Это преобразование интегралл сделано путем подстановок

$$a\lambda\sqrt{t} = z, \qquad \frac{a-x}{a\sqrt{t}} = \beta \tag{14}$$

Обозначим

$$K(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-z^2} \cos\beta z dz. \tag{15}$$

Дифференцируя *), получаем

$$K'(\beta) = -\int_0^{+\infty} e^{-z^2} z \sin\beta z dz.$$

Интегрируя по частям, найдем

$$K'(\beta) = \frac{1}{2}[e^{-z^2}\sin\beta z]_0^{+\infty} + \infty 0 - \frac{\beta}{2}\int_0^{+\infty} e^{-z^2}\cos\beta z dz$$

или

$$K'(\beta) = Ce^{-\frac{\beta^2}{4}}. \tag{16}$$

Определим постоянную С. Из (15) сдедует

$$K(0) = \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(см. § 5 гл. XIV). Следовательно, в равенстве (16) должно быть

$$C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Итак

$$K(\beta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{-\beta^2}{4}}. \tag{17}$$

Значение (17) интегралла (15) подставляем в (13):

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(a-x)d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}}\frac{sqrt\pi}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

Подставляя вместо β его выражение (14), окончательно получаем

*)Возможность дифференцирования легко обосновываетя.

значение интегралла (13):

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} cos\lambda(a-x)d\lambda = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}e}^{-\frac{(a-x)^2}{4a^2t}}. \qquad (18)$$

Подставив это выражение интеграла в решение (12), окончательно получим:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) e^{-\frac{(a-x)^2}{4a^2t}} d\alpha. \qquad (19)$$

Эта формула, называемая *интегралом Пауссона*, представляет собой решение поставленной задачи о распространении тепла в неограниченном стержне.

Замечание. Можно доказать, что функция u(x,t), определенная интегралом (19), является решением уравнения (1) и удовлетворяет условию (2), если функция $\varphi(x)$ ограничена на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$.

Установим физический смысл формулы(19). Рассмотрим функцию

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} -\infty < x < x_0 \\ \varphi(x) & \text{при } x_0 \leq x \leq x_0 + \Delta x \\ 0 & \text{при } x_0 + \Delta x < x < +\infty. \end{cases}$$

Тогда функция

$$u^*(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha) e^{-\frac{(a-x)^2}{4a^2t}} d\alpha \qquad (21)$$

Есть решение уравнения (1), принимающее при t=0 значение $\varphi*(x)$. Принимая во внимание (20), можем написать

$$u^*(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \varphi(\alpha) e^{-\frac{(a-x)^2}{4a^2t}} d\alpha.$$

Применив теорему о среднем к последующему интегралу, получим

$$u^*(x,t) = \frac{\varphi(\xi)\Delta x}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}, x_0 < \xi < x_0 + \Delta x. \qquad (22)$$

Формула (22) дает значение температуры в точке стержня в любой момент времени, если при t=0 всюду в стержне температура $u^* = 0$, кроме отрезка $[x_0, x_0 + \Delta x]$, где она равна $\varphi(x)$. Сумма температур вида (22) и дает решение (19). Заметим, что если ρ- линейная плотность стержня, с - теплоемкость материала, то количество тепла в элементе $[x_0, x_0 + \Delta x]$ при t=0 будет

$$\Delta Q \approx \varphi(\xi)\Delta x\rho c. \qquad (23)$$