{y}{x^2+y^2} \, dx + \frac{x}{x^2+y^2} \, dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} \left(-\frac{\sin\varphi}{R}(-R)\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{R} R \cos\varphi \right) d\varphi = 2\pi.$$

$\square$

12.8. Геометрический смысл ротора

Пусть в области $G \subset \mathbf{R}^3$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\vec{a}(M)$. Зафиксируем произвольно точку $M_0 \in G$. Пусть ν — произвольный единичный вектор; Π — плоскость, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная ν; $S \subset \Pi$ — ограниченная область; $\partial S = \Gamma$ — кусочно-гладкий контур и $d(S)$ — диаметр S. Будем считать, что Γ согласованно ориентирован с ν, т.е. по правилу "штопора"(см. пункт "Ориентация поверхности"), а $M_0 \in S \subset G$.

ТЕОРЕМА 12.5. *Пусть* $\operatorname{rot}_{\nu} \vec{a}$ *— проекция вектора* $\operatorname{rot} \vec{a}$ *на* ν. *Тогда*

$$\operatorname{rot}_{\nu} \vec{a}(M_0) = \lim_{d(S) \to \infty} \frac{\int\limits_{\Gamma} \langle \vec{a}, \vec{dr} \rangle}{|S|}. \tag{13}$$

Доказательство. По формуле Стокса имеем

$$\int\limits_{\Gamma} \langle \vec{a}, \vec{dr} \rangle = \iint\limits_{S} \operatorname{rot}_{\nu} \vec{a} ds.$$

С другой стороны, по теореме о среднем

$$\iint\limits_{S} \operatorname{rot}_{\nu} \vec{a} ds = \operatorname{rot}_{\nu} \vec{a}(M)|S|,$$

где $M \in S$. Таким образом

$$\operatorname{rot}_{\nu} \vec{a}(M) = \frac{\int\limits_{\Gamma} \langle \vec{a}, \vec{dr} \rangle}{|S|}.$$

Переходя к пределу при $d(S) \to 0$ получаем требуемое. □

ЗАМЕЧАНИЕ. Величины, входящие в правую часть (13) не зависят от выбора системы координат. Однако согласованность ν и Γ зависят от ориентации системы координат. При фиксированной ориентации ν изменение ориентации системы координат меняет ориентацию Γ. Таким образом

$$\int\limits_{\Gamma} \langle \vec{a}, \vec{dr} \rangle$$

меняет знак при изменении ориентации, а, стало быть, меняет знак $\operatorname{rot} \vec{a}$. В результате заключаем, что формула Стокса справедлива не только в правой, но и в левой системе координат.

12.9. Соленоидальные векторные поля

В данном параграфе ограниченную область, для которой справедлива формула Гаусса-Остроградского, будем называть допустимой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.10. Непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ называется соленоидальным в этой области, если его поток через ориентированную границу любой допустимой области D такой, что $\overline{D} \subset G$, равен нулю.

ПРИМЕР 7. Рассмотрим векторное поле скоростей текущей жидкости. Соленоидальность означает, что в каждую область, содержащуюся внутри текущей жидкости, в каждый момент времени сколько жидкости втекает, столько же и вытекает. □

ТЕОРЕМА 12.6. *Для того чтобы непрерывно дифференцируемое в области G векторное поле $\vec{a}$ было соленоидальным в G необходимо и достаточно, чтобы в любой точке $M \in G$ выполнялось*

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = 0.$$

Доказательство. Докажем вначале необходимость условия. Пусть векторное поле $\vec{a}$ – соленоидально в G, а $M_0 \in G$ – произвольная точка. Обозначим B_r – открытый шар радиуса r с центром в M_0, а S_r – ограничивающая B_r сфера. Ясно, что для достаточно малых r все $B_r \subset G$.

Напомним, что

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_0) = \lim_{r \to 0} \frac{\iint\limits_{S_r} \langle \vec{a}, \vec{ds} \rangle}{|B_r|}.$$

Учитывая, что

$$\iint\limits_{S_r} \langle \vec{a}, \vec{ds} \rangle = 0, \quad \text{получаем, что} \quad \operatorname{div} \vec{a}(M_0) = 0.$$

Заметим, что вместо шаров B_r можно было взять любые допустимые области.

Далее докажем достаточность условия теоремы. Пусть $\vec{a}$ – непрерывно дифференцируемое в G векторное поле с дивергенцией, равной нулю в G. Пусть, также, D – допустимая область такая, что $\overline{D} \subset G$. Тогда по формуле Гаусса-Остроградского получаем

$$\iint\limits_{\partial D} \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle \, ds = \iiint\limits_{D} \operatorname{div} \vec{a} \, dxdydz = 0.$$

В результате получаем, что поле $\vec{a}$ – соленоидальное. □

ПРИМЕР 8. Пусть $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ – дважды непрерывно дифференцируемое в некоторой области векторное поле. Тогда

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z \partial y} = 0.$$

Таким образом, примером соленоидального поля является векторное поле, представляющее собой в некоторой области поле роторов дважды непрерывно дифференцируемого в этой области векторного поля. □

Глава 21

Внешние дифференциальные формы

Ниже излагаются начальные понятия теории внешних дифференциальных форм. Мы ограничиваемся кругом вопросов, достаточным для работы с обобщенной интегральной теоремой Стокса на поверхностях в $\mathbb{R}^n$.

Дополнительная литература:

1) А. Лихнерович, "Теория связностей в целом и группы голономий", М.: ИЛ, 1960.
2) А. Картан, "Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы", М.: Мир, 1971.
3) Ю.Г. Решетняк, "Курс математического анализа". Часть II. Книга 2. Интегральное исчисление функций многих переменных. Интегральное исчисление на многообразиях. Внешние дифференциальные формы, Новосибирск: Изд-во Института математики, 2001.

§1. Определение внешней формы

1.1. Основные понятия

Пусть U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. *Внешняя дифференциальная форма* ω *степени* $\deg\omega = k$*,* $1 \le k \le n$*,* на множестве U есть выражение вида

$$\omega(x) = \sum_{1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_k\le n} \omega_{i_1 i_2\ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} dx_{i_2}\ldots dx_{i_k}, \qquad (1)$$

где $\omega_{i_1 i_2\ldots i_k}(x)$ — вещественные функции, определенные в U, а индексы $i_1, i_2, \ldots, i_k$ принимают все возможные значения, удовлетворяющие неравенствам $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n$.

Функции $\omega_{i_1 i_2\ldots i_k}(x)$ суть коэффициенты формы ω. Выражения $dx_{i_1} dx_{i_2}\ldots dx_{i_k}$ суть *базисные* формы степени k, геометрическое истолкование которым будет дано несколько ниже.

Базисная форма $dx_{i_1}dx_{i_2}\ldots dx_{i_k}$ является специальным случаем формы (1), в котором коэффициент $\omega_{i_1i_2\ldots i_k}(x)\equiv 1$, $1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_k\le n$, а все остальные коэффициенты обращаются в нуль. Форму, все коэффициетны которой равны нулю, называют 0-*формой* и обозначают символом 0.

Форма ω степени $\deg\omega=0$ есть, по определению, произвольная функция $f:U\to\mathbb{R}$. Форма ω степени $\deg\omega=n$ есть выражение вида

$$\omega(x)=\omega_{12\ldots n}(x)\,dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

Знак суммы Σ в (1) опускается, поскольку сумма имеет всего лишь один член.

Формы ω степени $\deg\omega=1$ имеют вид

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i(x)\,dx_i.$$

Базисные формы степени $(n-1)$ суть выражения

$$dx_1\ldots dx_{i-1}dx_{i+1}\ldots dx_n=dx_1\ldots\widehat{dx_i}\ldots dx_n.$$

Здесь и всюду ниже знак $\widehat{\ }$ над выражением означает, что оно пропускается.

Пусть $\omega_{1\ldots\widehat{i}\ldots n}(x)$ — коэффициенты формы степени $(n-1)$. Удобно положить

$$\omega_{1\ldots\widehat{i}\ldots n}(x)=(-1)^{i-1}\omega_i(x).$$

В этом случае имеем

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\omega_i(x)\,dx_1\ldots\widehat{dx_i}\ldots dx_n.$$

Пусть $f:U\to\mathbf{R}$ — функция. Напомним, что *носитель* f есть множество

$$\operatorname{supp}f\overset{\text{def}}{=}\overline{\{x\in U:f(x)\ne 0\}},$$

а функция f называется *финитной* в U, если ее носитель компактен и содержится в U.

Носителем формы (1) называется объединение носителей всех ее коэффициентов, т.е.

$$\operatorname{supp}\omega\;=\bigcup_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}\operatorname{supp}\omega_{i_1i_2\ldots i_k}.$$

Дифференциальная форма (1) финитна в U, если финитны в U все ее коэффициенты.

Говорят, что дифференциальная форма (1) принадлежит классу $C^r(U)$, $0 \le r \le \infty$, если все ее коэффициенты принадлежат данному классу.

1.2. Сложение и умножение на функцию

Предположим, что на открытом множестве U заданы внешние формы $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ степени k:

$$\varphi(x) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n} \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_k}$$

и

$$\psi(x) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n} \psi_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_k}.$$

Суммой этих форм называется форма вида

$$\varphi(x)+\psi(x) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n} (\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)+\psi_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x))\, dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_k}.$$

Произведением внешней дифференциальной формы

$$\varphi(x) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n} \varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_k}$$

на функцию $f(x)$ называется форма

$$f(x)\varphi(x) = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n} f(x)\varphi_{i_1 i_2 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_k}.$$

Нетрудно проверить, что

$$(f_1 + f_2)\,\varphi = f_1\varphi + f_2\varphi,$$

$$f\,(\varphi + \psi) = f\varphi + f\psi,$$

$$0 \cdot \varphi = 0.$$

§2. Внешнее умножение форм

2.1. Сигнатура перестановки

Пусть $N_r = \{1, 2, \ldots, r\}$ – отрезок натурального ряда. *Перестановка ранга* r есть взаимно однозначное отображение $\alpha : N_r \to N_r$. Каждой перестановке α может быть сопоставлено число $\sigma(\alpha)$ со свойствами:

i) $\sigma(\alpha) = \pm 1$;

ii) для произвольной пары перестановок α и β выполнено

$$\sigma(\alpha \circ \beta) = \sigma(\alpha)\,\sigma(\beta)\,;$$

iii) если α есть перестановка, для которой существует пара индексов $i < j$ таких, что $\alpha(i) = j$, $\alpha(j) = i$ и $\alpha(s) = s$ при всех $s \neq i, j$, то $\sigma(\alpha) = -1$.

Число $\sigma(\alpha)$ называется *сигнатурой перестановки* α. Перестановка α называется *четной*, если $\sigma(\alpha) = +1$, и *нечетной*, если $\sigma(\alpha) = -1$.

Напомним, что перестановки вида *iii*) называются *транспозициями*. Всякая перестановка может быть получена как суперпозиция конечного числа транспозиций. Если μ – число транспозиций, необходимое для получения перестановки α, то, очевидно,

$$\sigma(\alpha) = (-1)^{\mu}.$$

2.2. Внешнее произведение базисных форм

Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_k$ – произвольный набор индексов таких, что

$$1 \le i_1 \le n, \quad 1 \le i_2 \le n, \quad \ldots, \quad 1 \le i_k \le n.$$

Символом

$$dx_{i_1}\, dx_{i_2}\, \ldots,\, dx_{i_k}$$

будем обозначать внешнюю дифференциальную форму степени k, определенную следующим образом. Если среди индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$ имеются два одинаковых, то полагаем

$$dx_{i_1}\, dx_{i_2}\, \ldots,\, dx_{i_k} = 0.$$

Если все числа $i_1, i_2, \ldots, i_k$ попарно различны и найдется перестановка $\alpha : N_k \to N_k$ такая, что

$$i_{\alpha(1)} < i_{\alpha(2)} < \ldots < i_{\alpha(k)},$$

то пусть $i_{\alpha(s)} = \bar{i}_s$ при $s = 1, 2, \dots, k$ и мы полагаем по определению

$$dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_k} = \sigma(\alpha)\, dx_{\bar{i}_1} dx_{\bar{i}_2} \dots dx_{\bar{i}_k}$$

в том случае, когда набор индексов $i_1, i_2, \dots, i_k$ не обязательно упорядочен по возрастанию.

Имеет место следующее общее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Если индексы $i_1, i_2, \dots, i_k$ попарно различны и $\beta : N_k \to N_k$ – перестановка, для которой $j_s = i_{\beta(s)}$, $s = 1, 2, \dots, k$, то справедливо равенство*

$$dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_k} = \sigma(\beta)\, dx_{j_1} dx_{j_2} \dots dx_{j_k}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $\alpha : N_k \to N_k$ – перестановка, для которой

$$i_{\alpha(1)} = \bar{i}_1 < i_{\alpha(2)} = \bar{i}_2 < \dots < i_{\alpha(k)} = \bar{i}_k.$$

Имеем

$$i_m = j_{\beta^{-1}(m)}, \quad \bar{i}_m = i_{\alpha(m)} = j_{\beta^{-1}[\alpha(m)]} = j_{\gamma(m)},$$

где $\gamma = \beta^{-1} \circ \alpha$.

Отсюда, по определению, получаем

$$dx_{j_1} dx_{j_2} \dots dx_{j_k} = \sigma(\beta^{-1} \circ \alpha)\, dx_{\bar{i}_1} dx_{\bar{i}_2} \dots dx_{\bar{i}_k} =$$

$$= \sigma(\beta)\, \sigma(\alpha)\, dx_{\bar{i}_1} dx_{\bar{i}_2} \dots dx_{\bar{i}_k} = \sigma(\beta)\, dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_k},$$

что и требуется. □

2.3. Определение операции умножения

Пусть φ и ψ – произвольные внешние дифференциальные формы степеней $\deg \varphi = k$ и $\deg \psi = l$ соответственно. Именно, пусть

$$\varphi(x) = \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} \varphi_{i_1 \dots i_k}(x)\, dx_{i_1} \dots dx_{i_k}, \tag{1}$$

$$\psi(x) = \sum_{1 \le j_1 \le \dots \le j_l \le n} \psi_{j_1 \dots j_l}(x)\, dx_{j_1} \dots dx_{j_l}. \tag{2}$$

Произведением форм $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называется форма

$$\varphi(x) \wedge \psi(x) =$$

$$= \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}\ \sum_{1\le j_1\le\ldots\le j_l\le n} \varphi_{i_1\ldots i_k}(x)\,\psi_{j_1\ldots j_l}(x)\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}\,dx_{j_1}\ldots dx_{j_l}.$$

Другими словами, форма $\varphi(x)\wedge\psi(x)$ получается, если формально перемножить выражения (1) и (2) как обычные многочлены, подсчитывая произведения базисных внешних форм в соответствии с описанными в предыдущем разделе правилами.

Упражнение. Пусть $\varphi = \varphi_1\,dx_1 + \varphi_2\,dx_2 + \varphi_3\,dx_3$ и $\psi = \psi_1\,dx_1 + \psi_2\,dx_2 + \psi_3\,dx_3$. Перемножить

$$\varphi\wedge\psi = (\varphi_1\,dx_1 + \varphi_2\,dx_2 + \varphi_3\,dx_3)\wedge(\psi_1\,dx_1 + \psi_2\,dx_2 + \psi_3\,dx_3),$$

приводя подобные члены и учитывая, что

$$dx_1dx_1 = dx_2dx_2 = dx_3dx_3 = 0, \quad dx_idx_j = -dx_jdx_i.$$

2.4. Свойства операции умножения

ТЕОРЕМА 2.1. *Внешнее умножение форм дистрибутивно относительно операции сложения, т.е.*

$$\varphi\wedge(\psi_1+\psi_2) = \varphi\wedge\psi_1 + \varphi\wedge\psi_2$$

и

$$(\varphi_1+\varphi_2)\wedge\psi = \varphi_1\wedge\psi + \varphi_2\wedge\psi,$$

каковы бы ни были формы φ, ψ_1, ψ_2 и φ_1, φ_2, ψ такие, что

$$\deg\psi_1 = \deg\psi_2, \quad \deg\varphi_1 = \deg\varphi_2.$$

Доказательство. Докажем первое из равенств. Пусть

$$\varphi = \sum \varphi_{i_1i_2\ldots i_k}\,dx_{i_1}dx_{i_2}\ldots dx_{i_k},$$

$$\psi_1 = \sum \psi^1_{j_1j_2\ldots j_l}\,dx_{j_1}dx_{j_2}\ldots dx_{j_l},$$

$$\psi_2 = \sum \psi^2_{j_1j_2\ldots j_l}\,dx_{j_1}dx_{j_2}\ldots dx_{j_l},$$

где наборы индексов $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и $j_1, j_2, \ldots, j_l$ допускают всевозможные комбинации такие, что

$$1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_k\le n, \quad 1\le j_1\le j_2\le\ldots\le j_l\le n.$$

Мы имеем

$$\psi_1+\psi_2 = \sum(\psi^1_{j_1j_2\ldots j_l} + \psi^2_{j_1j_2\ldots j_l})dx_{j_1}dx_{j_2}\ldots dx_{j_l}.$$

Отсюда,

$$\varphi \wedge (\psi_1 + \psi_2) =$$

$$= \sum_j \sum_i \varphi_{i_1 \dots i_k} \, (\psi^1_{j_1 \dots j_l} + \psi^2_{j_1 \dots j_l}) \, dx_{i_1} \dots dx_{i_k} \, dx_{j_1} \dots dx_{j_l} =$$

$$= \sum_i \sum_j \varphi_{i_1 i_2 \dots i_k} \, \psi^1_{j_1 j_2 \dots j_l} \, dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_k} \, dx_{j_1} dx_{j_2} \dots dx_{j_l} +$$

$$+ \sum_i \sum_j \varphi_{i_1 i_2 \dots i_k} \, \psi^2_{j_1 j_2 \dots j_l} \, dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_k} \, dx_{j_1} dx_{j_2} \dots dx_{j_l} =$$

$$= \varphi \wedge \psi_1 + \varphi \wedge \psi_2.$$

Второе равенство доказывается аналогично. □

ТЕОРЕМА 2.2. *Внешнее умножение дистрибутивно относительно умножения дифференциальной формы на функцию, т.е. для всякой функции f и всяких форм φ и ψ выполнено*

$$f\,(\varphi \wedge \psi) = (f\,\varphi) \wedge \psi = \varphi \wedge (f\psi).$$

Доказательство провести самостоятельно. □

ТЕОРЕМА 2.3. *Внешнее умножение ассоциативно, т.е. для любых форм ω, φ и ψ*

$$(\omega \wedge \varphi) \wedge \psi = \omega \wedge (\varphi \wedge \psi).$$

Доказательство. Проверим сперва следующее предложение. Пусть $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ и $(j_1, j_2, \dots, j_l)$ – произвольные наборы чисел такие, что

$$1 \le i_s \le n, \quad 1 \le j_t \le n, \quad s = 1, \dots, k, \;\; t = 1, \dots, l.$$

Тогда

$$(dx_{i_1} \dots dx_{i_k}) \wedge (dx_{j_1} \dots dx_{j_l}) = dx_{i_1} \dots dx_{i_k} \, dx_{j_1} \dots dx_{j_l}. \quad (3)$$

В случае, когда $i_1 < \ldots < i_k$ и $j_1 < \ldots < j_l$, данное равенство верно по определению. В случае, когда либо среди индексов $i_1, \dots, i_k$, либо среди индексов $j_1, \dots, j_l$ имеются одинаковые, обе части (3) обращаются в нуль и равенство действительно справедливо. Будем предполагать, что в каждом из наборов индексов $i_1 < \ldots < i_k$ и $j_1 < \ldots < j_l$ нет двух одинаковых чисел.

Пусть $(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \dots, \bar{i}_k)$ – перестановка набора $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ в возрастающем порядке, т.е. $\bar{i}_1 < \bar{i}_2 < \ldots < \bar{i}_k$. Пусть $(\bar{j}_1, \bar{j}_2, \dots, \bar{j}_l)$

– аналогичная перестановка для $(j_1, j_2, \ldots, j_l)$. Предположим, что $(\overline{i}_1, \overline{i}_2, \ldots, \overline{i}_k)$ может быть получена из $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ посредством m_1 транспозиций, а $(\overline{j}_1, \overline{j}_2, \ldots, \overline{j}_l)$ получается из $(j_1, j_2, \ldots, j_l)$ посредством m_2 транспозиций. Тогда имеем

$$dx_{i_1}dx_{i_2}\ldots dx_{i_k} = (-1)^{m_1} dx_{\overline{i}_1}dx_{\overline{i}_2}\ldots dx_{\overline{i}_k},$$

$$dx_{j_1}dx_{j_2}\ldots dx_{j_l} = (-1)^{m_2} dx_{\overline{j}_1}dx_{\overline{j}_2}\ldots dx_{\overline{j}_l},$$

Отсюда,

$$dx_{i_1}dx_{i_2}\ldots dx_{i_k} \wedge dx_{j_1}dx_{j_2}\ldots dx_{j_l} =$$
$$(-1)^{m_1} dx_{\overline{i}_1}dx_{\overline{i}_2}\ldots dx_{\overline{i}_k} \wedge (-1)^{m_2} dx_{\overline{j}_1}dx_{\overline{j}_2}\ldots dx_{\overline{j}_l} =$$
$$= (-1)^{m_1+m_2} dx_{\overline{i}_1}dx_{\overline{i}_2}\ldots dx_{\overline{i}_k} dx_{\overline{j}_1}dx_{\overline{j}_2}\ldots dx_{\overline{j}_l}.$$

Остается заметить, что набор $(\overline{i}_1, \overline{i}_2, \ldots, \overline{i}_k, \overline{j}_1, \overline{j}_2, \ldots, \overline{j}_l)$ может быть преобразован в $(i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_l)$ посредством $(m_1 + m_2)$ транспозиций. Отсюда вытекает, что

$$(-1)^{m_1+m_2} dx_{\overline{i}_1}dx_{\overline{i}_2}\ldots dx_{\overline{i}_k} dx_{\overline{j}_1}dx_{\overline{j}_2}\ldots dx_{\overline{j}_l} =$$
$$= dx_{i_1}dx_{i_2}\ldots dx_{i_k} dx_{j_1}dx_{j_2}\ldots dx_{j_l}$$

и равенство (3) полностью доказано.

Соотношение (3) очевидным образом влечет ассоциативность внешнего умножения для базисных форм. Изучим общий случай. Воспользуемся выражениями для дифференциальных форм ω, φ и ψ в развернутом виде. Мы имеем

$$(\omega \wedge \varphi) \wedge \psi =$$
$$\sum_{i,j,s} \omega_{i_1\ldots i_k}\varphi_{j_1\ldots j_l}\psi_{s_1\ldots s_m} \left(dx_{i_1}\ldots dx_{i_k} \wedge dx_{j_1}\ldots dx_{j_l}\right) \wedge dx_{s_1}\ldots dx_{s_m},$$

$$\omega \wedge (\varphi \wedge \psi) =$$
$$\sum_{i,j,s} \omega_{i_1\ldots i_k}\varphi_{j_1\ldots j_l}\psi_{s_1\ldots s_m} dx_{i_1}\ldots dx_{i_k} \wedge \left(dx_{j_1}\ldots dx_{j_l} \wedge dx_{s_1}\ldots dx_{s_m}\right).$$

По доказанному

$$\left(dx_{i_1}\ldots dx_{i_k} \wedge dx_{j_1}\ldots dx_{j_l}\right) \wedge dx_{s_1}\ldots dx_{s_m} =$$
$$= dx_{i_1}\ldots dx_{i_k} \wedge \left(dx_{j_1}\ldots dx_{j_l} \wedge dx_{s_1}\ldots dx_{s_m}\right),$$

откуда следует нужное равенство $(\omega \wedge \varphi) \wedge \psi = \omega \wedge (\varphi \wedge \psi)$. □

ТЕОРЕМА 2.4. *Для произвольной пары форм φ и ψ выполнено*

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{\deg\varphi \cdot \deg\psi} \psi \wedge \varphi.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, в котором формы φ и ψ базисные,

$$\varphi = dx_{i_1}dx_{i_2}\dots dx_{i_k}, \quad \psi = dx_{j_1}dx_{j_2}\dots dx_{j_l}.$$

Мы имеем

$$\varphi \wedge \psi = dx_{i_1}dx_{i_2}\dots dx_{i_k}dx_{j_1}dx_{j_2}\dots dx_{j_l}$$

и

$$\psi \wedge \varphi = dx_{j_1}dx_{j_2}\dots dx_{j_l}dx_{i_1}dx_{i_2}\dots dx_{i_k}.$$

Покажем, что набор

$$(i_1, i_2, \dots, i_k, j_1, j_2, \dots, j_l) \tag{4}$$

преобразуемся в набор

$$(j_1, j_2, \dots, j_l, i_1, i_2, \dots, i_k) \tag{5}$$

посредством kl транспозиций.

Действительно, переставим сперва в (4) индексы i_k и j_1, затем индексы i_k и j_2 и т.д. В результате получим последовательность, в которой i_k находится на последнем месте, а индексы $j_1, j_2, \dots, j_l$ сдвинутся на одну позицию влево. Далее будем переставлять i_{k-1} и $j_1, j_2, \dots, j_l$. Через k шагов набор (4) будет преобразован в набор (5).

На каждом шаге выполняется l транспозиций. Поэтому общее число транспозиций равно kl. Отсюда

$$dx_{i_1}dx_{i_2}\dots dx_{i_k}dx_{j_1}dx_{j_2}\dots dx_{j_l} =$$
$$= (-1)^{kl}dx_{j_1}dx_{j_2}\dots dx_{j_l}dx_{i_1}dx_{i_2}\dots dx_{i_k},$$

т.е.

$$\varphi \wedge \psi = (-1)^{kl}\psi \wedge \varphi = (-1)^{\deg\varphi\cdot\deg\psi}\psi \wedge \varphi.$$

Теорема доказана. □

2.5. Следствия

Следующие три утверждения проверить самостоятельно.

СЛЕДСТВИЕ А. *Пусть φ_1, φ_2, ..., φ_k – формы первой степени и $\alpha : N_k \to N_k$ – произвольная перестановка. Тогда*

$$\varphi_{\alpha(1)} \wedge \varphi_{\alpha(2)} \wedge \dots \wedge \varphi_{\alpha(k)} = \sigma(\alpha)\, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \dots \wedge \varphi_k.$$

СЛЕДСТВИЕ B. *Пусть φ_1, φ_2, ..., φ_k – внешние дифференциальные формы первой степени, $k \le n$,*

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{k} q_{ij}\, \varphi_j$$

– их линейные комбинации.

Тогда

$$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_k = Q\, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k,$$

где

$$Q = \det \|q_{ij}\|_{i,j=1,\ldots,k}.$$

СЛЕДСТВИЕ С. *Пусть φ_1, φ_2, …, φ_n – формы первой степени на открытом множестве $U \subset \mathbf{R}^n$ и*

$$\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x)\, dx_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда

$$\varphi_1(x) \wedge \ldots \wedge \varphi_n(x) = \Delta(x)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

где

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(x)\varphi_{12}(x)\ldots\varphi_{1n}(x) \\ \varphi_{21}(x)\varphi_{22}(x)\ldots\varphi_{2n}(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n1}(x)\varphi_{n2}(x)\ldots\varphi_{nn}(x). \end{vmatrix}$$

§3. Внешнее дифференцирование

3.1. Понятие внешнего дифференцирования

Пусть $f(x)$ – внешняя форма степени $\deg f = 0$ на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$. Дифференциалом формы $f(x)$ называется внешняя дифференциальная форма $\varphi(x)$ степени $\deg \varphi = 1$, определяемая равенством

$$\varphi(x) = \frac{\partial f}{x_1}(x)\, dx_1 + \frac{\partial f}{x_2}(x)\, dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{x_n}(x)\, dx_n.$$

Дифференциал формы $f(x)$ обозначается символом $df(x)$.

Дифференциал формы степени больше 0 определяем по индукции. Именно, предположим, что $\varphi(x)$ есть произвольная внешняя дифференциальная форма класса C^1 степени $\deg \varphi(x) = k \geq 1$,

$$\varphi(x) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} \varphi_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}.$$

Дифференциалом формы $\varphi(x)$ называется внешняя дифференциальная форма $d\varphi(x)$ степени $\deg\,(d\varphi(x)) = k+1$, определяемая равенством

$$d\varphi(x) = \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} d\varphi_{i_1\ldots i_k}(x)\wedge dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}.$$

Здесь в правой части стоит внешняя форма, получаемая из формы $\varphi(x)$ заменой каждого ее коэффициента дифференциалом: слагаемые $\varphi_{i_1\ldots i_k}(x)\,dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}$ заменяются внешними произведениями форм $d\varphi_{i_1\ldots i_k}(x)$ первой степени на базисные формы $dx_{i_1}\ldots dx_{i_k}$ степени k.

3.2. Примеры

1) Пусть φ – базисная форма или произвольная форма вида

$$\varphi(x) = dx_{i_1}dx_{i_2}\ldots dx_{i_k},$$

где ряд $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ не обязательно упорядочен. Тогда

$$d\varphi(x) = 0.$$

2) Рассмотрим форму первой степени

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,dx_i.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
d\varphi(x) &= \sum_{i=1}^{n} da_i(x)\wedge dx_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x)\,dx_j\right)\wedge dx_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x)\,dx_j\wedge dx_i = \\
&= \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x)\,dx_j\wedge dx_i + \frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x)\,dx_i\wedge dx_j\right) = \\
&= \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x)\right)\,dx_i\wedge dx_j.
\end{aligned}$$

3) Предположим, что $\varphi(x)$ – внешняя дифференциальная форма степени $(n-1)$. Мы имеем

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i(x)\, dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n.$$

Дифференцируя, находим

$$\begin{aligned} d\varphi(x) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} da_i(x) \wedge dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_j}(x)\, dx_j \right) \wedge dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(x)\, dx_i \wedge dx_1 \ldots \widehat{dx_i} \ldots dx_n = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}(x) \right) dx_1 \ldots dx_n. \end{aligned}$$

3.3. Свойства операции дифференцирования

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Если форма $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = f(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_k},$$

где $f(x) : U \to \mathbf{R}$ – функция, то будем называть эту форму *мономом* (или одночленом).

Каждая внешняя дифференциальная форма является суммой мономов.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для произвольной пары форм φ_1 и φ_2, $\deg \varphi_1 = \deg \varphi_2$, класса C^1 выполнено*

$$d(\varphi_1 + \varphi_2) = d\varphi_1 + d\varphi_2.$$

Доказательство очевидно для мономов и, тем самым, для любых форм. □

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть φ – форма класса C^1 и $f : U \to \mathbf{R}$ – вещественная функция класса C^1. Тогда*

$$d(f\,\varphi) = df \wedge \varphi + f\, d\varphi.$$

Доказательство. Предположим сперва, что φ – моном. Тогда

$$\varphi(x) = u(x)\, dx_{i_1} \dots dx_{i_k},$$
$$f\,\varphi(x) = f(x)\, u(x)\, dx_{i_1} \dots dx_{i_k}.$$

Мы имеем

$$d(f\,\varphi(x)) = d(f(x)\, u(x)) \wedge dx_{i_1} \dots dx_{i_k}.$$

Однако,

$$d(fu) = f\, du + u\, df,$$

а потому

$$\begin{aligned} d(f\,\varphi) &= \\ &= f du \wedge dx_{i_1} \dots dx_{i_k} + u df \wedge dx_{i_1} \dots dx_{i_k} = \\ &= f\, d\varphi + df \wedge u\, dx_{i_1} \dots dx_{i_k} = \\ &= f\, d\varphi + df \wedge \varphi. \end{aligned}$$

Утверждение доказано для мономов. В силу теоремы 3.1 она верна и в общем случае. □

ТЕОРЕМА 3.3. *Для произвольной пары форм φ и ψ класса $C^1(U)$ выполнено*

$$d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^{\deg \varphi} \varphi \wedge d\psi.$$

Доказательство. Предположим сначала, что φ и ψ суть мономы:

$$\varphi(x) = u(x)\, dx_{i_1} \dots dx_{i_k}$$

и

$$\psi(x) = v(x)\, dx_{j_1} \dots dx_{j_l}.$$

Тогда имеем

$$\varphi \wedge \psi = uv\, dx_{i_1} \dots dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \dots dx_{j_l} = uv\, \omega,$$

где

$$\omega = dx_{i_1} \dots dx_{i_k} dx_{j_1} \dots dx_{j_l}.$$

В силу теоремы 3.2,

$$\begin{aligned} d(\varphi \wedge \psi) &= d(uv) \wedge \omega + uv\, d\omega = \\ &= (u\, dv + v\, du) \wedge \omega = \\ &= u\, dv \wedge \omega + v\, du \wedge \omega. \end{aligned}$$

Тем самым, получаем

$$\begin{aligned}
d(\varphi \wedge \psi) &= v\,du \wedge dx_{i_1} \dots dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \dots dx_{j_l} + \\
&+ u\,dv \wedge dx_{i_1} \dots dx_{i_k} \wedge dx_{j_1} \dots dx_{j_l} = \\
&= v\,d\varphi \wedge dx_{j_1} \dots dx_{j_l} + \\
&+ u(-1)^k dx_{i_1} \dots dx_{i_k} \wedge dv \wedge dx_{i_1} \dots dx_{j_l} = \\
&= d\varphi \wedge \psi + (-1)^{\deg \varphi} \varphi \wedge d\psi.
\end{aligned}$$

Общий случай очевидным образом сводится к уже рассмотренному. □

§4. Первая теорема Пуанкаре

Докажем следующий фундаментальный результат.

ТЕОРЕМА 4.1 (теорема Пуанкаре[1]). *Для всякой формы φ класса $C^2(U)$ выполняется*

$$d\,(d\varphi(x)) = 0.$$

Доказательство. Предположим сначала, что φ есть форма нулевой степени, т.е. $\varphi(x) = u(x) : U \to \mathbb{R}$. Тогда имеем

$$d\varphi = du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx_i,$$

[1] Анри Пуанкаре (29.04.1854 – 17.07.1912) – французский математик, физик, астроном и философ, член Парижской АН (с 1887 г.) Основные исследования посвящены теории чисел, алгебре, топологии, алгебраической топологии, теории дифференциальных уравнений, математической физике, небесной механике, основаниям математики.

$$
\begin{aligned}
d(d\varphi) &= d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx_i\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_j\right) \wedge dx_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_j \wedge dx_i = \\
&= \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_j \wedge dx_i + \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_i \wedge dx_j\right) = \\
&= \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j = 0.
\end{aligned}
$$

Для форм нулевой степени утверждение доказано.

Пусть теперь φ есть форма степени $k \ge 1$. Здесь имеем

$$\varphi = \sum \varphi_{i_1 \dots i_k}\, dx_{i_1} \dots dx_{i_k},$$

$$d\varphi = \sum d\varphi_{i_1 \dots i_k} \wedge dx_{i_1} \dots dx_{i_k},$$

$$
\begin{aligned}
d(d\varphi) = \sum d(d\varphi_{i_1 \dots i_k}) \wedge dx_{i_1} \dots dx_{i_k} - \\
- \sum d\varphi_{i_1 \dots i_k} \wedge d(dx_{i_1} \dots dx_{i_k}).
\end{aligned}
$$

По доказанному выше

$$d(d\varphi_{i_1 \dots i_k}) = 0.$$

Однако, также и

$$d(dx_{i_1} \dots dx_{i_k}) = 0.$$

Тем самым, теорема доказана полностью. □

§5. Индуцированное отображение форм

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ и $V \subset \mathbb{R}^m$ – открытые множества. Пусть

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) : U \to V, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

– отображение класса C^r, $1 \le r \le \infty$.

