

作业 3

授课老师: 贺飞

周雨豪 (2018013399)

助教: 徐荣琛、谢兴宇、韩志磊、刘江宜

在开始完成作业前, 请仔细阅读以下说明:

- 我们提供作业的 L^AT_EX 源码, 你可以在其中直接填充你的答案并编译 PDF (请使用 xelatex)。当然, 你也可以使用别的方式完成作业 (例如撰写纸质作业后扫描到 PDF 文件之中)。但是请注意, 最终的提交一定只是 PDF 文件。提交时请务必再次核对, 防止提交错误。
- 在你的作业中, 请务必填写你的姓名和学号, 并检查是否有题目遗漏。请重点关注每次作业的截止时间。截止时间之后你仍可以联系助教补交作业, 但是我们会按照如下公式进行分数的折扣:

$$\text{作业分数} = \min(\text{实际分}, \text{满分} \times (1 - 10\% \times \min(\lceil \text{迟交周数} \rceil, 10)))$$

- 本次作业为独立作业, 禁止抄袭等一切不诚信行为。作业中, 如果涉及参考资料, 请引用注明。

Problem 1: 循环

1-1 在扩展 IMP 语言中, 下面两个语句是否语义等价, 如果等价请给出证明, 否则给出反例。

- $?p$
- $\text{if}(p) \text{ skip else } ?\text{false}$

Solution 等价

$$\begin{aligned} \llbracket \text{if}(p) \text{ skip else } ?\text{false} \rrbracket &= \{(s, s') \mid \llbracket p \rrbracket_s = \text{true} \text{ and } (s, s') \in \llbracket \text{skip} \rrbracket_s \\ &\quad \text{or } \llbracket p \rrbracket_s = \text{false} \text{ and } (s, s') \in \llbracket ?\text{false} \rrbracket_s\} \\ &= \{(s, s') \mid \llbracket p \rrbracket_s = \text{true} \text{ and } (s, s') \in \{(r, r) \mid r \in \mathcal{S}\} \\ &\quad \text{or } \llbracket p \rrbracket_s = \text{false} \text{ and } (s, s') \in \{(t, t) \mid (t \models \text{false})\}\} \\ &= \{(s, s) \mid s \models p\} \\ &= \llbracket ?p \rrbracket \end{aligned}$$

■

1-2 **repeat-until** 是另一种常见的循环形式, 它的定义如下:

$$\text{repeat } st \text{ until}(p) \equiv st; (? \neg p; st)^*; ?p$$

求证下面的霍尔三元组:

$$\frac{\{\varphi\} st \{\varphi'\} \quad \{\varphi' \wedge \neg p\} st \{\varphi'\}}{\{\varphi\} \text{repeat } st \text{ until}(p) \{\varphi' \wedge p\}}$$

Solution

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\frac{\{\varphi\} \text{ ?}\neg p \{\varphi' \wedge p\}}{\{\varphi\} \text{ (?}\neg p; st)^* \{\varphi' \wedge p\}} \quad \frac{\{\varphi\} \text{ st } \{\varphi' \wedge p\}}{\{\varphi\} \text{ ?}p \{\varphi' \wedge p\}}}{\{\varphi\} \text{ st; (?}\neg p; st)^*; \text{ ?}p \{\varphi' \wedge p\}} \\
\hline
\{\varphi\} \text{ repeat } st \text{ until}(p) \{\varphi' \wedge p\}
\end{array}$$

■

Problem 2: 数组

2-1 基于数组理论 \mathcal{T}_A (及其扩展) 编码以下陈述:

1. 数组 a 不含有两个相同的元素;
2. 数组 a 和 b 具有完全相同的元素, 则对两者同一位置进行相同更新操作之后, 数组 a 和 b 的元素仍然相同。

Solution

1. $\forall i, j (i \neq j \rightarrow a[i] \neq a[j])$
2. $(a = b) \rightarrow (\forall i, (a \langle i \triangleleft v \rangle \wedge b \langle i \triangleleft v \rangle) \rightarrow (a = b))$

■

2-2 在扩展 IMP 语言中, 试证明下面的霍尔三元组成立:

$$\begin{aligned} & \{m < a[0] \wedge i = 0\} \\ & \mathbf{while}(i < n) \{ \mathbf{if}(m < a[i]) \ m := a[i]; \ i := i + 1 \ \mathbf{else} \ \mathbf{skip} \} \\ & \{ \forall k. (0 \leq k < n \rightarrow m \geq a[k]) \} \end{aligned}$$

Solution 记 $\varphi = \forall k. (0 \leq k < i \rightarrow m \geq a[k])$, $\psi = \varphi \wedge (i < n) \wedge (m < a[i])$

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{\frac{\overline{\{\psi\} \ m := a[i] \ \{\varphi\}} \ \overline{\{\psi\} \ i := i + 1 \ \{\varphi\}} \ \overline{\{\varphi\} \mathbf{skip} \ \{\varphi\}}}{\overline{\{\psi\} \ m := a[i]; \ i := i + 1 \ \{\varphi\}} \ \overline{\{\psi\} \ \mathbf{skip} \ \{\varphi\}}}}{\overline{\{\varphi \wedge (i < n)\} \ \mathbf{if}(m < a[i]) \ m := a[i]; \ i := i + 1 \ \mathbf{else} \ \mathbf{skip} \ \{\varphi\}}} \\ & \frac{\overline{\{\varphi\} \ \mathbf{while}(i < n) \ \{\mathbf{if}(m < a[i]) \ m := a[i]; \ i := i + 1 \ \mathbf{else} \ \mathbf{skip} \} \ \{\varphi \wedge (i \geq n)\}}}{\overline{\{m < a[0] \wedge i = 0\} \ \mathbf{while}(i < n) \ \{\mathbf{if}(m < a[i]) \ m := a[i]; \ i := i + 1 \ \mathbf{else} \ \mathbf{skip} \} \ \{\forall k. (0 \leq k < n \rightarrow m \geq a[k])\}}} \end{aligned}$$

■