

Použití TI-89 v úlohách předmětu BPC-MA3

Šťur

23. prosince 2024

Obsah

1	Prerekvizity	3
2	Základní práce s kalkulačkou	3
2.1	Změna aktuálně používané složky a její vytvoření	3
2.2	Uložení funkce jedné proměnné	4
2.3	Uložení funkce dvou proměnných	5
2.4	Vytvoření matice/vektoru	6
2.5	Derivování	8
2.6	Integrování	9
2.7	Základy práce s tabulkovým procesorem CellSheet	9
2.8	Řešení soustav lineárních rovnic	11
3	Numerické metody	13
3.1	Metoda nejmenších čtverců	13
3.2	Řešení jedné nelineární rovnice Newtonovou metodou	17

1 Prerekvizity

Vyžadován je tabulkový editor CellSheet, který si můžete stáhnout zde:

<https://education.ti.com/en/software/details/en/C348D29C99284143B9E3FE93CF6742A6/89cellsheet>

Taktéž je vyžadován Simultaneous Equation Solver App for the TI-89 Titanium, ke stažení zde:

<https://education.ti.com/en/software/details/en/BD358C4836B84DBCBA254D6554FBBEAC/89simultaneousequation>

2 Základní práce s kalkulačkou

2.1 Změna aktuálně používané složky a její vytvoření

Je praktické si vytvářet pro různé předměty složky a práci soustředit do nich.

Vytvoření probíhá následovně:

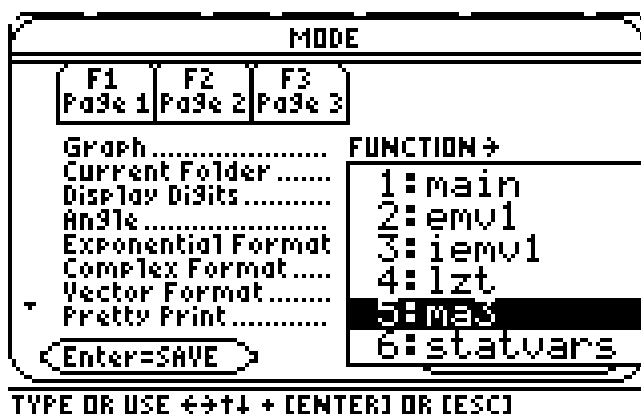
Klávesovou kombinací [2nd]+[-] vyvoláme VAR-LINK menu.

Klávesou [F1] následně vyvoláme Manage menu, Create folder je pátá položka.



Pomocí [ESC] obrazovku opustíme.

Chceme-li se do složky přepnout, vyvoláme klávesou [MODE] nastavení kalkulačky a změníme druhou položku.



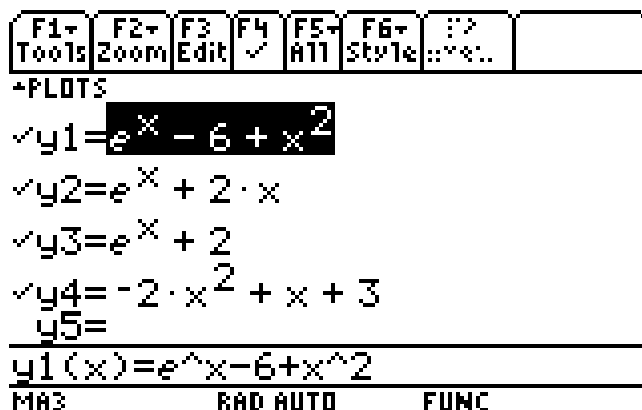
Položku volíme šipkou doprava, potvrzujeme klávesou [ENTER] a s uložením nastavení opouštíme taktéž klávesou [ENTER].

Poznámka: pro účely počítání MA3 může být praktické vynucení zobrazování výsledků jako desetinných čísel. V MODE menu se klávesou [F2] přepněte na stranu 2 a Exact/Approx položku změňte na APPROXIMATE a uložte.

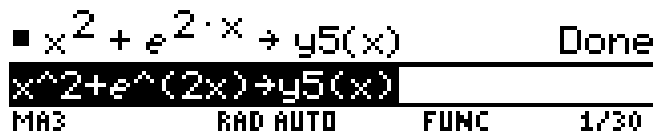
2.2 Uložení funkce jedné proměnné

V MODE menu se ujistěte, že položka Graph je nastavena na FUNCTION.

Klávesovou kombinací \diamond + $[F1]$ vyvoláme Y= menu. Zde můžeme do jednotlivých proměnných ukládat kýžené funkce.

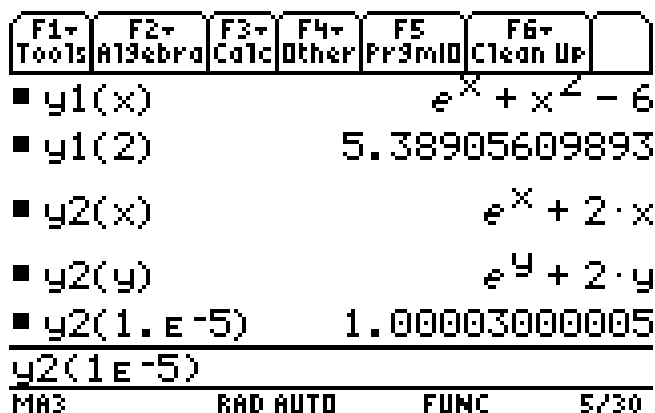


Uložit funkci do funkční proměnné lze taktéž z výchozí obrazovky následovně. Šipka je vyvolána klávesou $[STO \triangleright]$.



