5 Условная вероятность. Независимость

Определение 5.1. Условной вероятностью *случайного события A относительно случайного события B, имеющего ненулевую вероятность, называется*

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Определение 5.2. *Система событий $\mathcal{D} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ называется* разбиением*, или* полной группой событий*, если*

$$H_i \cap H_j = \varnothing \text{ при } i \neq j, \text{ и } \bigsqcup_{i=1}^{n} H_i = \Omega.$$

Теорема 5.1 (Формула полной вероятности)**.** *Пусть A — случайное событие; J — конечное или счетное множество; $(H_j)_{j \in J}$ — разбиение. Тогда*

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{j \in J} \mathsf{P}(A \mid H_j)\mathsf{P}(H_j).$$

Теорема 5.2 (Формула Байеса)**.** *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и $\mathsf{P}(A) \neq 0$. Тогда*

$$\mathsf{P}(H_k \mid A) = \frac{\mathsf{P}(A \mid H_k)\mathsf{P}(H_k)}{\sum\limits_{j \in J} \mathsf{P}(A \mid H_j)\mathsf{P}(H_j)}, \quad k \in J.$$

Определение 5.3. *События A и B называются* независимыми*, если $\mathsf{P}(A \cap B) = \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)$.*

Определение 5.4. *События $A_1, \ldots, A_n$ называются* независимыми в совокупности*, если*

$$\mathsf{P}(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k}) = \mathsf{P}(A_{j_1}) \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}(A_{j_k})$$

для любого k, $1 < k \leqslant n$, и для любых $j_1, \ldots, j_k$ таких, что $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n$.

Определение 5.5. *События $A_1, A_2, \ldots$ называются* независимыми в совокупности*, если для любого $n > 1$ события $A_1, \ldots, A_n$ независимы в совокупности.*

5.1. Пусть $\mathsf{P}(A) = \alpha < 1$, $\mathsf{P}(B) = \beta$, $\mathsf{P}(AB) = \gamma$. Найти $\mathsf{P}(\overline{B} \mid \overline{A})$.

5.2. События A и B независимы, A и C независимы, B и C несовместны. Доказать, что A и $B \cup C$ независимы.

5.3. Доказать:

1. если A и B — несовместные события и $\mathsf{P}(A \cup B) \neq 0$, то $\mathsf{P}(A|A \cup B) = \mathsf{P}(A)/(\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B))$;

2. если $\mathsf{P}(A|B) > \mathsf{P}(A)$, то $\mathsf{P}(B|A) > \mathsf{P}(B)$;

3. если $\mathsf{P}(B) \neq 0$, то $\mathsf{P}(A|B) \geqslant (\mathsf{P}(A) + \mathsf{P}(B) - 1)/\mathsf{P}(B)$.

5.4. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что выпало две „3“, если известно, что:

1. сумма выпавших очков делится на 3;

2. произведение выпавших очков равно 9;

3. выпало разное число очков.

5.5. Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, два игрока извлекают шары по очереди, каждый раз возвращая вынутый шар в урну. Выигрывает тот, кому раньше попадется белый шар. Найти вероятность выигрыша первого игрока.

5.6. В урне n белых, m черных и k красных шаров. Определить вероятность того, что при выборе с возвращением белый шар будет извлечен раньше черного.

5.7. Юноша собирается сыграть три теннисных матча со своими родителями и хочет победить два раза подряд. Какой порядок игр для него предпочтительней: отец – мать – отец или мать – отец – мать, если вероятность выиграть у матери выше, чем вероятность выиграть у отца?

5.8. Из урны, содержащей 3 белых и 3 черных шара, два человека поочередно извлекают по одному шару без возвращения. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Найти вероятность выигрыша первого игрока.

5.9. Решить предыдущую задачу в случае с выбором без возвращения.

5.10. В урне первоначально находилось N белых и M черных шаров. Один шар потерян и цвет его неизвестен. Из урны извлекли два шара и оба оказались белыми. Найти вероятность того, что был потерян белый шар.

Решение. Рассмотрим событие A="из урны извлекли два белых шара" и две гипотезы относительно потерянного шара: H_1="потерян белый шар" и H_2="потерян черный шар". Ясно, что $\mathsf{P}(H_1) = \frac{N}{N+M}$, $\mathsf{P}(H_2) = \frac{M}{N+M}$. Найдем условные вероятности $\mathsf{P}(A|H_i)$, $i = 1, 2$:

$$\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{C_{N-1}^2}{C_{N+M-1}^2} = \frac{(N-1)(N-2)}{(N+M-1)(N+M-2)},$$

$$\mathsf{P}(A|H_2) = \frac{C_N^2}{C_{N+M-1}^2} = \frac{N(N-1)}{(N+M-1)(N+M-2)}.$$

Воспользуемся формулой полной вероятности

$$\mathsf{P}(A) = \frac{(N-1)(N-2)}{(N+M-1)(N+M-2)}\frac{N}{N+M} +$$

$$+\frac{N(N-1)}{(N+M-1)(N+M-2)}\frac{M}{N+M} = \frac{N(N-1)}{(N+M)(N+M-1)}.$$

По формуле Байеса находим

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(A|H_1)\mathsf{P}(H_1)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\frac{(N-1)(N-2)}{(N+M-1)(N+M-2)} \cdot \frac{N}{N+M}}{\frac{N(N-1)}{(N+M)(N+M-1)}} = \frac{N-2}{N+M-2}.$$

