

Modelowanie cienkich, izotropowych, wielokątnych płyt metodą makroelementów

Modeling of thin isotropic polygonal plates
using macroelement method

Justyna Sobczak-Piąstka¹ Krystian Rosiński²
Mykhaylo Delyavskyy³ Nina Zdolbitska³

¹Politechnika Bydgoska
Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska

²PUH LEM-BUD Sp. z o.o.

³Lutsk National Technical University

Plan prezentacji

- 1 Wprowadzenie
- 2 Model matematyczny płyty
- 3 Model obliczeniowy płyty
- 4 Model geometryczny płyty
 - Węzły brzegowe
 - Węzły powierzchniowe
- 5 Rezultaty
 - Płyta trójkątna
 - Płyta równoległoboczna
 - Płyta trapezowa
 - Płyta sześciokątna
- 6 Wnioski

Cel

- Rozwój uniwersalnej i łatwej w użyciu analityczno-numerycznej metody modelowania i rozwiązywania zagadnienia zginania płyt o dowolnym¹ kształcie
- Opracowanie sposobu automatycznego rozmieszczenia określonej liczby węzłów brzegowych i powierzchniowych
- Analiza wpływu rozmieszczenia węzłów² na dokładność wyników

¹Dowolny kontur można aproksymować linią łamaną zamkniętą

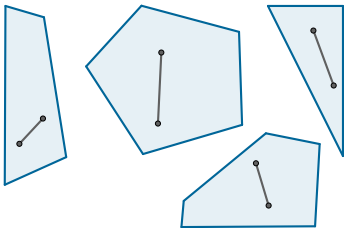
²Rozkład równomierny i chmura losowych punktów

Publikacje dot. metody makroelementów

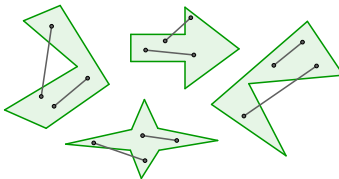
- [1] Mykhaylo Delyavskyy, Justyna Sobczak-Piąstka, Krystian Rosinski, Dariusz Buchaniec i Yuriy Famulyak. „Solution of thin rectangular plates with various boundary conditions”. W: *AIP Conference Proceedings* 2949.1 (sierp. 2023), s. 020023. ISSN: 0094-243X. DOI: 10.1063/5.0165300. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0165300>.
- [2] Krystian Rosiński. „Modelowanie cienkościennych układów płytowych w ujęciu makroelementowym”. Rozprawa doktorska. Politechnika Bydgoska, 2021. URL: <https://dlibra.pbs.edu.pl/dlibra/publication/3860/edition/3794>.
- [3] Mykhaylo Delyavskyy i Krystian Rosiński. „The New Approach to Analysis of Thin Isotropic Symmetrical Plates”. W: *Applied Sciences* 10.17 (2020). ISSN: 2076-3417. DOI: 10.3390/app10175931. URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/10/17/5931>.

Założenia i przeznaczenie metody

- Płyty cienkie, izotropowe
- Klasyczna teoria płyt (Kirchhoffa)
- Płyty wielokątne (o kształtach wypukłych)



(a) Wypukłe



(b) Wklęsłe

Rysunek: Przykłady wielokątów

Twierdzenie

Wielokąt jest **wklęsły**, jeżeli co najmniej jeden z jego kątów ma miarę większą od 180° . Wielokąt, który nie jest wklęsły, to wielokąt **wypukły**.

Definicja

Jeżeli odcinek łączący dwa dowolne punkty w wielokącie jest całkowicie w nim zawarty, to taki wielokąt nazywamy **wypukłym**.

Rozwiązanie równania podstawowego

Stan równowagi cienkiej płyty izotropowej opisuje równanie różniczkowe cząstkowe czwartego rzędu

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D} \quad (1)$$

gdzie:

- $w(x_1, x_2)$ – funkcja ugięcia płyty
- $q(x_1, x_2)$ – rozkład obciążenia na powierzchni górnej płyty
- D – sztywność płyty na zginanie

Rozwiązanie równania podstawowego

Weźmy wyrażenie na ugięcie płyty w postaci:

$$w = w_o + w_* \quad (2)$$

gdzie:

- w_o – całka ogólna równania jednorodnego $\nabla^2 \nabla^2 w = 0$
- w_* – całka szczególna równania niejednorodnego (1)

Uwaga

Rozwiązania w_o i w_* są niezależne, co pozwala z zadaną dokładnością spełnić warunki brzegowe i powierzchniowe.

Całka ogólna

Całka ogólna ma postać:

$$w_o(x_1, x_2) = R_{kpsv} \cdot W_{kpsv}(x_1, x_2) \quad (3)$$

gdzie:

- R_{kpsv} – dowolne współczynniki (stopnie swobody płyty)
- $W_{kpsv}(x_1, x_2)$ – funkcje kształtu ugięcia płyty
- $k = 1, \dots, K, \quad p = 1, \dots, 4, \quad s = 1, 2, \quad v = 1, \dots, 4$

Całka ogólna

Funkcje kształtu ugięcia płyty mają postać:

$$W_{kpsv}(x_1, x_2) = B_{kpsv}(x_s) \cdot T_{kp(3-s)}(x_{3-s}) \quad (4)$$

gdzie:

- $B_{kpsv}(x_s)$ – funkcje bazowe modelu
- $T_{kps}(x_s)$ – funkcje trygonometryczne

