Rozwiązanie cienkich płyt prostokątnych o różnorodnych warunkach brzegowych

Solution of Thin Rectangular Plates with Various Boundary Conditions

Mykhaylo Delyavskyy[1] Krystian Rosiński[2] Justyna Sobczak-Piąstka[1] Dariusz Buchaniec[3] Yuriy Famulyak[4]

[1]Politechnika Bydgoska
Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska

[2]PUH LEM-BUD Sp. z o.o.

[3]Wyższa Szkoła Gospodarki
Instytut Budownictwa i Projektowania Inżynierskiego

[4]Lviv National University of Nature Management
Building and Architecture Faculty

Publikacje I

[1] Krystian Rosiński. „Modelowanie cienkościennych układów płytowych w ujęciu makroelementowym”. Prac. dokt. Politechnika Bydgoska, 2021.

[2] Mykhaylo Delyavskyy i Krystian Rosiński. “The New Approach to Analysis of Thin Isotropic Symmetrical Plates”. Angielski. W: *Applied Sciences* 10.17 (2020). ISSN: 2076-3417. DOI: 10.3390/app10175931. URL: https://www.mdpi.com/2076-3417/10/17/5931.

[3] Mykhaylo Delyavskyy, Krystian Rosiński, Nina Zdolbicka i Oksana Bilash. “Macroelement analysis of thin orthotropic polygonal plate resting on the elastic Winkler’s foundation”. Angielski. W: *AIP Conference Proceedings* 2077.1 (2019), s. 020014. DOI: 10.1063/1.5091875.

[4] Mykhaylo Delyavskyy i Krystian Rosiński. “Solution of non-rectangular plates with macroelement method”. Angielski. W: *AIP Conference Proceedings* 1822.1 (2017), s. 020005. DOI: 10.1063/1.4977679.

Plan prezentacji

1. Wprowadzenie do tematu pracy
2. Metoda rozwiązywania płyt cienkich
   - Model matematyczny cienkiej płyty izotropowej
   - Model obliczeniowy cienkiej płyty izotropowej
   - Implementacja modelu (program komputerowy)
3. Wyniki i analiza rezultatów
   - Przykłady symetrycznych konstrukcji płytowych
   - Przykłady niesymetrycznych konstrukcji płytowych
4. Podsumowanie

Płyty cienkie

Płyty cienkie:

- $h/a \leq 1/10$, gdzie h – grubość płyty, a – mniejszy wymiar
- najczęściej stosowane w budownictwie
- do ich rozwiązania wykorzystuje się teorię Kirchhoffa

Teoria Kirchhoffa:

- daje uzasadnione i wystarczające dla praktyki rezultaty i dokładnie opisuje konstrukcje płytowe (od płyt cienkich do płyt średniej grubości)
- cechuje się niskimi kosztami obliczeniowymi w porównaniu do teorii wyższych rzędów

Płyty symetryczne i niesymetryczne

Definicja

Płyta klasyfikowana jest jako *symetryczna*, jeśli poza symetrią geometryczną, spełnia warunki symetrii właściwości mechanicznych, obciążenia zewnętrznego i warunków brzegowych. Jeżeli którykolwiek z tych warunków nie jest spełniony, to mamy płytę *niesymetryczną*.

Model matematyczny cienkiej płyty izotropowej

Model matematyczny płyty opiera się na:

- definicji makroelementu cienkiej płyty izotropowej dowolnej konfiguracji
- założeniu, że dowolny kontur płyty można aproksymować linią łamaną zamkniętą

Metoda rozwiązywania zagadnień brzegowych:

- jest metodą analityczno-numeryczną
- równanie podstawowe rozwiązano analitycznie metodą rozdzielenia zmiennych
- pozostałą część zagadnienia rozwiązano przy pomocy procedur numerycznych

Rozwiązanie równania podstawowego

Stan równowagi cienkiej płyty izotropowej opisuje równanie różniczkowe cząstkowe czwartego rzędu

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{q}{D} \tag{1}$$

gdzie:

- $w(x_1, x_2)$ – funkcja ugięcia płyty
- $q(x_1, x_2)$ – rozkład obciążenia na powierzchni górnej płyty
- D – sztywność płyty na zginanie

Rozwiązanie równania podstawowego

Weźmy wyrażenie na ugięcie płyty w postaci:

$$w = w_o + w_* \tag{2}$$

gdzie:

- w_o – całka ogólna równania jednorodnego $\nabla^2\nabla^2 w = 0$
- w_* – całka szczególna równania niejednorodnego (1)

Uwaga

Rozwiązania w_o i w_* są niezależne, co pozwala z zadaną dokładnością spełnić warunki brzegowe i powierzchniowe.