5.11. В двух урнах содержится соответственно n_1 и n_2 шаров, из них белых шаров k_1 и k_2. Из первой урны переложили в другую один шар, цвет которого неизвестен. После этого из другой урны берут один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

5.12. В двух урнах содержится соответственно n_1 и n_2 шаров, из них белых шаров k_1 и k_2. Из первой урны переложили в другую один шар, цвет которого неизвестен. После этого из другой урны берут один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

5.13. Подбрасываются три игральные кости. Событие A состоит в том, что одинаковое число очков выпало на первой и второй костях, событие B — одинаковое число очков на второй и третьей костях, C — на первой и третьей. Будут ли события A, B и C: а) попарно независимы; б) независимы в совокупности?

5.14. Имеется n экзаменационных билетов, среди которых m "счастливых". Доказать, что вероятность извлечения счастливого билета у второго экзаменуемого такая же, что и у первого.

5.15. В первой урне 1 белый и 4 красных шара, а во второй 1 белый и 7 красных шаров. В первую урну добавляют два шара, случайно выбранные из второй урны.

а) Найти вероятность того, что шар, выбранный из пополненной первой урны, будет белым.

б) Пусть из пополненной первой урны по схеме случайного выбора с возвращением извлекают k шаров. Найти вероятность того, что все они будут белыми.

5.16. В ящике находится 10 теннисных мячей, их которых 6 новых. Для первой игры наугад берут два мяча, которые после игры возвращают в ящик. Для второй игры также наугад берут два мяча. Найти вероятность того, что оба мяча, взятые для второй игры, новые.

5.17. (Задача о четырёх лгунах). Есть четыре человека. Первый получил информацию и в виде сигнала „да“ или „нет“ передаёт её второму, второй - третьему, третий - четвёртому, причём каждый говорит правду с вероятностью 1/3. Какова вероятность, что первый сказал правду, если четвёртый передал верную информацию?

5.18. Телеграфное сообщение состоит из сигналов “точка” и “тире”. Статистические свойства помех таковы, что искажаются в среднем 2/5 сообщений “точка” и 1/3 сообщений “тире”. Известно, что среди передаваемых сигналов “точка” и “тире” встречаются в отношении 5 : 3. Определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если приняли “точку”.

5.19. Среди проверяемых изделий 96% удовлетворяют стандарту. Предлагается упрощенная схема проверки качества, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для стандартного изделия, а для нестандартного – с вероятностью 0,05. Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее проверку, является стандартным?

5.20. Три одинаково сильных шахматиста участвуют в турнире по схеме: сначала играют A и B, затем победитель играет с C, новый победитель играет с побежденным в предыдущем туре и т. д. Турнир считается законченным, если кто-либо победит два раза подряд. Какова вероятность победы каждого из шахматистов?

6 Независимые испытания. Схема Бернулли

Определение 6.1. *Рассмотрим некоторую серию случайных экспериментов. Точнее, некоторый эксперимент проводится n раз. Причем условия эксперимента не меняются и результат не зависит от уже прошедших испытаний.*

Будем считать, что каждый раз в результате эксперимента возможны два исхода: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{1; 0\}$. Обозначим через “1” — “успех”, “0” — “неудача”. Такая серия случайных экспериментов называется схемой Бернулли.

Обозначим через p — вероятность того, что в одном эксперименте произойдет “успех”, а q — вероятность “неудачи”. Обозначим через $A_k(n)$ случайное событие, состоящее в том, что в серии из n экспериментов будет ровно k успехов.

Теорема 6.1 (Формула Бернулли)**.**

$$\mathsf{P}(A_k(n)) = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n.$$

Теорема 6.2 (Закон редких событий, или теорема Пуассона)**.** *Пусть в* *схеме Бернулли, при* $n \to \infty$, $p \to 0$, $n \cdot p \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$. *Тогда*

$$\mathsf{P}(A_k(n)) \to \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k = 0, 1, \dots \tag{1}$$

Теорема 6.3 (Муавра–Лапласа). *Пусть* S_n *— число успехов в схеме Бернулли из* n *независимых испытаний с вероятностью* p *успеха в отдельном испытании.*

Тогда $\forall\ \alpha < \beta$

$$\mathsf{P}\left(\alpha \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leqslant \beta\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2/2} dt \text{ при } n \to \infty. \tag{2}$$

Следствие 1. *Пусть* S_n *— число успехов в схеме Бернулли из* n *независимых испытаний с вероятностью* p *успеха в отдельном испытании.*

Тогда при больших n*:*

$$\mathsf{P}\left(k_1 \leqslant S_n \leqslant k_2\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2/2} dt, \tag{3}$$

где $\alpha = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $\beta = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Следствие 2. *Пусть* S_n *— число успехов в схеме Бернулли из* n *независимых испытаний с вероятностью* p *успеха в отдельном испытании.*

Тогда при больших n*:*

$$\mathsf{P}(S_n = k) = \mathsf{P}(A_k(n)) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{4}$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

Следствие 3. *Пусть* S_n *— число успехов в схеме Бернулли из* n *независимых испытаний с вероятностью* p *успеха в отдельном испытании.*

Тогда при больших n *вероятность абсолютного отклонения частоты успеха от вероятности* p *на величину* $\varepsilon > 0$ *может быть вычислена по формуле:*

$$\beta = \mathsf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1, \tag{5}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$.