Całka ogólna

$$B_{kpsv} = \begin{cases} \cosh(\kappa_{kp(3-s)} x_s), & v = 1 \\ \frac{x_s}{a_s} \sinh(\kappa_{kp(3-s)} x_s), & v = 2 \\ \sinh(\kappa_{kp(3-s)} x_s), & v = 3 \\ \frac{x_s}{a_s} \cosh(\kappa_{kp(3-s)} x_s), & v = 4 \end{cases} \quad (5)$$

$$T_{kps} = \begin{cases} \cos(\kappa_{kps} x_s), & p = 1, 2 \\ \sin(\kappa_{kps} x_s), & p = 3, 4 \end{cases}$$

$$\kappa_{kps} = \begin{cases} \gamma_{ks} = k\pi/a_s, & p = 1, 3 \\ \delta_{ks} = (2k - 1)\pi/2a_s, & p = 2, 4 \end{cases}$$

Całka szczególna

Ponieważ w modelu matematycznym stosuje się tylko funkcje ciągłe, n -krotnie różniczkowalne, to dowolne obciążenie zewnętrzne $q(x_1, x_2)$ (ciągłe, dyskretne, skupione), aproksymujemy ciągłą funkcją obciążenia w postaci wielomianu tensorowego:

$$Q(x_1, x_2) = A_0 \cdot \Psi(x_1, x_2) + A_{mps} \cdot T_{mps}(x_s) + B_{mnpq} \cdot T_{mnpq}(x_1, x_2) \quad (6)$$

gdzie:

- $\Psi(x_1, x_2)$ – wielomian algebraiczny czwartego stopnia
- $T_{mps}(x_s)$ – pojedyncze funkcje trygonometryczne
- $T_{mnpq}(x_1, x_2)$ – podwójne funkcje trygonometryczne
- $m = 1, \dots, M, n = 1, \dots, N, p = 1, \dots, 4, q = 1, \dots, 4, s = 1, 2$

Całka szczególna

Wprowadzone funkcje mają postać:

$$\Psi(x_1, x_2) = \frac{x_1^4}{24a_1^4} + \frac{x_1^2 x_2^2}{4a_1^2 a_2^2} + \frac{x_2^4}{24a_2^4} \quad (7)$$

$$T_{mnpq}(x_1, x_2) = T_{mp1}(x_1) \cdot T_{nq2}(x_2) \quad (8)$$

Nieznane współczynniki A_0, A_{mps}, B_{mnpq} określamy z warunków spełnianych w oddzielnych punktach (x_1^*, x_2^*) na powierzchni:

$$Q(x_1, x_2) \Big|_{\substack{x_1=x_1^* \\ x_2=x_2^*}} = q(x_1^*, x_2^*) \quad (9)$$

Podobnie do (6) weźmy całkę szczególną r-nia (1):

$$w_*(x_1, x_2) = A_0^* \cdot \Psi(x_1, x_2) + A_{mps}^* \cdot T_{mps}(x_s) + B_{mnpq}^* \cdot T_{mnpq}(x_1, x_2) \quad (10)$$

Ugięcie płyty

Wyrażenie na ugięcie płyty:

$$w(x_1, x_2) = R_{kpsv} \cdot W_{kpsv}(x_1, x_2) + W_*(x_1, x_2) \quad (11)$$

gdzie:

- R_{kpsv} – stopnie swobody płyty
- $W_{kpsv}(x_1, x_2)$ – funkcje kształtu ugięcia płyty
- $W_*(x_1, x_2)$ – funkcje obciążenia ugięcia płyty

Funkcje stanu

Niech F oznacza jedną z funkcji

$$F = (w, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_n, M_{11}, M_{22}, M_n, M_{12}, Q_1, Q_2, V_1, V_2). \quad (12)$$

Dowolną funkcję stanu możemy podać w postaci

$$F(x_1, x_2) = R_{kpsv} \cdot F_{kpsv}(x_1, x_2) + F_*(x_1, x_2) \quad (13)$$

Otrzymujemy ją z wyrażenia $w(x_1, x_2)$ przy pomocy różniczkowania automatycznego.

Warunki brzegowe i powierzchniowe

Całka	ogólna	szczególna
Węzły	brzegowe	powierzchniowe
Warunki	równowaga reakcji zewnętrznych w węzłach na brzegu płyty	równowaga reakcji wewnętrznych i obciążenia przyłożonego w węzłach na powierzchni płyty

Warunki brzegowe i powierzchniowe

Wyrażenie $F(x_1, x_2)$ zawiera dwa zbiory dowolnych współczynników, które pozwalają na spełnienie warunków brzegowych i powierzchniowych zadaną dokładnością.

Ponieważ wyrażenie $Q(x_1, x_2)$ jest dokładnym rozwiązaniem równania równowagi (1), siły wewnętrzne i przemieszczenia wewnątrz płyty są zrównoważone obciążeniem zewnętrznym. Warunki te spełniamy na powierzchni płyty w punktach zwanych *węzłami powierzchniowymi*. Stąd określamy całkę szczególną równania (1).

Warunki brzegowe i powierzchniowe

Ale wielkości na krawędziach są niezrównoważone, ponieważ wyrażenie całki ogólnej zawiera stopnie swobody płyty R_{kpsv} . W celu ustabilizowania płyty nakładamy pewne ograniczenia w postaci warunków brzegowych w oddzielnych punktach na konturze płyty. Punkty te nazywamy *węzłami brzegowymi*. Każdemu warunkowi brzegowemu odpowiada jeden parametr R_{kpsv} .