Rozwiązanie równania podstawowego

Całka	**ogólna**	**szczególna**
Węzły	brzegowe	powierzchniowe
Warunki	równowaga reakcji zewnętrznych w węzłach na brzegu płyty	równowaga reakcji wewnętrznych i obciążenia przyłożonego w węzłach na powierzchni płyty

Całka ogólna

Całka ogólna ma postać:

$$w_o(x_1, x_2) = R_{kpsv} \cdot W_{kpsv}(x_1, x_2) \tag{3}$$

gdzie:

- R_{kpsv} – dowolne współczynniki
  stopnie swobody płyty podstawowej
- $W_{kpsv}(x_1, x_2)$ – *funkcje kształtu ugięcia płyty*
  nie zależą bezpośrednio od jej konfiguracji
- $k = 1, \ldots, K, \quad p = 1, \ldots, 4, \quad s = 1, 2, \quad v = 1, \ldots, 4$

Całka ogólna

Funkcje kształtu ugięcia płyty mają postać:

$$W_{kpsv}(x_1, x_2) = B_{kpsv}(x_s) \cdot T_{kp(3-s)}(x_{3-s}) \tag{4}$$

gdzie:

- $B_{kpsv}(x_s)$ – funkcje bazowe modelu
- $T_{kps}(x_s)$ – funkcje trygonometryczne

Całka ogólna

Model symetryczny	**Model niesymetryczny**
$\kappa_{kps} = \begin{cases} \gamma_{ks} = k\pi/a_s, & p = 1 \\ \delta_{ks} = (2k-1)\pi/2a_s, & p = 2 \end{cases}$	$\kappa_{kps} = \begin{cases} \gamma_{ks} = k\pi/a_s, & p = 1,3 \\ \delta_{ks} = (2k-1)\pi/2a_s, & p = 2,4 \end{cases}$
$T_{kps} = \cos\left(\kappa_{kps}\, x_s\right)$	$T_{kps} = \begin{cases} \cos\left(\kappa_{kps}\, x_s\right), & p = 1,2 \\ \sin\left(\kappa_{kps}\, x_s\right), & p = 3,4 \end{cases}$
$B_{kpsv} = \begin{cases} \cosh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & v = 1 \\ \frac{x_s}{a_s}\sinh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & v = 2 \end{cases}$	$B_{kpsv} = \begin{cases} \cosh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & v = 1 \\ \frac{x_s}{a_s}\sinh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & v = 2 \\ \sinh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & v = 3 \\ \frac{x_s}{a_s}\cosh\left(\kappa_{kp(3-s)}\, x_s\right), & v = 4 \end{cases}$

Całka ogólna

Uwaga

Ponieważ w modelu matematycznym stosuje się tylko funkcje ciągłe, n-krotnie różniczkowalne, to dowolne obciążenie zewnętrzne $q(x_1, x_2)$ (ciągłe, dyskretne, skupione), aproksymujemy ciągłą funkcją obciążenia $Q(x_1, x_2)$.

Całka szczególna

Weźmy funkcję obciążenia w postaci wielomianu tensorowego:

$$Q(x_1, x_2) = A_0 \Psi(x_1, x_2) + A_{mps} T_{mps}(x_s) + B_{mnpq} T_{mnpq}(x_1, x_2) \quad (5)$$

gdzie:

- $\Psi(x_1, x_2)$ – wielomian algebraiczny czwartego stopnia
- $T_{mps}(x_s)$ – pojedyncze funkcje trygonometryczne
- $T_{mnpq}(x_1, x_2)$ – podwójne funkcje trygonometryczne
- $m = 1, \dots, M, \quad n = 1, \dots, N, \quad p = 1, \dots, 4, \quad q = 1, \dots, 4, \quad s = 1, 2$

Całka szczególna

Wprowadzone funkcje mają postać:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{x_1^4}{24a_1^4} + \frac{x_1^2 x_2^2}{4a_1^2 a_2^2} + \frac{x_2^4}{24a_2^4} \tag{6}$$

$$T_{mnpq}(x_1, x_2) = T_{mp1}(x_1) \cdot T_{nq2}(x_2) \tag{7}$$

Nieznane współczynniki A_0, A_{mps}, B_{mnpq} określamy z warunków spełnianych w oddzielnych punktach (x_1^*, x_2^*) na powierzchni:

$$Q(x_1, x_2)\Big|_{\substack{x_1 = x_1^* \\ x_2 = x_2^*}} = q(x_1^*, x_2^*) \tag{8}$$

Podobnie do (5) weźmy całkę szczególną r-nia (1):

$$w_*(x_1, x_2) = A_0^* \Psi(x_1, x_2) + A_{mps}^* T_{mps}(x_s) + B_{mnpq}^* T_{mnpq}(x_1, x_2) \tag{9}$$

Ugięcie płyty

Wyrażenie na ugięcie płyty:

$$w(x_1, x_2) = R_{kpsv} W_{kpsv}(x_1, x_2) + W_*(x_1, x_2) \tag{10}$$

gdzie:

- $W_{kpsv}(x_1, x_2)$ – funkcje kształtu
- $W_*(x_1, x_2)$ – funkcje obciążenia ugięcia płyty
- R_{kpsv} – stopnie swobody płyty podstawowej

Ugięcie płyty

Uwaga

Całka szczególna jest ściśle określona, więc płyta podstawowa jest zrównoważona obciążeniem zewnętrznym $Q(x_1, x_2)$.

Całka ogólna zawiera stopnie swobody płyty R_{kpsv}, należy więc jeszcze nałożyć na brzeg płyty więzy w postaci warunków brzegowych.

Węzły brzegowe

Definicja

Makroelement płytowy K-tego rzędu to makroelement uzupełniony węzłami brzegowymi w K-tej aproksymacji.

