1 Théorie

1.1 Fraction continues

1.1.1 Intuition

Intuitivement, une fraction continue est une expression — finie ou infinie — de la forme suivante [1] :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

telle que $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_i \in [\![1, 9]\!]$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Toujours intuitivement, nous voulons affûbler cette fraciton continue d'une valeur. Si la fraction continue est finie, cette une bonne vieille fraciton, c'est à dire un élément du corps $\mathbb{Q}$; si la fraction continue est infinie, on calcule d'abord a_0, puis $a_0 + \frac{1}{a_1}$, puis $a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2}}$, et on continue une infinité de fois. La limite de la suite générée est la « valeur » de la fraction continue. Nous ferons sens plus précis de l'intuition dans le prochain paragraphe.

Les fractions continues émanent de la volonté d'approcher des réels irrationels par des fractions d'entiers. Par exemple, la fraction $\frac{103993}{33102}$ approche π avec une précision meilleure que le milliardième. Comment générer une telle fraction continue pour un réel irrationnel x ? On part de l'identité suivante $x = x + \lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor$ et l'on écrit

$$x = \lfloor x \rfloor + \cfrac{1}{\cfrac{1}{x - \lfloor x \rfloor}}.$$

On pose désormais $a_1 = \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor}$ (qui est bien défini par irrationalité de x) et l'on répète la première étape sur a_1 :

$$x = \lfloor x \rfloor + \frac{1}{a_1} = \lfloor x \rfloor + \cfrac{1}{\lfloor a_1 \rfloor + \cfrac{1}{\cfrac{1}{a_1 - \lfloor a_1 \rfloor}}}.$$

1. Notez que nous ne nous autorisons que des 1 aux numérateurs.

On recommence : on pose $a_2 = \frac{1}{a_1 - \lfloor a_1 \rfloor}$ pour obtenir

$$x = \lfloor x \rfloor + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{a_2 - \lfloor a_2 \rfloor}}}}.$$

Comme le réel x est irrationnel, ce procédé ne s'arrête jamais. Nous construisons alors la suite de terme général

$$a_n = \frac{1}{a_{n-1} - \lfloor a_{n-1} \rfloor}, \quad \forall n \geqslant 1$$

et associons canoniquement à *l'irrationnel* x la fraction continue *infinie*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}.$$

Remarque 1.1. La méthode de construction d'une fraction continue *finie* pour un rationnel est la même : il faut simplement s'arrêter lorsque l'on tombe sur un a_n vérifiant $a_n = \lfloor a_n \rfloor$. Cet algorithme termine (**ref**) et s'exécute plus simplement en utilisant... l'algorithme d'Euclide. Par ailleurs, réaffirmons que la fraction continue d'un irrationel (encore une fois, dans un sens qui sera précisé au prochain paragraphe) est forcément infinie.

1.1.2 Formalisation

1.1.3 Irrationels quadratiques