Рассмотрим внешнюю дифференциальную форму

$$\varphi(y) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_m \le m} \varphi_{i_1 \ldots i_k}(y)\, dy_{i_1} \ldots dy_{i_k},$$

определенную на V. *Индуцированная форма* $(f^*\varphi)(x)$ определяется выражением

$$(f^*\varphi)(x) = \sum_{1 \le i_1 \ldots < i_k \le m} \varphi_{i_1 \ldots i_k}[f(x)]\, df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться сокращенной записью, полагая

$$(f^*\varphi)(x) = f^*\varphi\,(x).$$

Отображение $f : U \to V$ позволяет каждой внешней дифференциальной форме $\varphi(y)$ в V сопоставить по указанному правилу форму $f^*\varphi(x)$ в U. Тем самым, определено индуцированное отображение f^* пространства внешних форм, определенных над открытым множеством $V \subset \mathbb{R}^m$, в пространство форм $f^*\varphi(x)$, заданных над $U \subset \mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 5.1. (i) *Если φ есть форма нулевой степени, то $f^*\varphi(x) = \varphi[f(x)]$, т.е. $f^*\varphi = \varphi \circ f$ – суперпозиция функции φ и отбражения f.*

(ii) *Для произвольной пары форм φ и ψ одинаковой степени,* $\deg\varphi = \deg\psi$, *выполнено*

$$f^*(\varphi + \psi) = f^*\varphi + f^*\psi.$$

(iii) *Пусть $u(y)$ – функция, определенная на V, $\varphi(y)$ – внешняя форма степени $k \ge 0$. Тогда*

$$f^*(u\,\varphi)(x) = (f^*u)(x)\,(f^*\varphi)(x).$$

(iv) *Для произвольной пары форм φ и ψ выполнено*

$$f^*(\varphi \wedge \psi) = f^*\varphi \wedge f^*\psi.$$

Проверить самостоятельно.

ТЕОРЕМА 5.2. *Если отображение $f(x) : U \to V$ принадлежит классу $C^2(U)$ и $\varphi(y)$ – форма класса $C^1(V)$, то*

$$(f^*d\varphi)(x) = (d\,f^*\varphi)(x).$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\varphi(y)$ – форма нулевой степени. Тогда

$$\varphi(y) = u(y), \quad f^*\varphi(x) = u[f(x)].$$

В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{\partial u[f(x)]}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial u}{\partial y_j}[f(x)]\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}(df^*\varphi)(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u[f(x)]}{\partial x_i}\, dx_i = \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_i}[f(x)]\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_i} dx_i\right) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_j}[f(x)]\, df_j(x) = f^* d\varphi(x).\end{aligned}$$

Теперь пусть φ – форма степени $k \geq 1$, определенная на открытом множестве V. Имеем

$$\varphi(y) = \sum_{j_1 \dots j_k} \varphi_{j_1 \dots j_k}(y)\, dy_{j_1} \dots dy_{j_k}$$

и

$$f^*\varphi(y) = \sum_{j_1 \dots j_k} [f(x)]\, df_{j_1}(x) \wedge \dots \wedge df_{j_k}(x).$$

Отсюда,

$$\begin{aligned}(df^*\varphi)(x) &= \textstyle\sum_{j_1 \dots j_k} d(f^*\varphi_{j_1 \dots j_k}(x)) \wedge df_{j_1}(x) \wedge \dots \wedge df_{j_k}(x) + \\ &+ \textstyle\sum_{j_1 \dots j_k} f^*\varphi_{j_1 \dots j_k}(x)\, d[df_{j_1}(x) \wedge \dots \wedge df_{j_k}(x)].\end{aligned}$$

Последовательным использованием правила дифференцирования произведения внешних форм и свойства $d(df_j) = 0$ находим

$$d[df_{j_1}(x) \wedge \dots \wedge df_{j_k}(x)] = 0.$$

Тем самым, приходим к соотношениям

$$(df^*\varphi_{j_1 \dots j_k})(x) = \sum_{j_1 \dots j_k} df^*\varphi_{j_1 \dots j_k}(x) \wedge df_{j_1}(x) \wedge \dots \wedge df_{j_k}(x).$$

Согласно ранее доказанному для форм степени 0,

$$df^*\varphi_{j_1\ldots j_k}(x) = f^*d\varphi_{j_1\ldots j_k}(x).$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} df^*\varphi(x) &= \textstyle\sum_{j_1\ldots j_k} f^*\left(d\varphi_{j_1\ldots j_k}(x)\wedge df_{j_1}(x)\wedge\ldots\wedge df_{j_k}(x)\right) = \\ &= f^*d\varphi(x), \end{aligned}$$

что и требуется. □

ТЕОРЕМА 5.3. *Пусть $U\subset\mathbb{R}^n$, $V\subset\mathbb{R}^m$ и $W\subset\mathbb{R}^l$ – открытые множества. Предположим, что даны отображения класса C^1:*

$$f: U\to V,\quad g: V\to W,\quad h = g\circ f: U\to W.$$

Тогда для всякой внешней дифференциальной формы φ, определенной на множестве W, выполнено

$$[f^*(g^*\varphi)](x) = h^*\varphi(x),$$

или, в другой записи,

$$(g\circ f)^* = f^*\circ g^*.$$

ТЕОРЕМА 5.4. *Если $U = V$ и $i: U\to V$ – тождественное отображение множества U на себя, то для любой внешней дифференциальной формы φ выполнено*

$$i^*\varphi(x) = \varphi(x).$$

ТЕОРЕМА 5.5. *Пусть U и V – открытые множества в $\mathbb{R}^n$ и $f: U\to V$ – диффеоморфное отображение множества U на множество V, а f^{-1} – отображение, обратное к f. Тогда для произвольной внешней дифференциальной формы φ, определенной на V выполнено*

$$(f^{-1})^*\,f^*\varphi(x) = \varphi(x).$$

Доказательства теорем 5.3 – 5.5 мы оставляем для самостоятельного работы. □

§6. Вторая теорема Пуанкаре

6.1. Диффеоморфизмы и их свойства

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество. Отображение $f: U \to \mathbb{R}^n$ называется *диффеоморфным отображением* (или *диффеоморфизмом*) класса C^r, $r \geq 1$, если f взаимно однозначно, принадлежит классу C^r и в каждой точке $x \in U$ якобиан отображения f отличен от нуля.

Следующее утверждение представляет собой один из вариантов классической теоремы об обратном отображении.

ТЕОРЕМА 6.1. *Пусть $f : U \to \mathbb{R}^n$ – диффеоморфное отображение класса C^r открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда множество $V = f(U)$ также открыто и обратное отображение $f^{-1} : V \to U$ есть диффеоморфизм того же класса.*

Доказательство весьма не просто. Попробуйте доказать самостоятельно или найти в математической литературе. Теорема относится к числу важнейших теорем курса дифференциальной топологии. $\square$

ПРИМЕР. Взаимной однозначности отображения f и принадлежности f классу C^r, $r \geq 1$, не достаточно, чтобы обратное отображение f^{-1} было того же класса, т.е. *условие неравенства нулю якобиана существенно.*

Рассмотрим отображение

$$u = x^3, \quad v = y$$

плоскости $\mathbb{R}^2$ на себя. Легко видеть, что отображение взаимно однозначно. Его якобиан

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\,x^2 \neq 0$$

всюду, кроме прямой $x = 0$.

Данное отображение принадлежит классу C^∞ в $\mathbb{R}^2$. Однако, обратное отображение

$$x = u^{1/3}, \quad y = v$$

не принадлежит даже классу C^1, поскольку производная $\frac{\partial x}{\partial u}$ не существует при $u = 0$. $\square$

Открытые множества $U \subset \mathbf{R}^n$ и $V \subset \mathbf{R}^n$ называются *диффеоморфными класса* C^r, $r \geq 1$, если существует C^r - диффеоморфизм множества U на множество V.

ПРИМЕРЫ. 1) Открытый шар

$$B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$$

диффеоморфен пространству $\mathbb{R}^n$. Отображение

$$f : s \to \frac{x}{1 - |x|^2}$$

осужествляет диффеоморфизм $B(0,1)$ на $\mathbb{R}^n$.

2) Единичный n-мерный куб

$$Q(0,1) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| < 1, \quad i = 1, \ldots, n\}$$

диффеоморфен $\mathbb{R}^n$. Отображение

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \in Q(0,1) \to \left(\frac{x_1}{1 - x_1^2}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_n^2}\right)$$

осуществляет такой диффеоморфизм.

6.2. Формулировка теоремы

ТЕОРЕМА 6.2. *Пусть U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и пусть φ – дифференциальная форма степени $\deg \varphi = r$, $0 \leq r \leq n$. Тогда, если φ принадлежит классу C^k, где $k = n - r + 1$, область U диффеоморфна класса C^{k+1} пространству $\mathbb{R}^n$ и*

$$d\varphi = 0 \quad \text{всюду в} \quad U,$$

то существует форма $\psi \in C^1$ такая, что

$$d\psi = \varphi \quad \text{всюду в} \quad U.$$

6.3. Замкнутые и точные формы

Приведем другие, часто используемые, формулировки 1-й и 2-й теорем Пуанкаре.

Дифференциальная форма $\varphi \in C^k$, $k \geq 1$, называется *замкнутой*, если $d\varphi = 0$. Форма $\varphi \in C^{k-1}$ называется *точной*, если существует форма $\psi \in C^k$ такая, что $d\psi = \varphi$.

1-я теорема Пуанкаре. Если форма $\varphi \in C^2$, то форма $d\varphi$ замкнута.

2-я теорема Пуанкаре. Если форма φ замкнута в области, C^∞-диффеоморфной пространству $\mathbb{R}^n$, то она является точной.

ПРИМЕР. Рассмотрим форму

$$\varphi = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

в проколотой плоскости $U = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Ясно, что $\varphi \in C^\infty$ в U. Нетрудно проверить ее замкнутость.

С другой стороны, заметим, что $\deg\varphi = 1$ и, тем самым, должно быть $\deg\psi = 0$. Однако,

$$\varphi = d\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Функция

$$\psi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

многозначна в проколотой плоскости U и, следовательно, форма φ не может быть точной.

6.4. Иллюстрирующие примеры

Приведем примеры, иллюстрирующие связи с ранее изученными вопросами. Для того, чтобы дифференциальное выражение

$$f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

являлось дифференциалом (точным дифференциалом) некоторой функции необходимо, чтобы

$$f_y = g_x.$$

(Достаточно заметить, что $f(x,y)dx + g(x,y)dy = dh$ влечет $f = h_x, g = h_y$.)

Условие замкнутости формы $f(x,y)dx + g(x,y)dy$ переписывается в виде

$$\begin{aligned} d(f\,dx + g\,dy) &= (f_x dx + f_y dy) \wedge dx + (g_x dx + g_y dy) \wedge dy = \\ &= f_y dy \wedge dx + g_x dx \wedge dy = \\ &= (-f_y + g_x)\,dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Следовательно $g_x = f_y$. Если область $U \subset \mathbb{R}^2$ односвязна и выполненяется условие замкнутости, то можно восстановить однозначную функцию h:

$$h(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy,$$

где $(x_0, y_0) \in U$ – фиксированная точка.

УПРАЖНЕНИЯ. Пусть

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

– отображение класса C^2.

1) Проверить замкнутость формы

$$\varphi = \left(\sum_{i=1}^{k} f_i^2\right)^{-\frac{k}{2}} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} f_i\,df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_n.$$

2) Проверить замкнутоть формы

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} f_i\,df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_n.$$

При каком условии на отображение f эта форма замкнута ? Что означает это условие ?

6.5. Доказательство теоремы

Рассмотрим сначала случай, в котором $U = \mathbb{R}^n$. Доказательство будем проводить посредством индукции по $k = n - r + 1$. Предположим, что $k = 1$, а φ есть C^1-форма степени $\deg\varphi = n$. Здесь имеем

$$\varphi(x) = u(x)\,dx_1 \ldots dx_n,$$

где $u : U \to \mathbf{R}$ – функция класса C^1.

Положим

$$v(x) = v(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_0^{x_1} u(t, x_2, \ldots, x_n)\,dt.$$

Функция v есть функция класса C^1 и
$$\frac{\partial v}{\partial x_1}(x) = u(x).$$

Форма
$$\psi(x) = v(x)\,dx_1 \dots dx_n$$
также принадлежит C^1. При этом
$$d\psi = \frac{\partial v}{\partial x_1}\,dx_1 \dots dx_n = u(x)\,dx_1 \dots dx_n = \varphi$$
и в рассматриваемом случае теорема доказана.

Предположим теперь, что теорема верна для некоторого $k > 1$. Пусть φ – внешняя дифференциальная форма степени $\deg\varphi = r$ в $U = \mathbb{R}^n$ такая, что
$$d\varphi = 0, \quad n - r + 1 = k + 1 \quad \text{и} \quad \varphi \in C^{k+1}.$$
Мы имеем
$$\varphi(x) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le n} \varphi_{i_1 i_2 \dots i_r}(x)\,dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_r}.$$
Выделим сперва все члены, содержащие базисные формы
$$dx_{i_1} dx_{i_3} \dots dx_{i_r} \quad \text{с} \quad i_r = n.$$
Получаем следующее представление для φ :
$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \wedge dx^n = \\ &= \varphi_1(x) + (-1)^{r-1} dx_n \wedge \varphi_2(x).\end{aligned}$$

Здесь форма φ_1 не содержит членов с
$$dx_{i_1} \dots dx_{i_{r-1}} dx_n.$$

Форма $\varphi_2(x)$ имеет вид
$$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_{r-1} < n} \varphi_{i_1 i_2 \dots i_{r-1}, n}(x)\,dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_{r-1}}.$$
Для $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_{r-1} < n$ определим форму
$$\begin{aligned}\eta_{i_1 i_2 \dots i_{r-1}}(x) &= \eta_{i_1 i_2 \dots i_{r-1}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ &= (-1)^{r-1} \int\limits_0^{x_n} \varphi_{i_1 i_2 \dots i_{r-1}, n}(x)\,dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{r-1}.\end{aligned}$$

Положим

$$\eta(x) = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_{r-1}<n} \eta_{i_1 i_2 \ldots i_{r-1}}(x)\, dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_{r-1}}.$$

Дифференцируя η, находим

$$d\eta \;= \textstyle\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_{r-1}<n} \dfrac{\partial \eta_{i_1 i_2 \ldots i_{r-1}}}{\partial x_n}\, dx_n \wedge dx_{i_1} \ldots dx_{i_{r-1}} +$$

$$+\eta_1(x) = (-1)^{r-1}\, dx_n \wedge \varphi_2(x) + \eta_1(x),$$

где форма $\eta_1(x)$ не содержит членов с dx_n.

Так как форма $\varphi \in C^{k+1}$, то форма η также принадлежит классу C^{k+1}. Коэффициенты формы η_1 получаются дифференцированием коэффициентов формы η и, тем самым, форма $\eta_1 \in C^k$. Рассмотрим форму

$$\omega(x) = \varphi(x) - d\eta(x).$$

В соответствии с 1-й теоремой Пуанкаре, $dd\eta = 0$, а в силу предположения, $d\varphi = 0$. Отсюда, $d\omega = 0$.

Поскольку $\eta \in C^{k+1}$, то форма ω, очевидно, принадлежит классу C^k.

Разложение формы $\omega(x)$ по базисным формам, очевидно, не содержит членов с dx_n. Именно,

$$\omega(x) = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r<n} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_r}(x)\, dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_r}.$$

Дифференцируя $\omega(x)$, находим

$$0 = d\omega(x) = \sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_r<n} \frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \ldots i_r}}{\partial x_n}(x)\, dx_{i_1} dx_{i_2} \ldots dx_{i_r} + \omega_1(x), \qquad (1)$$

где $\omega_1(x)$ – форма степени $\deg \omega_1 = r+1$, не содержащая членов с dx_n.

Ни одно из слагаемых, стоящих в (1) под знаком суммы, не может сократиться ни с каким слагаемым, входящим в форму $\omega_1(x)$. Отдельные слагаемые, стоящие под знаком суммы, попарно различны. Поэтому обращение в нуль $d\omega(x)$ возможно тогда и только тогда, когда каждая из производных

$$\frac{\partial \omega_{i_1 i_2 \ldots i_r}}{\partial x_n}(x) = 0.$$

Это означает, что коэффициенты формы $\omega(x)$ не зависят от переменной x_n.

Пусть ρ и j – отображения $\mathbb{R}^n$, определяемые по формулам

$$\rho(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1})$$

и

$$j(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, 0).$$

Положим

$$\widetilde{\varphi}(x) = j^*\omega(x).$$

Покажем, что

$$\rho^*\widetilde{\varphi}(x) = \omega(x).$$

Действительно,

$$\omega(x) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n-1} \omega_{i_1 \ldots i_r}(x)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_r},$$

откуда

$$\widetilde{\varphi}(x) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n-1} \omega_{i_1 \ldots i_r}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_r}.$$

Форма $\rho^*\widetilde{\varphi}(x)$ будет записываться в $\mathbb{R}^n$ посредством той же формулы, что и форма $\widetilde{\varphi}(x)$. Однако, поскольку коэффициенты $\omega_{i_1 \ldots i_r}$ не зависят от x_n, то

$$\rho^*\widetilde{\varphi}(x) = \omega(x),$$

что и тебуется.

Итак, мы имеем

$$d\widetilde{\varphi}(x) = j^* d\omega(x) = 0.$$

Форма $\widetilde{\varphi} \in C^k$, где

$$k = \dim \mathbb{R}^{n-1} - \deg \widetilde{\varphi}(x) + 1.$$

Согласно индукционному допущению отсюда вытекает, что в $\mathbb{R}^{n-1}$ найдется форма $\widetilde{\psi} \in C^1$ такая, что $\widetilde{\varphi} = d\widetilde{\psi}$.

Положим $\theta = \rho^*\widetilde{\psi}$. Тогда $\theta \in C^1$ и

$$d\theta = \rho^* d\widetilde{\psi} = \rho^*\widetilde{\varphi} = \omega.$$

Имеем

$$\varphi(x) = \omega(x) + d\eta(x) = d\theta(x) + d\eta(x).$$

Это означает, что полагая, $\psi = \theta + \eta$, получаем $\varphi = d\omega$ и в случае $U = \mathbb{R}^n$ теорема доказана.

Пусть теперь U – произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, C^{k+1} – диффеоморфное $\mathbb{R}^n$, и $f : U \to \mathbb{R}^n$ – диффеоморфизм класса C^{k+1} области U на $\mathbb{R}^n$. Пусть $g = f^{-1}$ и пусть φ – форма класса C^{k+1} в области U такая, что $d\varphi = 0$.

Положим $\varphi_1 = g^*\varphi$. Тогда

$$d\varphi_1 = g^* d\varphi = 0.$$

Отображение g принадлежит классу C^{k+1}, а потому $g^*\varphi \in C^k$. По доказанному выше найдется форма $\psi_1 \in C^1$ в $\mathbb{R}^n$ такая, что $d\psi_1 = \varphi_1$.

Пусть $\psi = f^*\psi_1$. Форма ψ принадлежит C^1. Поскольку $g \circ f = i$ есть тождественное отображение, то

$$d\psi = f^* d\psi_1 = f^*\varphi_1 = f^*(g^*\varphi) =$$

$$= (g \circ f)^*\varphi = \varphi.$$

Теорема доказана полностью. $\square$

§7. Поверхности в $\mathbb{R}^n$

7.1. Вложения и погружения

Пусть даны множества X и Y в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что отображение $f : X \to Y$ называется *топологическим* или *гомеоморфным*, если f обратимо и отображения f, f^{-1} непрерывны.

Говорят, что множество X *гомеоморфно* Y, если существует гомеоморфизм f множества X на Y.

ПРИМЕР. Поверхность куба в $\mathbb{R}^3$ гомеоморфна поверхности сферы. Чтобы установить гомеоморфизм между ними, достаточно поместить их центры в одну точку и провести из нее проектирование. $\square$

Предположим, что задано непрерывное отображение $f : X \to Y$. Если отображение f гомеоморфно, то говорят, что $f : X \to Y$ есть *вложение* X *в* Y.

Отображение $f : X \to Y$ называется *локально гомеоморфным*, если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность, сужение f на которую является гомеоморфным.

Отображение $f : X \to Y$ называется *погружением* X *в* Y, если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность $U \subset X$ такую, что отображение $f|_U$ гомеоморфно, т.е. *погружение – это локальное вложение.*

Всякое вложение, очевидно, есть погружение. Однако, взаимно однозначное погружение может не быть вложением. Соответствующий контрпример попытайтесь построить самостоятельно или найдите в математической литературе.

7.2. Локальная карта и атлас

Под m-мерной поверхностью в $\mathbb{R}^n$, $1 \le m < n$, класса C^k, $0 \le k \le \infty$, ниже понимается множество $S^m \subset \mathbb{R}^n$, каждая точка которого имеет окрестность U в $\mathbb{R}^n$ такую, что

(i) существует гомеоморфное отображение $\varphi : \mathbb{R}^m \to S^m$ класса C^k, $\varphi(\mathbb{R}^m) = U$;

(ii) ранг матриц Якоби отображения φ равен m всюду в $\mathbb{R}^m$.

Пара (U, φ) называется *локальной картой* (или картой) поверхности S^m. С помощью локальной карты на части U поверхности S^m вводятся криволинейные координаты так, что каждой точке $x = \varphi(t) \in U$ ставится в соответствие некоторая точка $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$.

ПРИМЕРЫ. 1) Если поверхность $S^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ есть график функции $f : \mathbb{R}^m \to \mathbf{R}$, то для ее описания достаточно одной единственной карты (S^m, f).

2) Гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, задаваемая уравнением

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2 \quad (r > 0),$$

есть $(n-1)$-мерная сфера. В этом случае для описания поверхности сферы необходимо, как минимум, две локальных карты.

$\square$

Набор $A(S^m) = \{U_i, \varphi_i\}$ локальных карт поверхности S^m, достаточный для описания S^m, т.е. $S^m = \bigcup_i U_i$, называется *атласом* поверхности.

Для любых двух карт (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j), принадлежащих одному и тому же атласу и таких, что $U_{ij} = U_i \cap U_j \ne \emptyset$, отображение

$$\psi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\big|_{\varphi_i(U_{ij})} : \varphi_i(U_{ij}) \to \varphi_j(U_{ij})$$

гомеоморфно. Так как отображения ψ_{ij} принадлежат классу C^0, то естественно назвать карты (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) C^0-согласованными. Карты (U_i, φ_i) и (U_j, φ_j) называются C^r-*согласованными*, где $0 \le r < \infty$ – целое число, если гомеоморфизм ψ_{ij} есть C^r-диффеоморфизм. Атлас называется *атласом класса* C^r, если все его карты C^r-согласованы.

Легко усмотреть, что объединение двух атласов одной и той же поверхности S^m также есть атлас этой поверхности. Объединение всех возможных атласов данной поверхности называется *максимальным атласом* S^m.

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что при определении локальной карты вместо $\mathbb{R}^m$ можно брать произвольную область Q в $\mathbb{R}^m$, C^k-диффеоморфную $\mathbb{R}^m$, к примеру, открытый шар или открытый куб в $\mathbb{R}^m$. В этом случае естественно определять локальную карту как тройку (Q, φ, U) и атлас как набор таких троек $A(S) = \{(Q, \varphi, U)\}$. Мы будем пользоваться этими обозначениями лишь в случае необходимости.

ПРИМЕР. Пусть U^m и W^n – C^r-поверхности ($r \geq 1$ и $m \leq n$) и $\{(U, \varphi)\}$ $\{(W, \psi)\}$ суть атласы класса C^r на U^m и W^n. Локальные координаты в картах (U, φ) и (W, ψ) будем обозначать соответственно через $u_1, \ldots, u_m$ и $w_1, \ldots, w_n$.

Рассмотрим отображение
$$f : U^m \to W^n. \tag{1}$$
Оно задается в соответствующих картах уравнениями
$$w_i = f_i(u_1, \ldots, u_m), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$
Отображение (1) называется *регулярным*, если ранг матрицы
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial u_m} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_m} \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{pmatrix} \tag{3}$$
равен m в каждой точке $u \in U^m$. Нетрудно видеть, что ранг не зависит от выбора атласов на U^m и W^n.

В соответствии с теоремой о неявной функции, для каждой точки $u \in U^m$ найдется окрестность $U \subset U^m$ такая, что сужение
$$f|_U : U \to W^n$$
является вложением. Это ясно, поскольку в предположении, что в точке u выполнено
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial u_1} \\ \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial u_m} \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

множество $f(U)$ допускает явное задание

$$\begin{cases} w_1 = u_1, \\ \dots\dots\dots \\ w_m = u_m, \\ w_{m+1} = \varphi_1(u_1, \dots, u_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_n = \varphi_{n-m}(u_1, \dots, u_m), \end{cases}$$

где все $\varphi_i \in C^r(U)$.

Отсюда вытекает, что отображение (1) является погружением.

$\square$

7.3. Ориентация

Введем понятие ориентации m-мерной поверхности в $\mathbb{R}^n$. Случай $m = 2$, $n = 3$ был рассмотрен ранее.

Наводящие соображения. Пусть D и Δ – диффеоморфные области, лежащие в двух экземплярах пространства $\mathbb{R}^n$, наделенных декартовыми координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ соответственно. Диффеоморфизм $\varphi : \Delta \to D$ можно рассматривать как способ введения в области D криволинейных координат $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ посредством отображения $x = \varphi(y)$. Другими словами, положение точки $x \in D$ определяется декартовыми координатами $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ точки $y = \varphi^{-1}(x) \in \Delta$.

Рассмотрим теперь пару диффеоморфизмов $\varphi_i : \Delta_i \to D$ $(i = 1, 2)$, вводящих посредством $x = \varphi_i(y)$ в одной и той же области D две различных системы криволинейных координат $(y_1', y_2', \dots, y_n')$ и $(y_1'', y_2'', \dots, y_n'')$. Взаимно обратные диффеоморфизмы $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \Delta_1 \to \Delta_2$, $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : \Delta_2 \to \Delta_2$ осуществляют взаимные переходы между этими системами координат. Якобианы этих отображений в соответствующих точках областей Δ_1 и Δ_2 взаимно обратны, а потому имеют один и тот же знак. Поскольку D является связным открытым множеством, то связны и множества Δ_1, Δ_2. Но якобианы непрерывны и не обращаются в нуль, и тем самым, они имеют одинаковые знаки в Δ_1 и Δ_2.

Отсюда вытекает, что вводимые указанным способом в (связной) области D системы криволинейных координат распадаются ровно на два класса эквивалентности, а именно, если в один класс отнести те системы, взаимные преобразования которых имеют положительный якобиан. Такие классы эквивалентности называются *классами ориентации систем криволинейных координат в области D.*

Указать ориентацию в области D означает указать в D класс ориентации систем ее криволинейных координат.

Все сказанное выше об ориентации области $D \subset \mathbb{R}^n$ может быть дословно повторено, если вместо области D взять (по крайней мере, дважды) гладкую m-мерную поверхность $S \subset \mathbb{R}^m$, заданную одной картой. В этом случае системы криволинейных координат на S естественным образом также разбиваются на два класса ориентации по отношению к знаку якобиана преобразования их взаимного перехода.

Точные определения. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ – гладкая m-мерная поверхность и пусть

$$\varphi_i : Q_i^m \to U_i, \quad \varphi_j : Q_j^m \to U_j$$

– две локальных карты поверхности S такие, что $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Естественным образом между множествами

$$Q_{ij}^m = \varphi_i^{-1}(U_j), \quad Q_{ji}^m = \varphi_j^{-1}(U_i)$$

устанавливается взаимно обратные диффеоморфизмы

$$\varphi_{ij} : Q_{ij}^m \to Q_{ji}^m, \quad \varphi_{ji} : Q_{ji}^m \to Q_{ij}^m,$$

осуществляющие переход от одной локальной системы координат к другой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Две локальных карты

$$\varphi_i : Q_i^m \to U_i, \quad \varphi_j : Q_j^m \to U_j$$

поверхности называются согласованными, когда либо $U_i \cap U_j = \emptyset$, либо $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ и взаимные переходы в общей области действия этих локальных карт осуществляются диффеоморфизмами с положительным якобианом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Атлас поверхности называется ориентированным, если он состоит из попарно согласованных карт.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Поверхности называется ориентируемой, если она обладает ориентированным атласом. В противном случае поверхность называется неориентируемой.

Простейший пример неориентируемой поверхности доставляет лист Мебиуса.

7.4. Поверхности с краем

Пусть $\mathbb{R}^m$ – евклидово пространство, наделенное координатами $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$, и пусть

$$\mathbf{H}^m = \{y \in \mathbb{R}^m : y_1 \leq 0\}$$

– полупространство.

Гиперплоскость

$$\partial\mathbf{H}^m = \{y \in \mathbb{R}^m : y_1 = 0\}$$

называется *краем* полупространства $\mathbf{H}^m$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. Множество $S \subset \mathbb{R}^n$ называется поверхностью размерности m *с краем*, если каждая точка $x \in S$ имеет окрестность $U \subset S$, диффеоморфную (класса C^k) либо $\mathbb{R}^m$ либо $\mathbf{H}^m$.

Если при этом диффеоморфизм $\varphi : U \to \mathbf{H}^m$ переводит точку $x \in U$ в точку $y = \varphi(x) \in \partial\mathbf{H}^m$, то точка x называется *точкой края* поверхности S. Совокупность всех точек края называется *краем поверхности* S.

Край поверхности S мы будем обозначать символом ∂S.

Поясним сказанное. Для карт вида $\varphi : \mathbf{H}^m \to U$ частные производные от φ в точках края $\partial\mathbf{H}^m$ вычисляются только по полупространству $\mathbf{H}^m$, а ранг диффеоморфизма φ всюду в $\mathbf{H}^m$ равен m. Ограничение $\varphi|_{\partial\mathbf{H}^m}$ при этом также есть отображение класса C^k и имеет ранг $m-1$. Таким образом, если

$$A(S) = \{(\mathbf{H}^m, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(\mathbf{H}^m, \varphi_j, U_j)\}$$

– атлас поверхности S с краем, то

$$A(\partial S) = \{(\mathbb{R}^{m-1}, \varphi_i|_{\partial\mathbf{H}^m = \mathbb{R}^{m-1}}, \partial U_i)\}$$

также является атласом того же самого класса гладкости для края ∂S. Поэтому *край m-мерной поверхности класса C^k сам является поверхностью того же самого класса гладкости, причем поверхностью без края и размерности $m-1$.*

Замечания. 1) Край связной поверхности S может оказаться несвязным (привести примеры !).

2) Так как пространство $\mathbb{R}^m$ C^∞-диффеоморфно кубу

$$Q^m = \{y \in \mathbb{R}^m : |y_i| < 1, \ \ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

причем так, что $\mathbf{H}^m$ преобразуется в часть Q^m_H куба Q^m, описываемую условием $y_1 \leq 0$, то в определении поверхности с краем можно заменить $\mathbb{R}^m$ на Q^m, а $\mathbf{H}^m$ на Q^m_H. $\square$

Введем понятие *согласованности ориентаций* поверхности S и ее края ∂S. Предположим, что в $\mathbb{R}^m$ задан ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_m$, который индуцирует в $\mathbb{R}^m$ декартовы координаты $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Векторы $e_2, \ldots, e_m$ определяют ориентацию на крае $\partial \mathbf{H}^m = \mathbb{R}^{m-1}$ полупространства $\mathbf{H}^m = \{x \in \mathbb{R}^m : x_1 \leq 0\}$, которую считают согласованной с ориентацией полупространства $\mathbf{H}^m$, задаваемой базисом $e_1, e_2, \ldots, e_m$.

ЛЕММА 7.1. *Край ∂S гладкой ориентируемой поверхности S сам по себе является гладкой ориентируемой поверхностью.*

Для **доказательства** достаточно установить, что край ∂S ориентируем. Именно, покажем, что если

$$A(S) = \{(\mathbf{H}^m, \varphi_i, U_i)\} \cap \{(\mathbb{R}^m, \varphi_j, U_j)\}$$

– (ориентируемый) атлас поверхности с краем S, то атлас

$$A(\partial S) = \{(\mathbb{R}^{m-1}, \varphi_i|_{\partial \mathbf{H}^m = \mathbb{R}^{m-1}}, \partial U_i)\}$$

края ∂S тоже состоит из попарно согласованных карт.

Пусть $\tilde{y} = \psi(y)$ – диффеоморфное отображение с положительным якобианом окрестности $U_{H^m}(y_0)$ в $\mathbf{H}^m$ точки $y_0 \in \partial \mathbf{H}^m$ на окрестность $\tilde{U}_{H^m}(\tilde{y}_0)$ в $\mathbf{H}^m$ точки $\tilde{y}_0 \in \partial \mathbf{H}^m$. Покажем, что положительный якобиан имеет также и суженное отображение $\psi|_{\partial U_{H^m}(y_0)}$ окрестности $U_{\partial H^m}(y_0) = \partial U_{H^m}(y_0)$ в $\partial \mathbf{H}^m$ точки $\tilde{t}_0 = \psi(y_0)$.

Заметим, что в каждой точке $y_0 = (0, y_{02}, \ldots, y_{0m}) \in \partial \mathbf{H}^m$ якобиан $I(\psi, y_0)$ отображения ψ имеет вид

$$I(\psi, y_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & 0 & \ldots & 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial y_m} \\[2ex] \ldots & \ldots & \ldots & \\[2ex] \dfrac{\partial \psi_m}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \psi_m}{\partial y_2} & \ldots & \dfrac{\partial \psi_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi_m}{\partial y_m} \end{vmatrix},$$

поскольку граница $\mathbf{H}^m$ переходит при диффеоморфизме ψ в границу, а при $y_1 = 0$ должно быть выполнено

$$\tilde{y}_1 = \psi_1(0, y_2, \dots, y_m) \equiv 0.$$

Остается заметить, что при $y_1 < 0$ должно быть также

$$\tilde{y}_1 = \psi_1(y_1, y_2, \dots, y_m) < 0,$$

а потому производная $\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}$ в точке $(0, y_2, \dots, y_m)$ не может быть отрицательной. Так как по условию якобиан $I(\psi, y_0) > 0$ и поскольку $\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}(0, y_2, \dots, y_m) \geq 0$, то якобиан (суженного) отображения

$$\psi|_{\partial U_{H^m}} = \psi(0, y_1, \dots, y_m)$$

положителен. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.5. Если

$$A(S) = \{(\mathbf{H}^m, \varphi_i, U_i)\} \cup \{(\mathbb{R}^m, \varphi_j, U_j)\}$$

– ориентируемый атлас локальных карт поверхности S с краем ∂S, то

$$A(\partial S) = \{(\mathbb{R}^{m-1}, \varphi_i|_{\partial \mathbf{H}^m = \mathbb{R}^{m-1}}, \partial U_i)\}$$

есть ориентируемый атлас края. Определяемая им ориентация края ∂S называется *ориентацией края, согласованной с ориентацией поверхности.*

В качестве иллюстрации сказанного рассмотрим в ориентированном пространстве $\mathbb{R}^m$ полупространства $\mathbf{H}^m_- = \{x \in \mathbb{R}^m : x_1 \leq 0\}$ и $\mathbf{H}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : x_1 \geq 0\}$ с индуцированной из $\mathbb{R}^m$ ориентацией. Гиперплоскость $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^m : x_1 = 0\}$ является общим краем полупространств $\mathbf{H}^m_-$ и $\mathbf{H}^m_+$. Ясно, что ориентации гиперплоскости Π, согласованные с ориентациями $\mathbf{H}^m_-$ и $\mathbf{H}^m_+$, противоположны.

Аналогично, если ориентированную m-мерную поверхность разрезать некоторой $(m-1)$-мерной поверхностью, то на разрезе возникнут две противоположные ориентации, индуцированные ориентациями примыкающих к разрезу частей исходной поверхности.