Przy zadanej z góry liczbie K aproksymacji rozwiązania problemu, ogólna liczba stopni swobody płyty wynosi:

$$n = K \cdot p_{\max} \cdot s_{\max} \cdot v_{\max} = K \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \tag{11}$$

Na brzegu płyty należy więc nałożyć $n = 32K$ więzów. Ponieważ w każdym węźle zapisujemy dwa warunki brzegowe, to liczba węzłów brzegowych musi być równa $i = n/2$. Węzły brzegowe rozmieszczamy na brzegu płyty rzeczywistej.

Węzły brzegowe

Wybór punktów wyjściowych

Rysunek: Punkty wyjściowe dla $K = 2$

Węzły brzegowe

Generowanie węzłów brzegowych poprzez rzutowanie punktów wyjściowych na krawędzie

Rysunek: Rzutowanie punktów wyjściowych na krawędzie płyty

Węzły brzegowe

Rozkład węzłów brzegowych dla płyty prostokątnej:

Rysunek: Węzły brzegowe

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a_1 = 4.0
a_2 = 2.0

K = 2
i = 16 * K
num = np.int64(i / 4)

p = np.linspace(-a_1, a_1, num)
q = np.linspace(-a_2, a_2, num)
r = np.full(num, a_1)
s = np.full(num, a_2)

plt.scatter(p, s, c="blue")
plt.scatter(r, q, c="blue")
plt.scatter(p, -s, c="blue")
plt.scatter(-r, q, c="blue")
plt.show()
```

Węzły powierzchniowe

Uwaga

Całka szczególna została wyrażona przez funkcję obciążenia $Q(x_1, x_2)$, która nie jest jeszcze określona, bo nie znamy liczby węzłów powierzchniowych (x_1^*, x_2^*) i ich rozmieszczenia.

Węzły powierzchniowe

Liczba węzłów powierzchniowych musi być równa liczbie nieznanych parametrów wchodzących do wyrażenia całki szczególnej (9):

$$j = 1 + 4 \cdot M + 4 \cdot N + 16 \cdot M \cdot N \tag{12}$$

Dla

$$M = N = 1; \quad j = 1 + 4 + 4 + 16 \quad = 25$$
$$M = N = 2; \quad j = 1 + 8 + 8 + 64 \quad = 81$$

itd.

Węzły powierzchniowe rozmieszczamy na powierzchni płyty rzeczywistej.

Węzły powierzchniowe

Dla płyty prostokątnej przyjmujemy równomierny rozkład węzłów powierzchniowych.

Rysunek: Węzły powierzchniowe

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a_1 = 4.0
a_2 = 2.0

M = N = 2

j = 16 * M * N + 4 * M + 4 * N + 1
num = np.int64(np.sqrt(j))

p = np.linspace(-a_1, a_1, num)
q = np.linspace(-a_2, a_2, num)
P, Q = np.meshgrid(p, q)

plt.scatter(P, Q, c="red")
plt.show()
```

Metoda rozwiązywania

Model geometryczny

Model geometryczny to konfiguracja węzłów stacjonarnych, brzegowych i powierzchniowych wybrana tak, aby jak najdokładniej odzwierciedlała rzeczywistą konstrukcję, tj. kształt płyty, warunki brzegowe, przyłożone do płyty obciążenia i deformację płyty wywołaną ich wpływem.

Model obliczeniowy

Model obliczeniowy opiera się na ścisłym rozwiązaniu równania równowagi.
Zawiera:

- funkcje stanu wielkości statycznych i kinematycznych
- makroelement płytowy o wymiarach $2a_1 \times 2a_2$
- stałe sprężyste materiału płyty
- parametry obciążenia płyty

Obejmuje:

- sposób generowania węzłów
- definiowanie warunków brzegowych i powierzchniowych
- budowę i rozwiązanie układu równań algebraicznych
- obliczanie wartości poszukiwanych wielkości

Metoda analityczno-numeryczna

Metoda rozwiązywania została zaimplementowana w autorskim programie komputerowym, który automatyzuje proces tworzenia modelu geometrycznego i obliczeniowego, rozwiązuje zagadnienie i zwraca rezultaty w postaci wykresów przestrzennych, konturowych i przekrojowych.

Metoda opiera się na modelu continuum materialnego, co automatycznie zapewnia ciągłość przemieszczeń i naprężeń w całym obszarze płyty. Nie ma potrzeby dyskretyzacji konstrukcji na oddzielne elementy skończone oraz ich agregacji w całość, wobec czego liczba operacji obliczeniowych jest mniejsza niż w metodach numerycznych.