6.1. Игральная кость бросается два раза, x_1 и x_2 — числа очков, выпавших при этих испытаниях. Рассмотрим события:

$$\begin{array}{lll} A_1 = \{x_1 \div 2, x_2 \div 3\}, & A_2 = \{x_1 \div 3, x_2 \div 2\}, & A_3 = \{x_1 \div x_2\}, \\ A_4 = \{x_2 \div x_1\}, & A_5 = \{x_1 + x_2 \div 2\}, & A_6 = \{x_1 + x_2 \div 3\}. \end{array}$$

Найти все пары и тройки взаимно независимых событий.

6.2. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет не менее 2 раз.

6.3. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: а) выиграть три партии из четырех (A) или пять партий из восьми (B); б) выиграть не менее трех партий из четырех (C) или не менее пяти партий из восьми (D)?

6.4. Найти вероятность того, что при бросании двух игральных костей впервые “6” (хотя бы на одной из двух костей) появится при k-м бросании.

6.5. В последовательности из n независимых испытаний с вероятностью успеха p в отдельном испытании произошел ровно один успех. Какова вероятность того, что успех произошел на втором испытании?

6.6. В схеме испытаний предыдущей задачи произошли ровно два успеха. Найти вероятность того, что успехи произошли в соседних испытаниях.

6.7. Вероятность успеха в каждом испытании схемы Бернулли равна p. Найти вероятность того, что m-й успех произойдет при n-м испытании.

6.8. Движением частицы по целым точкам прямой управляет схема Бернулли с вероятностью p исхода 1: если в данном испытании схемы Бернулли появилась 1, то частица переходит в правую соседнюю точку, а в противном случае — в левую. Найдите вероятность того, что за n шагов частица из точки 0 перейдет в точку m.

6.9. Найдите наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли из n испытаний с вероятностью успеха p в отдельном испытании.

6.10. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений шестерки равнялось 32?

6.11. Чему равна вероятность p наступления события в каждом из 49 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступления события в этих испытаниях равно 30?

6.12. Предположим, что вероятность выхода из строя каждого двигателя самолета равна q, причем независимо друг от друга. Самолет может продолжать полет, если работает не менее половины его двигателей. При каких q четырехмоторный самолет следует предпочесть двухмоторному?

6.13. Задача Банаха. Некий математик носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда он хочет достать спичку, производится выбор одной из двух коробок наугад. Найти вероятность того, что в момент опустошения одной из коробок в другой останется ровно r спичек. Первоначально каждая коробка содержала n спичек.

6.14. Вероятность схода с конвейера бракованного изделия равна 0,01. Сколько изделий необходимо взять для проверки, чтобы вероятность обнаружения среди них хотя бы одного бракованного была не меньше 0,9?

6.15. Предприятие ежедневно выпускает N приборов, каждый из которых состоит из n деталей. Вероятность каждой детали быть дефектной равна p и не зависит от качества других деталей. Стоимость каждого прибора k рублей. Найти значения p, при которых проверка на качество каждой детали экономически нецелесообразна, если стоимость проверки одной детали m рублей.

6.16. На склад отправлено 6 000 изделий. Вероятность того, что во время транспортировки изделие будет повреждено, равна 0,0005. Найдите вероятность того, что будет повреждено: 1) ровно 7 изделий; 2) не менее 3 изделий; 3) не более 3 изделий.

6.17. Какова вероятность, что в группе, состоящей из 30 студентов, никто не родился в январе. Вычислите эту вероятность по формуле Бернулли и формуле Пуассона.

6.18. Найдите вероятность того, что событие A наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

6.19. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найдите вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

6.20. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найдите вероятность того, что событие произойдет: 1) не менее 75 раз и не более 90 раз; 2) не менее 75 раз; 3) не более 75 раз.

6.21. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найдите вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена: 1) не менее 70 и не более 80 раз; 2) не более 70 раз.

6.22. Вероятность появления события в каждом из 625 независимых испытаний равна 0,8. Найдите вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

6.23. Вероятность появления события в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найдите такое положительное число ε, чтобы с вероятностью 0,9876 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления события от его вероятности не превысила ε.

6.24. Вероятность появления положительного результата в каждом из n опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат?

6.25. В страховой компании 10 тысяч клиентов. Страховой взнос каждого клиента составляет 500 рублей. При наступлении страхового случая, вероятность которого, по оценкам экспертов, можно считать равной $p = 0,005$, страховая компания обязана выплатить клиенту страховую сумму в размере 50 тысяч рублей. На какую прибыль может рассчитывать страховая компания с надежностью 0,95?