Obecně v TI-89 ukládáme výsledky již při zadávání příkladu pomocí $[STO \triangleright]$ a kýženého názvu proměnné, který u běžných číselných/maticových/řetězcových výsledků může být jakýkoliv (např. mnouk).

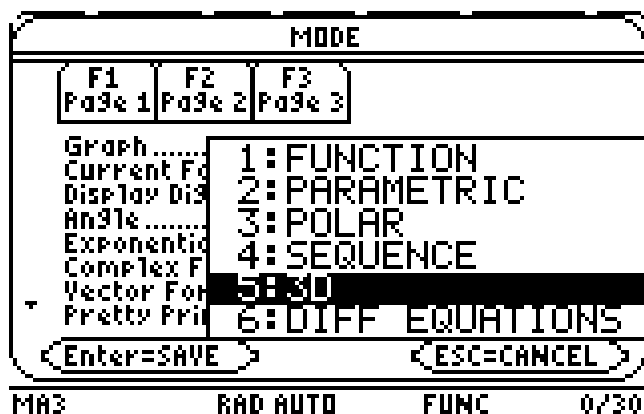
Ve výpočtech pak tyto funkce můžeme využívat následovně:



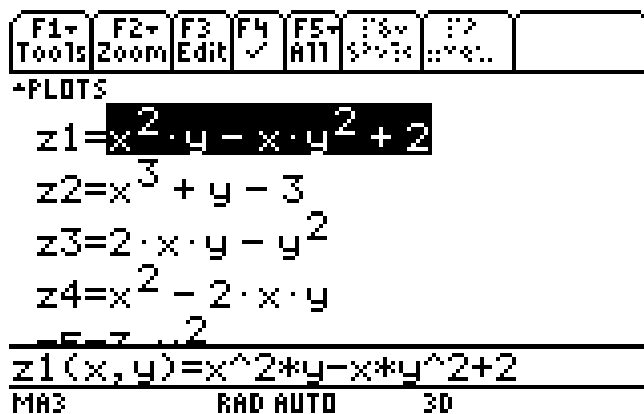
Pakliže výsledek není ve tvaru, který by nám vyhovoval (například je zlomkem), jako desetinné číslo ho můžeme zobrazit, pakliže místo klávesy $[ENTER]$ použijeme kombinaci \diamond + $[ENTER]$ (\approx).

2.3 Uložení funkce dvou proměnných

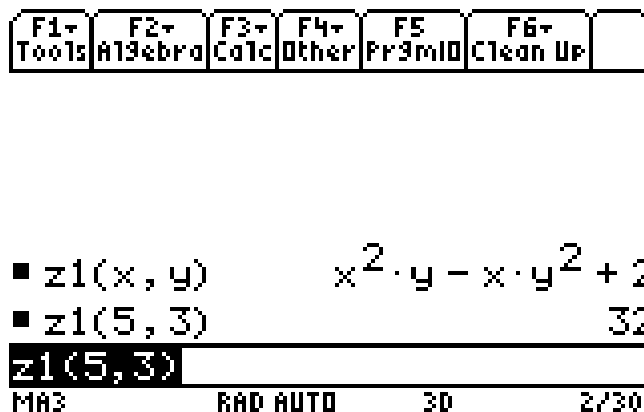
V MODE menu je nutno položku Graph přepnout do 3D:



Práce pak probíhá stejně, jako s funkcí jedné proměnné:



Musíme však mít na paměti, že do závorek za názvem proměnné je třeba dosadit 2 hodnoty, jelikož jde o funkci dvou proměnných:



2.4 Vytvoření matice/vektoru

Velmi jednoduché matice můžeme zadat přímo z výchozí obrazovky, je to však praktické nanejvýš u vektorů. Vektor $[5;3]$ zadáme jako:

$[[5][3]]$

Pro větší matice je žádoucí používat vestavěnou aplikaci Data/Matrix Editor, kterou nalezneme v APPS nabídce. Zvolíme New, což nás dostane na následující obrazovku:

NEW

Type: Data

Folder: ma3

Variable:

Row dimension: 1

Col dimension: 1

Enter=OK ESC=CANCEL

USE ← AND → TO OPEN CHOICES

Type je nutno přepnout na Matrix, do kolonky Variable zadáme název proměnné, do Row dimension a Col dimension pak počet řádků, respektive sloupců. Na následujícím obrázku je příklad vytvoření 2x2 matice s názvem "mnau":

NEW

Type: Matrix

Folder: ma3

Variable: mnau

Row dimension: 2

Col dimension: 2

Enter=OK ESC=CANCEL

MAT3 RAD AUTO FUNC

Po potvrzení můžeme zadávat:

	c1	c2	c3
1	0	0	
2	0	0	
3			
4			

r1c1=0

MAT3 RAD AUTO FUNC

Kromě čísel je možno do matice vkládat i funkce:

F1 Tools	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 Fr3Mid	F6 Clean Up	F7 Stat	
MAT 2x2							
1	c1	c2	c3				
2	$e^x + x$	0					
3	0	0					
4							
r1c2=y1(x)							
MA3 RAD AUTO FUNC							

Aplikaci opustíme QUIT kombinací, ([2ND]+[ESC]), uložení je automatické.