Metoda analityczno-numeryczna

Istota metody polega na:

- Określeniu konfiguracji płyty włączonej w obszar makroelementu przez współrzędne jej wierzchołków i wprowadzeniu do modelu obliczeniowego
- Określeniu całki szczególnej niejednorodnego równania równowagi tak, żeby reakcje wewnętrzne płyty w każdym węźle powierzchniowym równoważyły obciążenie przyłożone w tym węźle
- Zbudowaniu układu równań brzegowych tak, żeby w każdym węźle na brzegu płyty funkcje stanu spełniały warunki brzegowe

Metoda analityczno-numeryczna

- Opiera się na dokładnym rozwiązaniu równania równowagi, którego rozwiązanie jest następnie podstawiane do zdefiniowanych uprzednio funkcji stanu
- Pozwala niezależnie spełnić statyczne, kinematyczne i mieszane warunki brzegowe w oddzielnych węzłach brzegowych, których liczba zawsze odpowiada liczbie stopni swobody płyty
- Wyróżnia się możliwością określenia obciążenia jako funkcji dwóch zmiennych, prostym podejściem do rozwiązania konstrukcji, większą dokładnością i efektywnością rozwiązania w porównaniu z metodami numerycznymi, a także bezsiatkowym podejściem do rozwiązania problemu

Funkcje stanu

Ogólne wyrażenie na ugięcie płyty ma postać

$$w(x_1, x_2) = R_{kpsv} W_{kpsv}(x_1, x_2) + W_*(x_1, x_2) \tag{13}$$

Wyrażenie to nazywamy *funkcją stanu* ugięcia.

Zaznaczmy, że wyrażenie (13) zadane jest w obszarze płyty podstawowej i poprawnie określone dla płyty rzeczywistej dowolnej konfiguracji włączonej w makroelement.

Funkcje stanu

W celu zdefiniowania warunków brzegowych zastosowano następujący słownik warunków brzegowych na funkcje stanu wprowadzone w modelu:

$$\begin{aligned} w \to W, \quad \varphi_1 \to U, \quad \varphi_2 \to V, \quad M_{11} \to X, \quad M_{22} \to Y, \\ M_{12} \to Z, \quad Q_1 \to G, \quad Q_2 \to H, \quad V_1 \to K, \quad V_2 \to L. \end{aligned} \tag{14}$$

Funkcje stanu

Niech F oznacza jedną z funkcji

$$F = (U, V, X, Y, Z, G, H, K, L) \tag{15}$$

Dowolną funkcję stanu możemy podać w postaci

$$F(x_1, x_2) = R_{kpsv} F_{kpsv}(x_1, x_2) + F_*(x_1, x_2) \tag{16}$$

Otrzymujemy ją z wyrażenia $W(x_1, x_2)$ przy pomocy różniczkowania automatycznego.

Funkcje stanu określają warunki równowagi sił wewnętrznych i więzów nałożonych na brzeg płyty.

Funkcje stanu

W każdym punkcie krawędzi spełniamy dwa warunki brzegowe, które zapisujemy w postaci macierzowej w formie bloków $\mathbf{B_i}$ wartości funkcji stanu w węzłach brzegowych.

Układ równań

Bloki te są składane w pionie (według wierszy) tworząc macierz rozszerzoną układu równań liniowych $\mathbf{M} = \left[\ \mathbf{A} \mid \mathbf{b}\ \right]$.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_4 \\ \mathbf{B}_5 \\ \mathbf{B}_6 \\ \mathbf{B}_7 \\ \mathbf{B}_8 \end{bmatrix}$$

Ostateczne rozwiązanie uzyskuje się z układu $\mathbf{AR} = -\mathbf{b}$.

Wybór języka programowania

Model obliczeniowy zaimplementowano
w wieloparadygmatowym języku programowania *Python*.

Moduł	Paradygmat	Założenia
geometryczny	obiektowy	hermetyzacja; polimorfizm; dziedziczenie
obliczeniowy	funkcyjny	domknięcia; funkcje wyższego rzędu; funkcje pierwszoklasowe

Do obliczeń wykorzystano pakiety *NumPy* i *Autograd*.
Wykresy opracowano przy pomocy biblioteki *Matplotlib*.

Funkcje jako domknięcia

```
def T(k, p, s):
    def fn(x_1, x_2):
        if p == 1 or p == 2:
            return cos(kappa(k, p, s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif p == 3 or p == 4:
            return sin(kappa(k, p, s) * x(s)(x_1, x_2))
    return fn


def B(k, p, s, ni):
    def fn(x_1, x_2):
        if ni == 1:
            return cosh(kappa(k, p, 3-s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif ni == 3:
            return sinh(kappa(k, p, 3-s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif ni == 2:
            return (x(s)(x_1, x_2) / a(s)) * sinh(kappa(k, p, 3-s) * x(s)(x_1, x_2))
        elif ni == 4:
            return (x(s)(x_1, x_2) / a(s)) * cosh(kappa(k, p, 3-s) * x(s)(x_1, x_2))
    return fn
```

Funkcje kształtu i funkcje obciążeniowe

```
def W(k, p, s, ni):
    def fn(x_1, x_2):
        return B(k, p, s, ni)(x_1, x_2) * T(k, p, 3 - s)(x_1, x_2)
    return fn


def shape_functions(K):
    result = []
    for k in range(1, K + 1):
        for p in range(1, 5):
            for s in range(1, 3):
                for ni in range(1, 5):
                    result.append(W(k, p, s, ni))
    return result
```

```
W_g = shape_functions(K)
W_p = force_functions(M, N)

W = final(W_g, W_p)
```

Automatyczne różniczkowanie

$$M_{11} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)$$

$$M_{22} = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)$$

$$M_{12} = -D\left(1 - \nu\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}$$

```python
def M_11(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (
            grad(grad(w, 0), 0)(x_1, x_2)
            + nu * grad(grad(w, 1), 1)(x_1, x_2)
        )
    return fn

def M_22(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return -D * (
            grad(grad(w, 1), 1)(x_1, x_2)
            + nu * grad(grad(w, 0), 0)(x_1, x_2)
        )
    return fn

def M_12(w):
    def fn(x_1, x_2):
        return (
            -D
            * (1 - nu)
            * grad(grad(w, 0), 1)(x_1, x_2)
        )
    return fn
```