7.5. Кусочно-гладкие поверхности

Кусочно-гладкие поверхности мы определим, пользуясь методом математической индукции. Именно, одномерной кусочно-гладкой поверхностью будем называть такую кривую в $\mathbb{R}^n$, которая после удаления из нее конечного либо счетного числа точек распадается на гладкие одномерные кривые. Поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$ размерности $m > 1$ назовем кусочно-гладкой, если из нее можно так удалить конечное либо счетное число кусочно-гладких поверхностей размерности не выше $m-1$ (или точек), что оставшееся множество распадается на гладкие m-мерные поверхности S_i с краем или без края.

В качестве простых примеров можно указать границу плоского угла и границу квадрата как кусочно-гладких кривых, а также границу куба и границу прямого кругового конуса в $\mathbb{R}^3$ как двумерных кусочно-гладких поверхностей.

Рассмотрим m-мерную кусочно-гладкую поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что ее два гладких куска S_1 и S_2 ориентированы и примыкают друг к другу вдоль гладкой поверхности Π размерности $m-1$ (ребра). Тогда на Π, как на крае, имеются две различных ориентации, согласованные с ориентациями S_1 и S_2 соответственно. Если эти две ориентации на всяком таком ребре $\Pi \subset \overline{S}_{i_1} \cap \overline{S}_{i_2}$ противоположны, то исходные ориентации будем считать *согласованными.* В случае, если пересечение $\overline{S}_{i_1} \cap \overline{S}_{i_2} = \emptyset$, либо имеет размерность меньшую, чем $m-1$, любые ориентации S_{i_1} и S_{i_2} считаем согласованными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.6. Кусочно-гладкую m-мерную поверхность S будем считать ориентируемой, если (за возможным исключением конечного либо счетного числа кусочно - гладких поверхностей размерности не выше $m-1$) она является объединением гладких ориентируемых поверхностей S_i, допускающих их одновременную взаимно согласованную ориентацию.

В качестве примера можно указать (кусочно-гладкую) границу трехмерного куба. Непосредственно проверяется, что эта поверхность, очевидно, допускает ориентацию описанного вида.

УПРАЖНЕНИЯ. 1) Верно ли, что край поверхности $S \subset \mathbb{R}^n$ есть множество $\overline{S} \setminus S$, где $\overline{S}$ есть замыкание S в $\mathbb{R}^n$?

2) Имеют ли край поверхности

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 2\},$$

$$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2\}\,?$$

3) Указать края поверхностей

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 < 2\},$$

$$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x^2 + y^2\}.$$

4) Привести пример неориентируемой поверхности с ориентированным краем.

7.6. Теорема о разбиении единицы

Пусть дана функция $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и пусть $E = \{x \in D : f(x) \neq 0\}$. Замыкание множества E (в $\mathbb{R}^n$) называется *носителем* функции f и обозначается символом $\operatorname{supp} f$. Функция $f : D \to \mathbb{R}$ называется *финитной* в D, если ее носитель компактен и содержится в D.

ПРИМЕР 1. Пусть $f(t)$ – функция, определенная условием

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \le 0, \\ e^{-\dfrac{1}{t}} & \text{при} \quad t > 0. \end{cases}$$

Данная функция бесконечно дифференцируема (но не аналитична !). Зафиксируем произвольно точку $a \in \mathbb{R}^n$ и число $r > 0$. Положим

$$f_{a,r}(x) = f(r^2 - |x-a|^2).$$

Тогда, очевидно, $f_{a,r}(x) \in C^\infty$, $f_{a,r}(x) > 0$ при $|x-a| < r$ и $f_{a,r}(x) \equiv 0$ при $|x-a| \ge r$. Носитель

$$\operatorname{supp} f_{a,r} = \overline{B(a,r)}.$$

ТЕОРЕМА 7.1. *Пусть $\{U_\xi\}_{\xi\in\Xi}$ – семейство открытых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ и пусть*

$$U = \cup_{\xi\in\Xi} U_\xi.$$

Тогда найдется последовательность функций $\varphi_\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, со свойствами:

1) *функции φ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, финитны, принадлежат классу C^∞ и носитель каждой из них содержится, по крайней мере, в одном из множеств U_ξ;*

2) *для каждой точки $x \in U$ найдется окрестность V такая, что*

$$V \cap \operatorname{supp} \varphi_\nu \neq \emptyset$$

только лишь для конечного числа значений ν;

3) *для всякой точки $x \in U$ выполняется*

$$\varphi_\nu(x) \geq 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

причем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x) = 1 \quad \text{при всех } x \in U.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.7. Система функций $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$, удовлетворяющая условиям теоремы, называется *разбиением единицы*, подчиненным семейству открытых множеств $\{U_\xi\}_{\xi\in\Xi}$.

Теорема о разбиении единицы играет важную роль в Анализе. Имеется ряд различных вариантов этой теоремы, приспособленных к тем или иным специальным построениям. Литература, посвященная данному вопросу, весьма обширна. Мы отметим здесь лишь монографии Де Рама "Дифференцируемые многообразия", М.: 1956, Л. Хёрмандера "Линейные дифференциальные операторы с частными производными", М.: Мир, 1965, и В.М. Миклюкова "Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения", Волгоград: изд-во ВолГУ, 2007.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из условия 2) теоремы следует, что *для любого компактного множества $A \subset U$ пересечение $A \cap \operatorname{supp} \varphi_\nu \neq \emptyset$ лишь для конечного числа значений ν*. Действительно, для каждой точки $x \in A$ найдется окрестность V, удовлетворяющая условию 2). Эти окрестности образуют *покрытие* A. Напомним, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда из всякого покрытия A множествами, открытыми в $\mathbb{R}^n$, можно выделить конечное покрытие.

В соответствии с этим утверждением, выделим конечное покрытие

$$\{V_1, V_2, \ldots, V_m\}.$$

Предположим, что V_i не пересекаются с $\operatorname{supp}\varphi_\nu$ при $\nu > \nu_i$. Пусть

$$\nu_0 = \max\{\nu_1, \ldots, \nu_m\}.$$

Тогда при $\nu > \nu_0$ носитель φ_ν не пересекается ни с одним из множеств V_i, а, значит, и с множеством $A \subset \cup_{i=1}^m V_i$. $\square$

Отметим утверждение, используемое при доказательстве теоремы. Пусть A – произвольное непустое множество в $\mathbb{R}^n$. Положим

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Величина $d(x, A)$ является расстоянием от точки x до множества A. Функция $d(x, A)$ непрерывна и, если множество A замкнуто и $x \notin A$, то $d(x, A) > 0$.

ЛЕММА 7.2. *Пусть U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Существует последовательность множеств $\{A_m\}_{m=1}^\infty$ со свойствами:*

$i)$ каждое из A_m компактно;

$ii)$ каждая точка $x \in U$ имеет окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом множеств A_m и

$iii)$ $\cup_{m=1}^\infty A_m = U$.

Доказательство. Зафиксируем произвольно точку $x_0 \in U$. Положим

$$G_m = \{x \in \mathbb{R}^n : m - 1 < |x - x_0| < m\} \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Если $U = \mathbb{R}^n$, то последовательность $\{G_m\}$ является искомой.

Предположим, что $U \neq \mathbb{R}^n$. Тогда $\mathbb{R}^n \setminus U$ не пусто. Обозначим

$$\delta_0 = d(x_0, \mathbb{R}^n \setminus U).$$

Пусть

$$F_1 = \{x \in U : d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq \delta_0\}$$

и для $m > 1$ полагаем

$$F_m = \{x \in U : \frac{\delta_0}{m-1} \geq d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq \frac{\delta_0}{m}\}.$$

Пусть, наконец,

$$H_{m,l} = G_m \cap F_l.$$

Семейство $H_{m,l}$ счетно. Занумеровав его, мы получим требуемую последовательность компактных множеств.

Действительно, зафиксируем произвольно точку $x \in U$. Найдем натуральные числа m и l такие, что $m-1 \leq |x-x_0| \leq m$ и либо $d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq \delta_0$, либо

$$\{x \in U : \frac{\delta_0}{l-1} \geq d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq \frac{\delta_0}{l}\}.$$

Очевидно, $x \in G_m$ и $x \in F_l$, а потому $x \in H_{m,l}$. В силу произвола в выборе $x \in U$ это доказывает, что

$$\cup_{m,l} H_{m,l} = U.$$

Снова возьмем произвольно точку $x \in U$ и найдем числа $m_0 > 2$ и $l_0 > 2$, для которых

$$|x - x_0| < m_0 - 2 \quad \text{и} \quad d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) > \frac{\delta_0}{l-2}.$$

Положим

$$\delta = \min\{1, \frac{\delta_0}{l_0 - 1}\}.$$

Тогда при $m > m_0$ шар $B(x, \delta)$ не пересекается с множеством G_m. При $l > 1$ имеем

$$B(x, \delta) \cap F_l = \emptyset.$$

Это значит, что

$$B(x, \delta) \cap H_{m,l} = \emptyset,$$

если либо $m > m_0$, либо $l > l_0$. Таким образом, шар $B(x, \delta)$ может пересекаться разве лишь с конечным числом множеств $H_{m,l}$ и лемма доказана. $\square$

7.7. Доказательство теоремы

Построим сначала вспомогательную последовательность функций ψ_ν со свойствами:

1) каждая из ψ_ν финитна, принадлежит C^∞ и существует открытое множество U_ξ такое, что $\operatorname{supp} \psi_\nu \subset U_\xi$;

2) для всякой точки $x \in U$ найдется окрестность V такая, что

$$V \cap \operatorname{supp} \psi_\nu \neq \emptyset$$

лишь для конечного числа значений ν;

3)′ $\psi_\nu(x) \geq 0$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и для каждой точки $x \in U$ найдется ν такое, что $\psi_\nu(x) > 0$.

Последовательность функций $\{\psi_\nu\}$ будем строить по индукции. При этом на каждом шаге будет предъявляться не одна функция ψ_ν, а целый "кусок" последовательности $\{\psi_\nu\}$.

Пусть $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность компактных подмножеств открытого множества U, удовлетворяющая условиям леммы 7.2.

Рассмотрим множество A_m. Зафиксируем произвольно точку $x \in A_m$. Поскольку $x \in U$, а

$$U = \cup_{\xi \in \Xi} U_\xi,$$

то существует ξ_x такое, что $x \in U_{\xi_x}$. Но U_{ξ_x} – открытое множество и потому найдется $\delta_1(x)$ такое, что шар

$$B(x, \delta_1(x)) \subset U_{\xi_x}.$$

Положим

$$\delta(x) = \min\{\frac{1}{m}, \frac{1}{2}\, \delta_1(x)\}.$$

Пусть $V_x = B(x, \delta(x))$. Замыкание шара V_x, очевидно, содержится в шаре $B(x, \delta_1(x)) \subset U_{\xi_x}$. Каждой из точек $x \in A_m$ сопоставляется таким образом открытое множество V_x со свойством $x \in V_x$. Система шаров $\{V_x\}_{x \in A_m}$ образует открытое покрытие множества A_m. Но A_m – компакт и потому в нем найдется такой конечный набор точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_{k_m}\}$, что

$$A_m \subset \cup_{i=1}^{k_m} V_{x_i}.$$

Пусть $V_{x_i} = B(x_i, r_{m,i})$. Положим $\psi_{m,i} = f_{x_i, r_{m,i}}$, где

$$f_{a,r}(x) = f(r^2 - |x-a|^2)$$

определены в начале предыдущего раздела. Тогда

$$\operatorname{supp} \psi_{m,i} \subset U_{\xi_{x_i}}.$$

При $x \in V_{x_i}$ выполнено $\psi_{m,i}(x) > 0$. Поэтому если $x \in A_m$ – произвольно, то существует i такое, что $x \in V_{x_i}$, и тем самым, $\psi_{m,i}(x) > 0$.

Теперь мы можем определить последовательность $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$. Положим

$$\nu_1 = k_1, \quad \psi_\nu = \psi_{1,\nu} \quad \text{при} \quad \nu = 1, 2, \ldots, \nu_1.$$

Предположим, что найдено число ν_m. Тогда пусть

$$\nu_{m+1} = \nu_m + k_{m+1},$$

а для ν, удовлетворяющего условию $\nu_m < \nu \le \nu_{m+1}$, пусть

$$\psi_\nu = \psi_{m+1,i}, \quad \text{где} \quad i = \nu - \nu_m.$$

Тем самым, последовательность $\{\psi_\nu\}$ определена.

Поясним описанную конструкцию схемой

$$1, 2, \dots, \overbrace{k_1}^{\nu_1}, k_1{+}1, \dots, \overbrace{k_1 + k_2}^{\nu_2}, k_1{+}k_2{+}1, \dots, \overbrace{k_1 + k_2 + k_3}^{\nu_3}, \dots ;$$

$$\psi_{1,1}, \dots, \psi_{1,k_1}, \psi_{2,k_1+1}, \dots, \psi_{2,k_1+k_2}, \psi_{3,k_1+k_2+1}, \dots .$$

Покажем, что последовательность $\{\psi_\nu\}$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3)$'$. Выполнение условия 1) ясно из построения. Далее, для всякого $x \in U$ найдется m такое, что $x \in A_m$ и, значит, существует i, $1 \le i \le k_m$, такое, что $\psi_{m,i}(x) > 0$ (это было замечено ранее). Условие 3)$'$, следовательно, выполняется.

Покажем, что последовательность $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ обладает свойством 2). Зафиксируем произвольно $x_0 \in U$. Существуют $\delta > 0$ и m_0 такие, что при $m > m_0$ пересечения

$$B(x_0, \delta) \cap A_m = \emptyset.$$

Пусть $m_1 \ge m_0$ таково, что при $m \ge m_1$ выполнено $\frac{1}{m} < \frac{\delta}{2}$.

Покажем, что при $\nu > \nu_{m_1}$ носитель ψ_ν не пересекает шар $B(x_0, \delta/2)$. Действительно, если $\nu > \nu_{m_1}$, то $\psi_\nu = \psi_{m,i}$, где $m \ge m_1$. Носитель ψ_ν есть замкнутый шар $\overline{B}(x_i, r_i)$, где $x_i \in A_m$, а $r_i < \frac{1}{m} < \frac{\delta}{2}$.

Пусть $x \in \overline{B}(x_i, r_i)$. Здесь $x_i \in A_m$ и $B(x_0, \delta) \cap A_m = \emptyset$ и потому

$$|x - x_0| \ge |x_0 - x_i| - |x_i - x| \ge \delta - r_i > \frac{\delta}{2}.$$

Значит, $x \notin B(x_0, \delta/2)$ и шары $B(x_0, \delta/2)$ и

$$\overline{B}(x_i, r_i) = \operatorname{supp} \psi_{m,i} = \operatorname{supp} \psi_\nu$$

не имеют общих точек, что и требуется.

Таким образом, последовательность $\{\psi_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ построена. Положим

$$\psi_0(x) = \sum_{\nu=1}^\infty \psi_\nu(x).$$

Функция ψ_0 определена и конечна при $x \in U$, $\psi_0(x) > 0$ при $x \in U$ и, кроме того, $\psi_0(x) \in C^\infty$.

Действительно, пусть $x_0 \in U$ – произвольно. Тогда, на основании условия 2), найдется окрестность $B(x_0, \delta) \subset U$, пересекающаяся с носителями лишь конечного числа функций ψ_ν. Тем самым, найдется m_0 такое, что

$$\psi_0(x) = \sum_{\nu=1}^{m_0} \psi_\nu \quad \text{при всех} \quad x \in B(x_0, \delta).$$

Отсюда, очевидным образом, следует, что

$$\psi_0(x) < \infty \quad \text{при всех} \quad x \in B(x_0, \delta)$$

и $\psi_0(x) \in C^\infty$ в шаре $B(x_0, \delta)$.

Поскольку x_0 – произвольная точка, то тем самым доказано, что $\psi_0 \in C^\infty$.

По построению, функция ψ_ν неотрицательна в U и для всех $x \in U$ существует ψ_{ν_0} такая, что $\psi_{\nu_0}(x) > 0$. Отсюда, $\psi_0(x) > 0$ при всех $x \in U$.

Положим теперь

$$\varphi_\nu(x) = \frac{\psi_\nu(x)}{\psi_0(x)}.$$

Последовательность функций $\{\varphi_\nu(x)\}_{\nu=1}^\infty$ является искомой.

Действительно, ясно, что $\varphi_\nu(x) \in C^\infty$. Далее, очевидно, носитель функции φ_ν совпадает с носителем ψ_ν, а потому последовательность $\{\varphi_\nu\}$ удовлетворяет требованиям 1) и 2) теоремы. Из определения φ_ν понятно, последовательность $\{\varphi_\nu\}$ удовлетворяет также и условию 3). Теорема доказана. $\square$

7.8. Следствия

Приведем два часто используемых следствия теоремы.

ТЕОРЕМА 7.2. *Пусть A и B – замкнутые подмножества $\mathbb{R}^n$ и $A \cap B = \emptyset$. Найдется функция $\varphi \in C^\infty$ такая, что*

$$\varphi(x) = 1 \quad \textit{при всех} \quad x \in A$$

и

$$\varphi(x) = 0 \quad \textit{при всех} \quad x \in B.$$

Доказательство. Если одно из множеств, например, A не пусто, а $B = \emptyset$ то можно взять $\varphi(x) = 1$ при $x \in A$. Поэтому будем предполагать, что не пусты оба множества.

Пусть $U_1 = \mathbb{R}^n \setminus A$ и $U_2 = \mathbb{R}^n \setminus B$. Множества U_1, U_2 открыты, причем $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^n$. Найдем разбиение единицы, подчиненное семейству множеств $\{U_1, U_2\}$. Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{\operatorname{supp}\varphi_\nu \subset U_1} \varphi_\nu(x),$$

где суммирование производится по всем ν таким, что $\operatorname{supp}\varphi_\nu \subset U_1$. Согласно требованию 2) в определении разбиения, всякая точка $x \in \mathbb{R}^n$ имеет окрестность, в которой отлично от нуля лишь конечное число функций φ_ν. Отсюда вытекает, что $\varphi \in C^\infty$ в окрестности каждой точки $x \in \mathbb{R}^n$ и, тем самым, φ принадлежит классу C^∞ в $\mathbb{R}^n$.

Ясно, что $\varphi(x) = 0$ при всех $x \in B$. Покажем, то $\varphi(x) = 1$ при $x \in A$. Действительно, для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и, в частности, для всех $x \in A$ мы имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x) = 1.$$

Но если $\operatorname{supp}\varphi_\nu$ не содержится в U_1, то $\operatorname{supp}\varphi_\nu \subset U_2$. Таким образом, все функции, носители которых не содержатся в U_1, обращаются в нуль в каждой точке $x \in A$. Отсюда при всяком $x \in A$ имеем

$$1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x) = \sum_{\operatorname{supp}\varphi_\nu \subset U_1} \varphi_\nu(x) = \varphi(x),$$

что и необходимо. □

ТЕОРЕМА 7.3. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – компактное множество, $\{U_\xi\}$ – семейство открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$ такое, что*

$$A \subset \cup_{\xi\in\Xi} U_\xi.$$

Тогда существует конечная система неотрицательных C^∞-функций

$$\varphi_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m,$$

каждая из которых финитна с носителем, лежащим в одном из множеств U_ξ, причем

$$\sum_{\nu=1}^{m} \varphi_\nu(x) = 1 \quad \text{\textit{при всех}} \quad x \in A.$$

Доказательство. Найдем разбиение единицы $\{\varphi_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$, подчиненное семейству открытых множеств $\{U_\xi\}$. Согласно замечанию 7.6 к теореме 7.1, найдется m такое, что при $\nu > m$

носитель φ_ν не пересекается с A и, таким образом,

$$\varphi_\nu(x) = 0 \quad \text{при всех} \quad x \in A \quad \text{и} \quad \nu > m.$$

Поэтому для произвольной точки $x \in A$, очевидно, выполнено

$$\sum_{\nu=1}^{m} \varphi_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(x) = 1.$$

Ясно, что построенная система функций φ_ν является искомой. $\square$

§8. Внешние формы на поверхности

Ниже определяются внешние дифференциальные формы на поверхностях и доказывается центральный результат главы – теорема Стокса.

8.1. Определение формы на поверхности

Предположим, что задано m-мерная поверхность $S \subset \mathbb{R}^n$ класса C^r, где $r \geq 1$. Говорят, что на S задана внешняя дифференциальная форма θ степени $\deg\theta = l \leq k$ класса C^s, $s \leq r-1$, если для всякой локальной параметризации $\varphi : D \subset \mathbb{R}^m \to S$ найдется внешняя дифференциальная форма θ_φ степени l класса C^s в области D. При этом предполагается выполненным следующее условие согласования форм θ_{φ_1} и θ_{φ_2}, соответствующим различным параметризациям.

Именно, пусть

$$\varphi_1 : D_1 \to S \quad \text{и} \quad \varphi_2 : D_2 \to S$$

– две различных локальных параметризации S, пусть

$$U_1 = \varphi_1(D_1), \quad U_2 = \varphi_2(D_2),$$

$$D_{1,2} = \varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2), \quad D_{2,1} = \varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

и пусть $\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ – отображение перехода от локальной параметризации φ_1 к параметризации φ_2. Тогда внешние дифференциальные формы θ_{φ_1}, θ_{φ_2} связаны соотношениями

$$\theta_{\varphi_1} = \psi^* \theta_{\varphi_2},$$

где ψ^* – индуцированное отображение.

Формы θ_φ в данном определении суть различные представления формы θ, заданной на поверхности S.

Очевидным образом вводится сумма двух дифференциальных форм одной и той же степени на поверхности S. Мы можем также определить внешнее произведение форм θ_1 и θ_2 на S, воспользовавшись понятием внешнего произведения форм в евклидовом пространстве. Равным образом мы можем определить дифференциал $d\theta$ от формы θ класса C^r, $r \geq 1$.

Мы не будем развивать здесь эту теорию. Распространение на формы, определенные на поверхности S, операций над формами, заданных в $\mathbb{R}^n$ провести самостоятельно, либо посмотреть в более специализированных учебниках.

8.2. Интеграл от формы по поверхности

Пусть S – компактное множество в $\mathbb{R}^n$ являющее собой m-мерную поверхность класса C^r, $r \geq 1$. Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_k$ – конечная система функций в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что система $\{h_i\}_{i=1}^k$ образует разбиение единицы на S, если

$i)$ каждая из функций h_i финитна, неотрицательна и принадлежит классу C^∞ в $\mathbb{R}^n$;

$ii)$ для любого $x \in S$ выполнено $\sum_{i=1}^k h_i(x) = 1$.

Чтобы определить интеграл от формы по S, будем рассматривать разбиения единицы специального вида. Именно мы будем предполагать, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ найдется локальная карта (U_i, φ_i) поверхности S такая, что

$iii)$ $(\operatorname{supp} h_i \cap S) \subset U_i$.

В силу теоремы 7.1 такие разбиения единицы на S существуют. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что семейство открытых множеств $\{U\}$, $(\operatorname{supp} h_i \cap S) \subset U$, образует покрытие компакта S. Найдем разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Функции разбиения, носители которых пересекаются с S, очевидно, образуют искомое разбиение единицы на поверхности S.

Будем предполагать, что поверхность S ориентируема и задана ее ориентация. Пусть ω – внешняя дифференциальная форма на S класса C^0, $\deg \omega = m$, с компактным носителем. Определим интеграл

$$\int\limits_S \omega,$$

полагая

$$\int\limits_S \omega = \int\limits_S \sum_{i=1}^k h_i\,\omega = \sum_{i=1}^k \int\limits_S h_i\,\omega$$

и
$$\int\limits_S h_i(x)\omega = \int\limits_{U_i} h_i(x)\omega = \int\limits_{D_i} \varphi_i^*(h_i\,\omega).$$

Можно показать, что введенный таким образом интеграл не зависит от выбора разбиения единицы на S (и локальных параметризаций $\varphi_i : D_i \to U_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$).

8.3. Форма объема поверхности

Рассмотрим m-мерную ориентируемую поверхность S в $\mathbb{R}^n$, $1 \le m \le n-1$, класса C^1. Определим m-мерную дифференциальную *форму объема* на S класса C^0. Пусть $x \in S$ – произвольная точка. *Касательное пространство* $T_x(S)$ есть m-мерное подпространство $\mathbb{R}^n$, образуемое совокупностью векторов, касательных к S в точке x. Выберем ортонормированный базис $(e_1, \ldots, e_m)$ в $T_x(S)$, образованный попарно ортогональными векторами единичной длины. При этом выберем его таким образом, чтобы индуцированная им ориентация пространства $T_x(S)$ совпадала с ориентацией пространства $\mathbb{R}^n$. Заметим, что если $(e_1', \ldots, e_m')$ – другой ортонормированный базис в $T_x(S)$ с той же ориентацией, то определитель системы векторов $e_1', \ldots, e_m'$ относительно системы $e_1, \ldots, e_m$ равен $+1$.

Предположим, что задана система векторов $\xi_1, \ldots, \xi_m$ в $T_x(S)$ и пусть $\det(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ – определитель этой системы относительно базиса $(e_1, \ldots, e_m)$. Абсолютная величина данного определителя не зависит от выбора ортонормированной системы, поскольку при изменении ориентации на S определитель умножается на -1. Определим *форму объема* (элемент объема) на S – дифференциальную форму θ степени m, полагая

$$\theta\,(x; \xi_1, \ldots, \xi_m) = \det(\xi_1, \ldots, \xi_m), \quad (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in T_x(S). \quad (1)$$

Нетрудно видеть, что эта форма принадлежит классу C^0, т.е. для параметризации φ класса C^1 форма $\varphi^*(\theta)$ имеет непрерывные коэффициенты.

Объем открытого множества U, $\overline{U} \Subset S$, определяется интегралом
$$\int\limits_U \theta,$$
где θ есть форма объема на S.

Если U допускает параметризацию $\varphi : D \to U$, то данный объем есть
$$\int\limits_D \varphi^*(\theta),$$
где форма $\varphi^*(\theta)$ имеет вид
$$\lambda(t_1, \ldots, t_m)\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_m$$
и $\lambda(t) > 0$. Поэтому m-мерный объем непустого открытого множества $U \subset S$ всегда положителен.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим двумерную ориентируемую поверхность S, погруженную в $\mathbb{R}^3$. Зафиксируем точку $(x, y, z) \in S$ и предположим, что в некоторой ее окрестности поверхность может быть задана посредством C^1-параметризации $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$, описываемой функциями
$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$
Условие погруженности S влечет, что ранг матрицы
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$
равен 2. Тем самым, в каждой точке $(u, v) \in D$ по крайней мере один из миноров
$$p = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad q = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad r = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$
отличен от нуля.

В точке $(x, y, z) \in S$, соответствующей $(u, v) \in D$, единичный вектор нормали к S есть вектор с компонентами
$$\frac{\varepsilon p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{\varepsilon q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \frac{\varepsilon r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$
где постоянная $\varepsilon = \pm 1$.

Обозначим этот вектор символом e_3. Выберем знак ε так, чтобы тройка векторов e_1, e_2, e_3, где
$$e_1 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad e_2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

была ориентирована, как и базис в $\mathbb{R}^3$. То есть чтобы был положителен определитель

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\varepsilon p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} & \dfrac{\varepsilon q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} & \dfrac{\varepsilon r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \end{vmatrix}.$$

Легко вычисляется, что данный определитель равен

$$\varepsilon\,\frac{p^2+q^2+r^2}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \varepsilon\sqrt{p^2+q^2+r^2}$$

и мы должны выбрать $\varepsilon = +1$. Для элемента (двумерной) площади θ, тем самым, имеем

$$\varphi^*(\theta) = \sqrt{p^2+q^2+r^2}\,du\wedge dv,$$

где φ есть парметризация поверхности S.

Таким образом, *если в каждой точке ориентированной поверхности S единичный вектор нормали имеет компоненты $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, то форма элемента площади S есть*

$$\cos\alpha\,dy\wedge dz + \cos\beta\,dz\wedge dx + \cos\gamma\,dx\wedge dy.$$

Для **доказательства** достаточно заметить, что

$$dy\wedge dz = p\,du\wedge dv, \quad dz\wedge dx = q\,du\wedge dv, \quad dx\wedge dy = r\,du\wedge dv.$$

□

ПРИМЕР 2. Рассмотрим одномерную ориентированную кривую Γ, погруженную в пространство $\mathbb{R}^3$. Найдем ее элемент длины дуги. Это есть дифференциальная 1-форма, заданная вдоль кривой. Предположим, что кривая задается C^1-уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Так как кривая погружена, то производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ не обращаются в нуль одновременно.

В предположении, что ориентация Γ соответствует возрастанию параметра t, элемента длины дуги имеет вид

$$\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt.$$

Если же эта кривая лежит на поверхности $S \subset \mathbb{R}^3$, параметризованной параметрами u и v как в предыдущем примере, то данная кривая определяется заданием u и v как функций параметра t. Элемент длины в таком случае вычисляется по формуле

$$\sqrt{E\,u'^2 + 2F\,u'v' + G\,v'^2}\,dt,$$

где E, F и G суть коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S.

С другой стороны, если мы знаем коэффициенты E, F, G, то мы можем вычислить элемент площади поверхности S по формуле

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\,du \wedge dv.$$

В силу тождества Лагранжа

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 =$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2,$$

имеем

$$p^2 + q^2 + r^2 = EG - F^2$$

и потому для элемента 2-мерной площади S находим

$$\sqrt{EG - F^2}\,du \wedge dv.$$

Таким образом, *знание элемента длины на поверхности позволяет определить (с точностью до знака) форму площади.*

□

8.4. Формула Стокса

Теперь уже можно сформулировать обобщенную интегральную теорему Стокса, ранее доказанную нами для случая двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^3$.

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть S — m-мерная ориентируемая поверхность в $\mathbb{R}^n$, $1 \le m \le n-1$, класса C^r, $r \ge 1$, с кусочно-гладким краем ∂S. Тогда для всякой дифференциальной формы θ, $\deg\theta = m - 1$, класса C^1 выполнено*

$$\int\limits_{\partial S} \theta = \int\limits_{S} d\,\theta. \tag{2}$$

Мы не будем доказывать эту теорему, но отметим два ее частных случая. Пусть $n = 3$, x, y, z – координаты пространства $\mathbb{R}^3$, $S \subset \mathbb{R}^3$ – ориентированная двумерная поверхность с кусочно – гладким краем ∂S. Если

$$\theta = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

и $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – функции класса C^1 на $S \cup \partial S$, то равенство (2) переписывается в виде

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \int\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Второй случай. Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ – область с кусочно – гладкой границей ∂D такая, что множество $\overline{D} \cup \partial D$ – компактно. Пусть

$$\theta = A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy,$$

где $A(x,y,z)$, $B(x,y,z)$, $C(x,y,z)$ – функции класса $C^1(\overline{D})$.

Тогда имеет место формула Гаусса – Остроградского

$$\int\limits_{\partial D} A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy =$$

$$= \int\limits_D \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Глава 22

Добавление 1. Элементы теории множеств и метрических пространств

Нашей целью здесь является определение вещественной прямой как пополнения множества рациональных чисел. Попутно мы даем некоторые начальные сведения из теории множеств, теории метрических пространств; вводим понятия меры Хаусдорфа[1] и фрактала.
Используемая литература:
1) А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1981.
2) И.П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Москва-Ленинград, ГИТТЛ, 1950.
3) P. Mattila, Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
4) Б. Мандельброт, Фрактальная геометрия природы, Москва: Институт компьютерных исследований, 2002.

§1. Сравнение множеств

1.1. Эквивалентность множеств. Мощность множества

Пусть даны два множества $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$. Правило φ, по которому каждому элементу $a \in A$ соотнесен один и только один элемент $b \in B$, причем каждый элемент $b \in B$ оказывается соотнесенным одному и только одному $a \in A$, называется *взаимно однозначным соответствием* между множествами A и B.

[1]Хаусдорф Феликс – выдающийся немецкий математик, родился 8.11.1868 в Бреслау, Германия (ныне – Вроцлав, Польша), умер 26.01.1942 в Бонне, Германия. Работал в Лейпцигском, Грейсфельдском и Боннском университетах. Получил значительные результаты в теории множеств, топологии, функциональном анализе, теории чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Если между множествами A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, то говорят, что эти множества эквивалентны или, что они имеют одинаковую мощность (или равномощны), и пишут $A \sim B$.

ПРИМЕР 1. Если A и B конечные множества, т.е. множества, состоящие из конечного числа элементов, то они имеют одинаковую мощность в том и только том случае, если они состоят из одинакового числа элементов. (Что есть здесь правило φ?) $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Рассмотрим две концентрические окружности $S(0,r)$ и $S(0,R)$ в плоскости $\mathbf{R}^2$. Показать, что $S(0,r) \sim S(0,R)$.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказать, что сфера в $\mathbf{R}^3$ с исключенным "северным полюсом" и плоскость $\mathbf{R}^2$ равномощны.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Доказать, что множества $N = \{n\}_{n=1}^{\infty}$ и $M = \{2n\}_{n=1}^{\infty}$ имеют одинаковую мощность.

ПРИМЕР 2. Покажем, что отрезок $[0,1]$ и полуинтервал $(0,1]$ имеют одну и ту же мощность.

Действительно, рассмотрим строго монотонно убывающую последовательность $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что все $a_n \in (0,1)$ и $a_n \to 0$. Между множествами $(0,1] \setminus A$ и $[0,1] \setminus A$ устанавливаем тождественное соответствие, а между множествами

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \quad \text{и} \quad \{0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

устраиваем сдвиг на единицу. $\square$

1.2. Счетные множества

Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ – множество всех натуральных чисел. Всякое множество A, эквивалентное $\mathbf{N}$, называется *счетным.*

ТЕОРЕМА 1.1. *Для того, чтобы множество A было счетным, необходимо и достаточно, чтобы его можно было "перенумеровать", т.е. представить в виде последовательности*

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}. \tag{1}$$

Доказательство. Достаточность. Если множество A представимо в виде (1), то каждому его элементу $a_n \in A$ соотнесен индекс $n \in \mathbf{N}$ так, что между A и $\mathbf{N}$ установлено взаимно однозначное соответствие. Тем самым, A – счетно.

Необходимость. Если A счетно, то существует взаимно однозначное соответствие φ между A и $\mathbf{N}$. Обозначим через a_n

тот из элементов A, который в соответствии φ отвечает числу n. Получаем представление (1). $\square$

ТЕОРЕМА 1.2. *Во всяком бесконечном множестве A можно выделить счетное множество B.*

Доказательство. Выделим в A произвольный элемент a_1. Так как A бесконечно, то множество $A \setminus \{a_1\}$ содержит бесконечно много элементов. Выделим в нем a_2. Далее, множество $A \setminus \{a_1, a_2\}$ не пусто. Выделим в нем a_3. Продолжая указанный процесс неограниченно, найдем последовательность элементов $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, которая и является искомым множеством B. $\square$

ТЕОРЕМА 1.3. *Всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

Доказательство. Пусть A – счетное множество, а B – его бесконечное подмножество. Расположим A в виде последовательности

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots .$$

Будем перебирать один за другим элементы A в порядке их номеров. При этом мы будем время от времени встречать элементы B, и каждый из элементов B обязательно когда-нибудь встретится. Соотнесем каждому элементу B номер "встречи" с ним. Тем самым, мы перенумеруем все точки B, причем, в силу бесконечности B, нам придется на эту нумерацию израсходовать все натуральные числа. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. Если из счетного множества A удалить конечное подмножество C, то оставшееся множество $A \setminus C$ будет счетным.

ТЕОРЕМА 1.4. *Сумма любого конечного или счетного множества счетных множеств есть опять же счетное множество.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, \dots$ – счетные множества. Можно считать, что эти множества попарно не пересекаются. В противном случае мы могли бы рассмотреть вместо них множества A_1, $A_2 \setminus A_1$, $A_3 \setminus (A_1 \cap A_2)$, ... , каждое из которых счетно (или конечно), а их сумма будет такой же, что и сумма множеств A_1, A_2, A_3, ...