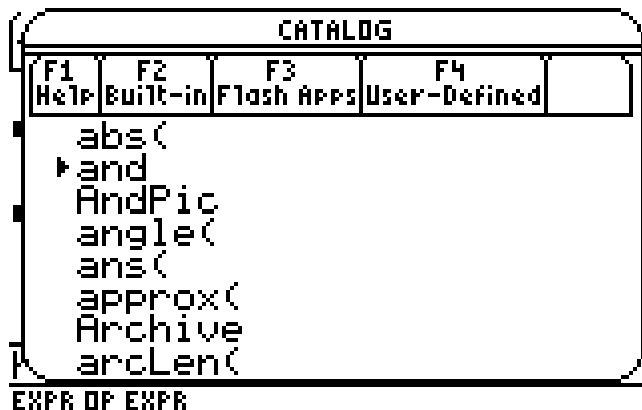
Na výchozí obrazovce pak matici vyvoláme prostým zadáním názvu proměnné, můžeme s ní i provádět libovolné dovolené matematické operace:

F1 Tools	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 Fr3Mid	F6 Clean Up	
■ mnau						
$\begin{bmatrix} e^x + x^2 - 6 & 5 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$						
■ mnau + 2						
$\begin{bmatrix} e^x + x^2 - 4 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$						
mnau+2						
MA3 RAD AUTO FUNC 2/30						

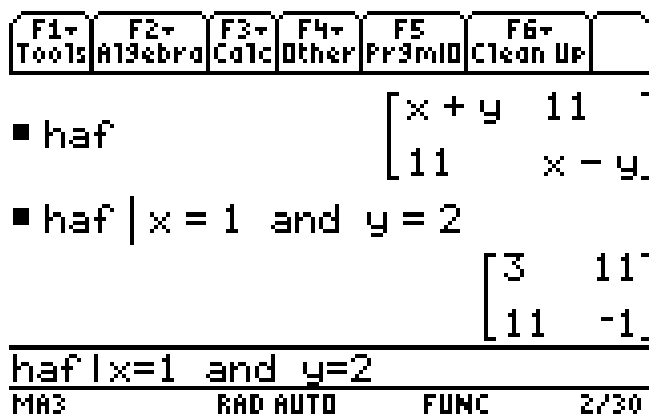
V matici máme dosazenou funkci. Pakliže chceme za proměnné ve funkci (nejen u matic) dynamicky dosazovat, použijeme za příkladem (a před případným STO) |x=(číslo). Svislou čáru vyvoláme klávesou [|].

F1 Tools	F2 Algebra	F3 Calc	F4 Other	F5 Fr3Mid	F6 Clean Up	
■ mnau x = 1						
$\begin{bmatrix} -2.28171817154 & 5. \\ 1. & -5. \end{bmatrix}$						
MA3 RAD AUTO FUNC 1/30						

U funkcí více proměnných používáme $x=(\text{číslo})$ and $y=(\text{číslo})$. Je nutno to napsat i s mezerami, pro usnadnění si jde "and "i s mezerami najít v nabídce CATALOG vyvolané tlačítkem [CATALOG]. V CATALOGu je možno se rychle pohybovat pomocí počátečního písmena, která můžeme vidět u jednotlivých kláves bíle. Pro přeskok do sekce funkcí začínajících písmenem 'a' stiskneme klávesu [=]:

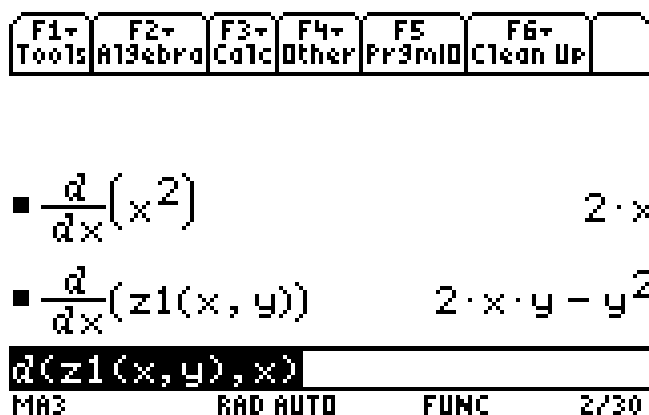


Výsledek pro funkci dvou proměnných je takovýhle:



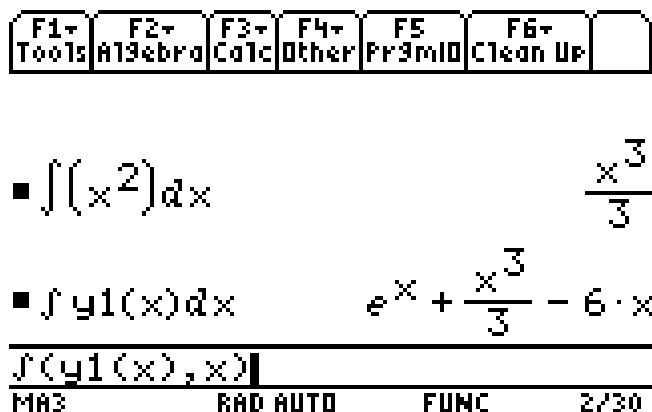
2.5 Derivování

Derivovat můžeme přímo z výchozí obrazovky, potřebnou funkci vyvoláme kombinací [2ND]+[8]. První parametr je vstupní funkce, druhý proměnná, podle které derivujeme (díky tomu je možno provádět i parciální derivace). Vstupem může být jak ručně napsaná funkce, tak funkce uložená do speciální proměnné:

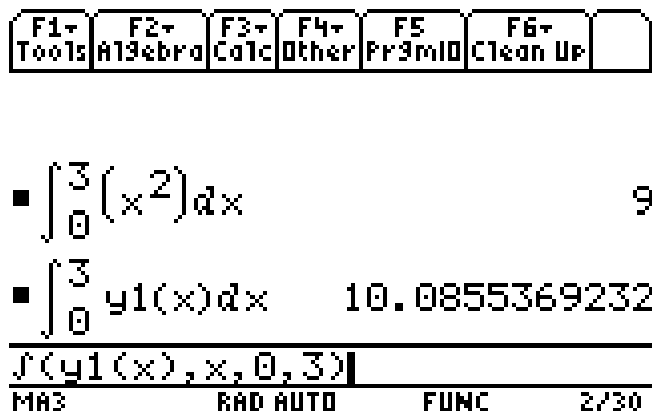


2.6 Integrovaní

Integrovat můžeme přímo z výchozí obrazovky, potřebnou funkci vyvoláme kombinací [2ND]+[7]. Funkce má 4 parametry, 2 jsou volitelné. První parametr je vstupní funkce, druhý proměnná, podle které integrujeme. Vstupem může být jak ručně napsaná funkce, tak funkce uložená do speciální proměnné:

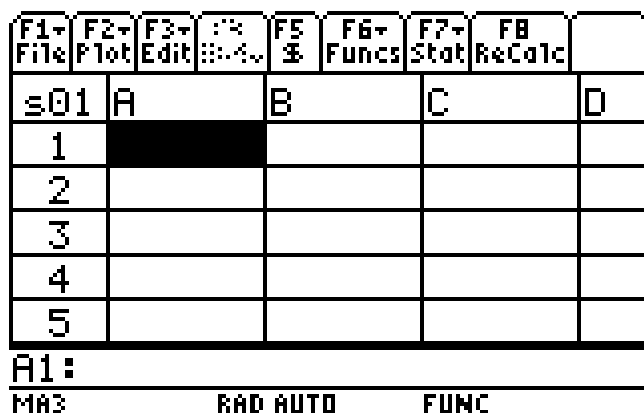


Pakliže chceme použít určitý integrál, využijeme i třetí a čtvrtý parametr, kterým je dolní a horní mez:



2.7 Základy práce s tabulkovým procesorem CellSheet

Aplikaci CellSheet, pakliže ji máme nainstalovanou, vyvoláme z nabídky APPS -> FlashApps... -> CellSheet, kde z nabídky zvolíme New. V dialogu zvolíme složku a název proměnné. Otevře se nám okno nápadně připomínající Excel:



Práce probíhá téměř na chlup stejně jako se známým tabulkovým procesorem. Vzorce začínáme rovnítkem, buňky označujeme kombinací sloupec+řádek (např. A1, možno psát i a1), konstantní řádky/sloupce/buňky ve vzorci označujeme dolarem pomocí klávesy [F5].

Pakliže zvolená funkce (např. sum) pracuje s rozsahem buněk, oddělíme ve vzorci buňky dvojtečkou, např. =sum(a1:a3):

F1+ File	F2+ Edit	F3+ Edit	F4 Undo	F5 %	F6+ Funcs	F7+ Stat	F8 ReCalc	
A1	A			B		C		D
1		1						
2		2						
3		3						
4								
5								
A4: =sum(a1:a3)								
MAB RAD AUTO FUNC								

Po vzoru konvenčních tabulkových procesorů je taktéž možno vybranou buňku s nějakým vzorcem zkopírovat (pomocí kombinace [⇧]+[↑], vybrat rozsah buněk, kam chceme vzorec vložit (za stálého stisku klávesy [↑] mačkáme šipku odpovídající kýženému směru, dokud není zvolen žádaný rozsah)...

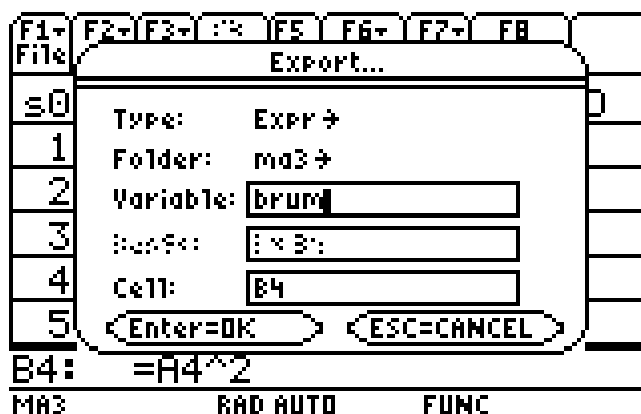
F1+ File	F2+ Plot	F3+ Edit	F4 Undo	F5 %	F6+ Funcs	F7+ Stat	F8 ReCalc	
A1	A			B		C		D
1		1			1			
2		2						
3		3						
4		6						
5								
B2:B4								
MAB RAD AUTO FUNC								

...načež pomocí [⇧]+[ESC] provedeme vložení:

F1+ File	F2+ Plot	F3+ Edit	F4 Undo	F5 %	F6+ Funcs	F7+ Stat	F8 ReCalc	
A1	A			B		C		D
1		1			1			
2		2			4			
3		3			9			
4		6			36			
5								
B4: =A4^2								
MAB RAD AUTO FUNC								

Chceme-li hodnotu nějaké buňky exportovat do standardní proměnné, vybereme v Edit ([F3]) nabídce funkci Export...