Rozwiązanie

Ostateczne rozwiązanie uzyskuje się z algebraicznego układu równań typu $\mathbf{AR} = -\mathbf{b}$ względem nieznanych współczynników R_{kpsv} . Rozwiązując układu równań eliminujemy stopnie swobody płyty. Następnie obliczamy wymagane statyczne i kinematyczne wielkości i drukujemy wyniki, zwykle w formie wykresów (2D lub 3D).

Model obliczeniowy zaimplementowano w języku programowania Python. Kod źródłowy programu dostępny jest w repozytorium:

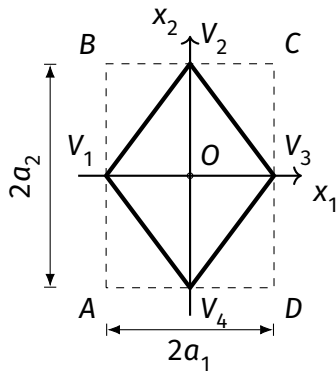
https://github.com/krysros/mcr_2024

Model geometryczny

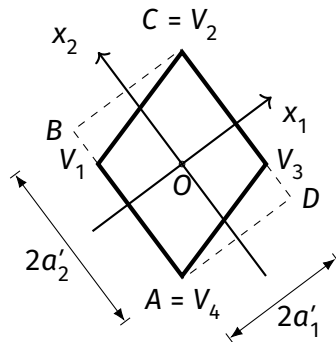
Geometrię płyty określają współrzędne kolejnych wierzchołków V_i wielokąta odpowiadającego konturowi płyty.

Model geometryczny to konfiguracja węzłów stacjonarnych, brzegowych i powierzchniowych wybrana tak, aby jak najdokładniej odzwierciedlała rzeczywistą konstrukcję, tj. kształt płyty, warunki brzegowe, przyłożone do płyty obciążenia i deformację płyty wywołaną ich wpływem.

Model geometryczny



(a)



(b)

Rysunek: Prostokąt ograniczający płytę: (a) koperta i (b) prostokąt minimalny

Węzły brzegowe

Przy zadanej z góry liczbie K aproksymacji rozwiązania problemu, ogólna liczba stopni swobody płyty wynosi:

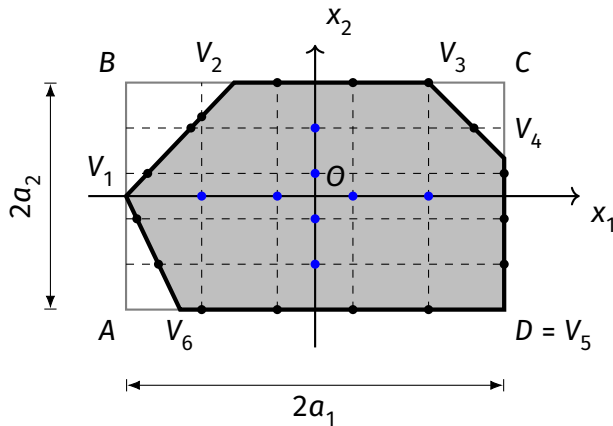
$$n = K \cdot p_{\max} \cdot s_{\max} \cdot v_{\max} = K \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \quad (14)$$

Na brzegu płyty należy więc nałożyć $n = 32 K$ więzów.

Ponieważ w każdym węźle zapisujemy dwa warunki brzegowe, to liczba węzłów brzegowych musi być równa $i = n/2$.

Węzły brzegowe rozmieszczamy na brzegu płyty rzeczywistej.

Węzły brzegowe



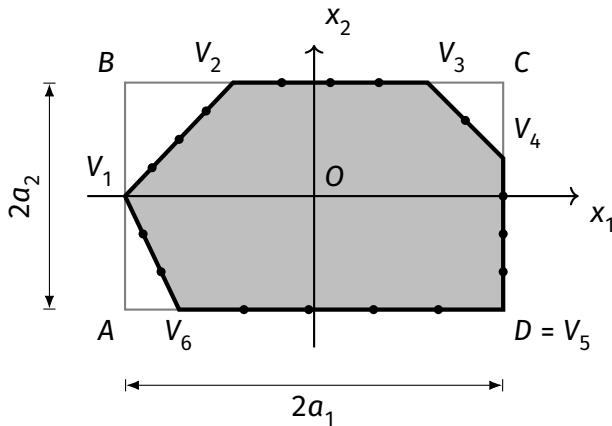
Rysunek: Określenie liczby węzłów brzegowych (rzutowanie punktów wyjściowych)

Węzły brzegowe

Tabela: Liczba węzłów brzegowych na krawędziach płyty

Nr	Krawędź	Liczba węzłów
1	V_1-V_2	3
2	V_2-V_3	3
3	V_3-V_4	1
4	V_4-V_5	3
5	V_5-V_6	4
6	V_6-V_1	2