Расположим элементы множеств A_1, A_2, ... в виде следующей таблицы

$$\begin{array}{c|ccccc} A_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\ A_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\ A_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

Будем двигаться в порядке

$$a_{11} \to a_{12} \to a_{21} \to a_{31} \to a_{22} \to a_{13} \to a_{14} \to a_{23} \to a_{32} \to \dots$$

(проследите, пожалуйста, этот порядок по таблице !) и нумеровать элементы. Очевидно, все элементы суммы

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \dots$$

будут в результате перенумерованы. □

ТЕОРЕМА 1.5. *Множество* $\mathbf{Q}$ *всех рациональных чисел счетно.*

Доказательство. Действительно, множество всех дробей вида $\frac{p}{q}$ с данным знаменателем q, т.е. множество

$$\frac{1}{q}, \quad \frac{2}{q}, \quad \frac{3}{q}, \dots,$$

счетно. Но знаменатель может принимать счетное множество натуральных значений $1, 2, 3, \dots$ и, по предыдущей теореме, множество всевозможных дробей $\frac{p}{q}$ счетно. Это означает, что множество $\mathbf{Q}_+$ всех положительных рациональных чисел счетно. Ясно, что множество $\mathbf{Q}_-$ всех отрицательных рациональных чисел также счетно. Пользуясь еще раз теоремой 1.4, убеждаемся, что множество $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_- \cup \mathbf{Q}_+$ счетно. □

УПРАЖНЕНИЕ 4. Доказать, что множество всех рациональных чисел, лежащих на отрезке $[a, b]$, счетно.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Доказать, что множество всех попарно непересекающихся кругов на плоскости счетно.

1.3. Мощность континуума

ТЕОРЕМА 1.6. *Множество всех вещественных чисел, лежащих на отрезке $[0, 1]$, несчетно.*

Доказательство. Предположим, что мы смогли перенумеровать все действительные числа отрезка $[0, 1]$, т.е. представить это множество в виде последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0,\ \alpha_{11}\ \alpha_{12}\ \alpha_{13}\ldots\ \alpha_{1n}\ldots\\
\alpha_2 &= 0,\ \alpha_{21}\ \alpha_{22}\ \alpha_{23}\ldots\ \alpha_{2n}\ldots\\
\alpha_3 &= 0,\ \alpha_{31}\ \alpha_{32}\ \alpha_{33}\ldots\ \alpha_{3n}\ldots\\
&\vdots\\
\alpha_n &= 0,\ \alpha_{n1}\ \alpha_{n2}\ \alpha_{n3}\ldots\ \alpha_{nn}\ldots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Здесь α_{ij} – j-я десятичная цифра числа α_i.

Построим дробь $\beta = 0,\ \beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ldots\beta_n\ldots$ по следующему правилу. В качестве β_1 примем любую цифру, отличную от α_{11}, в качестве β_2 примем любую цифру, отличную от α_{22}, в качестве β_3 – отличную от α_{33} и т.д. Число $\beta \in (0, 1)$ и не совпадает ни с α_1, ни с α_2, ... Противоречие.

Вообще говоря, несовпадение двух десятичных дробей не означает, что дроби изображают разные числа. Для некоторых чисел (а именно, чисел вида $p/10^q$) имеются две разных формы записи: с бесконечным числом нулей или бесконечным числом девяток, например,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5000\ldots = 0,4999\ldots$$

Тем самым, рассуждения нуждаются в небольшом уточнении. Именно, десятичную дробь β достаточно строить так, чтобы цифры β_1, β_2, ... не совпадали ни с нулем, ни с девяткой. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Если некоторое множество A эквивалентно отрезку $[0, 1]$, то говорят, что оно имеет мощность континуума (мощность $\mathcal{C}$).

УПРАЖНЕНИЕ 6. Показать, что множества точек отрезка $[a,b]$, интервала (a,b), полуинтервалов $(a,b]$ и $[a,b)$ имеют мощность $\mathcal{C}$.

ТЕОРЕМА 1.7. *Сумма конечного или счетного числа попарно непересекающихся множеств мощности $\mathcal{C}$ имеет мощность $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Мы ограничимся случаем счетного числа множеств. В случае конечного числа оно проще. Пусть

$$S = \cup_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{и} \quad A_p \cap A_q = \emptyset \quad \text{при} \quad p \neq q,$$

причем каждое из A_k имеет мощность $\mathcal{C}$.

Выберем на полуинтервале $[0,1)$ монотонно возрастающую последовательность чисел

$$c_0 = 0 < c_1 < c_2 < \dots, \quad c_k \to 1 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Так как A_k имеет мощность континуума, то оно эквивалентно $[c_{k-1}, c_k)$ (см. предыдущий пример). Установим взаимно однозначное соответствие между A_k и $[c_{k-1}, c_k)$ для всех $k = 1, 2, \dots$ Тем самым будет установлено взаимно однозначное соответствие между S и $[0,1)$, т.е. множество S имеет мощность $\mathcal{C}$. $\square$

СЛЕДСТВИЕ. Множество всех вещественных чисел $\mathbf{R}$ имеет мощность $\mathcal{C}$.

СЛЕДСТВИЕ. Множество всех иррациональных чисел несчетно.

1.4. Критерий эквивалентности множеств

ТЕОРЕМА 1.8. *Пусть A и B – произвольная пара множеств. Если в множестве A имеется подмножество A_1, эквивалентное B, а в множестве B есть подмножество B_1, эквивалентное A, то A и B эквивалентны между собой.*

Доказательство. Пусть f – взаимно однозначное отображение множества A на B_1, а g – взаимно однозначное отображение B на A_1.

Тогда $g(f(A)) = g(B_1)$ – множество, эквивалентное A. Мы обозначим его через A_2. Ясно, что $A_2 \subset A_1$.

Пусть $A_3 = g(f(A_1))$. Ясно, что $A_3 \subset A_2$. Пусть

$$A_4 = g(f(A_2)), \quad A_5 = g(f(A_3)), \quad \dots, \quad A_{k+2} = g(f(A_k)),$$

где $k = 4, 5, \dots$. При этом ясно, что

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_k \supset A_{k+1} \supset \dots .$$

Положим $D = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ и представим A в виде суммы попарно непересекающихся множеств

$$A = (A \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus A_2) \cup \dots \cup (A_{k+1} \setminus A_k) \cup \dots \cup D.$$

Аналогично, множество A_1 представимо в виде

$$A_1 = (A_1 \setminus A_2) \cup \dots \cup (A_{k+1} \setminus A_k) \cup \dots \cup D.$$

Данные разложения, очевидно, переписываются в виде

$$A = D \cup ((A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots) \cup \big((A \setminus A_1) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \dots\big) \quad (2)$$

и

$$A_1 = D \cup ((A_1 \setminus A_2) \cup (A_3 \setminus A_4) \cup \dots) \cup ((A_2 \setminus A_3) \cup (A_4 \setminus A_5) \cup \dots). \quad (3)$$

Первые два слагаемых в разложениях (2) и (3) одинаковы. Легко видеть, что между последними слагаемыми можно установить взаимно однозначное соответствие. Действительно, $A \setminus A_1$ эквивалентно $A_2 \setminus A_3$, поскольку первое из этих множеств переводтися во второе посредством взаимно однозначного соответствия $g \circ f$. Множество $A_2 \setminus A_3$ эквивалентно $A_4 \setminus A_5$ и т.д.

Таким образом, понятно, что A и A_1 эквивалентны. Однако, A_1 эквивалентно B по условию. Так что, $A \sim B$, и теорема доказана. □

1.5. Сравнение мощностей

Пусть A и B – множества. Определим их мощности $m(A)$ и $m(B)$ следующим образом. Если $A \sim B$, то мы полагаем $m(A) = m(B)$. Если A эквивалентно некоторой части B, но при этом в A нет части, эквивалентной B, то пусть $m(A) < m(B)$.

ТЕОРЕМА 1.9. *Существуют множества сколь угодно большой мощности. Именно, пусть A – некоторое множество, а $\aleph$ – множество, элементами которого являются всевозможные подмножества A. Тогда $\aleph$ имеет мощность, большую чем мощность множества A.*

Доказательство. Ясно, что $m(A) \le m(\aleph)$, поскольку в $\aleph$ можно взять все одноэлементные подмножества $\aleph$ и получить часть $\aleph$, эквивалентную A. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить, что в A нет подмножества, эквивалентного $\aleph$.

Предположим противное. Пусть между элементами $u, v, \ldots$ множества A и какими-то элементами $U, V, \ldots$ множества $\aleph$ (т.е. подмножествами $\aleph$) установлено взаимно однозначное соответствие

$$u \leftrightarrow U, \quad v \leftrightarrow V, \quad \ldots .$$

Покажем, что найдется подмножество в A (т.е. элемент $\aleph$), которое не соответствует никакому элементу A. Пусть X – совокупность элементов из A, не входящих в те подмножества, которые им соответствуют. Более точно, если $u \leftrightarrow U$ и $u \notin U$, то элемент u мы включаем в X. Ясно, что X есть подмножество в A и, в частности, элемент $\aleph$. Покажем, что подмножеству X не может соответствовать никакой элемент из A.

Допустим, что существует $x \leftrightarrow X$. Если $x \notin X$, то, по определению, X есть элемент X. Противоречие. Если же $x \in X$, то, по определению, X есть элемент, не принадлежащий X. Опять противоречие. Теорема доказана. □

СЛЕДСТВИЕ. Множество всех вещественных функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, имеет мощность, большую чем $\mathcal{C}$.

Доказательство. Пусть $\chi_E(x)$ – характеристическая функция множества $E \subset [0, 1]$, т.е.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in E, \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1] \setminus E. \end{cases}$$

Тем самым, установлено взаимно однозначное соответствие $E \leftrightarrow \chi_E(x)$. Множество всевозможных подмножеств отрезка $[0, 1]$ имеет мощность, большую чем $\mathcal{C}$. Следовательно, множество всех вещественных функций на $[0, 1]$ также имеет мощность, большую чем $\mathcal{C}$. □

Проблема !!! *Существуют ли множества, имеющие мощность, промежуточную между счетной и континуальной?*

Данная проблема упирается в логические и философские первоосновы математики. Ответа, удовлетворяющего всех математиков, в настоящее время не имеется. Заинтересованным читателям мы рекомендуем следующую литературу.

1. Н.Н. Лузин, Собрание сочинений. Т.1. Метрическая теория функций и теория функций комплексного переменного, М.: Изд-во АН СССР, 1953.

2. Н.Я. Виленкин, Рассказы о множествах, М.: Наука, 1965.

3. П.Д. Коэн, Теория множеств и континуум гипотеза, М.:Наука, 1969.

§2. Метрические пространства

Метрическим пространством называется пара (X, ρ), состоящая из некоторого множества X и однозначной, неотрицательной функции ρ, определенной на декартовом произведении $X \times X$ и удовлетворяющей условиям:

i) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);

ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех $x, y \in X$ (аксиома симметрии);

iii) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (аксиома треугольника).

Функция ρ называется в данном случае *расстоянием* (или *метрикой*) в пространстве (X, ρ).

2.1. Точки прикосновения. Замыкание

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. *Открытым шаром* в пространстве (X, ρ) с центром в точке $x_0 \in X$ и радиусом $r > 0$ называется множество

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < r\}.$$

Открытый шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в $x_0 \in X$ будем называть также *ε-окрестностью* точки x_0 и обозначать символом $O_\varepsilon(x_0)$.

ПРИМЕР 1. Пусть X – множество, состоящее из трех точек в плоскости $\mathbf{R}^2$:

$$a = (0, 0), \quad b = (0, 1) \quad \text{и} \quad c = (1, 0);$$

и пусть $\rho(x, y)$ – стандартное (евклидово) расстояние между точками $x, y \in X$. Аксиомы i), ii), iii) метрики в данном случае, очевидно, выполнены и мы имеем метрическое пространство (X, ρ).

Легко видеть, что здесь

$$\overline{B(a, 1)} \supset \overline{B(c, \sqrt{2})},$$

т.е. шар радиуса 1 содержит внутри себя шар радиуса $\sqrt{2}$. □

УПРАЖНЕНИЕ 1.

1. Прочитать главу IV части первой из книги Ярослава Гашека "Похождения бравого солдата Швейка".

2. Рассмотреть утверждение профессора из сумасшедшего дома, доказывавшего, что "внутри земного шара имеется другой шар, значительно больше наружного".

3. Имеются ли логические противоречия в данном высказывании?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть M – множество в метрическом пространстве (X, ρ). Точка $x \in X$ называется точкой прикосновения множества M, если всякая ее окрестность содержит хотя бы одну точку из M. Совокупность всех точек прикосновения множества M обозначается через $[M]$ и называется замыканием M.

ПРИМЕР 2. Пусть $(X, \rho) = \mathbf{R}$ и множество

$$M = (0,1) \cup \{2\}.$$

Здесь имеем

$$[M] = [0,1] \cup \{2\}.$$

$\square$

ТЕОРЕМА 2.1. *Справедливы следующие высказывания:*

a) $M \subset [M]$;
b) $[[M]] = [M]$;
c) *если* $M_1 \subset M_2$, *то* $[M_1] \subset [M_2]$;
d) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Доказательство. Так как всякая точка $x \in M$ является точкой прикосновения M, то, очевидно, $M \subset [M]$ и свойство a) действительно имеет место.

Докажем b). По свойству a) имеем $[M] \subset [[M]]$. Нам достаточно показать, что $[[M]] \subset [M]$. Пусть $x \in [[M]]$. Тогда в любой окрестности $O_\varepsilon(x)$ найдется точка $x_1 \in [M]$. Положим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x, x_1).$$

Ясно, что $\varepsilon_1 > 0$.

Рассмотрим шар $O_{\varepsilon_1}(x_1)$. Этот шар лежит внутри шара $O_\varepsilon(x)$. Действительно, если $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$, то $\rho(z, x_1) < \varepsilon_1$. Так как

$$\rho(x, x_1) = \varepsilon - \varepsilon_1,$$

то по аксиоме треугольника

$$\rho(z, x) < \rho(z, x_1) + \rho(x_1, x) < \varepsilon_1 + \varepsilon - \varepsilon_1 = \varepsilon$$

и $z \in O_\varepsilon(x)$.

Поскольку $x_1 \in [M]$, то в $O_{\varepsilon_1}(x_1)$ найдется точка $x_2 \in M$. Но $O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x)$, и потому $x_2 \in O_\varepsilon(x)$. Так как $O_\varepsilon(x)$ – произвольная окрестность точки x, то $x \in [M]$ и свойство b) доказано.

Высказывание c) очевидно.

Докажем d). Пусть $x \in [M_1 \cup M_2]$. В любой окрестности $O_\varepsilon(x)$ имеются точки из $M_1 \cup M_2$. Значит, либо $x \in [M_1]$, либо $x \in [M_2]$. Следовательно,

$$[M_1 \cup M_2] \subset ([M_1] \cup [M_2])\,.$$

Проверим обратное включение. Пусть $x \in ([M_1] \cup [M_2])$. Тогда или $x \in [M_1]$, или $x \in [M_2]$. Предположим, к примеру, что $x \in [M_1]$. Так как $M_1 \subset (M_1 \cup M_2)$, то по свойству c) имеем $[M_1] \subset [M_1 \cup M_2]$. Значит, $x \in [M_1 \cup M_2]$ и

$$([M_1] \cup [M_2]) \subset [M_1 \cup M_2].$$

Свойство d) доказано полностью. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Точка $x \in X$ называется предельной точкой (точкой сгущения) множества M метрического пространства (X, ρ), если всякая ее окрестность содержит бесконечно много точек из M.

ПРИМЕР 3. Пусть $(X, \rho) = \mathbf{R}$ и $M = (0, 1) \cup \{2\}$. Множество точек сгущения множества M совпадает с $[0, 1]$. □

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Точка $x \in M$ называется изолированной точкой M, если в некоторой окрестности $O_\varepsilon(x)$ имеется разве лишь конечное число точек из M.

ПРИМЕР 4. Пусть $(X, \rho) = \mathbf{R}$ и $M = (0, 1) \cup \{2\}$. Точка $\{2\}$ – изолированная точка M и других изолированных точек у множества не имеется. □

ПРИМЕР 5. Рассмотрим множество всех точек числовой прямой, снабженное метрикой

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x = y, \\ 1, & \text{если} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Легко видеть, что всякая точка данного метрического пространства является изолированной. □

УПРАЖНЕНИЕ 2. Доказать, что всякая точка прикосновения множества M является либо предельной точкой M, либо изолированной точкой M.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Замыкание $[M]$ множества состоит, вообще говоря, из точек трех типов: a) изолированных точек M; b) предельных точек M, принадлежащих M; c) предельных точек M, не принадлежащих M.

2.2. Сходимость в метрическом пространстве

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство и $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая последовательность точек в нем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Последовательность $\{x_k\}$ сходится к точке $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon)$ такое, что при всех $k > N(\varepsilon)$ выполнено $\rho(x, x_k) < \varepsilon$.

Точка x называется в этом случае пределом последовательности $\{x_k\}$.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Доказать, что никакая последовательность не может иметь двух различных пределов.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Доказать, что если $\{x_k\}$ сходится к x, то всякая ее подпоследовательность $\{x_{k'}\}$ также сходится к x.

ТЕОРЕМА 2.2. *Для того, чтобы точка x была точкой прикосновения множества M, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_k\}$ точек из M, сходящаяся к x.*

Доказательство. Необходимость. Пусть x – точка прикосновения M. Тогда в каждой окрестности $O_{\frac{1}{k}}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ содержится хотя бы одна точка $x_k \in M$. Последовательность $\{x_k\}$ сходится к x.

Достаточность. Пусть $\{x_k\}$ сходится к x. Тогда $\rho(x_k, x) \to 0$ и в любой окрестности точки x имеются точки $x_k \in M$. Значит, точка x является точкой прикосновения M, и теорема доказана. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 6. Доказать, что для того, чтобы x была предельной точка множества M, необходимо и достаточно, чтобы в M существовала последовательность попарно различных точек, сходящаяся к x.

2.3. Плотные подмножества. Сепарабельность

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство и пусть A, B – подмножества X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Множество A называется плотным в B, если $[A] \supset B$.

Множество A называется всюду плотным в X, если $[A]$ совпадает с X.

Множество A называется нигде не плотным в X, если A не плотно ни в каком шаре, содержащемся в X.

ПРИМЕР 6. Пусть $(X, \rho) = \mathbf{R}$. Множество рациональных чисел $\mathbf{Q}$ всюду плотно в $\mathbf{R}$. Множество натуральных чисел $\mathbf{N}$ нигде не плотно в $\mathbf{R}$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Метрическое пространство (X, ρ) называется сепарабельным, если оно имеет счетное всюду плотное подмножество.

УПРАЖНЕНИЕ 7. Множество A в метрическом пространстве (X, ρ) нигде не плотно в (X, ρ), если в каждом шаре $B \subset X$ содержится другой шар B', не имеющий с A ни одной общей точки. (Проверить!)

УПРАЖНЕНИЕ 8. Доказать, что пространство $(X, \rho) = \mathbf{R}$ сепарабельно.

УПРАЖНЕНИЕ 9. Доказать (или разобрать доказательство в другом учебнике), что метрическое пространство (X, ρ), указанное в примере 5, несепарабельно.

2.4. Простейшие свойства замкнутых и открытых множеств

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство и $M \subset X$ – некоторое множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Множество M называется замкнутым, если оно содержит все свои точки прикосновения, т.е. $[M] = M$.

Легко доказать, что множество M замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки, т.е. наше определение согласуется с определением замкнутого множества, данным ранее для $\mathbf{R}^n$. В частности, для всякого множества $M \subset X$ выполнено $\overline{M} = [M]$, где символом $\overline{M}$ обозначено множество предельных точек M в X. Мы предполагаем, что доказательство этого факта может быть проделано самостоятельно.

ТЕОРЕМА 2.3. *Пересечение любого числа и сумма конечного числа замкнутых множеств суть снова замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть

$$F = \cap_\alpha F_\alpha,$$

где каждое из множеств F_α замкнуто. Пусть $x \in [F]$. Это означает, что всякая ее окрестность $O_\varepsilon(x)$ содержит хотя бы одну точку из F. Тогда $O_\varepsilon(x)$ содержит хотя бы одну точку в кождом из F_α. Поскольку множества F_α замкнуты, то $x \in F_\alpha$ при всех α. Тем самым, $x \in F$, т.е. $[F] = F$ и F замкнуто.

Пусть
$$F = \cup_{k=1}^{n} F_k,$$
где F_k – замкнуты. Предположим, что $x \notin F$ и покажем, что x не может быть точкой прикосновения F. Действительно, x не принадлежит ни одному из множеств F_k и потому не является точкой прикосновения ни для одного из F_k. Следовательно, для любого k можно найти такую окрестность $O_{\varepsilon_k}(x)$ точки x, которая содержит разве лишь конечное число точек F_k. Выбирая из окрестностей
$$O_{\varepsilon_1}(x), \quad O_{\varepsilon_2}(x), \quad \ldots, O_{\varepsilon_n}(x)$$
наименьшую, мы найдем окрестность $O_\varepsilon(x)$ точки x, которая содержит не более конечного числа точек из F.

Таким образом, если точка $x \notin F$, то она не может быть точкой прикосновения множества F, т.е. множество F замкнуто. Теорема доказана. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Точка x называется внутренней точкой множества M, если существует ее окрестность $O_\varepsilon(x)$ такая, что $O_\varepsilon(x) \subset M$.

Множество, все точки которого являются внутренними, называется открытым множеством.

ПРИМЕР 7. Открытый шар $B(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$ в любом метрическом пространстве (X, ρ) является открытым множеством. Действительно, пусть $x \in B(a, r)$. Тогда $\rho(x, a) < r$. Выберем $\varepsilon = r - \rho(x, a)$ и рассмотрим шар $B(x, \varepsilon)$. Для всякого $y \in B(x, \varepsilon)$ выполнено
$$\rho(a, y) \leq \rho(a, x) + \rho(x, y) < \rho(a, x) + \varepsilon = r.$$
Тем самым,
$$B(x, \varepsilon) = O_\varepsilon(x) \subset B(a, r)$$
и множество $B(a, r)$ открыто.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.9. Пусть G — открытое подмножество X. Точка $x \in X$ называется граничной точкой G, если в любой окрестности x имеются как принадлежащие G, так и не принадлежащие G точки.

Совокупность всех граничных точек G называется границей G и обозначается ∂G.

УПРАЖНЕНИЕ 10. Границей шара $B(x, r) \subset X$ является ограничивающая его сфера $S(a, r) = \{x \in X : \rho(a, x) = r\}$ (доказать!).

ТЕОРЕМА 2.4. *Для того, чтобы множество M в метрическом пространстве (X, ρ) было открытым, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение $X \setminus M$ было замкнутым.*

Доказательство. Если M открыто, то каждая точка $x \in M$ имеет окрестность $O_\varepsilon(x) \subset M$, т.е.

$$O_\varepsilon(x) \cup (X \setminus M) = \emptyset.$$

Следовательно, ни одна из точек $x \in M$ не может быть точкой прикосновения $X \setminus M$, т.е. $X \setminus M$ замкнуто.

Обратно, если $X \setminus M$ замкнуто, то множество M не содержит точек прикосновения множества $X \setminus M$. Следовательно, всякая точка $x \in M$ имеет окрестность $O_\varepsilon(x) \subset M$, т.е. M замкнуто. □

СЛЕДСТВИЕ. Пустое множество $\emptyset$ и все метрическое пространство (X, ρ) одновременно замкнуты и открыты.

Доказательство. Достаточно заметить, что $\emptyset$ и X замкнуты по определению, а их дополнения $X \setminus \emptyset = X$ и $X \setminus X = \emptyset$ также замкнуты. □

ТЕОРЕМА 2.5. *Сумма любого (конечного или бесконечного) числа и пересечение конечного числа открытых множеств суть открытые множества.*

Доказать самостоятельно с использованием соответствующей теоремы для замкнутых множеств.

2.5. Строение открытых и замкнутых подмножеств прямой

ТЕОРЕМА 2.6. *Всякое открытое подмножество прямой* $\mathbf{R}$ *является суммой конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов.*

Доказательство. Пусть $M \subset \mathbf{R}$ – произвольное открытое множество и $x \in M$ – произвольная точка. По определению открытого множества найдется интервал, содержащий x и содержащийся в M. Обозначим через I_x объединение всех таких интервалов. Покажем, что I_x также интервал.

С этой целью положим

$$a = \inf_{y \in I_x} y, \quad b = \sup_{y \in I_x} y$$

(случаи $a, b = \pm\infty$ не исключаются). Покажем, что $I_x = (a, b)$.

Действительно, легко видеть, что $I_x \subset (a, b)$. Обратно, пусть $y \in (a, b)$ – произвольная точка. Нам надо доказать, что $y \in I_x$. Пусть $a < y < x$. В множестве I_x найдем точку y', $a < y' < y$. Это означает, что в M имеется интервал, содержащий точки y' и x. Но тогда он содержит и точку y, а потому

$y \in I_x$. Случай $x < y < b$ рассматривается аналогично и в этом случае также $y \in I_x$. Точка $x \in I_x$ по условию. Таким образом, $I_x = (a, b)$.

Итак, интервал $(a, b) \subset M$ и не лежит ни в каком большем интервале, содержащимся в M. Очевидно, что интервалы I_{x_1} и I_{x_2}, отвечающие двум различным точкам x_1, $x_2 \in M$, либо совпадают, либо не пересекаются. Любая система попарно непересекающихся интервалов не более чем счетна, поскольку в каждом из них можно выбрать по рациональной точке. Ясно, что объединение таких интервалов составляет все M. Теорема доказана. □

СЛЕДСТВИЕ. Всякое замкнутое подмножество числовой прямой $\mathbf{R}$ можно получить выбрасыванием из $\mathbf{R}$ конечного либо счетного числа интервалов.

Для *доказательства* достаточно заметить, что дополнение замкнутого множества открыто, и воспользоваться только что доказанной теоремой.

2.6. Канторово множество

Пусть F_0 – отрезок $[0, 1]$. Выбросим из него интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ и обозначим через F_1 оставшееся множество. Ясно, что F_1 замкнуто.

Выбросим из F_1 интервалы $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ и обозначим через F_2 оставшееся (очевидно, замкнутое) множество.

В каждом из четырех отрезков выбросим средний интервал длины $\frac{1}{3^3}$ и т.д.

Продолжая этот процесс неограниченно, получим убывающую последовательность замкнутых множеств

$$F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_k \supset \ldots .$$

Положим

$$F = \cap_{k=0}^{\infty} F_k.$$

Множество F доставляет типичный пример *канторова* множества. Оно замкнуто, поскольку является пересечением замкнутых множеств F_k. Множество F получено из отрезка $[0,1]$ выбрасыванием счетного числа интервалов. Кроме того, это множество *самоподобно* в том смысле, что его сколь угодно малая часть подобна всему множеству.

Изучим арифметическую природу канторового множества F. Заметим сперва, что для каждой точки x первого из удаленных интервалов $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ при разложении ее в троичную дробь

$$x = 0, a_1\, a_2\, a_3 \ldots \quad (a_k = 0, 1, 2)$$

необходимо окажется $a_1 = 1$.

Концы этого интервала допускают каждый по два представления троичными дробями

$$\frac{1}{3} = \left\{ \begin{array}{l} 0,1\,0\,0\,0 \ldots \\ \\ 0,0\,2\,2\,2 \ldots \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \frac{2}{3} = \left\{ \begin{array}{l} 0,1\,2\,2\,2 \ldots \\ \\ 0,2\,0\,0\,0 \ldots \end{array} \right.$$

Все остальные точки отрезка $[0,1]$ при разложении в троичную дробь не могут иметь на первом месте после запятой 1.

Итак, на первом шаге построения множества F из отрезка $[0,1]$ удаляются те и только те точки, первый троичный знак которых (после запятой), необходимо есть цифра 1.

Аналогичным образом проверяется, что на втором шаге удаляются те и только те точки, второй троичный знак которых необходимо есть цифра 1 и т.д.

Тем самым, после окончания процесса останутся неудаленными те и только те точки, которые могут изображаться троичной дробью вида

$$0,\ a_1\, a_2\, a_3\ \ldots,$$

в которой ни одна из цифр a_k не равна 1.

Вывод. Удаленные множества состоят из точек, троичные разложения которых невозможны без использования цифры 1, а оставшееся множество F состоит из точек, для которых такие разложения возможны.

ТЕОРЕМА 2.7. *Канторово множество F имеет мощность $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Множество F есть множество точек вида

$$\{0,\ a_1\, a_2\, a_3\ \ldots\},$$

где $a_1, a_2, \ldots$ могут принимать значения 0 или 2.

Ясно, что это множество находится во взаимно однозначном соответствии с множеством точек вида

$$\{0,\, b_1\, b_2\, b_3\, \ldots\},$$

где $b_1, b_2, \ldots$ могут принимать значения 0 или 1, т.е. множеством всех двоичных дробей y, $0 \le y \le 1$.

Каждая такая двоичная дробь y однозначным образом соответствует точке отрезка $[0,1]$ и наоборот, каждая точка этого отрезка может быть записана, (вообще говоря, не единственным образом) в виде двоичной дроби. Следовательно, множество двоичных дробей, а, тем самым, и множество F, имеют мощность не меньшую, чем $\mathcal{C}$. Однако, F есть часть отрезка $[0,1]$ и его мощность не превосходит $\mathcal{C}$, т.е. $m(F) = \mathcal{C}$. Теорема доказана. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 11.

1. Сумма длин удаленных интервалов из отрезка $[0,1]$ равна

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \ldots = 1.$$

Проверить с помощью калькулятора правдоподобность данного утверждения.

2. Попытаться дать строгое доказательство этому равенству.

ЗАМЕЧАНИЕ. Множество удаленных при построении F интервалов счетно. Следовательно, счетно и множество их концов. Таким образом, канторово множество F содержит не только концы таких интервалов.

2.7. Замечания о двоичных дробях

Возможно, следующие комментарии относительно двоичных дробей не будут излишними.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Двоичными дробями называются бесконечные суммы вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}, \quad \text{где} \quad a_k = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \\ 1. \end{array} \right.$$

Мы будем обозначать такие суммы символом $0,\, a_1\, a_2\, a_3\, \ldots$. Всякое число $x \in [0,1]$ допускает представление в форме

$$x = 0,\, a_1\, a_2\, \ldots.$$

Это представление единственно в случае, когда x не является дробью вида

$$\frac{m}{2^n} \quad (m = 1, 3, \ldots, 2^n - 1). \tag{1}$$

Числа 0 и 1 раскладываются единственным образом в дроби $0,000\dots$ и $0,111\dots$.

Если
$$x = \frac{m}{2^n} \quad (m = 1, 3, \dots, 2^n - 1),$$
то x допускает два (!) разложения. В этих разложениях цифры $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ совпадают, а цифра a_n в одном из них равна 1, а в другом 0. Все остальные цифры у первого разложения суть 0 "в периоде", а у второго – 1 "в периоде". Например,
$$\frac{3}{8} = \begin{cases} 0,011000\dots \\ 0,010111\dots \end{cases}$$

Всякая двоичная дробь $0, a_1 a_2 \dots$ соответсвует некоторому числу x из $[0,1]$. Если эта дробь содержит 0 или 1 в периоде, то x есть число вида (1) (исключение составляют лишь дроби $0,000\dots$ и $0,111\dots$). В этом случае, наряду с исходным, существует еще одно двоичное разложение x. Если же двоичная дробь не содержит цифры 0 или 1 в периоде, то $x \neq m/(2^n)$ и других двоичных разложений x не имеет.

§3. Покрытия. Размерности. Фракталы

3.1. Покрытия множеств

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство и пусть Ξ – некоторое, наперед заданное семейство множеств $\Delta \subset X$. Величина
$$\operatorname{diam} \Delta = \sup_{x,y \in \Delta} \rho(x,y)$$
называется *диаметром* Δ.

Пусть $E \subset X$ – множество. Семейство Ξ называется *покрытием* множества E если
$$E \subset \cup_{\Delta \in \Xi} \Delta.$$

Множество $E \subset X$ называется *компактным*, если каждое его покрытие открытыми множествами содержит конечное подпокрытие.

Для произвольного $x \in X$ пусть
$$\pi(x;\Xi) = \sum_{\Delta \in \Xi} \chi_\Delta(x), \quad \text{где} \quad \chi_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x \in \Delta, \\ 0, & \text{при} \quad x \in X \setminus \Delta \end{cases}$$
– характеристическая функция Δ. Величина $\pi(x;\Xi)$ означает число подмножеств $\Delta \in \Xi$, содержащих точку $x \in X$.

Число
$$\pi(\Xi) = \sup_{x\in X} \pi(x, \Xi)$$
называется *кратностью* покрытия Ξ.

Теоремы о покрытиях играют важную роль во многих вопросах современной математики. Как правило, их доказательства весьма нетривиальны. Мы докажем здесь только одну из таких теорем.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть E – ограниченное подмножество $\mathbf{R}^n$. Предположим, что для всякой точки $x \in E$ имеется шар $B \in \{B(x, r(x))\}_{x\in E}$. Тогда существует последовательность шаров $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$, $B_k \in \{B(x, r(x))\}_{x\in E}$, такая, что $E \subset \cup_{k=1}^{\infty} B_k$ и ее кратность*
$$\pi\left(\{B_k\}_{k=1}^{\infty}\right) \le N(n).$$
Здесь $N(n)$ – некоторая постоянная, зависящая только от n.

Доказательство. Пусть $a_0 = \sup_{x\in E} r(x)$. Если $a_0 = \infty$, то мы можем покрыть E одним шаром. Таким образом, мы вправе далее предполагать, что $a_0 < \infty$.

Фиксируем постоянную q так, чтобы $2/\sqrt{5} \le q < 1$. Выберем шар $B_1 = B(x_1, r(x_1))$ с центром в точке $x_1 \in E$, для которого
$$r(x_1) > q\, a_0.$$

Пусть $a_1 = \sup_{x\in E\setminus B_1} r(x)$. Ясно, что $a_1 \le a_0$. Выберем $B_2 = B(x_2, r(x_2))$, для которого
$$x_2 \in E \setminus B_1 \quad \text{и} \quad r(x_2) > q\, a_1.$$

Продолжим указанный процесс неограниченно. Предположим, что точки $x_1, x_2, \ldots, x_m$ уже выбраны. Если
$$E \setminus \cup_{k=1}^{m} B_k = \emptyset,$$
то процесс выбора считаем оконченным. В противном случае мы полагаем
$$a_m = \sup_{x\in E\setminus \cup_{k=1}^{m} B_k} r(x)$$
и выбираем $x_{m+1} \in E \setminus \cup_{k=1}^{m} B_k$ так, чтобы
$$r(x_{m+1}) > q\, a_m.$$

Если процесс выбора заканчивается после конечного числа шагов, то мы получаем конечный набор шаров $\{B_k\}$, в противном случае набор $\{B_k\}$ бесконечен. Опишем некоторые его свойства, следуя методу конструирования. Во-первых, заметим, что

$$\ldots \le a_m \le \ldots \le a_2 \le a_1 \le a_0 < \infty \tag{1}$$

и

$$\begin{aligned} &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &qa_m < r(x_{m+1}) \le a_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &qa_1 < r(x_2) \le a_1, \\ &qa_0 < r(x_1) \le a_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Во-вторых, пусть B_p и B_s – шары из семейства $\{B_k\}$. Тогда имеет место альтернатива:
(α) либо $x_p \notin B_s = B(x_s, r(x_s))$ и $x_s \notin B_p = B(x_p, r(x_p))$;
(β) либо один из центров, например, x_p принадлежит шару B_s, $p < s$.

