

作业 4

授课老师: 贺飞

周雨豪 (2018013399)

助教: 徐荣琛、谢兴宇、韩志磊、刘江宜

在开始完成作业前, 请仔细阅读以下说明:

- 我们提供作业的 \LaTeX 源码, 你可以在其中直接填充你的答案并编译 PDF (请使用 `xelatex`)。当然, 你也可以使用别的方式完成作业 (例如撰写纸质作业后扫描到 PDF 文件之中)。但是请注意, 最终的提交一定只是 PDF 文件。提交时请务必再次核对, 防止提交错误。
- 在你的作业中, 请务必填写你的姓名和学号, 并检查是否有题目遗漏。请重点关注每次作业的截止时间。截止时间之后你仍可以联系助教补交作业, 但是我们会按照如下公式进行分数的折扣:

$$\text{作业分数} = \min(\text{实际分}, \text{满分} \times (1 - 10\% \times \min(\lceil \text{迟交周数} \rceil, 10)))$$

- 本次作业为独立作业, 禁止抄袭等一切不诚信行为。作业中, 如果涉及参考资料, 请引用注明。

Problem 1: 谓词变换

1-1 计算下列最弱前置条件。

- $wlp(b[m] := b[n]; b[n] := t, b[m] < b[n])$
- $wlp(\text{if } y > 2 \text{ then } x := y - 5 \text{ else } x := -y, x \geq 0)$

Solution

$$\begin{aligned}
 & wlp(b[m] := b[n]; b[n] := t, b[m] < b[n]) \\
 &= wlp(b[m] := b[n], wlp(b[n] := t, b[m] < b[n])) \\
 &= wlp(b[m] := b[n], (b[m] < b[n])[b \rightarrow b\langle n \triangleleft t \rangle]) \\
 &= wlp(b[m] := b[n], (b\langle n \triangleleft t \rangle[m] < b\langle n \triangleleft t \rangle[n])) \\
 &= wlp(b[m] := b[n], b[m] < t) \\
 &= (b[m] < t)[b \rightarrow b\langle m \triangleleft b[n] \rangle] \\
 &= (b\langle m \triangleleft b[n] \rangle[m] < t) \\
 &= b[n] < t \\
 & wlp(\text{if } y > 2 \text{ then } x := y - 5 \text{ else } x := -y, x \geq 0) \\
 &= (y > 2 \rightarrow wlp(x := y - 5, x \geq 0)) \wedge (\neg(y > 2) \rightarrow wlp(x := -y, x \geq 0)) \\
 &= (y > 2 \rightarrow y - 5 \geq 0) \wedge (\neg(y > 2) \rightarrow -y \geq 0) \\
 &= (y \leq 2 \vee y \geq 5) \wedge (y > 2 \vee y \leq 0) \\
 &= y \leq 0 \vee y \geq 5
 \end{aligned}$$

1-2 利用最弱前置条件推导，证明下列程序属性的正确性。

```
// {true}
n := 0;
x := 0;
while (r ≠ 0) {
  n := n + 1;
  x := x + 2 × n - 1;
  r := r - 1;
}
// {x = n × n}
```

提示：考虑使用循环不变式： $x = n \times n$ 。

Solution

```
// {0 = 0 × 0}
n := 0;
// {0 = n × n}
x := 0;
// {x = n × n}
while (r ≠ 0) {...}
// {x = n × n}
```

前置条件 φ : *true*

后置条件 ψ : $x = n \times n \wedge r = 0$

循环不变式 I : $x = n \times n$

验证条件：

1. $I \wedge \neg(r \neq 0) \models \psi$
2. $I \wedge r \neq 0 \models wlp(n := n + 1; x := x + 2 \times n - 1; r := r - 1, I)$
3. $true \models 0 = 0 \times 0$

验证条件1、3 均成立，对于验证条件 2:

$$\begin{aligned}
 & wlp(n := n + 1; x := x + 2 \times n - 1; r := r - 1, I) \\
 = & wlp(n := n + 1, wlp(x := x + 2 \times n - 1, wlp(r := r - 1, I))) \\
 = & wlp(n := n + 1, wlp(x := x + 2 \times n - 1, x = n \times n)) \\
 = & wlp(n := n + 1, x + 2 \times n - 1 = n \times n) \\
 = & (x + 2 \times (n + 1) - 1 = (n + 1) \times (n + 1)) \\
 = & (x = n \times n) = I
 \end{aligned}$$

由此验证条件 2 成立，示例程序满足给定规约。

■

Problem 2: 基本路径

2-1 请写出过程 Proc_A 的所有基本路径。

```
/* requires x > 0;
   ensures rv = 0; */
procedure Proc_M(x);

/* requires y > 0;
   ensures rv ≥ 0; */
procedure Proc_A(y) {
    if (y > 10)
    {
        v := Proc_M(y);
        assert(v ≥ 0);
        return v;
    }
    while(y > 0)
    /* invariant: y ≥ 0 */
    {
        t := y;
        while(t > 0)
        /* invariant: t ≥ 0 ∧ y ≥ t */
        {
            t := t - 1;
        }
        y := y - 1;
    }
    return 0;
}
```

Solution

第一条基本路径

$$\{y > 0\}$$

$$\text{assume } y > 10;$$

$$\{y > 0\}$$

第二条基本路径

$$\{y > 0\}$$

$$\text{assume } y > 10;$$

$$\text{assume } v_M = 0$$

$$v := v_M$$

$$\text{assume } v \geq 0;$$

$$rv := v$$

$$\{rv \geq 0\}$$

第三条基本路径

$$\{y > 0\}$$

$$\text{assume } y > 10;$$

$$\text{assume } v_M = 0$$

$$v := v_M$$

$$\text{assume } v < 0;$$

$$\{\text{错误状态}\}$$

第四条基本路径

$$\{y > 0\}$$

$$\text{assume } y \leq 10;$$

$$\{y \geq 0\}$$

第五条基本路径

$$\{y \geq 0\}$$

$$\text{assume } y > 0;$$

$$t := y$$

$$\{t \geq 0 \wedge y \geq t\}$$

第六条基本路径

$$\{t \geq 0 \wedge y \geq t\}$$

$$\text{assume } t > 0;$$

$$t := t - 1;$$

$$\{t \geq 0 \wedge y \geq t\}$$

第七条基本路径

$$\{t \geq 0 \wedge y \geq t\}$$
$$\mathbf{assume} \ t \leq 0;$$
$$y := y - 1;$$
$$\{y \geq 0\}$$

第八条基本路径

$$\{y \geq 0\}$$
$$\mathbf{assume} \ y \leq 0;$$
$$rv := 0;$$
$$\{rv \geq 0\}$$

■