Rozwiązanie liniowego układu równań

```python
def Block(fs, pts):
    x = pts[:,0]
    y = pts[:,1]
    m = x.size
    n = len(fs)
    block = np.zeros((m, n))
    for i in range(n):
        block[:,i] = fs[i](x, y)
    return block
```

```python
# Augmented matrix
M = np.vstack(blocks)

# Coefficient matrix
A = M[:, :-1]

# Column vector of constant terms
b = M[:, -1]

# Solve a linear matrix equation
R = np.linalg.solve(A, -b)
```

Implementacja modelu

Wartość poszukiwanej wielkości w punkcie (x_1, x_2) wynosi

$$F(x_1, x_2) = f_1(x_1, x_2)\, R_1 + f_2(x_1, x_2)\, R_2 + \cdots + f_m(x_1, x_2)\, R_m \tag{17}$$

Wyrażenie to zapisujemy w postaci macierzowej

$$\mathbf{F} = \mathbf{A_i}\, \mathbf{R_i} \tag{18}$$

gdzie $\mathbf{A_i} = \left[f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2), \ldots, f_m(x_1, x_2)\right]$

Funkcje $f_i(x_1, x_2)$, $i = 1, \ldots, m$ mogą przyjmować argumenty w postaci macierzy $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$ o wymiarach $j \times k$:

$$\mathbf{F_{jk}} = \mathbf{A_{ijk}}\, \mathbf{R_i} \tag{19}$$

Konwencja sumacyjna Einsteina

Stosujemy tu konwencję sumacyjną Einsteina

```
F = np.einsum('ijk,i→jk', A, R)
```

Pierwszy argument tej funkcji określa łańcuch indeksów, jako rozdzieloną przecinkami listę etykiet indeksów dolnych, gdzie każda etykieta odnosi się do wymiaru odpowiedniego operandu (czyli kolejnych argumentów tej funkcji).

Ilekroć etykieta powtarza się, dokonujemy sumowana.
W trybie jawnym, który jest tu stosowany, można określić wyjściowe etykiety z indeksem dolnym przy pomocy identyfikatora $\rightarrow$.

Konwencja sumacyjna Einsteina

Rysunek: Zasada działania funkcji `einsum`

Przykłady

Efektywność opracowanej metody zilustrowano na licznych przykładach płyt o różnych konfiguracjach i warunkach brzegowych, jednorodnych pod względem właściwości materiałowych.

Płyty dzielimy na trzy grupy:

1. jednokierunkowo symetryczne
2. dwukierunkowo symetryczne
3. niesymetryczne

Przykłady

We wszystkich przykładach rozważa się obciążenie podwójnie symetryczne. Płyta trójkątna obciążona jest równomiernie, a pozostałe płyty poddane są obciążeniu postaci

$$q(x_1, x_2) = q_0 T_{1122}(x_1, x_2) \tag{20}$$

gdzie q_0 jest intensywnością obciążenia, a $T_{1122}(x_1, x_2)$ to podwójne funkcje trygonometryczne

$$T_{1122}(x_1, x_2) = T_{11}(x_1)\, T_{12}(x_2) \tag{21}$$

Przykłady

$$T_{11}(x_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2a_1}x_1\right); \quad T_{12}(x_1, x_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2a_2}x_2\right) \tag{22}$$

W podobnej postaci do (20) wybrano całkę szczególną równania podstawowego (1)

$$w_*(x_1, x_2) = C \cdot T_{11}(x_1) \cdot T_{12}(x_2) \tag{23}$$

gdzie

$$C = \frac{q_0}{D\left(\delta_{11}^2 + \delta_{12}^2\right)^2} \tag{24}$$

Przykłady

Krawędzie płyty ponumerowane zgodnie z ruchem wskazówek zegara oznaczmy symbolami:

- S – krawędź swobodnie podparta (simply supported)
- C – krawędź zamocowana (clamped)
- F – krawędź swobodna (free)

Odpowiadające im warunki brzegowe:

- S – w, M
- C – w, φ
- F – M, V

Przykłady

Tabela: Warunki brzegowe dla płyty prostokątnej

	SS	SC	SF	CC	CF	FF
SS	SSSS	SSSC	SSSF	SSCC	SSCF	SSFF
SC		SCSC	SCSF	SCCC	SCCF	SCFF
SF			SFSF	SFCC	SFCF	SFFF
CC				CCCC	CCCF	CCFF
CF					CFCF	CFFF
FF						FFFF

Przykłady

Rysunek: Warianty warunków brzegowych płyty prostokątnej

Przykłady

Rysunek: Warianty warunków brzegowych płyty prostokątnej

Przykłady

(a) SFCF (b) CCCC (c) CCCF

(d) CCFF (e) CFCF (f) CFFF

Rysunek: Warianty warunków brzegowych płyty prostokątnej

Przykłady

Płyta	**symetryczna** $K = 3$	**niesymetryczna** $K = 7$
prostokątna	SFSF, SSSS, CCCC, SCSC, CFCF	SSSC, SSSF, SSCC, SSCF, SCSF, SCCC, SCCF, SCFF, SFCC, SFCF, CCCF, CCFF, FCFF
trapezowa		FCCC
trójkątna		SSS