Węzły brzegowe



Rysunek: Równomierny rozkład określonej liczby węzłów na krawędziach

Węzły powierzchniowe

Liczba węzłów powierzchniowych musi być równa liczbie nieznanych parametrów wchodzących do wyrażenia całki szczególnej (10):

$$j = 1 + 4 \cdot M + 4 \cdot N + 16 \cdot M \cdot N \quad (15)$$

Dla

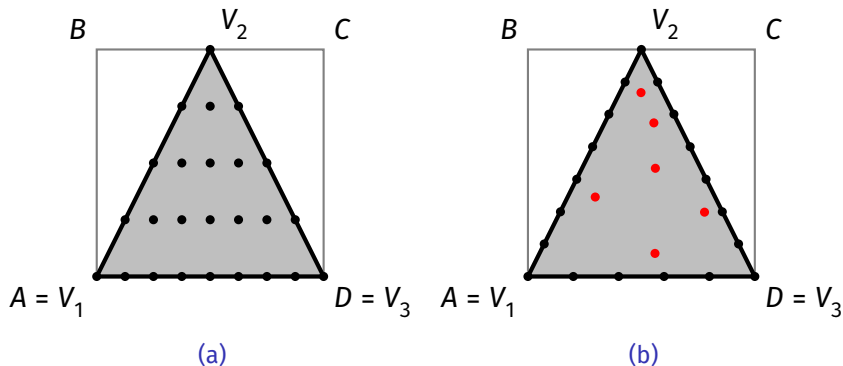
$$M = N = 1; \quad j = 1 + 4 + 4 + 16 = 25$$

$$M = N = 2; \quad j = 1 + 8 + 8 + 64 = 81$$

itd.

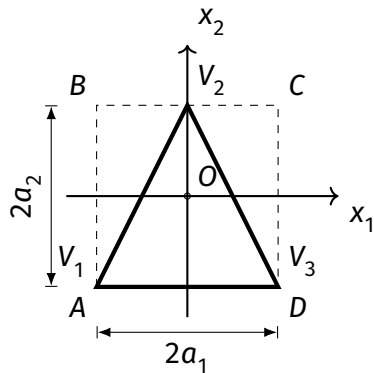
Węzły powierzchniowe rozmieszczamy na powierzchni płyty rzeczywistej.

Węzły powierzchniowe

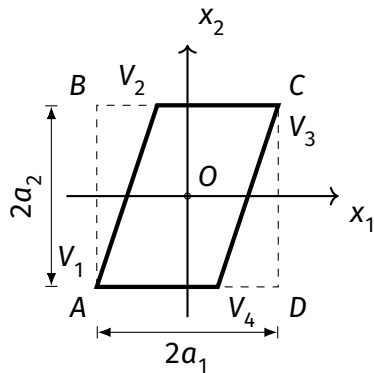


Rysunek: Równomierny (a) i losowy (b) rozkład węzłów powierzchniowych płyty trójkątnej dla $K = 1$ i $M = N = 1$

Przykłady



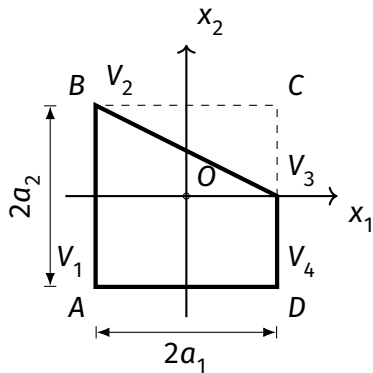
(a)



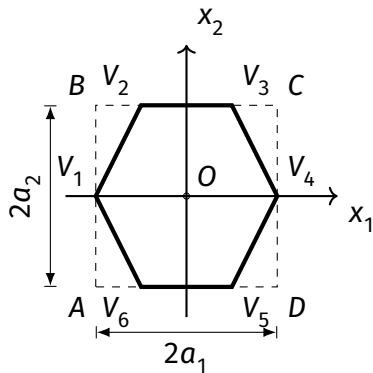
(b)

Rysunek: Przykłady makroelementów: (a) płyta trójkątna, (b) płyta równoległoboczna

Przykłady



(a)



(b)

Rysunek: Przykłady makroelementów: (a) płyta trapezowa, (b) płyta sześciokątna

Przykłady

Parametry geometryczne:

$$a_1 = 3 \text{ m}, \quad a_2 = 3 \text{ m}, \quad h = 0.2 \text{ m}$$

Stałe sprężyste:

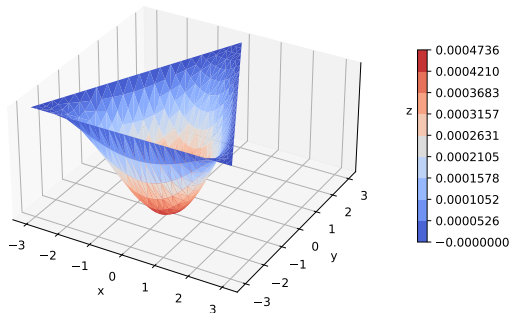
$$E = 30 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad \nu = 0.2$$

Intensywność obciążenia:

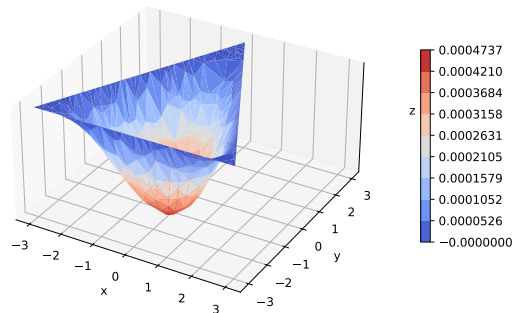
$$q_0 = 10 \text{ kPa}$$

Warunki brzegowe: płyty swobodnie podparte

Płyta trójkątna



(a)



(b)