V dialogu zvolíme Type: Expr, do Variable vložíme název proměnné, do Cell zadáme buňku (bývá předvyplněno, pakliže jsme export vyvolali na námi kýžené buňce) a odentrujeme.

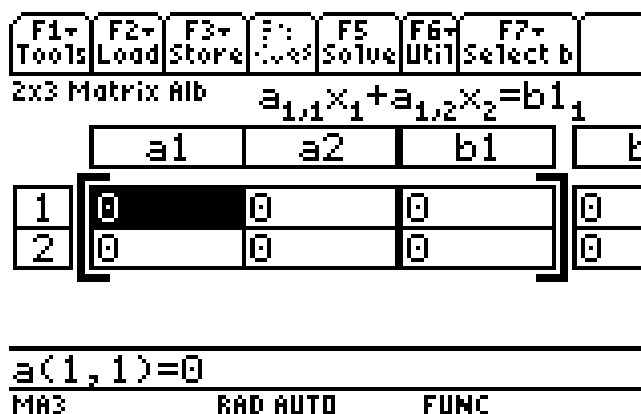


2.8 Řešení soustav lineárních rovnic

Stejně jako u Casio kalkulaček lze toto řešit pomocí matic, což však může být zdlouhavé. Lze si nicméně nainstalovat aplikaci Simultaneous Eqn Solver.

Tu spustíme pomocí APPS -> FlashApps... -> Simultaneous Eqn Solver. Z nabídky vybereme New...

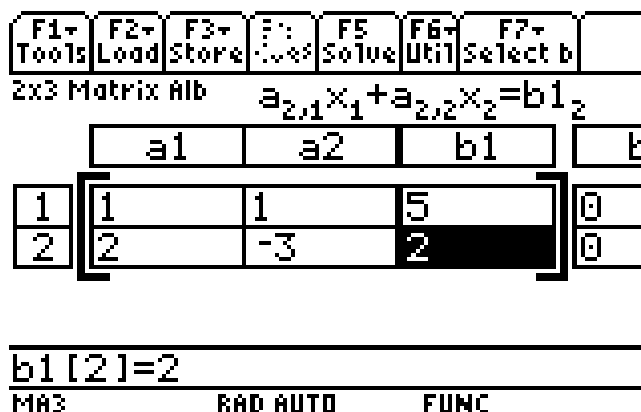
Dialog se nás zeptá na počet rovnic a neznámých, který zadáme, například 2 a 2. Otevře se toto okno:



Zápis provádíme maticově, sloupce a1 až an označují matici neznámých, sloupec b1 je vektor pravé strany. Předpokládejme, že chceme vložit následující rovnici:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - 3y &= 2 \end{aligned}$$

Zápis bude vypadat takto:



Výsledky vyvoláme stisknutím klávesy [F5]:

F1 Tools	F2 Load	F3 Store	F4 Coef	F5 Solve			
-------------	------------	-------------	------------	-------------	---	--	--

Solution

$$x_1 = 3.4$$

$$x_2 = 1.6$$

USE  TO GO TO NEXT SOLUTION

3 Numerické metody

3.1 Metoda nejmenších čtverců

Metodou nejmenších čtverců proložte následující body parabolou.

x	2,8	3,2	3,5	3,9
y	0,4	0,3	0,8	1,1

Tato úloha je ideální pro využití aplikací CellSheet a Simultaneous Equation Solver, s jejichž správným využitím lze minimalizovat možnost lidské chyby.

Soustava rovnic pro kvadratickou aproximaci metodou nejmenších čtverců je následující:

$$\begin{aligned}
 C_0(n+1) + C_1 \sum_{i=0}^n x_i + C_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 &= \sum_{i=0}^n y_i \\
 C_0 \sum_{i=0}^n x_i + C_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + C_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 &= \sum_{i=0}^n x_i y_i \\
 C_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + C_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + C_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 &= \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i
 \end{aligned}$$

Ze soustavy je patrné, že potřebujeme vypočítat druhou, třetí a čtvrtou mocninu pro všechna x v tabulce, součin x a druhé mocniny x s y a provést součet všech sloupců vzniklé tabulky.

Vhodný layout je následující:

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
...
...
Σ

Nyní si spustíme program CellSheet a vytvoříme novou tabulku. Do prvních dvou sloupců zadáme hodnoty x a y ze zadání:

F1 File	F2 Plot	F3 Edit	F4 Undo	F5 %	F6 Funcs	F7 Stat	F8 ReCalc	
ctv	A			B		C		D
1		2.8			.4			
2		3.2			.3			
3		3.5			.8			
4		3.9			1.1			
5								
R5:								
MA3			RAD APPROX			FUNC		

Do buňky A5 nyní vložíme sumaci sloupce A, tedy hodnot x_i :

=sum(a1:a4)

F1+ File	F2+ Plot	F3+ Edit	F4 Undo	F5 %	F6+ Funcs	F7+ Stat	F8 ReCalc	
ctv	A			B		C		D
1	2.8			.4				
2	3.2			.3				
3	3.5			.8				
4	3.9			1.1				
5	13.4							
A5: =sum(a1:a4)								
MA3			RAD APPROX			FUNC		

Abychom provedli i sumaci hodnot y, zkopírujeme buňku A5 do buňky B5. Klávesová kombinace pro kopírování je [⌘]+[↑], pro vložení [⌘]+[ESC]. Pokud je buňka správně označena ke zkopírování, objeví se kolem ní tlustý rámeček.