Przykłady

Parametry geometryczne:

$$2a_1 = 8\,\mathrm{m}, \qquad 2a_2 = 4\,\mathrm{m}, \qquad h = 0.2\,\mathrm{m} \tag{25}$$

Stałe sprężyste:

$$E = 30 \times 10^9\,\mathrm{Pa}, \qquad \nu = 0.2 \tag{26}$$

Intensywność obciążenia:

$$q_0 = 10\,\mathrm{kPa} \tag{27}$$

Przykłady

Warianty wyników graficznych w autorskim programie:

- 2D – Wykres konturowy (warstwicowy)
- 3D – Wykres przestrzenny
- 4D – Wykres przestrzenny ugięcia płyty z nałożonym konturowym wykresem danej wielkości, w formie odpowiadającej domyślnym wykresom generowanym przez program ABAQUS

Płyta SFSF

Rysunek: Płyta prostokątna o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i pozostałych swobodnych

$$w(x_1, x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} = 0$$

$$M_{11}(x_1, x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} = 0$$

$$M_{22}(x_1, x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} = 0$$

$$V_2(x_1, x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} = 0$$

Płyta SFSF

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty prostokątnej o dwóch krawędziach swobodnie podpartych i dwóch swobodnych

Płyta SFSF

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty prostokątnej SFSF

Płyta SFSF

Rysunek: Makroelement

Rysunek: Abaqus

Rysunek: Wykresy 4D ugięcia płyty SFSF

Płyta SFSF

Rysunek: Makroelement

Rysunek: Abaqus

Rysunek: Wykresy 4D momentu zginającego M_{11} płyty SFSF

Płyta SFSF

Rysunek: Makroelement

Rysunek: Abaqus

Rysunek: Wykresy 4D momentu zginającego M_{22} płyty SFSF

Płyta SFSF

Tabela: Minimalne i maksymalne wartości wielkości kinematycznych i statycznych wraz z ich błędem względnym (RE) dla płyty prostokątnej o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i pozostałych swobodnych

		Makroelement		Abaqus		RE	
F-cja	**Jedn.**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**
w	m	0	0.013	0	0.013	0 %	0 %
M_{11}	N m/m	0	41 490.63	1944	41 310	—	0.44 %
M_{22}	N m/m	0	5516.33	-78.02	5311	—	3.87 %
M_{12}	N m/m	-3263.79	3263.79	-2402	2402	35.88 %	35.88 %
Q_1	N m^{-1}	-15 343.36	15 343.36	—	—	—	—
Q_2	N m^{-1}	-3229.42	3229.42	—	—	—	—
V_1	N m^{-1}	-14 440.95	14 440.95	—	—	—	—
V_2	N m^{-1}	-2677.45	2677.45	—	—	—	—
φ_1	rad	-0.005	0.005	-0.005	0.005	0 %	0 %
φ_2	rad	-0.0005	0.0005	-0.0005	0.0005	0 %	0 %

Płyta SFSF

Tabela: Spełnienie warunków brzegowych w punktach środkowych krawędzi płyty prostokątnej o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i pozostałych swobodnych

F-cja	**Krawędź**	**Jedn.**	**Makroelement**	**Abaqus**
w	S	m	0	0
M_{11}	S	N m/m	0	1966.02
M_{22}	F	N m/m	0	288.97
V_2	F	$\mathrm{N\,m^{-1}}$	0	—

Płyta SSSS

Rysunek: Płyta prostokątna swobodnie podparta na obwodzie

$$w(x_1, x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} = 0$$

$$M_{11}(x_1, x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} = 0$$

$$w(x_1, x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} = 0$$

$$M_{22}(x_1, x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} = 0$$

Płyta SSSS

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie

Płyta SSSS

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty prostokątnej SSSS

Płyta SSSS

Rysunek: Makroelement

Rysunek: Abaqus

Rysunek: Wykresy 4D ugięcia płyty SSSS

Płyta SSSS

Rysunek: Makroelement

Rysunek: Abaqus

Rysunek: Wykresy 4D momentu zginającego M_{11} płyty SSSS

Płyta SSSS

Rysunek: Makroelement

Rysunek: Abaqus

Rysunek: Wykresy 4D momentu zginającego M_{22} płyty SSSS

Płyta SSSS

Tabela: Minimalne i maksymalne wartości wielkości kinematycznych i statycznych wraz z ich błędem względnym (RE) dla płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie

		Makroelement		Timoszenko		Abaqus		RE	
F-cja	**Jedn.**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**
w	m	0.00	0.0008	0.00	0.0008	0.00	0.0008	0 %	0 %
M_{11}	N m/m	0.00	4668.88	0.00	4668.88	-252.4	4655	—	0.30 %
M_{22}	N m/m	0.00	10 894.05	0.00	10 894.05	-221.6	10 930	—	-0.33 %
M_{12}	N m/m	-4150.12	4150.12	-4150.12	4150.12	-4041	4041	—	2.70 %
Q_1	N m^{-1}	-5092.96	5092.96	-5092.96	5092.96	—	—	—	—
Q_2	N m^{-1}	-10 185.92	10 185.92	-10 185.92	10 185.92	—	—	—	—
V_1	N m^{-1}	-8352.45	8352.45	-8352.45	8352.45	—	—	—	—
V_2	N m^{-1}	-11 815.66	11 815.66	-11 815.66	11 815.66	—	—	—	—
φ_1	rad	-0.0003	0.0003	-0.0003	0.0003	-0.0003	0.0003	0 %	0 %
φ_2	rad	-0.0006	0.0006	-0.0006	0.0006	-0.0006	0.0006	0 %	0 %