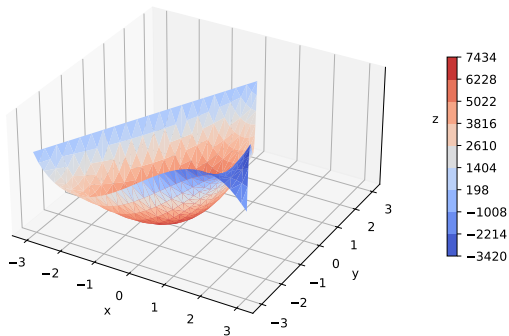
Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty trójkątnej (a) dla równomiernego i (b) losowego rozkładu węzłów powierzchniowych

Porównanie wyników

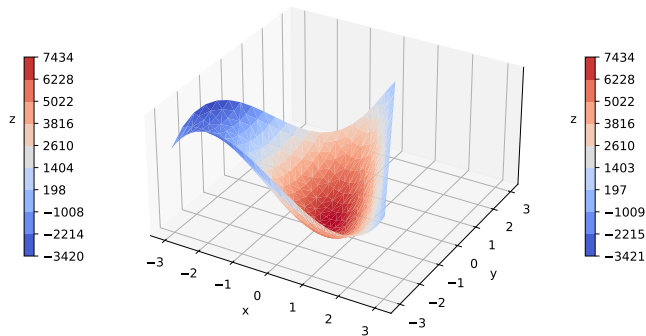
Tabela: Minimalne i maksymalne wartości kinematycznych i statycznych wielkości wraz z ich błędem względnym (RE) dla swobodnie podpartej płyty trójkątnej z równomiernym i losowym rozkładem węzłów powierzchniowych

Fun.	Jend.	Równomierny		Losowy		RE	
		Min	Max	Min	Max	Min	Max
w	m	0	0.000 473 6	0	0.000 473 7	0 %	0.01 %
φ_1	rad	-0.000 389	0.000 389	-0.000 390	0.000 390	0.08 %	0.08 %
φ_2	rad	-0.000 206	0.000 424	-0.000 208	0.000 423	0.57 %	0.22 %
M_{11}	N m/m	-2850.40	8006.10	-2872.85	7973.67	0.79 %	0.41 %
M_{22}	N m/m	-2535.65	7019.75	-2538.61	7001.34	0.12 %	0.26 %
M_{12}	N m/m	-3583.30	3584.22	-3579.05	3579.76	0.12 %	0.12 %
Q_1	N m ⁻¹	-12 499.10	12 495.14	-12 508.10	12 504.25	0.07 %	0.07 %
Q_2	N m ⁻¹	-6252.21	13 803.93	-6257.24	13 789.06	0.08 %	0.11 %
V_1	N m ⁻¹	-14 982.12	14 976.67	-14 989.79	14 983.69	0.05 %	0.05 %
V_2	N m ⁻¹	-9220.07	16 746.01	-9220.07	16 722.39	0 %	0.14 %

Płyta trójkątna



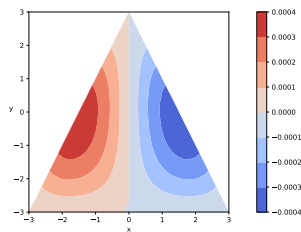
(a)



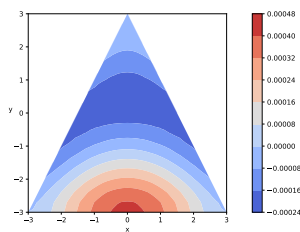
(b)

Rysunek: Wykres 3D momentu M_n płyty trójkątnej (a) $\alpha = 153^\circ$ i (b) $\alpha = 27^\circ$

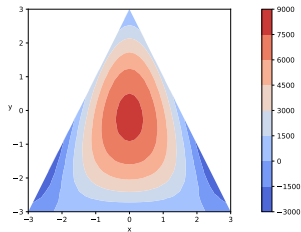
Płyta trójkątna



(a)



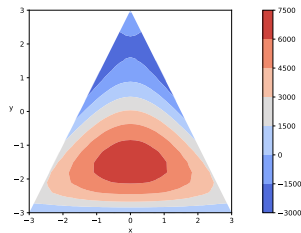
(b)



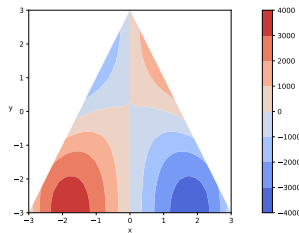
(c)

Rysunek: Wykresy 2D kątów obrotu (a) ϕ_1 , (b) ϕ_2 i momentów zginających (c) M_{11} płyty trójkątnej

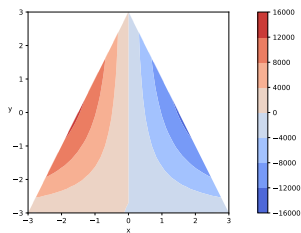
Płyta trójkątna



(a)



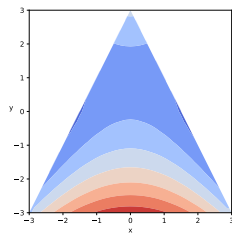
(b)



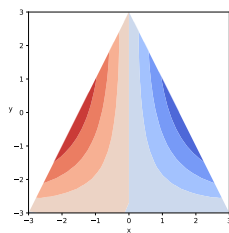
(c)

Rysunek: Wykresy 2D momentów zginających (a) M_{22} , momentów skręcających (b) M_{12} i sił tnących (c) Q_1 płyty trójkątnej

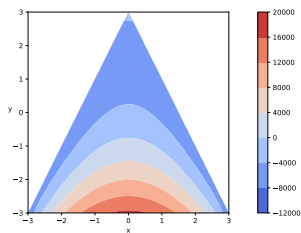
Płyta trójkątna



(a)