В случае (β) из (1) и (2) следует, что

$$q \le \frac{a_{p-1}q}{a_s} < \frac{r(x_p)}{r(x_s)} < 1. \tag{3}$$

В третьих, наряду с шарами $B_k = B(x_k, r(x_k))$ рассмотрим концентрические шары $b_k = B(x_k, \sqrt{1-q^2}\, r(x_k))$. Шары b_k попарно не пересекаются. Действительно, если $b_p \cap b_s \neq \emptyset$, то

$$\begin{aligned} |x_p - x_s| &< \sqrt{1-q^2} r(x_p) + \sqrt{1-q^2} r(x_s) \le \\ &\le 2\sqrt{1-q^2}\max\{r(x_p), r(x_s)\}. \end{aligned}$$

Однако, в случае (α) выполнено

$$|x_p - x_s| \ge \max\{r(x_p), r(x_s)\},$$

а в случае (β), согласно (3), мы получаем

$$\begin{aligned} |x_p - x_s| &> \min\{r(x_p), r(x_s)\} = r(x_p) > \\ &> qr(x_s) = q\max\{r(x_p), r(x_s)\}. \end{aligned}$$

Поскольку $q \in (2/\sqrt{5}, 1)$, то $2\sqrt{1-q^2} < q$ и, следовательно,

$$|x_p - x_s| \le 2\sqrt{1-q^2}\max\{r(x_p), r(x_s)\} <$$
$$< q\max\{r(x_p), r(x_s)\}.$$

Таким образом, предположение $b_p \cap b_s \ne \emptyset$ влечет противоречие и шары b_p и b_s не пересекаются.

В четвертых, мы покажем, что

$$\lim_{m\to\infty} a_m = 0. \tag{4}$$

Предположим, что имеет место противное, т.е. существует постоянная $c > 0$ такая, что $a_m \to c$. Тогда из (2) вытекает, что $a_m \ge c$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Тем самым, $r(x_m) \ge qc$ при всех $m = 0, 1, 2, \ldots$ и существует бесконечная последовательность попарно непересекающихся шаров $\{b_k\}$ с радиусами

$$r(x_k)\sqrt{1-q^2} \ge qc\sqrt{1-q^2} > 0$$

и центрами, лежащими в ограниченном множестве E. Так как

$$r(x_k)\sqrt{1-q^2} \le a_0\sqrt{1-q^2},$$

то все шары b_k лежат в некотором шаре радиуса

$$d = \operatorname{diam} E + 2a_0\sqrt{1-q^2},$$

т.е. имется бесконечная последовательность шаров, радиусов не менее чем $qc\sqrt{1-q^2}$, лежащих внутри некоторого шара радиуса $d < \infty$. Ясно, что это невозможно и соотношение (4) доказано.

Покажем, что $E \subset \cup_{k=1}^{\infty} B_k$. Предположим, что имеет место противное, т.е. $E \setminus \cup_{k=1}^{\infty} B_k \ne \emptyset$. Пусть $\tilde{x} \in E \setminus \cup_{k=1}^{\infty} B_k$. Тогда, согласно (4), для достаточно больших m имеем

$$a_m = \sup_{x \in E \setminus \cup_{k=1}^{m} B_k} r(x) < r(\tilde{x}).$$

Однако, $\tilde{x} \in E \setminus \cup_{k=1}^{\infty} B_k$. Таким образом, $\tilde{x} \in E \setminus \cup_{k=1}^{m} B_k$. Отсюда, $a_m \ge r(\tilde{x})$, что невозможно.

Оценим кратность покрытия $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$. Прежде всего заметим, что если точка $y \in B_p \cap B_s$ и имеет место (α), то угол между векторами $\overrightarrow{yx_p}$ и $\overrightarrow{yx_s}$ больше чем $\frac{\pi}{3}$.

Во-вторых, если имеет место (β), то для любого $y \notin b_p$ мы можем оценить угол между векторами $\overrightarrow{yx_p}$, $\overrightarrow{yx_s}$. Простые вычисления дают

$$\begin{aligned} \operatorname{angle}(\overrightarrow{yx_p}, \overrightarrow{yx_s}) &\geq \min\left\{\arccos\sqrt{1-q^2}, \arccos\tfrac{1}{2q}\right\} = \\ &= \arccos\tfrac{1}{2q} \equiv \tfrac{\pi}{3} - \eta, \end{aligned}$$

где η – некоторая постоянная, зависящая только от q.

Завершая доказательство теоремы 3.1, предположим, что точка $y \in \mathbf{R}^n$ принадлежит одному из шаров последовательности $\{B_k\}$, т.е.

$$y \in \cap_{k=1}^{N} B_k. \tag{5}$$

Оценим, как и выше, число N. Если y принадлежит какому-либо из шаров b_k (она может лежать только в одном из шаров), то мы пропускаем соответствующий шар в (5) и пишем, что

$$y \in \cap_{k=1}^{N-1} B_k.$$

Для произвольной пары шаров B_p и B_s этого семейства, мы воспользуемся оценкой величины угла между векторами $\overrightarrow{yx_p}$ и $\overrightarrow{yx_s}$, полученной выше. Эта величина больше чем $\frac{\pi}{3} - \eta$. Но число отрезков, выходящих из одной точки y и образующих между собой достаточно большие углы, зависит только от размерности пространства $\mathbf{R}^n$ и этого угла. Таким образом,

$$N - 1 \leq N(n, \eta),$$

где $N(n, \eta)$ – число, зависящее только от n и η. Теорема 3.1 доказана полностью. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для достаточно малых η выполнено $N(2, \eta) = 6$ и $N(3, \eta) = 12$, что следует из теории упаковок. Другие точные значения величины $N(n, \eta)$ не известны.[2]

Следующие две теоремы представляют собой варианты знаменитых теорем[3] Безиковича[4] и Уитни[5].

[2]См. по этому вопросу, например, §1 главы I монографии Конвея и Слоэна, Упаковки шаров, решетки и группы, - Мир, М.: 1990.

[3]См., например, главу I монографии Гусмана, Дифференцирование интегралов в $\mathbf{R}^n$, Мир, М.: 1978.

[4]Безикович Абрам Самойлович – известный математик, родился 24.01.1891 в Бердянске, Россия, умер 2.11.1970 в Кембридже, Англия.

[5]Уитни Хасслер – известный математик, родился 23.03.1907 в Нью Йорке, США, умер 10.05.1989 в Швейцарии.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть E – подмножество $\mathbf{R}^n$, и пусть Ξ – семейство замкнутых шаров $B = \overline{B}(x, r(x))$ с центрами в $x \in E$ и радиусами $r(x)$,*

$$\sup_{x \in E} r(x) < \infty.$$

Тогда существуют подсемейства

$$\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_{N(n)} \subset \Xi$$

неналегающих друг на друга шаров из Ξ, каждое из которых не более чем счетно и

$$E \subset \cup_{k=1}^{N(n)} \cup_{B \in \Xi_k} \overline{B}(x, r(x)).$$

Здесь $N(n)$ – некоторая постоянная, зависящая только от n.

Ясно, что кратность получаемых покрытий множества E не превосходит $N(n)$.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство со следующим условием "однородности": для каждого $x \in X$ и каждого $r > 0$ существует не более N точек $\{x_i\}$ множества*

$$B(x, r) = \{z \in X : \rho(z, x) < r\},$$

таких, что

$$\rho(x_i, x_j) \geq \frac{r}{2} \quad \textit{при} \quad i \neq j.$$

Тогда каждое открытое множество G из X с непустой границей может быть представлено в виде

$$G = \cup_{k=1}^{\infty} B(x_k, r_k)$$

так, что каждая точка $z \in G$ содержится не более чем в $9N$ множествах $B(x_k, r_k)$ и для каждого k

$$r_k \leq \rho(B(x_k, r_k), \partial G) \leq 4\, r_k,$$

где

$$\rho(A, B) = \inf\{x \in A, y \in B : \rho(x, y)\}$$

– расстояние между множествами $A, B \subset X$.

3.2. Размерность по Минковскому

Пусть $E \subset \mathbf{R}^n$ – непустое ограниченное множество. Фиксируем $0 < \varepsilon < \infty$ и обозначим через $N(E, \varepsilon)$ наименьшее число шаров радиусов $r \le \varepsilon$ нужное для покрытия E, т.е.

$$N(E, \varepsilon) = \min\{k : E \subset \cup_{i=1}^{k} \overline{B}(x_i, r(x_i)) \text{ для которых } x_i \in \mathbf{R}^n\}.$$

Верхняя и *нижняя размерности Минковского*[6] множества E определяются выражениями

$$\overline{\dim}_M(E) = \inf\{s : \limsup_{\varepsilon \to 0} N(E, \varepsilon)\varepsilon^s = 0\}$$

и

$$\underline{\dim}_M(E) = \inf\{s : \liminf_{\varepsilon \to 0} N(E, \varepsilon)\varepsilon^s = 0\}.$$

Ясно, что[7]

$$\underline{\dim}_M(E) \le \overline{\dim}_M(E).$$

Можно доказать, что

$$\overline{\dim}_M(E) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(E, \varepsilon)}{\log (1/\varepsilon)}$$

и

$$\underline{\dim}_M(E) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log N(E, \varepsilon)}{\log (1/\varepsilon)}$$

(попробуйте это сделать самостоятельно!).

УПРАЖНЕНИЕ 1. Найти верхнюю и нижнюю размерности отрезка $[a, b]$ прямой линии и прямоугольника $[a, b] \times [c, d]$ двумерной плоскости в $\mathbf{R}^3$.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Найти верхнюю и нижнюю размерности канторова множества F, построенного выше.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Попробуйте определить верхнюю и нижнюю размерности неограниченных множеств.

---

[6] Минковский Герман – знаменитый математик, родился 22.06.1864 в Каунасе, Литва, умер 12.01.1909 в Геттингене, Германия.

[7] Простой пример множества $E \subset \mathbf{R}^n$, для которого

$$\underline{\dim}_M(E) < \overline{\dim}_M(E)$$

см. в разделе **5** монографии P. Mattila, Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

Попытайтесь построить подобный пример самостоятельно.

3.3. Мера и размерность по Хаусдорфу. Понятие фрактала

Всякую непрерывную неубывающую функцию $h(t) : (0,\infty) \to (0,\infty)$ будем называть *пробной*.

Пусть E – подмножество метрического пространства X. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Положим

$$\mathcal{H}^h(E,\varepsilon) = \inf_{\Xi} \sum_{k=1}^{\infty} h(r(x_k)),$$

где точная нижняя грань берется по всем ε-покрытиям Ξ множества E шарами $\overline{B}(x_k, r(x_k))$, $k = 1, 2, \ldots$.

Ясно, что величина $\mathcal{H}^h(E,\varepsilon)$ неубывает при $\varepsilon \to 0$. По определению, *h-мерой* E называется следующая величина

$$\mathcal{H}^h(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^h(E,\varepsilon). \tag{6}$$

Мы будем говорить, что какое-либо свойство имеет место *$\mathcal{H}^h$-почти всюду на* E, если существует подмножество $Q \subset E$, для которого $\mathcal{H}^h(E \setminus Q) = 0$, такое, что данное свойство выполнено в каждой точке $x \in Q$.

Рассмотрим два примера.

ПРИМЕР 1. Пробная функция $h(t) \equiv 1$. Здесь имеем

$$\mathcal{H}^h(E) \ = \ \text{числу точек множества } E.$$

ПРИМЕР 2. Если пробная функция такова, что

$$h(t) = \begin{cases} (\ln 1/t)^{-1} & \text{при } t < 1/e \\ 1 & \text{при } t \geq 1/e, \end{cases}$$

то $\mathcal{H}^h$-мера называется *логарифмической*.

Рассмотрим случай, в котором пробная функция имеет вид $h(t) = c(\alpha)t^{\alpha}$, где $\alpha \geq 0$ – постоянная и

$$c(\alpha) = \frac{\pi^{\alpha/2}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)},$$

$\Gamma(s)$ – Γ-функция Эйлера.[8]

УПРАЖНЕНИЕ 4. Найти постоянную $c(\alpha)$ для $\alpha = 1, 2, 3$.

[8] Мы будем изучать такие функции позже. Пока же Вы можете в случае необходимости посмотреть ее величину в "Справочнике по специальным функциям" под редакцией Абрамовица и Стиган, Наука, М.: 1979, стр. 80-118.

Мы будем писать

$$\mathcal{H}^h(E) = \mathcal{H}^\alpha(E)$$

и говорить, что $\mathcal{H}^\alpha(E)$ есть *α-мера Хаусдорфа* множества $E \subset X$.

Пусть $E \subset X$ и $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, $s \geq 0$. Фиксируем t, $s < t < \infty$ и $q > 0$. Существуют шары

$$B_k = \overline{B}(x_k, r(x_k))$$

такие, что

$$r_k = r(x_k) < q, \quad E \subset \cup_{k=1}^{\infty} B_k$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} c(s) r_k^s \leq \mathcal{H}^s(E) + 1.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^t(E) \ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} c(t) r_k^t = \\ &= \frac{c(t)}{c(s)} \sum_{k=1}^{\infty} c(s) r_k^s r_k^{t-s} \leq \\ &\leq \frac{c(t)}{c(s)} q^{t-s} \left(\mathcal{H}^s(E) + 1\right). \end{aligned}$$

Если показатель $q \to 0$, то мы получаем $\mathcal{H}^t(E) = 0$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть E – множество в метрическом пространстве (X, ρ) и $0 \leq s < t < \infty$. Если $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, то $\mathcal{H}^t(E) = 0$.*

Теперь мы имеем возможность определить хаусдорфову размерность $\dim_H$ множества $E \subset X$,

$$\dim_H(E) \equiv \inf\{0 \leq \alpha < \infty : \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\}.$$

Можно доказать, что

$$\dim_H(E) = k$$

для произвольного открытого подмножества $E \subset \mathcal{S}$ любой k-мерной гладкой поверхности $\mathcal{S}$ в $\mathbf{R}^n$, $1 \leq k \leq n$.

Величина $\dim_H(E)$ не обязана быть целым числом. Для всякого $\alpha, 0 \leq \alpha < n$, имеются подмножества E пространства

$\mathbf{R}^n$, для которых $\dim_H(E) = \alpha$. Такие множества могут строиться по тому же принципу, что и множество Кантора, т.е. по принципу самоподобия. Сколь угодно малая часть самоподобного множества содержит информацию обо всем множестве. Самоподобные множества дробной размерности изучаются в теории *фракталов*.

Понятия фрактал и фрактальная геометрия, появившиеся в конце 70-х годов прошлого века, с середины 80-х прочно вошли в обиход математиков и программистов. Слово фрактал образовано от латинского fractus и в переводе означает состоящий из фрагментов. Оно было предложено Мандельбротом[9] в 1975 году для обозначения нерегулярных, но самоподобных структур, которыми он занимался. Определение фрактала, данное Мандельбротом, звучит так: "Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому".

Рождение фрактальной геометрии связано с выходом в 1977 году книги Мандельброта 'The Fractal Geometry of Nature'. Его работы опираются на научные результаты других ученых, работавших в период 1875-1930 годов в теории функций (Фату, Жюлиа, Пенлеве, В.В. Голубев) [10].

Сегодня фракталы довольно широко используются в компьютерной графике. Они приходят на помощь, например, когда требуется, с помощью нескольких коэффициентов, задать линии и поверхности сложной формы. С точки зрения компьютерной графики, фрактальная геометрия весьма полезна при генерации искусственных облаков, гор, поверхности моря. Фактически – это способ простого представления сложных объектов, образы которых весьма похожи на природные.

Многие физические феномены могут быть интерпретированы как фрактальные множества или процессы (см. "Фракталы в физике", Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике под редакц. Пьетронеро и Тозатти, Мир, М.: 1988.)

УПРАЖНЕНИЕ 5. Доказать следующее соотношение между размерностями Минковского и Хаусдорфа

$$\dim_H(E) \leq \underline{\dim}_M(E).$$

УПРАЖНЕНИЕ 6. Построить пример множества, для которого данное неравенство является строгим.

[9]Мандельброт Бенуа – знаменитый математик, родился 20.11.1924 в Варшаве, Польша, учился и работал во Франции, США, Швейцарии

[10]См. сборник статей В.В. Голубева, Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, ГИФМЛ, М.: 1961

3.4. Кривая Коха

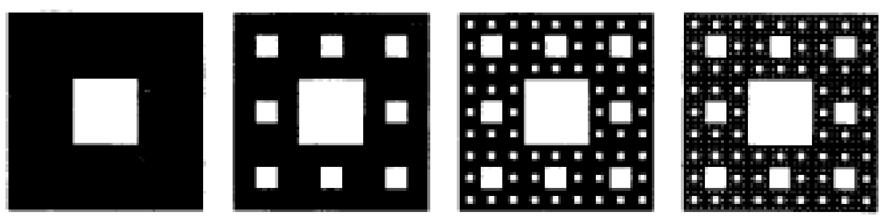
Рассмотрим ряд областей, построенных следующим образом: пусть D_0 – область, ограниченная равносторонним треугольником. Делим стороны треугольника на три равные части и на средней части строим равносторонние треугольники; отбрасывая основания новых треугольников, получаем область D_1. Продолжая такое построение неограниченно, получаем области D_0, D_1, D_2, ... Множества точек, принадлежащих к областям D_0, D_1, D_2, ..., образует область D. Граница этой области есть кривая Коха[11], получаемая как предел построеных зубчатых линий.

УПРАЖНЕНИЕ 7. Доказать, что кривая Коха не имеет касательной ни в одной точке.

Вычислить размерности Минковского и Хаусдорфа кривой Коха.

3.5. Ковер Серпинского

Рассмотрим обычный квадрат и разделим его стороны на три части, получим 9 меньших квадратов. Затем выбрасываем средний квадрат, оставляя 8 меньших квадратов, как на рисунке:



Так что, осталось $\frac{8}{9}$ первоначальной области. Затем делим каждый из меньших квадратов и выбрасываем центральные квадраты. Каждый из них теперь имеет $\frac{8}{9}$ своей начальной площади, так что площадь большого квадрата уменьшилась до $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ ее первоначальной величины. На n-ном шаге описываемого процесса останется $\left(\frac{8}{9}\right)^n$ от первоначальной площади квадрата. Вычислив предел при $n \to \infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n = 0,$$

[11]фон Кох Нильс Фабиан Хельге – шведский математик (25.1.1870-11.3.1924)

т.е. ковер Серпинского[12] имеет нулевую площадь.

УПРАЖНЕНИЕ 8.

1. Вычислить размерности Минковского и Хаусдорфа построенного множества.

2. Модифицировать процесс построения так, чтобы построенное в результате множество имело ненулевую площадь.

3.6. Фрактальные принципы в литературных текстах

Идея бесконечно повторяющегося самоподобия встречается и в фольклоре. В качестве примера укажем текст, хорошо известный нам с детства, написание которого некоторые филологи относят к XVIII веку:
"У попа была собака –
Он ее любил.
Она съела кусок мяса –
Он ее убил.
Вырыл яму, закопал –
Крест поставил, написал:"
Далее текст повторяется.[13]

В качестве упражнения прочтите книгу Я. Потоцкого "Рукопись, найденная в Сарагосе" и опишите, используемые в ней фрактальные принципы.

Укажите иные примеры фракталов.

§4. Полные метрические пространства

4.1. Определение и примеры полных метрических пространств

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной* или *последовательностью Коши*, если она удовлетворяет критерию Коши, т.е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется число $N(\varepsilon)$ такое, что для любых $m \geq n \geq N(\varepsilon)$ выполнено $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 4.1. *Всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.*

Доказательство. Действительно, пусть $\{x_n\} \to x$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$\rho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для всех} \quad n > N(\varepsilon).$$

[12]Серпинский Вацлав – польский математик (14.03.1882 - 21.10.1969).

[13]Другой вариант этой детской дразнилки см. в забавной книжице Е.В. Шикина и Г.Е. Шикиной, Гуманитариям о математике, Москва: Эдиториал УРСС, 2001.

В частности, для любых x_n, x_m при $m, n > N(\varepsilon)$ имеем

$$\rho(x_n, x_m) \le \rho(x_n, x) + \rho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Если в пространстве (X, ρ) всякая фундаментальная последовательность сходится к некоторой точке пространства, то это пространство называется полным.

ПРИМЕР 1. Пространство $\mathbf{R}$ всех точек числовой прямой является полным. Это следует из критерия Коши, доказанного для $\mathbf{R}$.

Пространство $\mathbf{Q}$ всех рациональных точек числовой прямой не полно, поскольку, например, имеется последовательность рациональных точек $x_n = (1 + 1/n)^n$, не имеющая рационального предела. □

ПРИМЕР 2. Рассмотрим пространство l_2 всевозможных последовательностей вещественных чисел $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty.$$

Расстояние между точками $x', x'' \in l_2$ определяется выражением

$$\rho(x', x'') = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x'_k - x''_k)^2}.$$

Покажем, что пространство l_2 полно. Пусть $\{x^k\}$ – фундаментальная в l_2 последовательность, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$\rho(x^{k'}, x^{k''}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^{k'} - x_i^{k''})^2} < \varepsilon \qquad (1)$$

для любых $k', k'' > N(\varepsilon)$. Здесь $x^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_i^k, \ldots)$.

Из (1) следует, что при всех $i = 1, 2, \ldots$ выполнено

$$(x_i^{k'} - x_i^{k''})^2 < \varepsilon^2.$$

Другими словами, при всяком $i = 1, 2, \ldots$ последовательность $\{x_i^k\}$ фундаментальна и потому сходится. Положим $a_i = \lim\limits_{k\to\infty} x_i^k$. Рассмотрим последовательность $a = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots)$. Для доказательства полноты l_2 достаточно показать, во-первых, что $a \in l_2$, т.е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty,$$

и, во-вторых, что $\rho(x^k, a) \to 0$, т.е.

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^k - a_i)^2 = 0.$$

Будем доказывать оба свойства одновременно. Из соотношения (1) следует, что для произвольного фиксированного m выполняется

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^{k'} - x_i^{k''})^2 < \varepsilon^2.$$

Переходя здесь к пределу при $k'' \to 0$, при всяком фиксированном k' получаем

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^{k'} - a_i)^2 \le \varepsilon^2.$$

Однако, данное соотношение справедливо для любого m, а потому полагая $m \to \infty$, находим

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^{k'} - a_i)^2 \le \varepsilon^2 \quad \text{для всех} \quad k' > N(\varepsilon). \tag{2}$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{\infty} (x_i^{k'})^2 < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (x_i^{k'} - a_i)^2 < \infty,$$

то при всех $m = 1, 2, \ldots$, пользуясь неравенством Минковского, имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m} (a_i - x_i^{k'} + x_i^{k'})^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\sum_{i=1}^{m} (a_i - x_i^{k'})^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{m} \left(x_i^{k'}\right)^2\right)^{1/2}.$$

Переходя здесь к пределу при $m \to \infty$, выводим

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2\right)^{1/2} \le \left(\sum_{i=1}^{m} (x_i^{k'} - a_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{m} \left(x_i^{k'}\right)^2\right)^{1/2},$$

т.е. $a \in l_2$.

Свойство (2) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $k' > n(\varepsilon)$ выполнено

$$\rho(x^{k'}, a) \le \varepsilon,$$

т.е. $x^{k'} \to a$ в метрике l_2.

Таким образом, мы доказали, что *пространство l_2 полно.* $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Сформулировать и доказать критерий Коши сходимости последовательности точек в метрическом пространстве (X, ρ).

4.2. Принцип вложенных шаров

ТЕОРЕМА 4.2. *Для того, чтобы метрическое пространство (X, ρ) было полным необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что (X, ρ) полно. Рассмотрим произвольную последовательность замкнутых шаров

$$B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_k \supset \ldots$$

с радиусами $r_k \to 0$. Пусть x_k – центр шара B_k. Так как при $m > n$ выполнено $B_n \supset B_m$, то $\rho(x_n, x_m) \le r_n$. Тем самым, последовательность центров $\{x_k\}$ фундаментальна. Однако, (X, ρ) полно и потому найдется точка $a \in X$ такая, что $x_k \to a$.

Точка a обязана принадлежать $\cap_{k=1}^{\infty} B_k$. Действительно, по условию, $B_n \supset B_{n+1} \supset \ldots$ и шар B_n содержит все точки последовательности $\{x_k\}$ за исключением, быть может, точек $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Тем самым, a – предельная точка каждого из шаров B_n. Но все B_n замкнуты, а потому $a \in B_n$ при всех $n = 1, 2, \ldots$. Отсюда, $a \in \cap_{k=1}^{\infty} B_k$ и множество $\cap_{k=1}^{\infty} B_k \ne \emptyset$.

Достаточность. Пусть $\{x_k\}$ – произвольная фундаментальная последовательность в (X, ρ). Требуется доказать, что $\{x_k\}$ сходится к некоторой точке $a \in X$. В силу фундаментальности последовательности, мы можем найти такую точку x_{k_1} этой последовательности, что $\rho(x_k, x_{k_1}) < \frac{1}{2}$ при всех $k \ge k_1$. Будем считать точку x_{k_1} центром замкнутого шара радиуса 1. Обозначим этот шар через B_1. Выберем теперь x_{k_2} из последовательности $\{x_k\}$ так, чтобы при $k_2 > k_1$ выполнялось $\rho(x_k, x_{k_2}) < \frac{1}{2^2}$ при всех $k > k_2$. Примем x_{k_2} за центр замкнутого шара B_2 радиуса $\frac{1}{2}$. Далее, если члены последовательности

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n} \quad (k_1 < k_2 < \ldots < k_n)$$

уже выбраны, то мы выбираем точку $x_{k_{n+1}}$ так, чтобы $k_{n+1} > n_k$ и

$$\rho(x_k, x_{k_{n+1}}) < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{при всех} \quad k > k_{n+1}.$$

Фиксируем замкнутый шар B_{n+1} радиуса $\frac{1}{2^n}$ с центром в точке $x_{k_{n+1}}$. Продолжим этот процесс неограниченно. Так как для любого $y \in B_{n+1}$ выполнено

$$\begin{aligned} \rho(y, x_{k_n}) &\leq \rho(y, x_{k_{n+1}}) + \rho(x_{k_{n+1}}, x_{k_n}) \leq \\ &\leq \tfrac{1}{2^n} + \tfrac{1}{2^n} = \tfrac{1}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

то $B_{k+1} \subset B_k$.

Согласно условию теоремы $\cap_{k=1}^{\infty} B_k \neq \emptyset$. Пусть $a \in \cap_{k=1}^{\infty} B_k$. Ясно, что $a = \lim_{n\to\infty} x_{k_n}$. Но последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна, а потому и вся последовательность $\{x_k\}$ сходится к a. Теорема доказана. $\square$

УПРАЖНЕНИЕ 2. Привести пример, показывающий, что условие стремления радиусов к нулю существенно для справедливости теоремы.

4.3. Свойства полного метрического пространства

ТЕОРЕМА 4.3. *Никакое полное метрическое пространство (X, ρ) не может быть представлено в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $X = \cup_{n=1}^{\infty} M_n$, где каждое из M_n нигде не плотно. Пусть $B_0 \subset X$ – произвольный замкнутый шар радиуса 1. Так как M_1 не плотно в B_0, то существует замкнутый шар B_1 радиуса, не превосходящего $\frac{1}{2}$, такой, что $B_1 \subset B_0$ и $B_1 \cap M_1 = \emptyset$. Так как множество не плотно в B_1, то найдется замкнутый шар $B_2 \subset B_1$, для которого $M_2 \cap B_2 = \emptyset$ и радиус B_2 не превосходит $\frac{1}{3}$. Продолжая процесс неограниченно, получаем последовательность вложенных один в другой замкнутых шаров

$$B_0 \supset B_1 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots,$$

радиусы которых стремятся к нулю и $B_n \cap M_n = \emptyset$. Согласно принципу вложенных шаров и, в силу полноты (X, ρ), пересечение $\cap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$, т.е. найдется точка $x \in \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Но точка x не принадлежит ни одному из M_n $(n = 1, 2, \ldots)$, по построению. Тем самым, $x \notin \cup_{n=1}^{\infty} M_n$ и $X \neq \cup_{n=1}^{\infty} M_n$. Противоречие. □

УПРАЖНЕНИЕ 3. Всякое полное метрическое пространство, не имеюще изолированных точек, несчетно. (Докажите!)

4.4. Пополнение пространства

Опишем стандартную процедуру, превращающую неполное метрическое пространство (X, ρ) в полное посредством добавления к (X, ρ) некоторых элементов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Полное метрическое пространство (X^*, ρ^*) называется пополнением пространства (X, ρ), если
i) (X, ρ) является подпространством пространства (X^*, ρ^*), т.е. $X \subset X^*$ и $\rho(x, y) = \rho^*(x, y)$ при всех $x, y \in X$.
ii) X всюду плотно в X^* т.е. $[X] = X^*$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Два метрических пространства (X', ρ') и (X'', ρ'') называются изометричными, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi : X' \to X''$ такое, что $\varphi(X') = X''$ и

$$\rho(x, y) = \rho(\varphi(x), \varphi(y)) \quad \text{при всех} \quad x, y \in X'.$$

ТЕОРЕМА 4.4. *Если (X^*, ρ^*) и (X^{**}, ρ^{**}) – два различных пополнения метрического пространства (X, ρ), то (X^*, ρ^*) и (X^{**}, ρ^{**}) изометричны между собой.*

Доказательство. Пусть x^* – произвольная точка X^*. По определению пополнения, существует последовательность $\{x_n\}$ точек из X такая, что $x_n \to x^*$. Точки x^{**} принадлежат также X^{**}, поскольку X^{**} есть также пополнение X. Так как X^{**} полно, то последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке $x^{**} \in X^{**}$. Положим

$$\varphi(x^*) = x^{**}.$$

Ясно, что x^{**}, а, следовательно, и отображение φ, определены однозначным образом. Покажем, что φ является изометрическим отображением X^* на X^{**}.

Прежде всего заметим, что для произвольной точки $x \in X$ выполнено $\varphi(x) = x$. Так как всякая точка $x^{**} \in X^{**}$ имет прообраз $x^* \in X^*$, то φ является отображением "на". Проверим изометричность φ.

Пусть

$$x_n \to x^* \quad \text{в} \quad X^* \quad \text{и} \quad x_n \to x^{**} \quad \text{в} \quad X^{**},$$
$$y_n \to x^* \quad \text{в} \quad X^* \quad \text{и} \quad y_n \to y^{**} \quad \text{в} \quad X^{**}.$$

Мы имеем

$$\rho^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho^*(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \\ = \lim_{n\to\infty} \rho^{**}(x_n, y_n) = \rho^{**}(x^{**}, y^{**}).$$

Теорема доказана полностью. □

ТЕОРЕМА 4.5. *Всякое метрическое пространство (X, ρ) имеет пополнение (X^*, ρ^*).*

Доказательство. Опишем сперва конструкцию пространства (X^*, ρ^*). Будем говорить, что две фундаментальные последовательности точек $\{x'_n\}$ и x''_n из X *эквивалентны*, если $\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n, x''_n) = 0$.

Легко видеть, что

i) $\{x'_n\} \sim \{x''_n\}$ (рефлексивность);

ii) если $\{x'_n\} \sim \{x''_n\}$, то $\{x''_n\} \sim \{x'_n\}$ (симметричность);

iii) если $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ и $\{x'_n\} \sim \{x''_n\}$, то $\{x_n\} \sim \{x''_n\}$ (транзитивность).

Таким образом, все фундаментальные последовательности, которые можно составить из точек пространства X, распадаются на *классы эквивалентных между собой* последовательностей.

Определим пространство (X^*, ρ^*) следующим образом. За точки в (X^*, ρ^*) мы примем всевозможные классы эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей, а под расстоянием ρ^* будем понимать следующую величину. Пусть $X^*, y^* \in X^*$. Выберем в каждом из классов эквивалентности x^*, y^* по одному представлению, т.е. по одной фундаментальной последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Положим

$$\rho^*(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n). \tag{3}$$

Докажем корректность определения предела ρ^*. Покажем, что предел (3) не зависит от выбора представителей $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$.

Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ фундаментальны, то на основании аксиомы треугольника для достаточно больших m и n можно записать

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \le |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y_m)| +$$
$$+ |\rho(x_n, y_m) - \rho(x_m, y_m)| \le$$
$$\le \rho(y_n, y_m) + \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{4}$$

Таким образом, последовательность чисел $\rho_n = \rho(x_n, y_n)$ фундаментальна, и предел (3) существует.

Этот предел не зависит от выбора представителей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ в классах эквивалентности x^* и y^*. Действительно, пусть $\{x_n\}, \{x'_n\} \in x^*$ и $\{y_n\}, \{y'_n\} \in y^*$. В точности, как и (4), находим

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \le \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n).$$

Но $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$ и $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$, и потому

$$\rho(x_n, x'_n) \to 0 \quad \text{и} \quad \rho(y_n, y'_n) \to 0.$$

Тем самым,

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n)$$

и предел (3) не зависит от выбора конкретных представителей из классов эквивалентности x^* и y^*.

Покажем, что посредством соотношения действительно вводится метрика ρ^*. Другими словами, нам надо доказать, что (X^*, ρ^*) является метрическим пространством.

Выполнение аксиома тождества: $\rho^*(x^*, y^*) \Leftrightarrow x^* = y^*$ следует из определения эквивалентности.

Выполнение аксиомы симметрии: $\rho^*(x^*, y^*) = \rho^*(y^*, x^*)$ очевидно.

Аксиома треугольника для ρ^* следует из аксиомы треугольника для ρ. Действительно, пусть $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{z_n\} \in z^*$. Тогда

$$\rho(x_n, z_n) \le \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, z_n)$$

и, переходя к пределу при $n \to \infty$, находим

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, z_n) \le \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} \rho(y_n, z_n),$$

т.е.

$$\rho^*(x^*, z^*) \le \rho^*(x^*, y^*) + \rho^*(y^*, z^*).$$

Докажем, что (X^*, ρ^*) является пополнением (X, ρ). Каждой точке $x \in X$ соответствует некоторый класс эквивалентности фундаментальных последовательностей, а именно, совокупность всех последовательностей, сходящихся к точке x. При этом, если $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ и $y = \lim_{n\to\infty} y_n$, то $\rho(x, y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$. Таким образом, поставив каждой точке $x \in X$ в соответствие класс сходящихся к ней фундаментальных последовательностей, мы изометрически отобразим пространство X в пространство X^*. Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что X и его образ в X^* это одно и то же, т.е. X есть подмножество в X^*.

Нам нужно проверить, что X всюду плотно в X^*. Действительно, пусть x^* – произвольная точка в X^*. Зададим $\varepsilon > 0$. Выберем в x^* конкретного представителя, т.е. произвольную фундаментальную последовательность $\{x_n\}$. Пусть $N(\varepsilon)$ такое, что для любых $m, n > N(\varepsilon)$ выполнено $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Тогда имеем

$$\rho(x_n, x^*) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_n, x_m) \le \varepsilon \quad \text{при всех} \quad n > N(\varepsilon),$$

т.е. произвольная ε-окрестность точки $x^* \in X^*$ содержит точку из X. Следовательно, замыкание X в X^* есть все X^*.

Докажем, что X^* – полное пространство. Прежде всего заметим, что, по построению X^*, всякая фундаментальная последовательность

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, \ldots, \tag{5}$$

составленная из точек X сходится в X^* к некоторой точке, а именно, к точке $x^* \in X^*$, определяемой последовательностью (5).

Далее, так как X плотно в X^*, то для любой фундаментальной последовательности $\{x_n^*\}$ точек из X^* можно построить эквивалентную ей последовательность $\{x_n\}$ точек из X. Для этого достаточно в качестве x_n взять любую точку из X, для которой

$$\rho(x_n, x_n^*) \le \frac{1}{n}.$$

Построенная последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и (по только что доказанному) сходится к некоторой точке $x^* \in X^*$. Ясно, что к x^* сходится и последовательность $\{x_n^*\}$. Теорема полностью доказана. □

4.5. Множество R как пополнение множества рациональных чисел

Рассмотрим множество рациональных чисел $\mathbf{Q}$, т.е. множество всевозможных дробей вида $\frac{p}{q}$, где p и q – целые (положительные или отрицательные). Как было отмечено в примере 1 первого пункта данного параграфа, множество Q не полно.