Nápověda: povšimněte si žlutozelených nápisů COPY a PASTE nad dlačičky [↑] a [ESC]. To značí, že pro jejich použití musíte stisknout žlutozelenou klávesu [⌘]

Po zkopírování je výsledek následovný:

F1+ File	F2+ Plot	F3+ Edit	F4 Undo	F5 %	F6+ Funcs	F7+ Stat	F8 ReCalc	
ctv	A			B		C		D
1	2.8			.4				
2	3.2			.3				
3	3.5			.8				
4	3.9			1.1				
5	13.4			2.6				
B5: =sum(B1:B4)								
MA3			RAD APPROX			FUNC		

Do sloupce C můžeme vložit x_i^2 . To provedeme vložním následujícího vzorce do buňky C1:

=a1^2

Po jeho vložení buňku C1 zkopírujeme a kurzorem přejdeme do buňky níže. Stiskneme klávesu [↑] a za jejího stálého držení přejdeme do buňky C4. Povšimněte si, že jsou všechny tyto buňky vybrány:

F1+ File	F2+ Plot	F3+ Edit	F4 Undo	F5 %	F6+ Funcs	F7+ Stat	F8 ReCalc	
ctv		A		B		C		D
1	2.8		.4		7.84			
2	3.2		.3					
3	3.5		.8					
4	3.9		1.1					
5	13.4		2.6					
C2:C4								
MA3			RAD APPROX			FUNC		

Nyní stiskneme PASTE kombinaci ([⌘]+[ESC]):

F1 File	F2 Plot	F3 Edit	F4 Undo	F5 %	F6 Funcs	F7 Stat	F8 ReCalc	
ctv		A		B		C		D
1	2.8		.4		7.84			
2	3.2		.3		10.24			
3	3.5		.8		12.25			
4	3.9		1.1		15.21			
5	13.4		2.6					
C2:C4								
MA3			RAD APPROX			FUNC		

Ještě provedeme sumaci sloupce tím, že do buňky C5 zkopírujeme buňku B5:

F1+ File	F2+ Plot	F3+ Edit	F4 Undo	F5 %	F6+ Funcs	F7+ Stat	F8 ReCalc	
ctv		A		B		C		D
1		2.8		.4		7.84		
2		3.2		.3		10.24		
3		3.5		.8		12.25		
4		3.9		1.1		15.21		
5		13.4		2.6		45.54		
C5: =sum(C1:C4)								
MA3			RAD APPROX			FUNC		

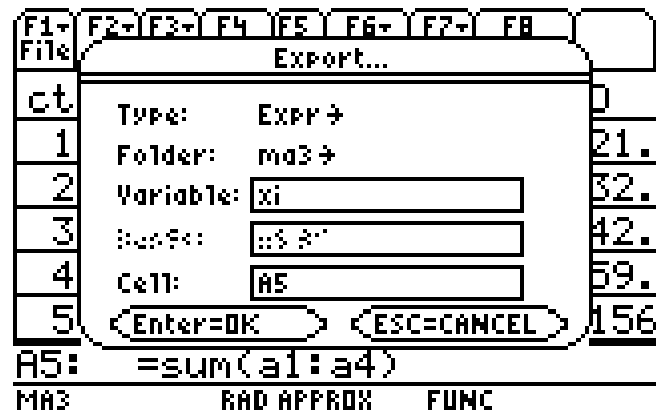
Pomocí těchto kroků vytvoříme i zbylé potřebné sloupce, jak je naznačeno na tabulce s layoutem:

F1+ File	F2+ Plot	F3+ Edit	F4 Undo	F5 %	F6+ Funcs	F7+ Stat	F8 ReCalc	
ctv		E		F		G		H
1		61.466		1.12		3.136		
2		104.86		.96		3.072		
3		150.06		2.8		9.8		
4		231.34		4.29		16.731		
5		547.73		9.17		32.739		
G5: =sum(G1:G4)								
MA3			RAD APPROX			FUNC		

Pakliže se chceme vyhnout lidské opisovací chybě, můžeme poněkud zdlouhavě vyexportovat potřebné hodnoty do proměnných. Ukážeme si to na buňce A5, tedy $\sum x_i$.