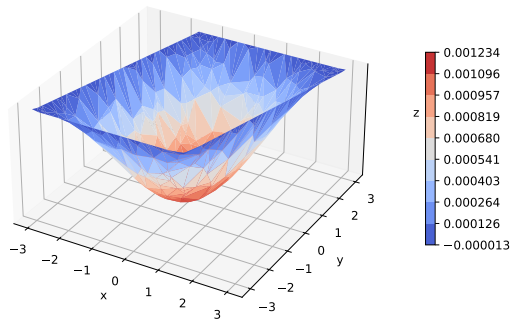
(b)



(c)

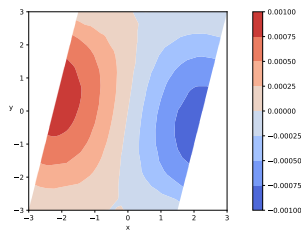
Rysunek: Wykresy 2D sił tnących (a) Q_2 i uogólnionych sił tnących (b) V_1 , (c) V_2 płyty trójkątnej

Płyta równoległoboczna

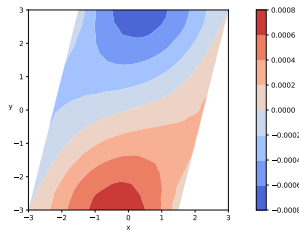


Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty równoległobocznej dla losowego rozkładu węzłów powierzchniowych

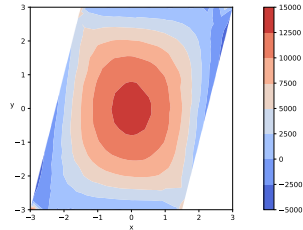
Płyta równoległoboczna



(a)



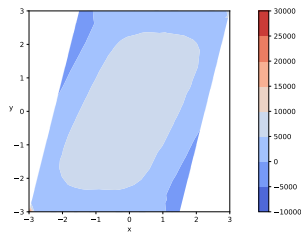
(b)



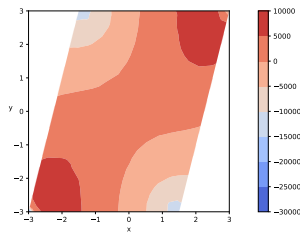
(c)

Rysunek: Wykresy 2D kątów obrotu (a) ϕ_1 , (b) ϕ_2 i momentów zginających (c) M_{11} płyty równoległobocznej

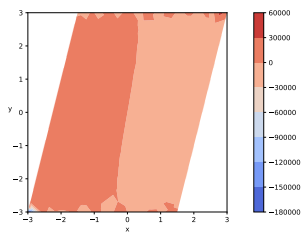
Płyta równoległoboczna



(a)



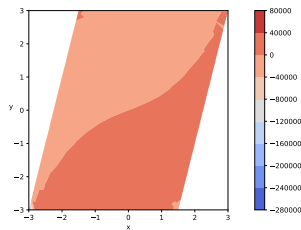
(b)



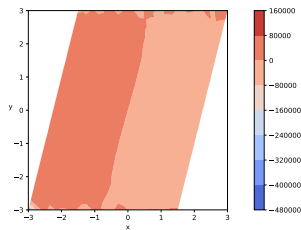
(c)

Rysunek: Wykresy 2D momentów zginających (a) M_{22} , momentów skręcających (b) M_{12} i sił tnących (c) Q_1 płyty równoległobocznej

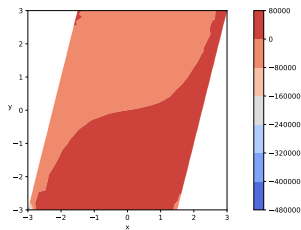
Płyta równoległoboczna



(a)



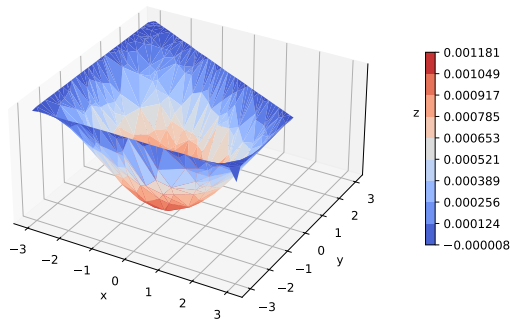
(b)



(c)

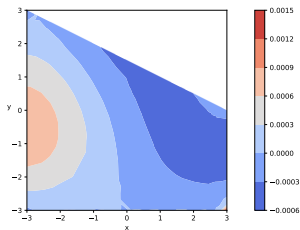
Rysunek: Wykresy 2D sił tnących (a) Q_2 i uogólnionych sił tnących (b) V_1 , (c) V_2 płyty równoległobocznej

Płyta trapezowa

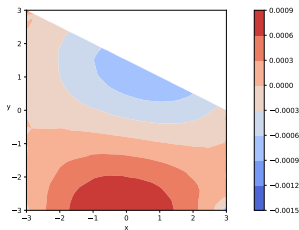


Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty trapezowej dla losowego rozkładu węzłów powierzchniowych

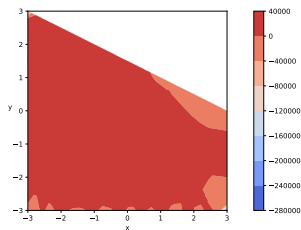
Płyta trapezowa



(a)