В соответствии с результатами предыдущего раздела, его пополнение $\mathbf{R}$ единственно с точностью до изометрии. Так что любой другой метод пополнения множества $\mathbf{Q}$ (например, посредством иногда используемых *сечений Дедекинда*[14]) приводит к тому же самому результату.

Элементами $\mathbf{R}$ являются классы эквивалентности x^* фундаментальных последовательностей $\{x_n\}$ рациональных чисел $x_n = \frac{p_n}{q_n}$. Чтобы задать x^* достаточно указать хотя бы одну последовательность $\{x_n\}$ из класса эквивалентности. В десятичной системе счисления такие последовательности могут задаваться десятичными дробями вида

$$a_0\,; \quad a_0, a_1\,; \quad a_0, a_1 a_2\,; \quad \ldots \quad a_0, a_1 a_2 \ldots a_n\,; \quad \ldots$$

где a_0 – некоторое целое и a_1, $a_2, \ldots$ суть цифры от 0 до 9.

Например, для хорошо нам известного числа $x^* = \pi$ подобная последовательность может выглядеть следующим образом

$$3; \quad 3,1; \quad 3,14; \quad 3,141; \quad 3,1415; \quad \ldots$$

Арифметические операции над элементами из $\mathbf{R}$ определяются с помощью предельного перехода. К примеру, чтобы сложить x^* и y^* необходимо взять произвольные представители $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$ из классов эквивалентности и определить сумму $x^* + y^*$ как предел сумм рациональных чисел $x_n + y_n$ при $n \to \infty$. Введенные таким образом операции над иррациональными числами удовлетворяют всем нужным аксиомам множества $\mathbf{R}$.

4.6. Принцип "сжатых" отображений

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство и пусть $A : X \to X$ – произвольное отображение X в себя. Отображение A называется *сжатием* (сжатым отображением), если существует постоянная $0 < \alpha < 1$ такая, что

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\, \rho(x, y) \quad \text{для любых} \quad x, y \in X.$$

Ясно, что всякое сжатие непрерывно (и даже равномерно непрерывно).

Точка $x_0 \in X$ называется *неподвижной точкой* отображения A, если $Ax_0 = x_0$.

[14]Дедекинд Рихард Юлиус Вильгельм (6.10.1831 - 12.2.1916). Род. в Браушвейге (Германия). Член Берлинской, Парижской и Римской академий наук. Имеет значительные результаты в теории алгебраических чисел, алгебре.

ТЕОРЕМА 4.6. *Всякое сжатое отображение, заданное в полном метрическом пространстве, имеет одну и только одну неподвижную точку.*

Доказательство. Зададим произвольно $x_0 \in X$. Далее полагаем

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = Ax_1, \quad \ldots, \quad x_n = Ax_{n-1}, \quad \ldots,$$

т.е.

$$x_1 = Ax_0, \quad x_2 = A^2x_0, \quad \ldots \quad x_n = A^nx_0, \quad \ldots$$

Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Действительно, при любых $m \geq n$ имеем

$$\begin{gathered}\rho(x_n, x_m) = \rho(A^nx_0, A^mx_0) = \rho(A(A^{n-1}x_0), A(A^{m-1}x_0)) \leq \\ \leq \alpha\rho(A^{n-1}x_0, A^{m-1}x_0) \leq \alpha^2\rho(A^{n-2}x_0, A^{m-2}x_0) \leq \\ \leq \ldots \leq \alpha^n\rho(x_0, A^{m-n}x_0) = \alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}).\end{gathered} \tag{6}$$

Далее, в силу неравенства треугольника, выполнено

$$\begin{aligned}\rho(x_0, x_{m-n}) &\leq \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_{m-n}) \leq \ldots \leq \\ &\leq \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \ldots + \rho(x_{m-n-1}, x_{m-n}).\end{aligned}$$

Поэтому, используя, что $\alpha < 1$,

$$\begin{gathered}\rho(x_0, x_{m-n}) \leq \rho(x_0, x_1) + \alpha\rho(x_0, x_1) + \alpha^2\rho(x_0, x_1) + \ldots + \\ + \alpha^{m-n-1}\rho(x_0, x_1) = \rho(x_0, x_1)\left(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-n-1}\right) \leq \\ \leq \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\alpha}.\end{gathered}$$

Тем самым, на основании (6) получаем

$$\rho(x_n, x_m) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_0, x_1). \tag{7}$$

Поскольку $\alpha < 1$, то при достаточно больших n величина в правой части (7) сколь угодно мала. Тем самым, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна.

Пространство (X, ρ) полно и, следовательно, существует $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. В силу непрерывности отображения A, можно заключить теперь, что

$$\begin{aligned}Ax &= A\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x,\end{aligned}$$

т.е. $Ax = x$ и существует неподвижная точка отображения A.

Докажем, что неподвижная точка единственна. Предположим противное. Пусть $x \neq y$ – неподвижные точки A. Тогда

$$Ax = x \quad \text{и} \quad Ay = y.$$

Мы имеем

$$\rho(x, y) = \rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y)$$

и $1 \leq \alpha$, что невозможно. Теорема доказана. $\square$

Глава 23

Добавление 2. Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского

Далее нам потребуются следующие важные неравенства Юнга, Гельдера и Минковского.

Отметим, что при $x > 0$ справедливы неравенства

$$
\begin{aligned}
&x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1 \le 0, \qquad 0 < \alpha < 1, \\
&x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1 \ge 0, \qquad 1 < \alpha < \infty.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Действительно, дифференцируя $f(x) = x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1$, получим $f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$ и $f'(x) = 0$ при $x = 1$.

При переходе через точку $x = 1$ производная переходит от положительных к отрицательным значениям при $0 < \alpha < 1$ и от отрицательных к положительным значениям, если $\alpha < 0$ или $\alpha > 1$. В первом случае имеем строгий максимум, во втором строгий минимум, и так как $f(1) = 0$, получаем нужное.

ТЕОРЕМА 0.7 (неравенство Юнга[1]). *Если a, $b > 0$, а числа p, $q \neq 1$, p, $q \neq 0$, и связаны соотношением $1/p + 1/q = 1$, то*

$$
a^{\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{q}} \le \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b \quad \text{при} \quad 1 < p < \infty, \tag{2}
$$

и

$$
a^{\frac{1}{p}}\, b^{\frac{1}{q}} \ge \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b \quad \text{при} \quad 0 < p < 1. \tag{3}
$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$.

[1] Юнг Иоахим (22.10.1587 - 23.9.1657). Род. в Любеке (Германия). Был профессором математики в Ростоке и Гамбурге.

Для *доказательства* достаточно положить в (1) $x = \frac{a}{b}$ и $\alpha = \frac{1}{p}$, и заметить, что $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$.

ТЕОРЕМА 0.8 (неравенство Гёльдера). *Пусть* $x_i,\, y_i \geq 0 \quad (i = 1, ..., n)$ *и* $1/p + 1/q = 1$. *Тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4}$$

при $1 < p < \infty$, *и*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{5}$$

при $0 < p < 1$. *Знак равенства возможен только в случае пропорциональности векторов*

$$(x_1^p, ..., x_n^p)\,, \quad (y_1^q, ..., y_n^q)\,.$$

Доказательство. Проверим (4). Пусть

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i^p > 0, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} y_i^q > 0.$$

Полагая в (2)

$$a = \frac{x_i^p}{X}, \quad b = \frac{y_i^q}{Y},$$

получаем

$$\frac{x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p}\frac{x_i^p}{X} + \frac{1}{q}\frac{y_i^q}{Y}.$$

Суммируя по i, приходим к соотношению

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{X^{\frac{1}{p}} Y^{\frac{1}{q}}} \leq 1,$$

что эквивалентно (4).

Аналогично, из (3) выводим (5).

Поскольку знак равенства в (2) и (3) возможен лишь при $a = b$, мы заключаем, что в (4) и (5) он возможен лишь при условии

$$x_i^p = \lambda y_i^q \quad \text{или} \quad y_i^q = \lambda x_i^p.$$

$\square$

ТЕОРЕМА 0.9 (неравенство Минковского). *Пусть* $x_i,\ y_i \geq 0,\ \ (i = 1, .., n)$. *Тогда*

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textit{при} \quad 1 < p < \infty,$$

и

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \textit{при} \quad 0 < p < 1.$$

Доказательство. Мы имеем

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1}.$$

Применим неравенства Гельдера к каждому из слагаемых правой части. Тогда правая часть не превосходит (не менее) величины

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

где

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}.$$

После деления полученных неравенств на

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

получаем требуемое. $\square$

Глава 24

Добавление 3. Еще раз о рядах

Рекомендуемая литература:
1) Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, Изд. 7-е, стереотипное. — М.: Наука, Т. 1-3, 1969.
2) Д.Е. Меньшов, Избранные труды. Математика. Под ред. П.Л. Ульянова, М.: изд-во "Факториал", 1997.
3) Г.Г. Харди, В.В. Рогозинский, Ряды Фурье, Пер. с англ. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: КомКнига, 2006.
4) Г.Г. Харди, Расходящиеся ряды, Пер. с англ. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: КомКнига, 2006.

§1. Расходящиеся ряды

УПРАЖНЕНИЕ 1. Доказать следующее утверждение (теорема Штольца[1]). Предположим, что заданы две последовательности: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, причем последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, начиная с некоторого номера, возрастает, т.е. $y_{n+1} > y_n$, и имеет своим пределом $+\infty$. Тогда если существует предел правой части равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

(конечный либо бесконечный), то существует и предел левой части.

Мы применим теорему Штольца для доказательства теоремы Коши.

[1]Штольц Отто (3.5.1842 – 25.10.1905). Род. в Инсбруке (Австрия). Основные работы посвящены математическому анализу.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет предел (конечный либо бесконечный), то тот же предел имеет и последовательность*

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Доказательство. Полагая в теореме Штольца

$$x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad y_n = n,$$

имеем

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}.$$

□

Опишем метод обобщенного суммирования рядов, идея которого принадлежит Фробениусу[2] и была развита в дальнейшем Чезаро[3]. *По частичным суммам* A_n *данного числового ряда* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *находится последовательность* $\{\alpha_n\}$ *их средних арифметических*:

$$\alpha_0 = A_0, \quad \alpha_1 = \frac{A_0 + A_1}{2}, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_n}{n+1}, \ldots$$

если последовательность α_n *имеет предел* A *при* $n \to \infty$*, то этот предел называется обобщенной (в смысле Чезаро) суммой данного ряда.*

Замечание. Из теоремы Коши вытекает, что если ряд сходится в обычном смысле и имеет своей суммой A, то он имеет сумму A и в смысле Чезаро.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + .$$

Здесь имеем

$$A_0 = 1, \; A_1 = 0, \; A_2 = 1, \; A_3 = 0, \; \ldots A_{2k-1} = 0, \; A_{2k} = 1, \; \ldots$$

и, далее,

$$\alpha_{2k-1} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_{2k} = \frac{k+1}{2k+1}.$$

[2]Фробениус Фердинанд Георг (26.10.1849 – 3.8.1917). Род. в Берлине (Германия). Работал в Берлине и Цюрихе. Его основные научные исследования относятся к алгебре, теории алгебраических чисел, теории матриц. Ему принадлежит строгое изложение метода суммирования средними арифметическими.

[3]Чезаро Эрнесто (12.3.1859 – 12.9.1906). Род. в Неаполе (Италия). Работал над теорией расходящихся рядов. Значительный вклад внес в создание натуральной геометрии.

Таким образом, обобщенной суммой данного ряда является величина

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}.$$

□

Следующий результат нами использовался в теории рядов Фурье.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi). \tag{1}$$

Для частичных сумм этого ряда при $\theta \neq 0$ имеем

$$A_n = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}. \tag{2}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\theta = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\{\sin\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta\} = \\
&= \left| \begin{array}{l} \sin\alpha - \sin\beta = \\ 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\{\sin\frac{\theta}{2} + \sum_{k=1}^{n}[\sin(k+\frac{1}{2})\theta - \sin(k-\frac{1}{2})\theta]\} = \\
&= \frac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\sin(n+\frac{1}{2})\theta.
\end{aligned}$$

Пользуясь (2), находим

$$
\begin{aligned}
(n+1)\alpha_n &= \frac{1}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin(k+\frac{1}{2})\theta = \\
&= \frac{1}{4\sin^2\dfrac{\theta}{2}}\sum_{k=0}^{n}[\cos k\theta-\cos(k+1)\theta] = \\
&= \frac{1-\cos(n+1)\theta}{4\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\right)^2
\end{aligned}
$$

и, окончательно,

$$\alpha_n = \frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin(n+1)\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2.$$

Таким образом, при $\theta\neq 0$ выполнено $\alpha_n\to 0$. Обобщенная сумма ряда (1) (в смысле Чезаро) равна 0. □

Метод суммирования расходящихся рядов с помощью средних арифметических не является единственно возможным. Таких методов достаточно много и целесообразность выбора метода зависит от задачи. Мы касаемся здесь только линейных методов. Ниже мы следуем статье Д.Е. Меньшова[4] "Суммирование рядов по ортогональным функциям линейными методами", Изв. АН СССР, сер. матем., 1937, с. 203-227.

Возьмем какой-нибудь бесконечный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{3}$$

и бесконечную матрицу

$$
\begin{array}{cccccc}
a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \ldots, & a_{1k} & \ldots \\
a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & \ldots, & a_{2k} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{i1}, & a_{i2}, & a_{i3}, & \ldots, & a_{ik} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array} \tag{4}
$$

[4]Меньшов Дмитрий Евгеньевич (18.4.1892 – 25.11.1988). Род. в Москве. Получил фундаментальные результаты по проблемам единственности представления функциий тригонометрическими рядами, теории сходимости и суммируемости ортогональных рядов. Ему также принадлежат исследования по теории конформных отображений.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, s_k, \tag{5}$$

где

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} u_n.$$

Говорят, что ряд (3) *суммируется линейным методом*, соответствующим матрице (4), если ряд (5) сходится для всех достаточно больших значений i и имеет сумму, которая стремится к определенному конечному пределу при $i \to \infty$. Этот предел называется обобщенной суммой ряда (3).

Линейный метод суммирования называется *регулярным*, если элементы матрицы (4) удовлетворяют условиям:

i) Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ сходится абсолютно для всех значений i, причем

$$\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1.$$

ii) Для всех значений i выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < M,$$

где M не зависит от i.

ТЕОРЕМА 1.2. *Для того чтобы всякий сходящийся ряд суммировался данным линейным методом и имел обобщенную сумму, равную обычной сумме, необходимо и достаточно, чтобы рассматриваемый линейный метод был регулярным.*

Доказательство см. Toeplitz "Über lineare Mittelbildingen", Prace mat. fiz., v. 22, 1911, 113-119 или найдите в современной математической литературе.

§2. Обвертывающие ряды

В данном параграфе будут обсуждены некоторые аспекты использования расходящихся рядов в приближенных вычислениях. В начале рассмотрим несложные примеры.

ПРИМЕР 1. Хорошо известно (см. параграф "Разложение в ряд Маклорена функции $\mathbf{y} = \ln(\mathbf{1} + \mathbf{x})$"), что для всех $x \in (-1, 1]$ выполнено

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}. \tag{1}$$

Вне указанного полуинтервала (например при $x > 1$) ряд стоящий в правой части равенства (1) будет расходящимся.

С другой стороны, и для значений $x > 1$ по формуле Тейлора справедливо соотношение

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + r_n(x),$$

где "остаточный член" можно взять, например, в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{1}{(1+\theta_1 x)^{n+1}}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \theta(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Здесь $0 < \theta, \theta_1 < 1$.

Заметим, что по абсолютной величине "остаточный член" меньше первого отбрасываемого члена ряда и имеет одинаковый с ним знак. Таким образом, если при $x > 1$ заменить значение $\ln(1+x)$ отрезком расходящегося ряда (1), то у нас имеется достаточно удобная оценка погрешности. Конечно, при любом фиксированном $x > 1$ остаточный член растет до бесконечности при $n \to \infty$. Однако, если x – фиксировано, но достаточно близко к 1, члены ряда (1) даже при $x > 1$ будут сначала убывать по абсолютной величине. Действительно, учитывая

$$\frac{x^{n+1}n}{(n+1)x^n} = \frac{n}{n+1}x < 1,$$

получаем, что при $n < \frac{1}{x-1}$ члены ряда (1) – убывают, и лишь затем начнут возрастать. Таким образом, для получения наилучшего приближения числа $\ln(1+x)$ выгоднее всего оборвать ряд на члене с номером $n = [\frac{1}{x-1}]$. $\square$

Далее перейдем к общим формулировкам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть дан числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots. \tag{2}$$

Если его частичные суммы поочередно то больше, то меньше некоторого числа A, т.е. последовательность

$$r_n = A - \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{3}$$

является знакопеременной, то говорят, что ряд (2) обвертывает число A.

Из формулы (3) сразу следует, что

$$r_{n+1} = r_n - a_{n+1}.$$

Из данного равенства сразу следует, что предыдущее определение эквивалентно следующему.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Ряд (2) называется обвертывающим число A, если он является знакопеременным и, кроме того, все r_n из (3) меньше a_{n+1} по абсолютной величине и имеют одинаковый с ним знак.

ПРИМЕР 2. Ряд (1) является обвертывающим для $\ln(1+x)$ при любом $x > 0$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае расходимости ряда (2) он может одновременно обвертывать бесконечное множество чисел A. Например ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ с частичными суммами $1, 0, 1, 0, \ldots$ обвертывает каждое из чисел интервала $(0, 1)$.

§3. Разложение по собственным функциям

Обозначим через $L^2\langle a, b\rangle$ множество всех измеримых функций $f : \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}$, для которых

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx < \infty.$$

Вплоть до детального знакомства с основами теории интеграла Лебега, читатель может считать, что функции f кусочно-непрерывны.

Зафиксируем произвольно функцию $q(x) \in C[0, \pi]$ и рассмотрим уравнение

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda\, y, \quad (\lambda \equiv \text{const}). \tag{1}$$

Зафиксируем α, $\beta \in [0, \pi]$. Будем искать решения $y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям

$$y(0)\, \cos\alpha + y'(0)\, \sin\alpha = 0, \quad y(\pi)\, \cos\beta + y'(\pi)\, \sin\beta = 0. \tag{2}$$

При $q(x) \equiv 1$ — решения *задачи Штурма–Лиувилля* (1) – (2) суть тригонометрические функции.

Величины λ, при которых задача Штурма–Лиувилля имеет решение, называются *собственными значениями*, а соответствующие им функции — *собственными функциями*.

ТЕОРЕМА 3.1. *Имеют место следующие высказывания:*

i) Существует последовательность (однократных) собственных чисел

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty\,;$$

ii) последовательность соответствующих собственных функций $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *образует ортонормированные базис в пространстве* $L^2[0,\pi]$*;*

iii) всякая функция из $C[0,\pi]$*, удовлетворяющая (2) и такая, что отрезок* $[0,\pi]$ *можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых ее сужение принадлежит классу* C^2*, раскладывается в абсолютно и равномерно сходящийся в ряд Фурье по системе* $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказательство см., например, Ж. Дьедонне, Основы современного анализа, М.: Мир, 1964, гл. II.

Задачи на собственные значения служат источником построения обширной серии специальных функций. Так, бесселевы функции $J_n(\sqrt{\lambda}\,x)$ могут быть интерпретированы как собственные функции дифференциального уравнения Бесселя

$$(xy')' - \frac{n^2}{x}\,y + \lambda\,x\,y = 0,$$

функции Лежандра $P_n(x)$ — как собственные функции уравнения

$$[(1-x^2)y']' + \lambda\,y = 0,$$

полиномы Чебышева $T_n(x)$ — как решения штурм – лиувиллевской задачи для уравнения

$$(\sqrt{1-x^2}\,y')' + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}\,y} = 0,$$

полиномы Эрмита $H_n(x)$ — как решения соответствующей задачи для уравнения

$$\left(e^{-x^2}y'\right)' + \lambda\,e^{-x^2}\,y = 0$$

и др.

Сказанное выше, а также описание алгоритма нахождения собственных значений в задаче Штурма–Лиувилля можно найти, например, в главах V и VI широко известной монографии Р. Куранта и Д. Гильберта "Методы математической физики", т. I, Госуд. Техн. Теорет. изд-во, Москва–Ленинград, 1933.

§4. Всплески (вэйвлеты)

Функция $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ называется *всплеском* или *вэйвлетом*, если система функций

$$\psi_{k,m}(x) = 2^{k/2}\psi(2^k x - m), \quad k, m \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbf{R})$, т.е.

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \cdot \delta_{k,m}, \tag{2}$$

и любая $f \in L^2(\mathbf{R})$ может быть представлена как

$$f(x) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}\, \psi_{j,k}(x), \tag{3}$$

где ряд (3) сходится в среднем на $\mathbf{R}$, а именно

$$\lim_{M_1,N_1,M_2,N_2 \to \infty} \left\| f - \sum_{j=-M_2}^{N_2} \sum_{k=-M_1}^{N_1} c_{j,k}\, \psi_{j,k} \right\|_2 = 0.$$

Здесь обозначено

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}.$$

Такого вида системы, порождаемые одной – единственной функцией, особо эффективны для применений.

Простейший пример всплеска доставляет функция

$$\chi_H(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, 1/2), \\ -1, & \text{при } x \in [1/2, 1), \\ 0, & \text{при } x \in \mathbf{R} \setminus [0, 1), \end{cases} \tag{4}$$

порождающая систему

$$\{\chi_{k,m}\}, \quad \chi_{k,m} = 2^{k/2}\chi\left(2^k - m\right), \quad k, m \in \mathbf{Z}.$$

Покажем, что данная система является базисом Хаара. Ясно, что

$$\|\chi_{k,m}\|_2 = \|\chi\|_2 = 1, \quad \text{при любых} \;\; k, m \in \mathbf{Z},$$

и система нормирована нужным образом.

Нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 4.1. *Если функция K абсолютно интегрируема на $\mathbf{R}$ и*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t)\, dt = 1,$$

то для произвольной ограниченной и равномерно непрерывной на $\mathbf{R}$ функции f осредненные функции

$$f_h(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x + ht) \cdot K(t)\, dt$$

равномерно на $\mathbf{R}$ стремятся к f при $h \to 0$.

Для **доказательства** достаточно заметить, что согласно признаку Вейерштрасса о мажорантной сходимости интеграл f_h сходится равномерно по параметру h и потому возможен предельный переход под знаком интеграла.

Точнее,

$$|f(x) - f_h(x)| \; = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x) - f(x + ht))\, K(t)\, dt \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(f, |ht|)\, |K(t)|\, dt,$$

где

$$\omega(f, \delta) = \sup\{|f(x + u) - f(x)|,\; x \in \mathbf{R},\; 0 < u \leq \delta\}$$

— модуль непрерывности функции f.

Поскольку

$$\omega(f, \delta) \leq 2\, \sup |f(x)|,$$

то правомочен предельный переход под знаком интеграла при $h \to 0$. Однако, в силу равномерной непрерывности f, имеем

$$\omega(f, +0) = 0.$$

Нужное свойство следует теперь с очевидностью. □

Проверим ее ортонормированность. Действительно, при одном k и разных m (функции из одной "пачки"!) носители $\chi_{k,m}$, т.е. полуинтервалы

$$\left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right),$$

на которых функции не обращаются в нуль, не пересекаются.

Если же при $k_1 < k_2$ их носители пересекаются, то на общей нетривиальной части функция χ_{k_1,m_1} постоянна и

$$\int_{\mathbf{R}} \chi_{k_2,m_2}\, dx = 0.$$

Сказанное означает, что функции $\chi_{k,m}$ ортогональны.

Нам осталось проверить, что данная система замкнута в $L^2(\mathbf{R})$. Зафиксируем произвольно $f \in L^2(\mathbf{R})$ и $\varepsilon > 0$. При достаточно больших N имеем

$$\|f - f \cdot \chi_{[-N,N]}\|_2 < \varepsilon.$$

Согласно приведенной выше леммы финитная функция $f \cdot \chi_{[-N,N]}$ может быть приближена в L^2 посредством непрерывной финитной функции с той же пограшностью, а непрерывная на отрезке — ступенчатой с интервалами постоянства

$$\left(\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right)$$

при достаточно большом n.

Однако в замыкании линейной оболочки ступенчатых функций вместе с $f(x)$ лежит и функция $f(2^k x + m)$. Тем самым, достаточно усмотреть, что в этом замыкании лежит при $k = 0$ характеристическая функция $\chi_{(0,1)}$. Сказанное непосредственно видно из соотношения

$$\left\|\chi_{(0,1)} - \sum_{k=-m}^{-1} 2^{k/2}\chi_{k,0}\right\| = 2^{-m}.$$

Замкнутость системы $\{\chi_{k,m}\}$ доказана.

Теория всплесков относится в настоящее время к числу наиболее интенсивно развивающихся разделов Анализа, что связано с наличием значительного числа ее приложений. Для дальнейшего знакомства с теорией см.:

1) Б.С. Кашин, А.А. Саакян, Ортогональные ряды, М.: АФЦ, 1999.

2) Л.В. Новиков, Основы вейвлет–анализа сигналов, Учебное пособие, СПб.: Изд-во ООО "МОДУС+", 1999.
3) А.П. Петухов, Введение в теорию базисов всплесков, СПб.: СПбГТУ, 1999.
4) К. Чуи, Введение в вэйвлеты, М.: Мир, 2001.

Глава 25

Добавление 4. Обработка результатов эксперимента

Ниже мы приводим некоторые сведения, полезные при обработке результатов эксперимента. Прежде всего это касается вопросов продолжения функций с дискретного множества в непрерывную область и вопросов аппроксимации таких функций. Подобные задачи возникают при построении математических моделей тех либо иных процессов, их привязке и зачастую выводят за пределы собственно Анализа, затрагивая отдельные пограничные проблемы Статистики. Тем не менее, мы сочли целесообразным включить эти задачи в учебник по математическому анализу, руководствуясь соображениями крайней необходимости знакомить студентов с ними как можно раньше.
Дополнительная литература:

1) Н.И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М.: Наука, 1965.
2) Дж.-О. Ким, Ч.У. Мьюллер, У.Р. Клекка, М.С. Олдендерфер, Р.К. Блэшфилд, Факторный, дискриминантный и кластерный анализ, Под ред. И.С. Енюкова, М.: Финансы и статистика, 1989.
4) Н.П. Корнейчук, Сплайны в теории приближений, М.: Наука, 1984.
5) С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин, Сплайны в вычислительной математике, М.: Наука, 1976.

§1. Сплайны

1.1. Понятие сплайна

В последнее время одним из наиболее популярных аппаратов приближения являются сплайны. Сплайном называют такую функцию, график которой состоит из отрезков поли-

номиальных кривых; эти отрезки состыкованы так, что производные полученной функции (иногда до порядка на единицу меньше степени используемых полиномов) непрерывны на всем рассматриваемом промежутке (точное определение см. ниже). Популярность сплайнов связана, в частности, с активным применением их при построении математических моделей тех или иных процессов. Например, сплайны используют в геологии для аппроксимации поверхностей месторождений, в гидрологии и метеорологии — для черчения карт на компьютере, для расчета балок, лежащих на различных основаниях, в инженерной геометрии, теории приближений, вычислительной математике и т.д. В первую очередь это связано с преимуществами, которыми обладает аппарат сплайн-приближений по сравнению с другими аппроксимациями. К числу основных преимуществ принято относить следующие:
1. устойчивость сплайнов относительно локальных возмущений;
2. хорошая сходимость сплайн-интерполяции;
3. экстремальные свойства сплайнов (они являются решениями задач минимизации функционалов);
4. достаточно простая реализация сплайн-функций на компьютере.

Очевидно, что задача интерполяции в общем случае является неопределенной. Если о заданной функции, кроме ее значений в узлах интерполирования $x_0, x_1, \dots, x_n$, ничего не известно, то в других точках рассматриваемого отрезка эта функция может принимать любые значения. Поэтому во многих задачах, в случае отсутствия дополнительной информации об интерполируемых функциях, применяют линейную интерполяцию. Смысл ее состоит в том, что значения заданной функции $f(x)$, заключенные между двумя соседними узлами интерполирования, приближают линейной функцией $\varphi(x)$, принимающей значения $f(x)$ в этих узлах.

Заметим, что производные такого линейного сплайна не определены во всех узлах интерполяции. В ряде задач это является существенным недостатком. Для достижения более высокой точности применяют сплайны более высоких порядков. Далее дадим определение полиномиального сплайна. Для простоты, большая часть изложения будет посвящена одномерным сплайнам.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка
$\overline{\Delta} : a = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \cdots < \overline{x}_l = b.$
Обозначим P_m – пространство полиномов степени не выше m,
$C^m[a, b]$ – пространство функций, определенных на $[a, b]$, и имеющих непрерывную производную порядка m.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функция $s_m(x)$ называется полино-

миальным сплайном степени m дефекта $k \quad (1 \leq k \leq m)$ с узлами $\overline{\Delta}$ если:
1. $s_m(x) \in P_m$, для всех $x \in [\overline{x}_i, \overline{x}_{i+1}], i = 0, \ldots, l-1$.
2. $s_m(x) \in C^{m-k}[a, b]$.

Пусть теперь кроме сетки $\overline{\Delta}$ задана сетка $\Delta: \; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ и некоторые вещественные числа $y_i, \quad i = 0, \ldots, n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Сплайн $s_m(x)$ называется интерполирующим функцию $f(x)$ на сетке Δ, если:
1. $s_m(x) \in P_m$, для всех $x \in [\overline{x}_i, \overline{x}_{i+1}], i = 0, \ldots, l-1$.
2. $s_m(x) \in C^{m-k}[a, b]$.
3. $s_m(x_i) = y_i = f(x_i), i = 0, \ldots, n$.

Узлы сетки $\overline{\Delta}$ называют узлами сплайна, а узлы сетки Δ – узлами интерполяции.

ЗАМЕЧАНИЕ. Производная от $s_m(x)$ порядка $(m - k + 1)$ может быть разрывной на $[a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сплайны нулевой степени (или нулевого порядка) являются кусочно-постоянными на $[a, b]$ функциями. Сплайны первой степени являются кусочно-линейными на $[a, b]$ функциями.

1.2. Интерполяционные эрмитовы сплайны

В данном пункте рассматривается случай, когда узлы интерполяции совпадают с узлами сплайна.

Несложно доказать существование и единственность алгебраического многочлена $p(x)$ нечетной степени $2r - 1$, удовлетворяющего условиям

$$p^{(j)}(a) = y_{a,j}, \quad p^{(j)}(b) = y_{b,j}, \quad j = 0, \ldots, r-1,$$

где $y_{a,j}$ и $y_{b,j}$ – произвольные наперед заданные числа. Это, так называемый, многочлен Эрмита[1]. Тогда, если заданы числа $y_{i,j}, i = 0, \ldots, n, \quad j = 0, \cdots, r-1$, то на каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ можно независимо построить многочлен $p_i(x)$ степени $2r - 1$ такой, что

$$p_i^{(j)}(x_i) = y_{i,j}, \quad p_i^{(j)}(x_{i+1}) = y_{i+1,j}, \quad j = 0, \ldots, r-1.$$

[1]Шарль Эрмит (24.12.1822 – 14.01.1901) – французский математик, член Парижской АН (с 1856 г.)Основные работы посвящены теории эллиптических функций и ее приложениям, математическому анализу, алгебре и теории чисел.

На самом деле несложно выписать и явный вид данного многочлена. Полагая

$$s(x) = p_i(x), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

получим сплайн $s_{2r-1}(x)$, для которого $s_{2r-1}^{(j)}(x_i) = y_{i,j}$.

Такие сплайны называют *эрмитовыми.* Так как на каждом из промежутков многочлены, составляющие сплайн, определяются независимо друг от друга, то такие сплайны называют еще *локальными.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Существуют эрмитовы сплайны четных степеней $2r$, который определяются похожим образом, с помощью введения дополнительных узлов. В каждом из основных узлов x_i они имеют дефект r, а в каждом дополнительном – дефект равен единице. Однако, в данном параграфе, мы не будем более подробно останавливаться на построении таких сплайнов.

Построим на отрезке $[0, 1]$ интерполяционный многочлен степени $2r - 1$, удовлетворяющий условиям

$$H(0) = y_{0,0},\ H'(0) = y_{0,1}, \ldots, H^{(r-1)}(0) = y_{0,r-1},$$

$$H(1) = y_{1,0},\ H'(1) = y_{1,1}, \ldots, H^{(r-1)}(1) = y_{1,r-1}.$$

Представим его в виде суммы фундаментальных многочленов, т.е. многочленов у которых только одна производная в соответствующей точке равна 1, а остальные равны нулю:

$$H(t) = \sum_{j=0}^{r-1} [y_{0,j}\varphi_{0,j}(t) + y_{1,j}\varphi_{1,j}(t)].$$

Здесь фундаментальные многочлены $\varphi_{0,j}(t)$ и $\varphi_{1,j}(t)$ удовлетворяют условиям

$$\varphi_{0,j}(0) = \varphi'_{0,j}(0) = \varphi_{0,j}^{(j-1)}(0) = \varphi_{0,j}^{(j+1)}(0) = \varphi_{0,j}^{(r-1)}(0) = 0,$$

$$\varphi_{0,j}^{(j)}(0) = 1, \quad \varphi_{0,j}^{(k)}(1) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, r-1,$$

$$\varphi_{1,j}(1) = \varphi'_{1,j}(1) = \varphi_{1,j}^{(j-1)}(1) = \varphi_{1,j}^{(j+1)}(1) = \varphi_{1,j}^{(r-1)}(1) = 0,$$

$$\varphi_{1,j}^{(j)}(1) = 1, \quad \varphi_{1,j}^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, r-1.$$

Очевидно, что в точке $t = 1$ многочлен $\varphi_{0,j}(t)$ имеет нуль кратности r, а в точке $t = 0$ нуль кратности j. Таким образом данный многочлен можно представить в виде

$$\varphi_{0,j}(t) = (t-1)^r t^j (a_0 + a_1 t + \cdots + a_{r-j-1} t^{r-j-1}).$$

Используя оставшиеся условия для подбора коэффициентов a_i, получим требуемое. Проиллюстрируем это, построив многочлен Эрмита третьей степени $\varphi_{0,0}(t)$. Очевидно

$$\varphi_{0,0}(0) = 1, \quad \varphi_{0,0}(1) = \varphi'_{0,0}(0) = \varphi'_{0,0}(1) = 0.$$

Учитывая вышесказанное,

$$\varphi_{0,0}(t) = (t-1)^2(at+b).$$

Подставляя условия

$$\varphi_{0,0}(0) = 1, \quad \varphi'_{0,0}(1) = 0,$$

получаем $b = 1$, $a = 2$. Таким образом

$$\varphi_{0,0}(t) = (t-1)^2(2t+1).$$

Аналогично можно построить и остальные фундаментальные многочлены

$$\varphi_{0,1}(t) = (t-1)^2 t,$$
$$\varphi_{1,0}(t) = t^2(3-2t),$$
$$\varphi_{1,1}(t) = (t-1)t^2.$$

Для построения многочлена Эрмита на $[x_i, x_{i+1}]$ следует сделать замену

$$t = \frac{x-x_i}{h_i}, \quad h_i = x_{i+1} - x_i,$$

и воспользоваться построенными фундаментальными многочленами. Таким образом, на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ кубический многочлен Эрмита, принимающий значения

$$H_3(x_i) = f_i,\ H_3(x_{i+1}) = f_{i+1},\ H'_3(x_i) = f'_i,\ H'_3(x_{i+1}) = f'_{i+1}$$

можно записать в виде

$$P(x) = f_i(t-1)^2(2t+1) + f_{i+1}t^2(3-2t) + h_i f'_i(t-1)^2 t + h_i f'_{i+1}(t-1)t^2.$$

Аналогично, построив соответствующие фундаментальные многочлены, можно получить формулы для вычисления интерполяционных эрмитовых многочленов более высоких степеней.