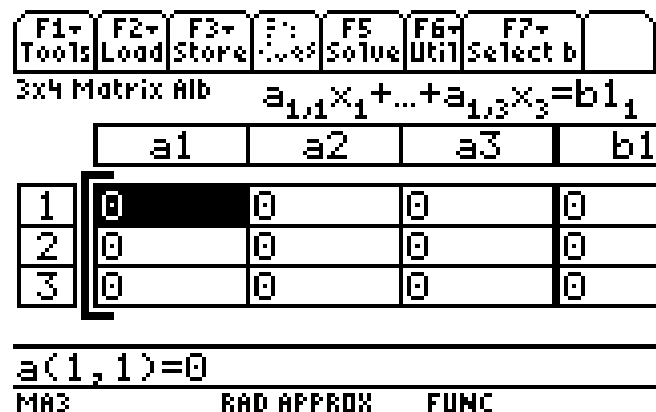
Kurzorem buňku vybereme, otevřeme nabídku Edit (klávesa [F3]) a otevřeme zde nabídku Export...

Jako Type zvolíme Expr (expression), zvolíme název (např. xi), ověříme, že je v kolonce Cell správná buňka a odenterujeme.



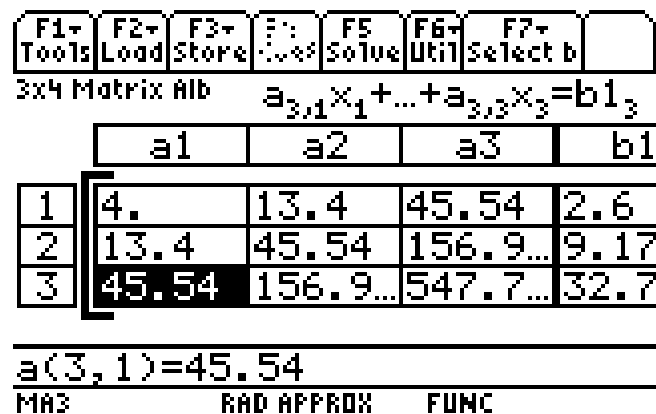
Tímto způsobem exportujeme všechny buňky se sumou.

Opustíme program CellSheet pomocí QUIT kombinace a spustíme program Simultaneous Eqn Solver. Počet rovnic je 3, počet proměnných taktéž.

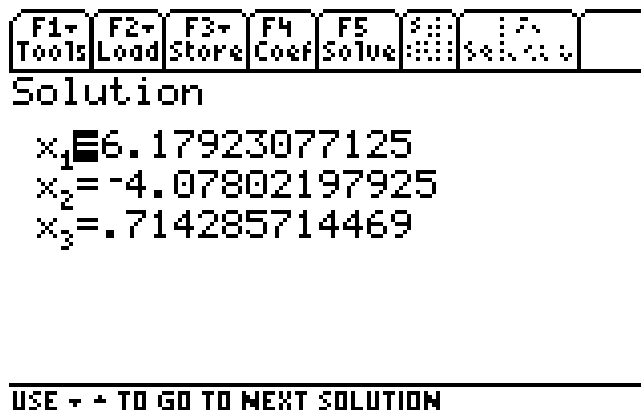


Do buňky a(1, 1) vložíme počet zadaných bodů, tedy 4. Do zbylých buněk vkládáme názvy proměnných odpovídající jednotlivým sumám. Všimněte si, že se název proměnné po vložení změnil na číslo.

Takto zadáme celou soustavu rovnic:



Klávesou [F5] spustíme SOLVE a ukážou se nám výsledky:



x_1 je C_0 , x_2 je C_1 a x_3 je C_2 , výsledná parabola je tedy:

$$y = 6,1792 - 4,0780x + 0,7143x^2$$

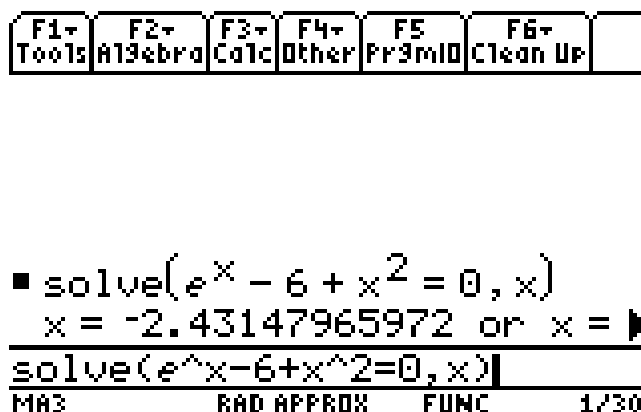
3.2 Řešení jedné nelineární rovnice Newtonovou metodou

Je dána rovnice $e^x - 6 + x^2 = 0$.

Najděte interval délky 1 s celočíselnými mezemi, v němž leží záporný kořen této rovnice.

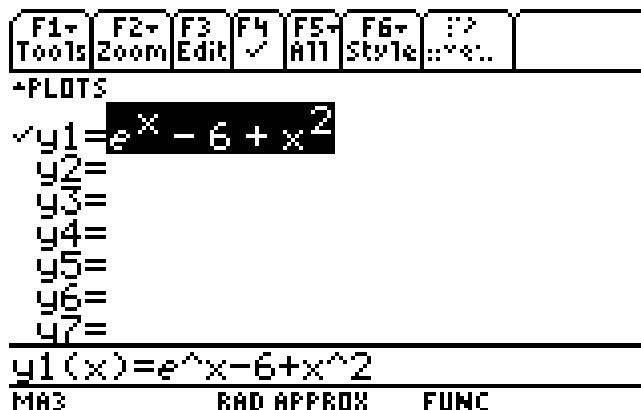
Prvně je potřeba nalézt interval žádané délky, v němž leží řešení. Toto je možno graficky, případně nalezením řešení pomocí solveru a určením intervalu z něj.