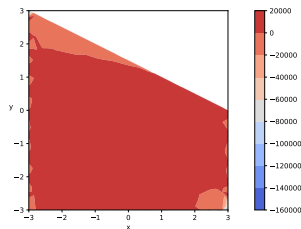
(b)



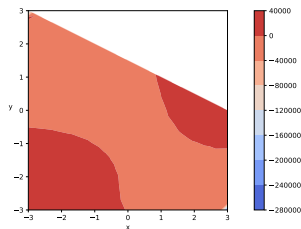
(c)

Rysunek: Wykresy 2D kątów obrotu (a) ϕ_1 , (b) ϕ_2 i momentów zginających (c) M_{11} płyty trapezowej

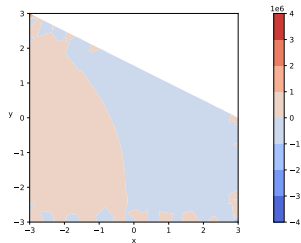
Płyta trapezowa



(a)



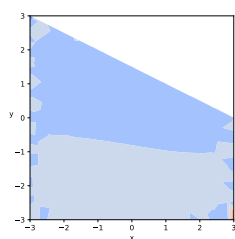
(b)



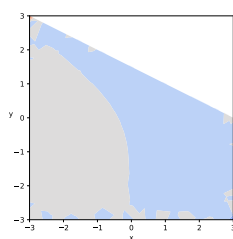
(c)

Rysunek: Wykresy 2D momentów zginających (a) M_{22} , momentów skręcających (b) M_{12} i sił tnących (c) Q_1 płyty trapezowej

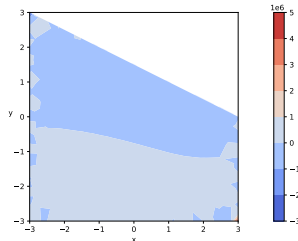
Płyta trapezowa



(a)



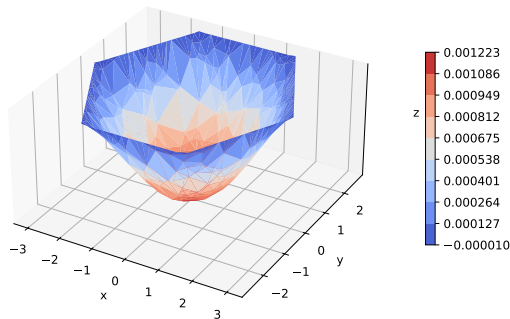
(b)



(c)

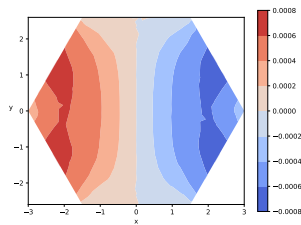
Rysunek: Wykresy 2D sił tnących (a) Q_2 i uogólnionych sił tnących (b) V_1 , (c) V_2 płyty trapezowej

Płyta sześciokątna

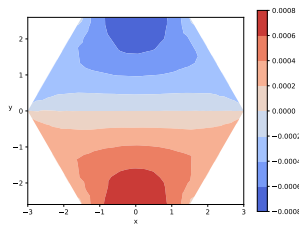


Rysunek: Wykres 3D ugięcia płyty sześciokątnej dla losowego rozkładu węzłów powierzchniowych

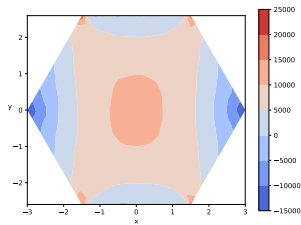
Płyta sześciokątna



(a)



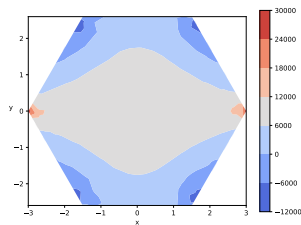
(b)



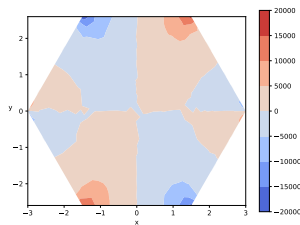
(c)

Rysunek: Wykresy 2D kątów obrotu (a) ϕ_1 , (b) ϕ_2 i momentów zginających (c) M_{11} płyty sześciokątnej

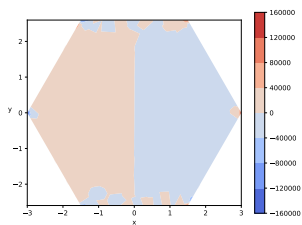
Płyta sześciokątna



(a)



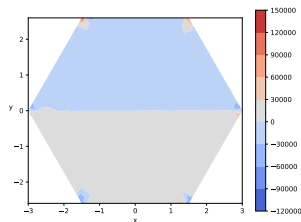
(b)



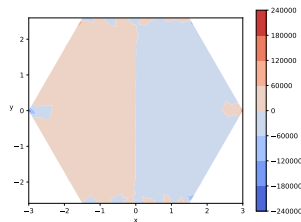
(c)

Rysunek: Wykresy 2D momentów zginających (a) M_{22} , momentów skręcających (b) M_{12} i sił tnących (c) Q_1 płyty sześciokątnej

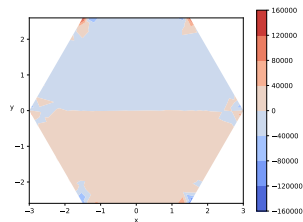
Płyta sześciokątna



(a)



(b)



(c)