1.3. Кубические интерполяционные сплайны

Как уже отмечалось выше, популярность в использовании сплайнов вызвана, в том числе, достаточно простой их реализацией на компьютере. Проиллюстрируем это построением кубических интерполяционных сплайнов.

Пусть задана сетка Δ и действительные числа y_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Интерполяционный кубический сплайн $s(x)$ называется периодическим, если

$$s^{(j)}(a+0) = s^{(j)}(b-0),\ j = 0, 1, 2.$$

Для простоты изложения, в данном параграфе будем рассматривать лишь равномерные сетки, т.е. сетки у которых $x_{i+1} - x_i = h = const$. Обозначим $s''(x_i) = m_i$. Тогда, в силу линейности $s''(x)$, на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ имеем

$$s''(x) = s''(x_i) + \frac{s''(x_{i+1}) - s''(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i),$$

или

$$s''(x) = m_i + \frac{\Delta m_i}{h}(x - x_i). \tag{1}$$

Здесь $\Delta m_i = m_{i+1} - m_i$. Дважды интегрируя равенство (1) в пределах от x_i до x, получаем

$$s(x) = y_i + s'(x_i)(x - x_i) + \frac{m_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{\Delta m_i}{6h}(x - x_i)^3. \tag{2}$$

Полагая в (2) $x = x_{i+1}$, находим

$$\Delta y_i = s'(x_i)h + \frac{m_i}{2}h^2 + \frac{\Delta m_i}{6h}h^3,$$

откуда

$$s(x) = y_i + \left[\frac{\Delta y_i}{h} - \frac{h}{6}(2m_i + m_{i+1})\right](x - x_i) +$$

$$+ \frac{m_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{\Delta m_i}{6h}(x - x_i)^3,$$

и

$$s'(x) = \frac{\Delta y_i}{h} - \frac{h}{6}(2m_i + m_{i+1}) + m_i(x - x_i) + \frac{\Delta m_i}{2h}(x - x_i)^2.$$

Аналогично, на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$

$$s'(x) = \frac{\Delta y_{i-1}}{h} - \frac{h}{6}(2m_{i-1} + m_i) + m_{i-1}(x - x_{i-1}) + \frac{\Delta m_{i-1}}{2h}(x - x_{i-1})^2.$$

Учитывая, что $s'(x_i + 0) = s'(x_i - 0)$, получаем

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = 12\frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{2} =$$

$$= 12f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}), \tag{3}$$

где $f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ – так называемая вторая разделенная разность функции $f(x)$.

Таким образом, мы получили систему $n-1$ линейных уравнений (3) относительно $n+1$ неизвестных $m_0, m_1, \ldots, m_n$. Учитывая условия периодичности, т.е. $m_0 = m_n$, $m_1 = m_{n+1}$, получаем следующую систему уравнений

$$m_n + 4m_1 + m_2 = 12f(x_0, x_1, x_2),$$

$$m_1 + 4m_2 + m_3 = 12f(x_1, x_2, x_3),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$m_{n-2} + 4m_{n-1} + m_n = 12f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n),$$

$$m_{n-1} + 4m_n + m_1 = 12f(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}).$$

Заметим, что вопросам существования и единственности подобных систем уравнений достаточное внимание уделяется в курсе линейной алгебры, а численным методам нахождения решений – в курсе численных методов. Таким образом, решив данную систему уравнений (а ее решение, очевидно, существует и единственно), получаем требуемое.

ЗАМЕЧАНИЕ. В непериодическом случае решение вполне аналогично. Потребуется два краевых условия, заменяющих условие периодичности.

1.4. Экстремальные свойства кубических интерполяционных сплайнов

В последние годы большое распространение получили, так называемые, натуральные сплайны. Натуральными называют сплайны, которые являются решением вариационных задач специального вида. Проиллюстрируем данное направление в теории сплайнов.

Обозначим через $W_2^2[a, b]$ пространство функций, определенных на $[a, b]$, первая производная которых абсолютно непрерывна, а вторая – интегрируема с квадратом, т.е.

$$\int_a^b (f''(x))^2 dx < \infty.$$

ТЕОРЕМА 1.1. *Среди всех функций* $f(x) \in W_2^2[a,b]$, *принимающих в узлах заданные значения* y_i, *интерполяционный кубический сплайн* $s(x)$ *такой, что* $s(x_i) = y_i$ *и* $s''(a) = s''(b) = 0$, *минимизирует функционал*

$$J(f) = \int\limits_a^b (f''(x))^2 dx.$$

Доказательство. Рассмотрим разность $f(x)-s(x)$. Справедливы равенства

$$J(f-s) = \int\limits_a^b (f''(x) - s''(x))^2 dx =$$

$$= \int\limits_a^b (f''(x))^2 dx - 2\int\limits_a^b f''(x)s''(x)dx + \int\limits_a^b (s''(x))^2 dx =$$

$$= \int\limits_a^b (f''(x))^2 dx - \int\limits_a^b (s''(x))^2 dx - 2\int\limits_a^b (f''(x) - s''(x))s''(x)dx =$$
$$= J(f) - J(s) - 2I,$$

где

$$I = \int\limits_a^b (f''(x) - s''(x))s''(x)dx.$$

С другой стороны,

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f''(x) - s''(x))s''(x)dx =$$

$$= (f'(x) - s'(x))s''(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} (f'(x) - s'(x))s'''(x)dx.$$

Третья производная кубического сплайна на $[x_i, x_{i+1}]$ – постоянна. Далее будем обозначать ее $s_i^{(3)}$. Таким образом,

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \{[f'(x_{i+1}) - s'(x_{i+1})]s''(x_{i+1}) -$$

$$-[f'(x_i) - s'(x_i)]s''(x_i) - s_i^{(3)}([f(x_{i+1}) - s(x_{i+1})] - [f(x_i) - s(x_i)])\} = -s''(x_0)[f'(x_0) - s'(x_0)] + s''(x_n)[f'(x_n) - s'(x_n)].$$

Учитывая, что $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$, получаем $I = 0$. Таким образом, для любой функции $f(x) \in W_2^2[a,b]$, принимающих в узлах заданные значения y_i,

$$J(f - s) = J(f) - J(s) \geq 0.$$

В результате имеем,

$$J(s) \leq J(f),$$

что и доказывает теорему. □

1.5. Замечание о двумерных сплайнах

Понятие полиномиального сплайна естественным образом обобщается на случай двух и более переменных. Однако, если в одномерном случае стыковка многочленов и краевые условия обеспечивались заданием их в конечном числе точек на прямой, то даже на плоскости все это необходимо делать на некоторых кривых. Правда все значительно упрощается, если склеивать многочлены и задавать краевые условия на прямых, параллельных осям координат.

Пусть $P = [a,b] \times [c,d]$ – прямоугольник на плоскости Oxy, и заданы сетки узлов

$$\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n_1} = b,$$

$$\Delta_y : c = y_0 < x_1 < \cdots < x_{n_2} = d.$$

Определим двумерную сетку на P как декартово произведение $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$. Обозначим

$$P_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}].$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Двумерным сплайном степени m_1 дефекта k_1 по переменной x и степени m_2 дефекта k_2 по переменной y относительно сетки Δ называют функцию $s(x,y)$, класса $C^{m_1-k_1, m_2-k_2}$, которая на каждом P_{ij} есть многочлен степени m_1 по переменной x и степени m_2 по переменной y.

Здесь C^{r_1,r_2} – пространство функций $f(x,y)$, имеющих непрерывные частные производные

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x,y), \quad i = 0, \cdots, r_1,\ j = 0, \ldots, r_2.$$

Пусть на Δ_x определено пространство сплайнов степени m_1 дефекта k_1 – $S_{m_1,k_1}(\Delta_x)$, а на Δ_y пространство сплайнов $S_{m_2,k_2}(\Delta_y)$. Если $\varphi_1^1(x), \ldots, \varphi_{q_1}^1(x)$ – базис в $S_{m_1,k_1}(\Delta_x)$, а $\varphi_1^2(y), \cdots, \varphi_{q_2}^2(y)$ – базис в $S_{m_2,k_2}(\Delta_y)$, то базисом пространства сплайнов $S_{m_1m_2,k_1k_2}(\Delta)$ будет система функций, образованная из всевозможных произведений $\varphi_i^1(x)\varphi_j^2(y)$. Данный факт позволяет конструировать двумерные сплайны на базе одномерных. Последнее, естественно, существенно упрощает процедуру построения двумерных сплайнов.

§2. Замечания о других методах

Важнейшей составной частью ряда задач математического моделирования является анализ, сравнение и последующая классификация изучаемых объектов некоторого множества. Под классификацией в подобных задачах принято понимать разделение данного множества объектов на однородные (в каком-то смысле) группы, либо приписыванием каждого элемента рассматриваемого множества к одному из заранее известных классов. Конечно, подобные задачи изучались на протяжении всего развития научного знания. Однако в последние десятилетия развитие компьютерной техники стало основным инструментом, который позволил по-новому подойти к решению проблем классификации. И существенное значение здесь сыграл, уже достаточно разработанный, аппарат многомерного статистического анализа. А именно, стали активно использоваться, так называемые, методы распознавания образов "с учителем" (дискриминантный анализ), методы распознавания образов "без учителя" (кластерный анализ) и методы, позволяющие выяснить, насколько существенно то или иное свойство для конкретной цели (факторный анализ).

2.1. Дискриминантный анализ

Дискриминантный анализ представляет из себя набор методов, позволяющих изучать различия между двумя и более группами объектов по нескольким переменным одновременно, и, соответственно, классифицировать объекты по принципу максимального сходства. Основным его предположением является то, что объект должен принадлежать одному из изучаемых классов (что, к сожалению, в практических задачах выполняется далеко не всегда). Хотя дискриминантный анализ состоит из достаточно большого числа методов, все их можно разбить на две группы: методы интерпретации межгрупповых различий и методы классификации наблюдений по группам. Первая часть методов отвечает на вопрос: есть ли возможность, используя данный набор переменных, отличить один класс от другого, если "да", то насколько хорошо, и какие из этих переменных наиболее информативны. Вторая часть методов связана с получением функций, обеспечивающих возможность отнести данный объект к одному из рассматриваемых классов.

2.2. Кластерный анализ

Кластерный анализ – это общее название достаточно большого множества алгоритмов, используемых при создании классификации. В результате использования этих алгоритмов образуются, так называемые, "кластеры", т.е. группы похожих объектов. Многочисленные приложения кластерного анализа принято сводить к четырем основным задачам:
1. разработка классификации;
2. исследование концептуальных схем группировки объектов;
3. создание новых гипотез на основе исследования данных;
4. проверка гипотез, а также определение, действительно ли выделенные классы присутствуют в имеющихся данных.
Заметим, что при всем многообразии методов и алгоритмов кластерного анализа, все исследования содержат следующие шаги:
1. отбор выборки для классификации;
2. определение множества признаков, по которым будут оцениваться объекты;
3. выбор меры сходства (метрики) между объектами;
4. выбор метода кластерного анализа и его применение для создания групп сходных объектов;
5. проверка достоверности результатов решения.

К числу основных недостатков методов кластерного анализа следует отнести следующие. Во-первых, большинство из них являются эвристическими, и, соответственно, подкрепляются лишь опытом разработчиков метода. Во-вторых, эти методы создавались в различных областях человеческого знания и различных науках, и, в связи с этим, несут в себе особенности и отпечатки именно этих научных дисциплин. В-третьих, что очень существенно, различные алгоритмы могут порождать различные решения для одних и тех же исходных данных. Кроме того, кластерный анализ привносит некую свою структуру в исходные данные, и эта структура может не совпадать с реальной.

2.3. Факторный анализ

Основной целью факторного анализа является снижение размерности анализируемого пространства признаков, и, соответственно, выбор наиболее информативных переменных.

Это связано в первую очередь с тем, что в практической работе общее число признаков, характеризующих исследуемые объекты, крайне велико. При этом многие из признаков – взаимосвязаны, а некоторые – малоинформативны и практически не меняются при переходе от одного объекта к другому. Кроме того, некоторые группы переменных допускают возможность агрегирования, т.е. "взвешенного"суммирования. Все это служит предпосылками к переходу от большого числа показателей (переменных) анализируемой системы к существенно меньшему. К новой системе признаков, как правило, предъявляются требования максимальной информативности, взаимной некоррелированности, минимального искажения геометрической структуры множества исходных данных и т.д.

Одним из основных предположений факторного анализа является то, что наблюдаемые переменные являются линейными комбинациями некоторых скрытых (ненаблюдаемых) факторов. При этом некоторые из этих факторов могут быть общими для нескольких переменных. Кроме того, как правило, считают, что характерные факторы ортогональны друг другу. Все это позволяет достаточно точно идентифицировать факторную структуру исследуемой системы.

Глава 26

Добавление 5. Практикум вычисления неопределенных интегралов

Основные формулы для вычисления производных.

Если x независимая переменная, то справедливы следующие формулы

1.	$y = C:$	$y' = 0;$	7.	$y = \cos x:$	$y' = -\sin x;$
2.	$y = x:$	$y' = 1;$	8.	$y = \mathrm{tg}x:$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x};$
3.	$y = x^{\mu}:$	$y' = \mu x^{\mu-1};$	9.	$y = \mathrm{ctg}x:$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x};$
4.	$y = a^x:$	$y' = a^x \mathrm{ln}a;$	10.	$y = \arcsin x:$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5.	$y = \log_a x:$	$y' = \frac{1}{x}\log_a e;$	11.	$y = \arccos x:$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
	$y = \mathrm{ln}x:$	$y' = \frac{1}{x};$	12.	$y = \mathrm{arctg}x:$	$y' = \frac{1}{1+x^2};$
6.	$y = \sin x:$	$y' = \cos x;$	13.	$y = \mathrm{arcctg}x:$	$y' = -\frac{1}{1+x^2};$

Основные формулы для вычисления неопределенных интегралов.

$$\int 0\,dx = C;$$

$$\int 1\,dx = x + C;$$

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \qquad (\alpha \neq -1);$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ \begin{array}{rcl} \arcsin x & + & C, \\ -\arccos x & + & C; \end{array} \right.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \left\{ \begin{array}{rcl} \operatorname{arctg} x & + & C, \\ -\operatorname{arcctg} x & + & C; \end{array} \right.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C;$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th}\, x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth}\, x + C.$$

Далее приведем примеры нахождения неопределенных интегралов. Номера в скобках – номера указанных задач в сборнике задач Б.П. Демидовича.

ПРИМЕР 1. Найти

$$\int (6x^2 + 8x + 3)dx.$$

Решение. Из свойств интеграла получим

$$\int (6x^2 + 8x + 3)dx = 6\int x^2dx + 8\int xdx + 3\int dx =$$

$$= 6\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} + 3x + C = 2x^3 + 4x^2 + 3x + C.$$

ПРИМЕР 2. Найти

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$$

Решение. Преобразуя подинтегральную функцию, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} = \int x^{-\frac{1}{n}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1} + C = \frac{nx^{\frac{n-1}{n}}}{n-1} + C.$$

ПРИМЕР 3. Найти

$$\int 3^x 5^x dx.$$

Решение. По формуле 5 имеем

$$\int 3^x 5^x dx = \int 15^x dx = \frac{15^x}{\ln 15} + C.$$

ПРИМЕР 4. (1650) Найти

$$\int \operatorname{tg}^2 \varphi d\varphi.$$

Решение. Применяя формулу $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1$, находим

$$\int \operatorname{tg}^2 \varphi d\varphi = \int \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 \right) d\varphi = \int \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi - \int d\varphi =$$
$$= \operatorname{tg} \varphi - \varphi + C.$$

ПРИМЕР 5. Найти

$$\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx.$$

Решение. Выделяя целую часть, приходим к табличным интегралам

$$\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} dx = \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \int x^2 dx +$$
$$+ \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{x^3}{3} + \operatorname{arctg} x + C.$$

ПРИМЕР 6. Найти

$$\int (1 - \sqrt{x})^2 dx.$$

Решение. Раскроем квадрат разности, получим

$$\int (1 - \sqrt{x})^2 dx = \int (1 - 2\sqrt{x} + x) dx =$$

$$= \int dx - \int 2\sqrt{x}dx + \int xdx = \int dx - 2\int x^{1/2}dx + \int xdx =$$

$$= x - 2\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} + C = x - \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C.$$

ПРИМЕР 7.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+5)}{\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{2}\int (2x+5)^{-\frac{1}{2}}d(2x+5) =$$

$$= 0,5 \cdot \frac{(2x+5)^{\frac{1}{2}}}{0,5} + C = \sqrt{2x+5} + C.$$

ПРИМЕР 8.

$$\int \cos 7xdx = \frac{1}{7}\int \cos 7xd(7x) = \frac{1}{7}\sin 7x + C.$$

ПРИМЕР 9.

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

ПРИМЕР 10.

$$\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

ПРИМЕР 11. Найти интеграл

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Решение. Здесь полезно применить тригонометрическую подстановку $x = a\sin t, \quad dx = a\cos tdt$. Следовательно,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos tdt = a^2\int \cos^2 tdt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{4}\int \cos 2td(2t) =$$

$$= \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C.$$

Возвращаясь обратно к переменной x, будем иметь

$$\sin t = \frac{x}{a} \qquad t = \arcsin\frac{x}{a}.$$

Далее,

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} =$$

$$= \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Окончательно получим

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

ПРИМЕР 12.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}.$$

Решение. Сделаем подстановку $x = \frac{1}{t}$, тогда $dx = -\frac{1}{t^2}dt$. В результате получим

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}} = -\int \frac{\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}t)}{\sqrt{1-(\sqrt{2}t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\sqrt{2}t + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x} + C.$$

ПРИМЕР 13. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{e^x+1}.$$

Решение. Сделаем подстановку $x = -\ln t$, тогда $dx = -\frac{1}{t}dt$, значит

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{-\frac{1}{t}dt}{e^{-\ln t}+1} = -\int \frac{dt}{t(\frac{1}{t}+1)} =$$

$$= -\int \frac{dt}{1+t} = -\ln|1+t| + C = -\ln|1+e^{-x}| + C.$$

ПРИМЕР 14. Найти интеграл

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx.$$

Решение. Сделаем подстановку $x = \operatorname{arctg} t$, тогда $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. В итоге получим

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \operatorname{tg}^3(\operatorname{arctg} t) \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^3}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \int t dt - \int \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |t^2+1| + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg}^2 x + 1| + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C.$$

ПРИМЕР 15. Найти интеграл

$$\int x \cdot e^x dx.$$

Решение. Рассуждая аналогично, будем иметь

$$\int x \cdot e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x dx =$$

$$= xe^x - e^x + C.$$

Иногда интегрирование по частям приходится выполнять несколько раз.

ПРИМЕР 16. (1799) Найти интеграл

$$\int x^2 \cdot \sin 2x dx.$$

Решение. Положим $u = x^2, \quad dv = \sin 2x dx$, тогда $du = 2x dx, \quad v = -\frac{\cos 2x}{2}$. Следовательно,

$$\int x^2 \cdot \sin 2x dx = -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \int x \cos 2x dx.$$

Теперь надо вычислить интеграл $\int x \cos 2x dx$. Положим $u = x, \quad dv = \cos 2x dx$, тогда $du = dx, \quad v = \frac{\sin 2x}{2}$, и потому

$$\int x \cos 2x dx = \frac{x \sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

Окончательно имеем

$$\int x^2 \cdot \sin 2x dx = -\frac{x^2 \cos 2x}{2} + \frac{x \sin 2x}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

ПРИМЕР 17. (1792) Найти интеграл

$$\int x^3 \cdot \ln x dx.$$

Решение. Интегрируя по частям, будем иметь

$$\int x^3 \cdot \ln x dx = \left\{ \begin{array}{cc} u = \ln x, & dv = x^3 dx \\ du = \frac{1}{x} dx, & v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

ПРИМЕР 18. (1802) Найти интеграл

$$\int \operatorname{arctg} x dx.$$

Решение. Применим метод интегрирования по частям.

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \left\{ \begin{array}{cc} u = \operatorname{arctg} x, & dv = dx \\ du = \frac{1}{1+x^2} dx, & v = x \end{array} \right\} = x \operatorname{arctg} x -$$

$$- \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

В некоторых случаях с помощью интегрирования по частям получают уравнение, из которого определяется искомый интеграл.

ПРИМЕР 19. (1829) Найти интеграл

$$\int e^{ax} \cos bx dx.$$

Решение. Применяя метод интегрирования по частям, получим

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \left\{ \begin{array}{cc} u = e^{ax}, & dv = \cos bx dx \\ du = ae^{ax} dx, & v = \frac{1}{b} \sin bx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx dx.$$

К последнему интегралу снова применим метод интегрирования по частям:

$$\int e^{ax}\sin bx dx = \left\{ \begin{matrix} u = e^{ax}, & dv = \sin bx dx \\ du = ae^{ax}dx, & v = -\frac{1}{b}\cos bx \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx dx.$$

Подставляя полученное выражение в предыдущее равенство, получим

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx dx.$$

Из последнего равенства найдем данный интеграл

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bx dx =$$

$$= e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx + \frac{a}{b^2}\cos bx\right) + C\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right),$$

откуда

$$\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

ПРИМЕР 20. Найти интеграл

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Решение. Преобразуем подинтегральную функцию, в результате получим

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} -$$

$$- \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2\arcsin\frac{x}{a} - \int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Последний интеграл вычислим с помощью интегрирования по частям.

$$\int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left\{\begin{matrix} u=x, & dv=\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\ du=dx, & v=-\sqrt{a^2-x^2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= -x\sqrt{a^2-x^2} + \int\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Следовательно,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

Из этого равенства находим данный интеграл

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

ПРИМЕР 21.

$$\int\frac{B}{x-b}dx = B\ln|x-b| + C.$$

ПРИМЕР 22.

$$\int\frac{B}{(x-b)^m}dx = B\int(x-b)^{-m}dx = \frac{B(x-b)^{-m+1}}{1-m} + C =$$

$$= \frac{B}{(1-m)(x-b)^{m-1}} + C,$$

$(m = 2, 3, \ldots)$.

ПРИМЕР 23. Найти

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$$

Решение. В подинтегральной функции выделяется многочлен второй степени делением числителя на знаменатель:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}. \qquad (1)$$

Разлагаем знаменатель данной дроби на множители

$$x^3-4x = x(x+2)(x-2).$$

Правильную рациональную дробь из (1) представляем по формуле

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$

Освобождаясь от знаменателей, получаем:

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x^2 - 4) + Bx(x - 2) + Cx(x + 2).$$

$$4x^2 + 16x - 8 = (A + B + C)x^2 + (-2B + 2C)x - 4A.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, получаем систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} A & +B & +C & = & 4 \\ & -2B & +2C & = & 16 \\ -4A & & & = & -8 \end{array}\right.$$

Решая систему, находим:

$$A = 2, \quad B = -3, \quad C = 5.$$

Поэтому

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x+2)(x-2)} = \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2}. \qquad (2)$$

Приняв во внимание (1) и (2), находим:

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2} \right) dx =$$

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C.$$

ПРИМЕР 24. Найти

$$\int \frac{y^2 dy}{y^3 + 5y^2 + 8y + 4}.$$

Решение. Подинтегральная функция есть правильная дробь. Разложим знаменатель этой дроби на простые множители:

$$y^3 + 5y^2 + 8y + 4 = (y + 2)^2(y + 1).$$

Представим данную подинтегральную функцию в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)} = \frac{A_1}{y+2} + \frac{A_2}{(y+2)^2} + \frac{B_1}{y+1}.$$

Освободимся от общего знаменателя, получим:

$$y^2 = A_1(y + 2)(y + 1) + A_2(y + 1) + B_1(y + 2)^2$$

или

$$y^2 = (A_1 + B_1)y^2 + (3A_1 + A_2 + 4B_1)y + 2A_1 + A_2 + 4B_1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y, получим систему трех уравнений:

$$\begin{cases} A_1 & & +B_1 & = & 1 \\ 3A_1 & +A_2 & +4B_1 & = & 0 \\ 2A_1 & +A_2 & +4B_1 & = & 0 \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -4, \quad B_1 = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{y^2}{(y+2)^2(y+1)} = \frac{-4}{(y+2)^2} + \frac{1}{y+1}.$$

Поэтому

$$\int \frac{y^2dy}{y^3+5y^2+8y+4} = \int \left(\frac{-4}{(y+2)^2} + \frac{1}{y+1}\right) dy =$$

$$= \frac{4}{(y+2)} + \ln|y+1| + C.$$

ПРИМЕР 25. Найти интеграл

$$\int \frac{xdx}{x^3+1}.$$

Решение. Подинтегральную функцию представим в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{M_1x+N_1}{x^2-x+1}.$$

После освобождения от знаменателей получим:

$$x = (A_1+M_1)x^2 + (-A_1+M_1+N_1)x + A_1 + N_1.$$

Составим систему

$$\begin{cases} A_1 & +M_1 & & = & 0 \\ -A_1 & +M_1 & +N_1 & = & 1 \\ A_1 & & +N_1 & = & 0 \end{cases}$$

Откуда

$$A_1 = -\frac{1}{3}, \quad M_1 = \frac{1}{3}, \quad N_1 = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{xdx}{x^3+1} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx = \left\{ \begin{matrix} z = x - \frac{1}{2} \\ x = z + \frac{1}{2},\ dx = dz \end{matrix} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{z+\frac{3}{2}}{z^2+z+\frac{1}{4}-z-\frac{1}{2}+1}dz =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{z+\frac{3}{2}}{z^2+\frac{3}{4}}dz = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\int \frac{zdz}{z^2+\frac{3}{4}} +$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|z^2+\frac{3}{4}| + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \ln\left|\frac{(x^2-x+1)^{\frac{1}{6}}}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

ПРИМЕР 26. Найти интеграл

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^4}dx.$$

Решение. При вычислении этого интеграла нецелесообразно применять общий метод интегрирования рациональных функций (с помощью разложения данной дроби на простейшие). Имеется более легкое решение этой задачи с использованием метода подстановки и метода разложения.

Пусть $x+1 = z$, тогда $dx = dz$. Следовательно,

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^4}dx = \int \frac{(z-1)^3}{z^4}dz = \int \frac{dz}{z} - 3\int \frac{dz}{z^2} +$$

$$+3\int \frac{dz}{z^3} - \int \frac{dz}{z^4} = \ln|z| + \frac{3}{z} - \frac{3}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} + C =$$

$$= \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + C.$$

ПРИМЕР 27. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}.$$

Решение. Разложение на простые дроби здесь достигается путем незамысловатых преобразований:

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{(1+x^2)-x^2}{x^2(1+x^2)} - \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}.$$

Принимая во внимание ранее вычисленный интеграл IV (см. пункт "Простые дроби и их интегрирование"), получаем

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2} - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

ПРИМЕР 28. Найти интеграл

$$\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx.$$

Решение.

$$\frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+1} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+1)^2}.$$

Откуда

$$2x^3+x+3 = (M_1x+N_1)(x^2+1) + (M_2x+N_2).$$

С помощью метода неопределенных коэффициентов найдем:

$$M_1 = 2, \quad M_2 = -1, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 3.$$

Следовательно,

$$\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{2xdx}{x^2+1} + \int \frac{-x+3}{(x^2+1)^2}dx =$$

$$= \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} - \int \frac{xdx}{(x^2+1)^2} + 3\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + 3\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \ln|x^2+1| + \frac{1}{2(x^2+1)} + 3\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Используя интеграл IV (см. параграф "Простые дроби и их интегрирование"), получаем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

Таким образом, получим:

$$\int \frac{2x^3+x+3}{(x^2+1)^2}dx = \ln|x^2+1| + \frac{1}{2(x^2+1)} +$$

$$+\frac{3}{2}\left(\frac{x}{x^2+1} + \operatorname{arctg} x\right) + C.$$

ПРИМЕР 29. Найти интеграл

$$\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3} dx.$$

Решение. Прибегнем к выделению рациональной части интеграла (метод Остроградского). Имеем

$$Q_1 = (x^2 - 2x + 2)^2, \quad Q_2 = (x-1)(x^2 - 2x + 2).$$

Таким образом,

$$\frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3} = \left(\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x^2-2x+2)^2}\right)' +$$

$$+\frac{e}{x-1} + \frac{fx+g}{x^2-2x+2},$$

причем мы заодно уже разлагаем на простые дроби то выражение, которое еще подлежит интегрированию (после выделения рациональной части интеграла). Тождество

$$2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20 = (3ax^2 + 2bx + c)(x^2 - 2x + 2)(x-1) -$$

$$-(ax^3 + bx^2 + cx + d) \cdot 2 \cdot (2x-2)(x-1) +$$

$$+e(x^2 - 2x + 2)^3 + (fx+g)(x-1)(x^2-2x+2)^2$$

приводит к системе уравнений

$$\begin{array}{r|rrrrrrrcr}
x^6 & & & & & e & +f & & = & 0, \\
x^5 & -a & & & & -6e & -5f & +g & = & 0, \\
x^4 & -a & -2b & & & +18e & +12f & -5g & = & 2, \\
x^3 & 8a & +2b & -3c & & -32e & -16f & +12g & = & -4, \\
x^2 & -6a & +4b & +5c & -4d & +36e & +12f & -16g & = & 24, \\
x^1 & & -4b & & +8d & -24e & -4f & +12g & = & -40, \\
x^0 & & & -2c & -4d & +8e & & -4g & = & 20,
\end{array}$$

откуда

$$a = 2, \quad b = -6, \quad c = 8, \quad d = -9, \quad e = 2, \quad f = -2, \quad g = 4.$$

$$\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x-1)(x^2-2x+2)^3} dx = \frac{2x^3 - 6x^2 + 8x - 9}{(x^2-2x+2)^2} +$$

$$+\int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{-2x+4}{x^2-2x+2} dx = \frac{2x^3 - 6x^2 + 8x - 9}{(x^2-2x+2)^2} +$$

$$+\ln \frac{(x-1)^2}{x^2-2x+2} + 2 \operatorname{arctg}(x-1) + C.$$

ПРИМЕР 30. Найти интеграл

$$\int \frac{x^6 - x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{(x+1)^2(x^2+x+1)^3} dx.$$

Решение. Выделим рациональную часть интеграла. Имеем

$$Q_1 = (x+1)(x^2+x+1)^2, \quad Q_2 = (x+1)(x^2+x+1).$$

Разложение ищем в виде

$$\left(\frac{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e}{(x+1)(x^2+x+1)^2} \right)' + \frac{fx^2 + gx + h}{(x+1)(x^2+x+1)}.$$

Из системы уравнений:

$$\begin{array}{c|rrrrrrrrcr}
x^7 & & & & & & f & & & = & 0, \\
x^6 & -a & & & & & & +g & & = & 1, \\
x^5 & a & -2b & & & & & +3g & +h & = & -1, \\
x^4 & 5a & -b & -3c & & & & +5g & +3h & = & 1, \\
x^3 & 4a & +3b & -3c & -4d & & & +5g & +5h & = & 2, \\
x^2 & & +3b & +c & -5d & -5e & & +3g & +5h & = & 3, \\
x^1 & & & 2c & -d & -7e & & +g & +3h & = & 3, \\
x^0 & & & & d & -3e & & & +h & = & 3,
\end{array}$$

находим

$$a = -1, \quad b = 0, \quad c = -2 \quad d = 0, \quad e = -1 \quad f = g = h = 0.$$

Таким образом, здесь интеграл весь сводится к рациональной функции

$$-\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{(x+1)(x^2+x+1)^2} + C.$$

ПРИМЕР 31. Найти интеграл

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}+1}.$$

Решение. Положим $x = t^6$, тогда $dx = 6t^5 dt$. Следовательно,

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}+1} = \int \frac{t^3 \cdot 6t^5 \cdot dt}{t^2+1} = 6 \int \frac{t^8 \cdot dt}{t^2+1}.$$

Подстановка привела к интегралу от алгебраической дроби. Найдем этот интеграл:

$$6 \int \frac{t^8 \cdot dt}{t^2+1} = 6 \int \left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) dt =$$

$$= 6 \cdot \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t \right) + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}+1} = 6 \cdot \left(\frac{x\sqrt[6]{x}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} - \sqrt[6]{x} + \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} \right) + C.$$

ПРИМЕР 32. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{(x+1)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Решение. Пусть $1 + x = t^2$, тогда $dx = 2tdt$, $(1+x)^{\frac{3}{2}} = t^3$, $(x+1)^{\frac{1}{2}} = t$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x+1)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{2tdt}{t^3+t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2 \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} (1+x)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Аналогично находятся интегралы, в которых подкоренное выражение является дробно-линейной функцией $\frac{ax+b}{cx+d}$, где $ad - bc \neq 0$. В этом случае делают подстановку вида

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k.$$

ПРИМЕР 33. Найти интеграл

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Решение. Положим $\frac{1-x}{1+x} = t^2$, откуда

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = -\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x} = -4\int \frac{t^2 \cdot dt}{(1-t^2)(1+t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{(1-t^2)-(1+t^2)}{(1-t^2)(1+t^2)} dt = 2\int \frac{dt}{1+t^2} - 2\int \frac{dt}{1-t^2} =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} t - \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} -$$

$$-\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{1-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\right|+C=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-$$

$$-\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right|+C.$$

ПРИМЕР 34. Найти интеграл

$$\int\frac{dx}{x(1+x^5)^{1/3}}=\int x^{-1}(1+x^5)^{-1/3}dx.$$

В данном примере мы имеем дело с интегрированием биномиального дифференциала. Применим теорему Чебышева. Здесь $m=-1, n=5, p=-\frac{1}{3}$; второй случай: $\frac{m+1}{n}=0$. Положим $t=(1-x^5)^{1/3}, x=(t^3-1)^{1/5}, dx=\frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-4/5}dt$, имеем

$$\int\frac{dx}{x(1+x^5)^{1/3}}=\int x^{-1}(1+x^5)^{-1/3}dx=\frac{3}{5}\int\frac{tdt}{t^3-1}=$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt=\frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.\quad \text{и т.д.}$$

ПРИМЕР 35. Найти интеграл

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}.$$

а) Так как корни подкоренного выражения вещественны, то можно применить подстановку $\sqrt{a^2-x^2}=t(a-x)$; здесь $-a<x<a, \quad t>0$. Имеем

$$x=a\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx=\frac{4atdt}{(t^2+1)^2},\quad \sqrt{a^2-x^2}=\frac{2at}{t^2+1},$$

$$x^2+a^2=\frac{2a^2(t^4+1)}{(t^2+1)^2}$$

и

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{2a^2}\int\frac{2t^2+2}{t^4+1}dt=$$

$$=\frac{1}{2a^2}\int\left(\frac{1}{t^2+t\sqrt{2}+1}+\frac{1}{t^2-t\sqrt{2}+1}\right)dt=$$

$$= \frac{1}{a^2\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(t\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}-1)) + C,$$

куда еще нужно подставить для получения окончательного результата

$$t = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

Воспользовавшись формулой для суммы арктангенсов, а также очевидным соотношением

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha} = -\operatorname{arctg}\alpha \pm \frac{\pi}{2} \quad (\alpha \neq 0),$$

можно придать результату более простую форму

$$\frac{1}{a^2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-x^2}} + C_1,$$

$C_1 = C + \frac{\pi}{2a^2\sqrt{2}}$.

б) Если к тому же интегралу применить подстановку $\sqrt{a^2-x^2} = tx - a$, то получим, что

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= -\frac{1}{a^2\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)t + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)t) + C_2$$

при $t = \frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$. Этот результат годится в отдельности для промежутка $(-a, 0)$ и для промежутка $(0, a)$; легко сообразить, что изменяя значение постоянной C_2 при переходе x через 0, можно сделать его пригодным во всем промежутке $(-a, a)$. Наконец, если преобразовать его по формуле для суммы арктангенсов, то он отождествится с предыдущим результатом.