Płyta SSSS

Tabela: Spełnienie warunków brzegowych w punktach środkowych krawędzi płyty prostokątnej swobodnie podpartej na obwodzie

F-cja	Krawędź	Jedn.	Makroelement	Timoszenko	Abaqus
w	S 1	m	0	0	0
M_{11}	S 1	N m/m	0	0	416.46
w	S 2	m	0	0	0
M_{22}	S 2	N m/m	0	0	1170.5

Płyta CCCC

Rysunek: Płyta prostokątna zamocowana na obwodzie

$$w(x_1, x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} = 0$$

$$\varphi_1(x_1, x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} = 0$$

$$w(x_1, x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} = 0$$

$$\varphi_2(x_1, x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} = 0$$

Płyta CCCC

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie

Płyta CCCC

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty prostokątnej CCCC

Płyta CCCC

Rysunek: Makroelement

Rysunek: Abaqus

Rysunek: Wykresy 4D ugięcia płyty CCCC

Płyta CCCC

Rysunek: Makroelement

Rysunek: Abaqus

Rysunek: Wykresy 4D momentu zginającego M_{11} płyty CCCC

Płyta CCCC

Rysunek: Makroelement

Rysunek: Abaqus

Rysunek: Wykresy 4D momentu zginającego M_{22} płyty CCCC

Płyta CCCC

Tabela: Minimalne i maksymalne wartości wielkości kinematycznych i statycznych wraz z ich błędem względnym (RE) dla płyty zamocowanej w sposób ciągły

		Makroelement		Abaqus		RE	
F-cja	**Jedn.**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**	**Min**	**Max**
w	m	0.00	0.0002	0.00	0.0002	0 %	0 %
M_{11}	N m/m	−4174.73	1909.82	−3326	1877	25.52 %	1.75 %
M_{22}	N m/m	−9305.64	5180.73	−7727	5080	20.43 %	1.98 %
M_{12}	N m/m	−1190.87	1190.87	−1120	1120	6.33 %	6.33 %
Q_1	N m^{-1}	−6806.21	6806.21	—	—	—	—
Q_2	N m^{-1}	−12 667.36	12 667.36	—	—	—	—
V_1	N m^{-1}	−7268.18	7268.18	—	—	—	—
V_2	N m^{-1}	−12 667.93	12 667.93	—	—	—	—
φ_1	rad	0.00	0.00	0.00	0.00	0 %	0 %
φ_2	rad	−0.0002	0.0002	−0.0002	0.0002	0 %	0 %

Płyta CCCC

Tabela: Spełnienie warunków brzegowych w punktach środkowych krawędzi płyty zamocowanej w sposób ciągły

F-cja	**Krawędź**	**Jedn.**	**Makroelement**	**Abaqus**
w	C 1	m	0	0
φ_1	C 1	rad	0	0
w	C 2	m	0	0
φ_2	C 2	rad	0	0

Płyta CCCC

Rysunek: Ugięcie płyty prostokątnej zamocowanej na obwodzie w przekroju $x_2 = 0$ dla różnych wartości liczby aproksymacji

Płyta CCCC

Rysunek: Momenty zginające M_{11} płyty zamocowanej na obwodzie w przekroju $x_2 = 0$ dla różnych wartości liczby aproksymacji

Płyta CCCC

Rysunek: Momenty zginające M_{22} płyty zamocowanej na obwodzie w przekroju $x_2 = 0$ dla różnych wartości liczby aproksymacji

Płyta SCSC

Rysunek: Płyta prostokątna o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i pozostałych zamocowanych

$$w(x_1, x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} = 0$$

$$M_{11}(x_1, x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} = 0$$

$$w(x_1, x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} = 0$$

$$\varphi_2(x_1, x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} = 0$$

Płyta SCSC

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty prostokątnej o dwóch przeciwległych krawędziach swobodnie podpartych i pozostałych zamocowanych

Płyta SCSC

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty prostokątnej SCSC

Płyta CFCF

Rysunek: Płyta prostokątna o dwóch przeciwległych krawędziach zamocowanych i pozostałych swobodnych

$$w(x_1, x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} = 0$$

$$\varphi_1(x_1, x_2)\Big|_{x_1=\pm a_1} = 0$$

$$M_{22}(x_1, x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} = 0$$

$$V_2(x_1, x_2)\Big|_{x_2=\pm a_2} = 0$$

Płyta CFCF

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty prostokątnej o dwóch krawędziach zamocowanych i dwóch swobodnych