Rysunek: Wykresy 2D sił tnących (a) Q_2 i uogólnionych sił tnących (b) V_1 , (c) V_2 płyty sześciokątnej

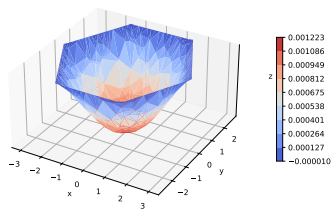
Wnioski

- Opracowana metoda pozwala rozwiązywać zagadnienie zginania cienkich, izotropowych płyt wielokątnych
- Metoda jest uniwersalna, tzn. pozwala na rozwiązanie konstrukcji płytowych o różnych konfiguracjach
- Metoda jest automatyczna, tzn. pozwala uzyskać komplet wyników wyłącznie przez zmianę parametrów wejściowych
- Warunki brzegowe są spełnione z wysoką dokładnością w oddzielnych węzłach brzegowych

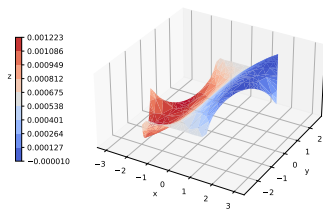
Problemy

- W narożnikach (zwłaszcza gdy płyta zawiera kąty rozwarte) pojawiają się znane problemy związane z występowaniem osobliwości w tych punktach
- Problemy te objawiają się skokami wartości w narożnikach i/lub w ich pobliżu
- Obserwujemy zależność pomiędzy rzędem pochodnej ugięcia, która wchodzi do wyrażenia poszukiwanej wielkości
- Im wyższa pochodna ugięcia, tym większe skoki wartości w okolicach narożników

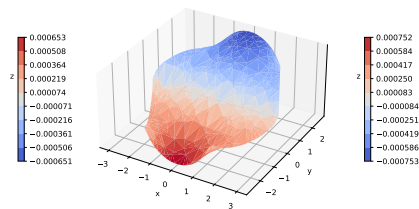
Płyta sześciokątna



(a)



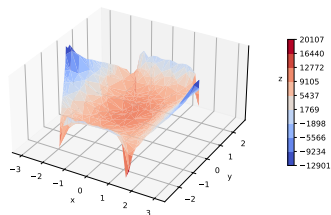
(b)



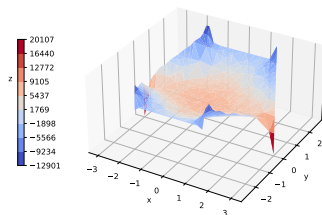
(c)

Rysunek: Wykresy 3D ugięcia (a) i kątów obrotu (b) ϕ_1 , (c) ϕ_2 płyty sześciokątnej

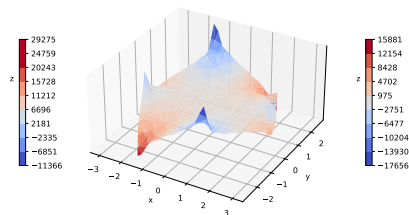
Płyta sześciokątna



(a)



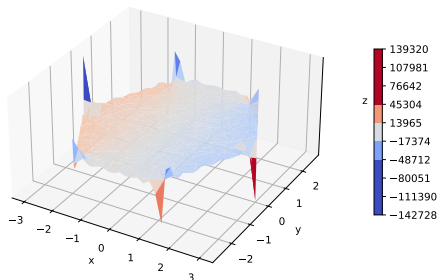
(b)



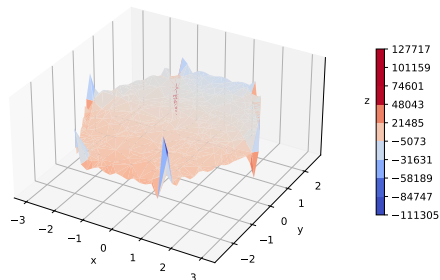
(c)

Rysunek: Wykresy 3D momentów zginających (a) M_{11} (b) M_{22} i skręcających (c) M_{12} płyty sześciokątnej

Płyta sześciokątna



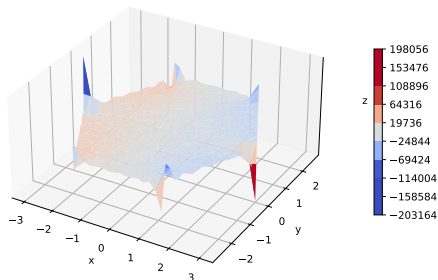
(a)



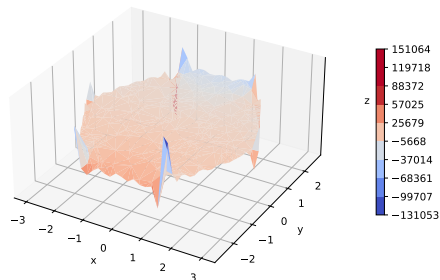
(b)

Rysunek: Wykresy 3D sił tnących (a) Q_1 , (b) Q_2 płyty sześciokątnej

Płyta sześciokątna



(a)



(b)

Rysunek: Wykresy 3D uogólnionych sił tnących (a) V_1 , (b) V_2 płyty sześciokątnej

Kierunki dalszego rozwoju metody

- Wyeliminowanie osobliwości w narożnikach
- Opracowanie/wdrożenie metody równomiernego rozmieszczenia węzłów np. algorytm Lloyda
- Zastosowanie do płyt o kształtach wielokątów wklęsłych (wymaga wprowadzenia pewnych modyfikacji w rozkładzie węzłów)

Dziękuję za uwagę