ПРИМЕР 36. Найти интеграл

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx.$$

Воспользуемся одной из подстановок Эйлера. Положим

$$\sqrt{1+x+x^2} = tx + 1,$$

тогда $1 + x + x^2 = t^2x^2 + 2tx + 1$, откуда

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2}, \quad dx = 2\frac{1-t+t^2}{(1-t^2)^2}dt.$$

Далее, находим

$$\sqrt{1+x+x^2} = \frac{1-t+t^2}{1-t^2}, \quad t = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int \frac{-2tdt}{1-t^2} =$$

$$= \ln|1-t^2| + C = \ln\left|1 - \left(\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\right)^2\right| + C.$$

ПРИМЕР 37. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)}.$$

Решение. Положим $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2tdt}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)} = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}dt}{\frac{2t}{1+t^2}(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{4t}{1+t^2})} =$$

$$= \int \frac{(1+t^2)dt}{t(t^2-4t+3)} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t(t-3)(t-1)} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t| - \ln|t-1| + \frac{5}{3}\ln|t-3| + C =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| - \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1| + \frac{5}{3}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3| + C.$$

ПРИМЕР 38. Найти интеграл

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Решение. Так как $\frac{(-\sin x)^3}{1+\cos^2 x} = -\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}$, то делаем подстановку $\cos x = t$, $-\sin xdx = dt$.

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x\cdot\sin xdx}{1+\cos^2 x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin xdx}{1+\cos^2 x} =$$

$$= -\int \frac{(1-t^2)dt}{1+t^2} = \int\left(1-\frac{2}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= t - 2\operatorname{arctg} t + C = \cos x - 2\operatorname{arctg}(\cos x) + C.$$

ПРИМЕР 39. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} dx.$$

Решение. Так как $\frac{1}{3(-\sin x)^2+5(-\cos x)^2} = \frac{1}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$, то делаем подстановку $\operatorname{tg} x = t$, откуда $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Значит,

$$\int \frac{dx}{3\sin^2 x + 5\cos^2 x} dx = \int \frac{\frac{1}{1+t^2} dt}{\frac{3t^2}{1+t^2} + \frac{5}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{3t^2+5} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}t)}{3t^2+5} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{5}}\right) + C = \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{\sqrt{5}}\right) + C.$$

Если подинтегральная функция зависит только от $\operatorname{tg} x$, то замена $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ приводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции:

$$\int R(\operatorname{tg} x) dx = \int R(t) \frac{dt}{1+t^2}.$$

ПРИМЕР 40. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{1+2\operatorname{tg} x}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{1+2\operatorname{tg} x} = \left\{ \operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+2t} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+2t)}.$$

Представим подинтегральную функцию в виде суммы элементарных дробей.

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+2t)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{1+2t}.$$

$$1 = (2A+C)t^2 + (A+2B)t + B + C.$$

$$\begin{cases} 2A & & +C & = & 0 \\ A & +2B & & = & 0 \\ & B & +C & = & 1 \end{cases}$$

Откуда $A = -\frac{2}{5}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = \frac{4}{5}$. Следовательно,

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+2t)} = \frac{-\frac{2}{5}t + \frac{1}{5}}{1+t^2} + \frac{\frac{4}{5}}{1+2t} = \frac{1}{5}\left(\frac{-2t+1}{1+t^2} + \frac{4}{1+2t}\right).$$

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)(1+2t)} = \frac{1}{5}\left(-2\int \frac{tdt}{1+t^2} + \int \frac{dt}{1+t^2} + \right.$$

$$\left. +4\int \frac{dt}{1+2t}\right) = \frac{1}{5}\left(-\ln|1+t^2| + \operatorname{arctg} t + 2\ln|1+2t|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\ln|1+\operatorname{tg}^2 x| + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + 2\ln|1+2\operatorname{tg} x|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\ln\cos^2 x + x + \ln|1+2\operatorname{tg} x|\right) + C =$$

$$= \frac{1}{5}\left(x + 2\ln|\cos x + 2\sin x|\right) + C.$$

ПРИМЕР 41. Найти интеграл

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx.$$

Решение.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x \cdot dx}{\sin^4 x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x dx}{\sin^4 x}.$$

Обозначим $\sin x = t, \quad \cos x dx = dt$, значит

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C =$$

$$= -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

ПРИМЕР 42. Найти интеграл

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx.$$

Решение.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2xdx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2xdx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2xdx =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

ПРИМЕР 43. Найти интеграл

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx.$$

Решение. Подинтегральное выражение меняет знак от замены $\sin x$ на $-\sin x$. Подстановка $t = \cos x$:

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx = -\int \frac{t^4-2t^2+1}{t^4}dt = -t - \frac{2}{t} + \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= -\cos x - \frac{2}{\cos x} + \frac{1}{3\cos^3 x} + C.$$

ПРИМЕР 44. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x}.$$

Решение. Подинтегральное выражение не изменяет своего значения при замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$. Подстановка $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^2 x} = \int \frac{(1+t^2)^2}{t^4}dt = t - \frac{2}{t} - \frac{1}{3t^3} + C =$$

$$= \operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + C.$$

ПРИМЕР 45. Найти интеграл

$$\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx.$$

Решение. Так как при изменении знаков у $\sin x$ и $\cos x$ подинтегральное выражение не терпит изменения, то пригодна подстановка $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}dx = \int \frac{t^2dt}{(1+t)(1+t^2)^2} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{4(t+1)} - \frac{t-1}{4(t^2+1)} + \frac{t-1}{2(t^2+1)^2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1+t}{1+t^2} + C =$$

$$= \frac{1}{4} \ln |\sin x + \cos x| - \frac{1}{4} \cos x (\sin x + \cos x) + C.$$

ПРИМЕР 46. Найти интеграл

$$\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx.$$

Решение.

$$\int \sin 5x \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int [\sin 8x + \sin 2x] dx =$$

$$= -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

ПРИМЕР 47. Найти интеграл

$$\int \sin 8x \cdot \sin 5x dx.$$

Решение.

$$\int \sin 8x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int [\cos 3x - \cos 13x] dx =$$

$$= \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{26} \sin 13x + C.$$

ПРИМЕР 48. Найти интеграл

$$\int \sin^n x dx, \quad n - \text{целое положительное число.}$$

Решение. Применим метод интегрирования по частям. Пусть $u = \sin^{n-1} x, dv = \sin x dx$, тогда $du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$ и $v = -\cos x$. Следовательно,

$$\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx.$$

Перенося последнее слагаемое в левую часть равенства и деля на n, получим:

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx. \qquad (3)$$

Эта формула является рекуррентной формулой, приводящей интегрирование дифференциала $\sin^n x dx$ к интегрированию дифференциала того же типа, но уже с показателем не n, а $n-2$.

Повторным ее применением мы приведем вычисление интеграла $\int \sin^n x dx$ к вычислению одного из двух интегралов: $\int dx$ или $\int \sin x dx$, смотря по тому, представляет ли собой n четное или нечетное число.

а) Пусть $n = 6$, тогда по формуле (3) получим:

$$\int \sin^6 x dx = -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} + \frac{5}{6} \int \sin^4 x dx = -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} +$$

$$+\frac{5}{6}\left(-\frac{\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx\right) =$$

$$= -\frac{\sin^5 x \cos x}{6} - \frac{5}{24} \sin^3 x \cos x - \frac{5}{16} \sin x \cos x + \frac{5}{16} x + C.$$

б) Пусть $n = 3$, тогда

$$\int \sin^3 x dx = -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} + \frac{2}{3} \int \sin x dx =$$

$$= -\frac{\sin^2 x \cos x}{3} - \frac{2}{3} \cos x + C.$$

ПРИМЕР 49. Найти интеграл

$$\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k}, \qquad k - \text{целое число, большее } 1 \qquad (4)$$

Решение.

$$\int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^k} = \frac{1}{m^2} \int \frac{(t^2 + m^2) - t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt =$$

$$= \frac{1}{m^2} \int \frac{dt}{(t^2 + m^2)^{k-1}} - \frac{1}{m^2} \int \frac{t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt \qquad (5)$$

Преобразуем интеграл:

$$\int \frac{t^2}{(t^2 + m^2)^k} dt = \int \frac{t \cdot t}{(t^2 + m^2)^k} dt = \frac{1}{2} \int t \frac{d(t^2 + m^2)}{(t^2 + m^2)^k} =$$

$$= -\frac{1}{2(k-1)} \int t d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right).$$

Применим метод интегрирования по частям. Пусть $u = t$, $dv = d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right)$, тогда
$du = dt, \quad v = \left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right)$. Следовательно,

$$\int \frac{t^2}{(t^2+m^2)^k} dt = -\frac{1}{2(k-1)} \int t d\left(\frac{1}{(t^2+m^2)^{k-1}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{t}{(t^2+m^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

Подставив последний результат в формулу (5) и выполнив приведение подобных членов, получим:

$$\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}} +$$

$$+\frac{2k-3}{2m^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k-1}}.$$

Эта формула является рекуррентной формулой для интеграла (4). Повторным ее применением мы приведем вычисление интеграла (4) к вычислению табличного интеграла

$$\int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{t}{m} + C.$$

Глава 27

Добавление 6. Примеры и контрпримеры в теории рядов и интегралов

§1. Иллюстрирующие примеры. Числовые ряды

1. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Решение.
Представим общий член ряда $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ в виде

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$$

Умножая на обе части равенства на $n(n+1)(n+2)$, получим

$$1 \equiv A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1).$$

Полагая $n = 0, -1, -2$, находим $A = 1/2$, $B = -1$, $C = 1/2$. Таким образом

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Теперь легко вычислить частичную сумму

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Тогда сумма ряда есть предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}$.

2. Вычислить суммы рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6};\ \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n+3)(2n+5)};\ \frac{4}{3} - \frac{8}{9} + \frac{16}{27} - \frac{32}{81} + \ldots$$

3. Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$$

4. С помощью критерия Коши показать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n}$$

Решение. Отметим, что для любых $n \geq m$ выполнено

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{\cos k}{2^k}\right| \leq \sum_{k=m}^{n} \frac{|\cos k|}{2^k} \leq \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{2^k} =$$

$$= \frac{1}{2^{m-1}}\left(1 - \frac{1}{2^{n-m+1}}\right) \leq \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда для всех $m > N(\varepsilon) \equiv 1 + \log_2 \varepsilon$ имеет место неравенство $1/2^{m-1} < \varepsilon$. Следовательно для любых $m > N(\varepsilon)$ выполнено

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{\cos k}{2^k}\right| \leq \frac{1}{2^{m-1}} < \varepsilon,$$

таким образом рассматриваемый ряд сходится.

5. Используя критерий Коши исследовать на сходимость ряды

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n}{3^n-1}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathrm{arctg} n}{n^2}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-3}$;

6. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\sqrt{n})^2}$ расходится.

   Решение. Сравним данный ряд с гармоническим. Для этого воспользуемся теоремой 4.2. Полагая $a_n = \frac{1}{(1+\sqrt{n})^2}$ и $b_n = 1/n$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+\sqrt{n})^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/\sqrt{n}+1)^2} = 1 > 0.$$

   Следовательно, ряд сходится.

7. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos(\frac{1}{n}))$.

   РЕШЕНИЕ: Для всех натуральных n имеем

$$0 \le 1 - \cos(\frac{1}{n}) = 2\sin^2\frac{1}{2n} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

   В силу того, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то по теореме 4.1 исходный ряд тоже сходится.

8. Исследовать на сходимость ряды

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{1}{n} - \cos(\frac{2}{n}))$;

   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n+n}{(2^n+1)(4^n+3)}$.

9. Исследовать на сходимость ряды

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^{-\sqrt{5}+3/2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^{3/2}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3n+4)^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$;

   г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^{2-\sqrt{5}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{2n+1}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n(1+\sqrt{n})^2}$;

   ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2}+1)^{-\sqrt{3}+1/2}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

   к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[4]{n}+1)^{-3}$; л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{2n^2+n-2}$; м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n}+1)^{-\lg 2009}$;

   н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n(1+\sqrt{n})^2}$.

10. Исследовать на сходимость знакочередующиеся ряды.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\ln n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n^2+n-1}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\sqrt[3]{n}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n-2}$; е) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln\ln n}{n\ln n}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln n^3}{\sqrt{n}+1}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[3]{n}}{1+\sqrt{n}}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+3}$;

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3n+2}$; л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$; м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+\sqrt{n}+1}$;

н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2-3\sqrt{n}}$; о) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$; п) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^2 n}{\sqrt{n}+1}$.

11. Исследовать следующие ряды на сходимость.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{(\sqrt[3]{n+1})^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[4]{n}+1)^{-3}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n}+1)^{-3}$; е) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n\ln\ln n}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)^{-\sqrt{5}+3/2}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3 2^n}{n!}$; и) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1+\sqrt{n}}{n-1}$.

к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$; л) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{e^{n^2}}$; м) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n+\sqrt{n}}$;

н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$; о) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1+\sqrt[3]{n}}{(n-1)(\sqrt{n}+2)}$; п) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$.

§2. Иллюстрирующие примеры. Функциональные последовательности и ряды

1. Исследовать на равномерную сходимость функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве E.

а) $\{f_n(x)\} = \{\frac{nx+1}{n+3}\}$, $E = [0, 2]$;

б) $f_n(x) = \ln(x + \frac{1}{n})$, $E = [1, +\infty)$;

в) $f_n(x) = \cos\frac{x}{n}$, $E = \mathbf{R}$, $E = [0, 2\pi]$;

г) $f_n(x) = n\,\mathrm{arctg}\frac{x}{n}$, $E = \mathbf{R}$, $E = [0, 1]$.

2. Найти область сходимости ряда

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4+(-1)^n)^n}{n}(x+2)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\sin x\right)^n\frac{1}{n}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\cos x\right)^n\frac{1}{n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}(x-1)^{-n}$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{x+1})^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}(x-1)^n$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}(x+1)^n$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}(x-1)^n$;

и) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}(x)^n$;

к) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{x+1})^n$; л) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}(x-1)^{-n}$; м) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{x+1})^n$;

н) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\cos x\right)^n\frac{1}{n}$; о) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$; п) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{x+1})^n$;

р)$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2}(x-1)^{-n}$.

§3. Иллюстрирующие примеры. Несобственные интегралы

1. Вычислить интегралы

а) $\int\limits_0^1 \ln x dx$; б) $\int\limits_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}dx$; в)$\int\limits_0^1\frac{1+x}{\sqrt{x}}dx$;

г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-2x+4}$; д) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; е) $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$;

ж) $\int\limits_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\,dx$.

2. Исследовать следующие интегралы на сходимость.

а) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^4e^{-x^2}dx$; в) $\int\limits_0^1\frac{dx}{1-\sqrt{x}}$;

г) $\int\limits_1^{\infty}\frac{xdx}{(x+1)^3}$; д) $\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}-1}$; е) $\int\limits_0^2\frac{dx}{\ln^2 x}$;

ж) $\int\limits_1^\infty \frac{x^2 \sin x dx}{(x+1)^3}$; з) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt[3]{x}}$; и) $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{\ln^2 x}$;

к) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x)}}$; л) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$; м) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x dx}{1-\sqrt{x}}$.

Ряды Фурье

1. Записать ряд Фурье для следующих функций
   а) $y = \sin^2 x$ на $[0, 2\pi]$; б) $y = \cos^3 x$ на $[-\pi; \pi]$;
   в) $y = x$ на $[-\pi, \pi]$; г) $y = \operatorname{sign}(x-1)$ на $[0; 2]$;
   д) $y = \mathrm{e}^x$ на $[0; 2\pi]$; е) $y = \sin \frac{x}{2}$ на $[-\pi; \pi]$.

§4. Иллюстрирующие примеры. Интегралы, зависящие от параметра

1. Вычислить произодную интеграла по параметру.
   а) $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-(x-t)^2} dx$; б) $\int\limits_t^{3t} \frac{\sin(x-t)}{x-t} dx$; в) $\int\limits_{1-t}^{\sin t} f(x) dx$.
2. При каких значениях p справедливо равенство
$$\lim_{t \to +0} \int\limits_0^1 \frac{t dx}{x^p + t} = 0\,?$$
3. Найти значения параметра t, при которых интеграл
$$\int\limits_{-1}^1 \frac{\sin tx}{x} dx$$
   непрерывен по параметру t.

Несобственные интегралы, зависящие от параметра

1. Найти область сходимости несобственного интеграла

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^m dx}{x^p+x}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{x^m dx}{x+x^q}$; в) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p+x^q}$;

г) $\int\limits_1^{+\infty} x^p \mathrm{e}^{qx}$; д) $\int\limits_0^1 \frac{\sin x dx}{\sqrt{x+x^q}}$; е) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^m dx}{x^p+x^q}$;

ж) $\int\limits_0^1 \frac{x^m dx}{x^p+x^q}$; з) $\int\limits_1^{\infty} \sin x^\alpha$; и) $\int\limits_0^1 \sin x^\alpha dx$;

к) $\int\limits_0^1 x^\beta \sin x^\alpha dx$; л) $\int\limits_0^{\pi} \cos x^\alpha dx$; м) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha (1-x^2)^\beta}$;

н) $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^2+1}{x^\alpha+x^\beta} dx$.

§5. Важнейшие контрпримеры

В данном параграфе рассмотрим некоторые полезные примеры.

ПРИМЕР 1. Расходящийся ряд, общий член которого стремится к нулю:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

□

ПРИМЕР 2. Сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ такие что $a_n \geq b_n$:

$$a_n = 0, \quad b_n = -\frac{1}{n}.$$

□

ПРИМЕР 3. Сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и расходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ такие что выполнено $|a_n| \geq |b_n|$:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

□

ПРИМЕР 4 (Контрпримеры на условия теоремы Лейбница). Напомним условия выполнения признака Лейбница: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, если

(a) $|c_1| \geq |c_2| \geq \dots$

(b) $c_{2n-1} \geq 0, c_{2n} \leq 0$

(c) $\lim_{n\to\infty} c_n = 0.$

(a) Следующий пример показывает существенность условия монотонности. Пусть $c_n = \frac{1}{n}$, если n –нечётное, $c_n = -\frac{1}{n^2}$, если чётное

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^2} + \dots.$$

По критерию Коши

$$\left|\sum_{k=2n+1}^{(2n+1)+(2p-1)} c_k\right| =$$

$$\left|\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \dots + \frac{1}{2n+(2p-1)}\right) - \left(\frac{1}{(2n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(2n+2p+2)^2}\right)\right| > \frac{\varepsilon_1}{2},$$

ряд расходится (мы приняли первую скобку $> \varepsilon_1$, т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ –расходится, и вторую скобку $< \frac{\varepsilon_1}{2}$, т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ –сходится).

(b) Для $c_n = \frac{1}{n}$ выполнены условия (a) и (c). Однако ряд расходится.

(c) Для $c_n = (-1)^n$ выполнены условия (a) и (b). При этом ряд расходится.

□

ПРИМЕР 5. Приведем еще один пример, подчеркивающий существенность монотонности в условиях выполнения признака Лейбница. Для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$$

отсутствует монотонность, ряд расходится. □

ПРИМЕР 6. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд из предыдущего примера, $b_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$, тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, однако

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1.$$

□

ПРИМЕР 7. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\ln\dfrac{n+1}{n}\right)$. Ранее было доказано неравенство

$$\frac{1}{n+1}<\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n}).$$

Тогда

$$0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2},$$

т.е. ряд сходится. Обозначим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n})=C.$$

Пусть $H_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ – частичные суммы гармонического ряда. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\ln\frac{k+1}{k})=H_n-\ln(n+1)\to C$$

при $n\to\infty$.
Получается

$$H_n=\ln n+C+\gamma_n,\qquad \lim_{n\to\infty}\gamma_n=0,$$

где $C=0.577215\ldots$ – постоянная Эйлера. □

ПРИМЕР 8. Пусть $\{a_n\}, \{b_n\}$ –последовательности положительных чисел, $p > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, тогда имеют место неравенства Гёльдера и Минковского

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Перейдём к пределу при $n \to \infty$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

причём из сходимости рядов в правых частях вытекает сходимость рядов в левых. □

ПРИМЕР 9. Приведем пример ряда, для которого не выполняются условия теоремы Лейбница, а ряд сходится:

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{6^2} + \dots .$$

□

Глава 28

Добавление 7. Примерная рабочая программа

по дисциплине "Математический анализ"
Факультет Математический

Курс	1	
Семестры	1	2
Всего аудиторных занятий, час	144	136
Лекции, час	72	68
Лабораторные занятия, час	72	68
Практические занятия, час		
Экзамен	1	1
Зачет	1	1

Рабочая программа составлена на основании учебного плана по специальности "Математика".

Составители рабочей программы:

д.ф.-м.н. доц. А.А. Клячин

д.ф.-м.н. проф. А.Г. Лосев

д.ф.-м.н. проф. В.М. Миклюков

Раздел 1. Цели и задачи учебной дисциплины

1.1. *Цели преподавания дисциплины.* Математический анализ — важнейший базовый курс, целью которого является закладка фундамента математического образования.

1.2.*Задачи изучения дисциплины.*

1.2.1. *Студент должен знать:*

основные понятия (предела последовательности; предела функции; точной верхней и точной нижней граней; непрерывности; равномерной непрерывности; производной и дифференциала; экстремума и локального экстремума функции;

неопределенного и определенного интегралов; суммы числового и функционального рядов; неявной и параметрически заданной функции), формулировки важнейших теорем (о пределе числовой последовательности; о непрерывных и дифференцируемых функциях одного и нескольких переменных; о неопределенном и определенном интегралах; о числовых и функциональных рядах; об интегралах, зависящих от параметра).

1.2.2. *Студент должен уметь:*

находить предел числовой последовательности и функции; вычислять производную и интеграл; строить и исследовать графики функций одного и нескольких переменных; исследовать на сходимость (в том числе, равномерную) числовые и функциональные ряды; раскладывать функцию в ряд Тейлора и ряд Фурье; исследовать на сходимость интегралы, зависящие от параметра.

1.3. *Взаимосвязь учебных дисциплин.* Как базовый курс, математический анализ является основой при обучении студентов специальности "математика". Без знания математического анализа не может быть полноценно усвоена практически ни одна из математических дисциплин учебного плана.

Традиционно согласуются лишь рабочие программы курсов "дифференциальная геометрия" и "дифференциальные уравнения", чтение которых начинается до завершения полного изучения математического анализа. При обучении математическому анализу необходимо до начала чтения "дифференциальной геометрии" и "дифференциальных уравнений" ознакомить студентов с важнейшими понятиями и свойствами функций нескольких переменных (в частности, с теоремой о неявной функции, градиентом и его геометрическим смыслом).

Раздел 2. Содержание учебной дисциплины "МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ": ЛЕКЦИИ

Семестр 1

Множества и операции над ними, 10 час., коллоквиум, контрольная работа, зачет, экзамен

1. Вводная лекция. Предмет математического анализа, его место в естествознании.
2. Понятие множества. Отношения между множествами. Операции над множествами.
3. Множество вещественных чисел. Список аксиом: аксиомы сложения, аксиомы умножения, аксиомы порядка, аксиома полноты.

4. Множества на числовой прямой. Минимальный и максимальный элементы множества. Абсолютная величина и ее свойства. Ограниченные множества и их грани. Теорема о существовании точных граней.
5. Понятие окрестности. Понятие точки сгущения множества. Открытые и замкнутые множества. Расширенная числовая прямая $\overline{R}$. Окрестности бесконечно удаленных точек.

Предел последовательности, 12 час., коллоквиум, контрольная работа, зачет, экзамен
6. Предел числовой последовательности. Понятия последовательности и ее предела. Единственность предела. Ограниченные последовательности. Предельный переход в неравенстве.
7. Устойчивость неравенств при предельных переходах. Принцип "сжатой"
последовательности. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Бесконечно большие последовательности. Предел суммы, разности, произведения и частного.
8. Некоторые, часто встречающиеся последовательности. Монотонные последовательности. Существование предела монотонной последовательности. Рекуррентные последовательности.
9. Принцип вложенных отрезков. Вещественное число как последовательность измерений с бесконечно малой погрешностью.
10. Число "е". Натуральные логарифмы. Понятие подпоследовательности. Верхний и нижний пределы последовательности.
11. Теорема Больцано-Вейерштрасса об извлечении сходящейся подпоследовательности. Последовательности Коши. Критерий Коши.

Предел функции, 12 час., коллоквиум, зачет, контрольная работа, экзамен
12. Понятие функции. Однозначные и многозначные функции, способы их задания. Сужение функции. Суперпозиция функций. Обратная функция. Обратные тригонометрические функции. Понятие о гиперболических функциях.
13. Понятие предела функции в точке. 1-й "замечательный" предел. Эквивалентность определений предела функции в точке в смысле Коши и в смысле Гейне.
14. Арифметические операции над функциями, имеющими пределы. Единственность предела функции. Предельный переход и неравенства. Односторонние пределы функции в точке и их связь с двусторонним.

15. Существование предела монотонной функции. 2-й "замечательный" предел. Критерий Коши существования предела функции в точке.
16. Понятие непрерывности. Непрерывность сложной функции. Классификация точек разрыва. Непрерывность и разрывы монотонной функции. Условия существования обратной функции.
17. Обобщения понятия предела функции в точке. Бесконечно малые и их классификация. Асимптотические формулы. Некоторые пары эквивалентных функций. Выделение главной части бесконечно малой. Классификация функций одного переменного. Замечания о непрерывности элементарных функций.

Производная, 8 час., зачет, экзамен, контрольная работа
18. Производная функции в точке. Производная справа и производная слева. Геометрический и физический смыслы производной функции в точке.
19. Основные правила дифференцирования. Производная обратной функции. Таблица производных. Некоторые искусственные приемы нахождения производной.
20. Производные высшего порядка. Задача о приближении функции многочленом в окрестности точки. Дифференциал и его геометричекий смысл. Основные правила нахождения дифференциала. Дифференциалы высшего порядка.
21. Кривые на плоскости и в пространстве (основные понятия). Касательная и нормаль к кривой. Уравнения касательной и нормали. Параметрическое задание функций. Вычисление производных функций, заданных параметрически.

Свойства непрерывных функций, 6 час., зачет, экзамен
22. Точные грани функции. Максимум и минимум функции. Теорема о существовании максимума и минимума непрерывной функции.
23.Теорема об обращении в нуль непрерывной функции. Метод "вилки" приближенного решения уравнения. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.
24. Понятие равномерной непрерывности. Условия Липшица и Гельдера. Теорема Кантора о равномерной непрерывности.

Основные теоремы дифференциального исчисления, 8 час., зачет, экзамен, контрольная работа
25. Понятия локального максимума и локального минимума функции. Необходимое условие локального экстремума

дифференцируемой функции. Обращение в нуль производной функции.
26. Формула конечных приращений (формула Лагранжа). Некоторые следствия из формулы Лагранжа: достаточные условия возрастания и убывания функции; условие постоянства функции; условие Липшица.
27. Вторая разность. Выражение производной второго порядка через вторую разность. Обобщенная формула конечных приращений (формула Коши).
28. Раскрытие неопределенностей по правилам Лопиталя.

Приближенные методы решения уравнений, 4 час., зачет, экзамен
29. Метод итераций.
30. Понятия о методе касательных и методе хорд.

Формула Тейлора, 6 час., зачет, экзамен, контрольная работа
31. Производные многочлена и его разложение по степеням. Многочлен Тейлора: решение задачи о приближении функции многочленом в окрестности точки.
32. Остаточные члены в формуле Тейлора в формах Пеано, Лагранжа и Коши.
33. Примеры разложения функций по формуле Маклорена. Использование в приближенных вычислениях. Приложения формулы Тейлора к исследованию графиков функций.

Выпуклые функции, 6 час., зачет, экзамен, контрольная работа
34. Понятие выпуклой функции. Простейшие свойства выпуклой функции.
35. Условия выпуклости.
36. Неравенство Иенсена. Построение графиков функций.

Семестр 2

Неопределенный интеграл, 14 час., зачет, экзамен, контрольная работа
1. Понятие и основные свойства неопределенного интеграла.
2. Таблица интегралов. Замена переменных в неопределенном интеграле и формула интегрирования по частям.
3. Простые дроби и их интегрирование. Разложение правильных дробей на простые методом неопределенных коэффициентов.

4. Интегрирование выражений вида $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$. Подстановки Эйлера.
5. Интегрирование тригонометрических выражений. Универсальная подстановка.
6. Понятие об эллиптических интегралах. Биномиальные дифференциалы. Теорема Чебышева.
7. Метод Остроградского выделения рациональной части из интеграла.

Определенный интеграл, 12 час., зачет, экзамен, контрольная работа

8. Понятие определенного интеграла. Его геометрический и физический смысл. Пример неинтегрируемой по Риману функции. Теорема об ограниченности интегрируемой по Риману функции. Понятие несобственного интеграла.
9. Суммы Дарбу и их геометрический смысл. Верхний и нижний интегралы Дарбу. Теорема Дарбу.
10. Необходимое и достаточное условия интегрируемости по Риману. Интегрируемость по Риману непрерывных функций. Интегрируемость по Риману кусочно непрерывных функций. Интегрируемость по Риману монотонных функций.
11. Свойство аддитивности определенного интеграла. Интеграл по ориентируемому отрезку. Оценки интегралов.
12. Теорема о среднем. Обобщенная теорема о среднем.
13.Определенный интеграл с переменным верхним пределом (непрерывность и дифференцируемость.) Формула Ньютона-Лейбница. Связь определенного интеграла с неопределенным. Замена переменной и формула интегрирования по частям.

Приложения определенного интеграла, 4 час., зачет, экзамен

14. Вычисление длины дуги кривой, заданной в параметрическом и непараметрическом виде.
15. Площадь криволинейного сектора при различных способах задания сектора.

Приближенные методы вычисления определенного интеграла, 4 час., зачет, экзамен

16. Формула прямоугольников, формула трапеций.
17. Формула Симпсона.

Функции нескольких переменных, 34 час., зачет, экзамен, контрольная работа

18. Многомерное евклидово пространство. Неравенства Коши и Минковского. Открытые и замкнутые множества. Ограниченные и неограниченные множества.

19. Лемма Больцано-Вейерштрасса. Критерий Коши сходимости последовательности точек.
20. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Повторные пределы.
21. Основные теоремы о непрерывных функциях нескольких переменных.
22. Частные производные. Полный дифференциал. Условие существования полного дифференциала функции в точке.
23. Равенство смешанных производных. Конечно-разностная аппроксимация частных производных второго порядка.
24. Производные сложных функций.
25. Полный дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.
26. Дифференциалы высшего порядка. Однородные функции. Формула Эйлера для однородных функций.
27. Производная по направлению. Градиент и его геометрический смысл.
28. Линии уровня функций двух переменных и их свойства.
29. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
30. Необходимые условия локального экстремума для функции нескольких переменных
31. Достаточные условия локального экстремума для функции нескольких переменных
32,33. Теорема о неявной функции.
34. Задача на условный экстремум. Правило неопределенных множителей Лагранжа.

Методические указания – [1]-[3]

Раздел 3. Учебно-методические материалы дисциплины.

3.1. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ.

Номера задач и упражнений даны по сборнику Б.П. Демидовича [4]. Объем указанных ниже заданий следует рассматривать как минимальный.

Семестр 1

1. *1 неделя* (метод математической индукции) 4 час.

№№ 1-10.1.

2. *2 неделя - 4 неделя* (исследование функций без использования понятия производной) 12 час.

№№ 151-170, 175, 176, 178-180, 183-195, 199-208, 21-29, 209-230, 253-262, 266-273, 288-322, 323-360, 369-371.

3. *5 неделя - 6 неделя* (предел последовательности) 8 час.

№№ 41-69, 72, 74, 75, 77-93, 101-115, 116-119, 131-134, 142-145.

4. *7 неделя - 11 неделя* (предел функции) 20 час.

№№ 381-399, 401-407, 411-428, 435-465, 471-480, 482-505, 511-530, 541-563, 564-576, 581-597, 613-625, 627, 641-643, 646-658, 675-731, 744-745, 759-762, 767-772, 779, 787-800, 802, 808-813.

5. *12 неделя - 15 неделя* (производная) 16 час.

№№ 821-824, 829-831, 836-983, 996, 999-1008, 1034-1054, 1057-1060, 1065-1066, 1085-1096, 1111-1144, 1156-1178, 1191-1207, 1225, 1228.

6. *16 неделя - 18 неделя* (основные теоремы дифференциального исчисления, формула Тейлора, исследование функций, выпуклые функции) 12 час.

№№ 1235-1237, 1251, 1254-1255, 1268-1278, 1289, 1298-1307, 1314, 1318-1374(25 задач), 1377-1387, 1414-1423, 1429-1449, 1471-1554(25 задач), 1556-1568.

Семестр 2

1. *1 неделя - 7 неделя.* (техника неопределенного интегрирования) 28 час.

№№ 1628-1650, 1655-1666, 1674-1693, 1721-1730, 1741-1758, 1766-1776, 1778-1784, 1786-1789, 1791-1835(каждая вторая), 1836-1849, 1851-1859, 1866-1884, 1891-1900,
1903-1920, 1921, 1926-1932, 1937-1941, 1943-1946, 1952-1955, 1966-1970, 1971-1978, 1981-1989,
1991-2008, 2011, 2012, 2013-2017, 2019-2021, 2025-2035,2043-2045,
2060-2063, 2068-2078, 2082-2089, 2098-2110, 2126-2168(20 задач)

2. *8 неделя - 10 неделя.* (определенный интеграл) 12 час.

№№ 2181-2183, 2185-2189, 2193-2198, 2200-2205,
2206-2222, 2237, 2239-2258, 2268-2276,
2281-2284, 2290-2292, 2316-2318, 2326, 2328-2330

3. *11неделя -12 неделя.* (приложения определенного интеграла) 8 час.

№№ 2397-2403, 2413-2416, 2418-2422, 2426-2428, 2431-2448, 2462-2467, 2472-2478, 2486-2490, 2501-2509, 2516-2521.

4. *13 неделя - 15 неделя.* (предел функции нескольких переменных. Частные производные. Дифференциал функции нескольких переменных) 12 час.

№№ 3136-3145, 3151-3159, 3166-3169, 3176-3178, 3181-3184, 3185-3200,
3211-3230, 3231-3233, 3235-32423, 3251-3253,
3256-3264, 3269-3276, 3283-3301, 3321-3325, 3341-3347.

5. *16 неделя - 17 неделя.* (формула Тейлора. Неявные функции. Экстремум функций нескольких переменных) 8 час.

3581-3586, 3593-3600, 3361-3365, 3371-3375, 3383-3398, 3400, 3434-3440,
3621-3628, 3651-3660, 3675-3578.

3.2. ОРГАНИЗУЕМАЯ САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Индивидуальное задание по теме "Производная", сем. 1, 11-17 недели, собеседование по результатам его выполнения.

Индивидуальное задание по теме "Неопределенный интеграл", сем. 2, 4-16 недели, собеседование по результатам его выполнения.

3.3. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

1. В.А. Зорич, Математический анализ. Ч. 1-2.
2. Л.Д. Кудрявцев, Курс математического анализа. Ч. 1-2.
3. Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1-3.
4. Б.В. Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

Раздел 4. КОНТРОЛЬ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Семестр 1

Теоретические занятия. Сем. 1. Коллоквиум по темам "Предел последовательности" и "Предел функции".
Лабораторные работы. Сем. 1. Самостоятельная работа на 5 неделе. Две контрольных работы на 9 неделе и 16 неделе.
Самостоятельная работа студентов. Сем. 1. Индивидуальное задание по теме "Производная"(выдается на 11 неделе).

Зачет. Экзамен.

Семестр 2

Теоретические занятия. Сем. 2. Текущий контроль во время лекций и лабораторных занятий.
Лабораторные работы. Сем. 2. Контрольные работы на 9 неделе и 17 неделе.
Самостоятельная работа студентов. Сем. 2. Индивидуальное задание по теме "Неопределенный интеграл"(выдается на 4 неделе).

Зачет. Экзамен.

Авторский и предметный указатель