Płyta CFCF

(a) Funkcja φ_1

(b) Funkcja φ_2

(c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22}

(e) Funkcja M_{12}

(f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2

(h) Funkcja V_1

(i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty prostokątnej CFCF

Podsumowanie

- Metody analityczne ściśle spełniają wszystkie warunki brzegowe
- Maksymalne wartości ugięcia, przemieszczeń i momentów zginających otrzymane metodą analityczną i numeryczną są zbliżone
- Wartości minimalne nie pokrywają się
- Podobne obserwacje dotyczące porównania wyników uzyskanych przy pomocy MES (ABAQUS) zostały zawarte w innych pracach, gdzie wskazano, że MES nie jest w stanie zapewnić zerowania się momentów zginających na krawędzi
- Wyniki dokładnie pokrywają się z rozwiązaniem Timoszenki

Płyta SSSC

Rysunek: Płyta SSSC

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty SSSC

Płyta SSSC

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty SSSC

Płyta SSSF

Rysunek: Płyta SSSF

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty SSSF

Płyta SSSF

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty SSSF

Płyta SSCC

Rysunek: Płyta SSCC

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty SSCC

Płyta SSCC

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty SSCC

Płyta SSCF

Rysunek: Płyta SSCF

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty SSCF

Płyta SSCF

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty SSCF

Płyta SCSF

Rysunek: Płyta SCSF

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty SCSF

Płyta SCSF

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty SCSF

Płyta SCCC

Rysunek: Płyta SCCC

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty SCCC

Płyta SCCC

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty SCCC

Płyta SCCF

Rysunek: Płyta SCCF

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty SCCF

Płyta SCCF

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty SCCF

Płyta SCFF

Rysunek: Płyta SCFF

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty SCFF

Płyta SCFF

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty SCFF

Płyta SFCC

Rysunek: Płyta SFCC

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty SFCC

Płyta SFCC

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty SFCC

Płyta SFCF

Rysunek: Płyta SFCF

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty SFCF

Płyta SFCF

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty SFCF

Płyta CCCF

Rysunek: Płyta CCCF

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty CCCF

Płyta CCCF

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty CCCF

Płyta CCFF

Rysunek: Płyta CCFF

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty CCFF

Płyta CCFF

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty CCFF

Płyta FCFF

Rysunek: Płyta FCFF

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty FCFF

Płyta FCFF

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

(d) Funkcja M_{22} (e) Funkcja M_{12} (f) Funkcja Q_1

(g) Funkcja Q_2 (h) Funkcja V_1 (i) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty FCFF

Płyta trapezowa

Rysunek: Schemat płyty trapezowej

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty trapezowej

Płyta trapezowa

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty trapezowej

Płyta trapezowa

(a) Funkcja M_{22} (b) Funkcja M_{12} (c) Funkcja Q_1

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty trapezowej

Płyta trapezowa

(a) Funkcja Q_2 (b) Funkcja V_1 (c) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty trapezowej

Płyta trójkątna

Rysunek: Schemat płyty trójkątnej

Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty trójkątnej

Płyta trójkątna

(a) Funkcja φ_1 (b) Funkcja φ_2 (c) Funkcja M_{11}

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty trójkątnej

Płyta trójkątna

(a) Funkcja M_{22} (b) Funkcja M_{12} (c) Funkcja Q_1

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty trójkątnej

Płyta trójkątna

(a) Funkcja Q_2 (b) Funkcja V_1 (c) Funkcja V_2

Rysunek: Wyniki 2D dla płyty trójkątnej

Podsumowanie

Tabela: Liczba węzłów w rozwiązaniach płyt prostokątnych pod rozważanym obciążeniem ciągłym

Model	**Aproksymacja**	**Makroelement**	**MES**
symetryczny	K = 3	12	561
niesymetryczny	K = 7	112	561

Podsumowanie

Tabela: Liczba węzłów płyty trójkątnej w rozwiązaniu metodą makroelementów

Węzły	**Aproksymacja**	**Liczba**
brzegowe	K = 7	112
powierzchniowe	M = N = 5	441
RAZEM		553

Oryginalne elementy pracy

1. Model matematyczny i obliczeniowy konstrukcji płytowej
2. Nowa, analityczno-numeryczna metoda rozwiązywania cienkich, wielokątnych płyt izotropowych
3. Autorski program komputerowy do rozwiązywania konstrukcji płytowych
4. Zastosowanie automatycznego różniczkowania
5. Sposób tworzenia węzłów brzegowych i powierzchniowych
6. Przykłady rozwiązań i analiza wyników numerycznych

Zalety metody

1. Łatwość modelowania i rozwiązywania konstrukcji płytowych
2. Bezsiatkowe podejście do rozwiązania problemu
3. Możliwość spełnienia statycznych, kinematycznych i mieszanych warunków brzegowych
4. Wysoka efektywność obliczeń i dokładność rozwiązania
5. Znacznie mniejsza liczba operacji komputerowych i obliczeniowych dla modelowania konstrukcji płytowych, niż w metodach numerycznych
6. Możliwość określenia obciążenia jako funkcji dwóch zmiennych

Wady metody

1. Wymaga ulepszenia dla rozwiązywania płyt ograniczonych wieloma konturami
2. Jak każda metoda daje dobre wyniki dla płyt regularnych. Rozwiązania płyt nieregularnych otrzymuje się z mniejszą dokładnością

Dziękuję za uwagę