Solver je možno vyvolat pomocí funkce solve(), jejíž první argument je hledaná rovnice a druhý argument proměnná, která se v rovnici vyskytuje. Abychom nemuseli solve funkci psát manuálně, je možno ji vyvolat z Algebra menu skrývajícím se pod klávesou [F2]. Počítejte s možností, že kalkulačka může hledat řešení i půl minuty.



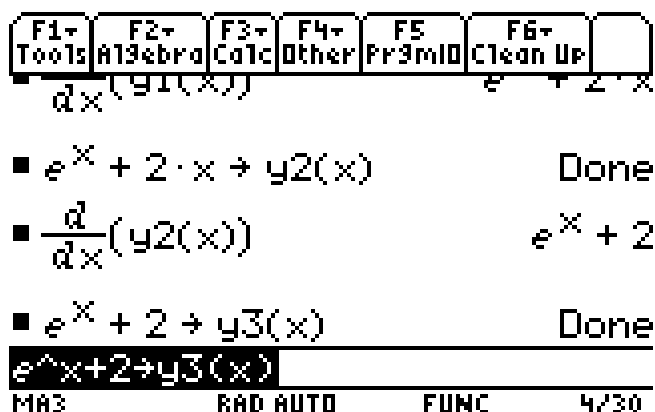
Záporný kořen je $x = -2,43$, interval tedy může být $< -3; -2 >$.

Pakliže jsme tak doteď neučinili, je záhodno si funkci uložit do Y= menu, viz kapitola 2.2:

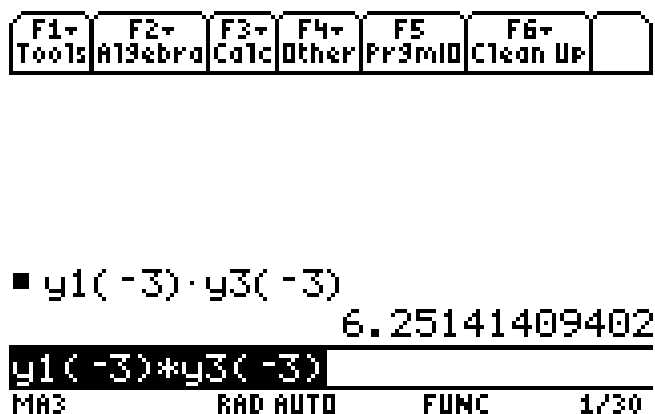


Nyní je potřebné funkci dvakrát zderivovat, pro návod vizte kapitolu 2.5.

Pozn.: Pro snadné uložení zderivované f-ce se kurzorem posuneme do výsledku, enterem ho přesuneme do vstupního řádku a nasměrujeme do proměnné $y_2(x)$, případně $y_3(x)$, viz kapitola 2.2.



Nyní si vybereme jeden z krajních bodů nalezeného intervalu (zvolíme si -3) a ověříme konvergenci metody pomocí podmínky $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$:



$6,25 > 0$, hodnotu -3 lze tedy použít jako počáteční aproximaci.

Nyní si spustíme CellSheet a vytvoříme si novou tabulku. Do buňky A1 vložíme naši počáteční aproximaci.

F1 File	F2 Plot	F3 Edit	F4 Undo	F5 Σ	F6 Funcs	F7 Stat	F8 ReCalc	
new	A			B		C		D
1	-3							
2								
3								
4								
5								
A2:								
MA3			RAD AUTO			FUNC		

Další aproximaci lze zjistit z tohoto vzorce:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Funkci $f(x)$ máme uloženou v $y1(x)$, funkci $f'(x)$ v $y2(x)$, do buňky A2 pak tento vzorec vložíme následujícím způsobem:

=a1-y1(a1)/y2(a1)

Do buňky B2 vložíme přesnost výpočtu, kterou zjistíme ze vzorce:

$$\xi = |X_{k+1} - x_k|$$

Což je možno vložit jako:

=abs(a2-a1)

Tímto jsme provedli 1 krok:

F1+ File	F2+ Plot	F3+ Edit	F4 Undo	F5 Σ	F6+ Funcs	F7+ Stat	F8 ReCalc	
new	A			B		C		D
1	-3							
2	-2.487			.51255				
3								
4								
5								
B2: =abs(a2-a1)								
MA3			RAD APPROX			FUNC		

Nyní budeme postupně kopírovat hodnoty ze sloupce A a ze sloupce B níže, dokud nedosáhneme požadované přesnosti (například 10^{-3}), kteréžto jsme dosáhli v buňce A4:

F1+ File	F2+ Plot	F3+ Edit	F4 Undo	F5 Σ	F6+ Funcs	F7+ Stat	F8 ReCalc	
new	A			B		C		D
1	-3							
2	-2.487			.51255				
3	-2.432			.0553				
4	-2.431			.00067		.001		
5								
A4: =A3-y1(A3)/(y2(A3))								
MA3			RAD APPROX			FUNC		

*Pozn.: Šířka sloupce může být příliš malá na zobrazení hodnoty na dostatečný počet des. míst. Chceme-li sloupec rozšířit, tak při vybrané buňce z požadovaného sloupce zvolíme *Edit -> Column Format*, kde zvětšíme hodnotu *Col Width* (např. na 10) a *Display Digit* (např. na *FLOAT 12*).*