软件分析与验证 **截止时间: Mar 20, 2022**

作业 1

授课老师: 贺飞 周雨豪 (2018013399)

助教: 徐荣琛、谢兴宇、韩志磊、刘江宜

在开始完成作业前，请仔细阅读以下说明:

- 我们提供作业的 LaTeX 源码，你可以在其中直接填充你的答案并编译 PDF（请使用 xelatex）。当然，你也可以使用别的方式完成作业（例如撰写纸质作业后扫描到 PDF 文件之中）。但是请注意，最终的提交一定只是 PDF 文件。提交时请务必再次核对，防止提交错误。
- 在你的作业中，请务必填写你的姓名和学号，并检查是否有题目遗漏。请重点注意每次作业的截止时间。截止时间之后你仍可以联系助教补交作业，但是我们会按照如下公式进行分数的折扣:

$$\text{作业分数} = \min\left(\text{实际分}, \text{满分} \times \left(1 - 10\% \times \min\left(\lceil \text{迟交周数} \rceil, 10\right)\right)\right).$$

- 本次作业为独立作业，禁止抄袭等一切不诚信行为。作业中，如果涉及参考资料，请引用注明。

Problem 1: 判断题

给定下列陈述，请判断其是否正确。如果错误，请给出反例或解释原因。

1-1 给定任意的命题逻辑公式，它是否为有效式一定是可判定的。

Solution True ■

1-2 给定命题逻辑公式 F 和 G，如果 F 是有效的且 G 不是有效的，则 $F \to G$ 一定不可满足。

Solution False. 当 G 取值为 True 时候 $F \to G$ 取值为 True，所以并非不可满足 ■

1-3 给定命题逻辑公式 F 和 G，如果 F 是可满足的且 $\neg G$ 是不可满足的，则 $F \wedge G$ 一定可满足。

Solution True ■

1-4 任意给定一个一阶逻辑公式，一定可以在有限时间内判定其是否有效。

Solution False. 如果公式非有效式则无法在有限时间内判定 ■

Problem 2: 解答题

2-1 考虑下列公式：

$$(P \to (Q \to R)) \to (\neg R \to (\neg Q \to \neg P))$$

请列出它的真值表，并判断：1）它是否有效；2）它是否可满足。

Solution

P	Q	R	$P \to (Q \to R))$	$\neg R \to (\neg Q \to \neg P)$	原式
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

1）非有效；2）可满足

■

2-2 在下列公式中，请标记出所有变元的自由出现：

$$\forall x.(f(x) \wedge \exists y.g(x, y, z)) \wedge \exists z.g(x, y, z)$$

Solution

$$\forall x.(f(x) \wedge \exists y.g(x, y, \underline{z})) \wedge \exists z.g(\underline{x}, \underline{y}, z)$$

见下划线字母

■

2-3 考虑论域 $\mathcal{D} = \{\circ, \bullet\}$ 以及下面的解释函数

- $\mathcal{I}(f) = \{(\circ, \circ) \mapsto \circ, (\circ, \bullet) \mapsto \bullet, (\bullet, \circ) \mapsto \bullet, (\bullet, \bullet) \mapsto \bullet\}$
- $\mathcal{I}(g) = \{\circ \mapsto \bullet, \bullet \mapsto \circ\}$
- $\mathcal{I}(p) = \{(\bullet, \circ), (\bullet, \bullet)\}$

求公式 $\forall x.p(f(g(x), x), x)$ 的取值。

Solution

$$
\begin{aligned}
&x \mapsto \circ \\
&[\![g(x)]\!] = \mathcal{I}(g)([\![x]\!]) = \mathcal{I}(g)(\circ) = \bullet \\
&[\![f(g(x), x)]\!] = \mathcal{I}(f)([\![g(x)]\!], [\![x]\!]) = \mathcal{I}(f)(\bullet, \circ) = \bullet \\
&[\![p(f(g(x), x), x)]\!] = \mathcal{I}(p)(\bullet, \circ) = true \\
&x \mapsto \bullet \\
&[\![g(x)]\!] = \mathcal{I}(g)([\![x]\!]) = \mathcal{I}(g)(\bullet) = \circ \\
&[\![f(g(x), x)]\!] = \mathcal{I}(f)([\![g(x)]\!], [\![x]\!]) = \mathcal{I}(f)(\circ, \bullet) = \bullet \\
&[\![p(f(g(x), x), x)]\!] = \mathcal{I}(p)(\bullet, \bullet) = true
\end{aligned}
$$

所以 $\forall x.p(f(g(x), x))$ 取值为 true

■

2-4 请使用课程教授的相继式演算系统（包含命题逻辑中的 10 条规则和 4 条量词消去规则）构建推导树证明下列两个相继式：

1. $\exists x.(p(x) \to q(x)) \vdash \forall y.p(y) \to \exists z.q(z)$
2. $\forall y.p(y) \to \exists z.q(z) \vdash \exists x.(p(x) \to q(x))$

Solution

1.

$\overline{p(c) \vdash p(c), q(c)} \quad \overline{p(c), q(c) \vdash q(c)}$	切
$\overline{p(c) \to q(c), p(c) \vdash q(c)}$	左蕴含
$\overline{p(c) \to q(c) \vdash \neg p(c), q(c)}$	右否定
$\overline{p(c) \to q(c) \vdash \neg p(c), \exists z.q(z)}$	右存在
$\overline{p(c) \to q(c), p(c) \vdash \exists z.q(z)}$	左否定
$\overline{p(c) \to q(c), \forall y.p(y) \vdash \exists z.q(z)}$	左全称
$\overline{\exists x.(p(x) \to q(x)), \forall y.p(y) \vdash \exists z.q(z)}$	左存在
$\overline{\exists x.(p(x) \to q(x)) \vdash \forall y.p(y) \exists z.q(z)}$	右蕴含

2.

$\overline{p(z) \to q(z) \vdash p(z) \to q(z)}$	切
$\overline{p(z) \to \exists z.q(z) \vdash p(z) \to q(z)}$	左存在
$\overline{\forall y.p(y) \to \exists z.q(z) \vdash p(z) \to q(z)}$	左全称
$\overline{\forall y.p(y) \to \exists z.q(z) \vdash \exists x.(p(x) \to q(x))}$	右存在

■