Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки

«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Курсовая работа

Тема " Сравнение решения ОДУ первого порядка изученными методами"
Дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр.5030102/00002 Желудев К.И.

Преподаватель: Добрецова С.Б.

Санкт-Петербург

2022

Оглавление

Задание

Дано уравнение ОДУ первого порядка, определенное на отрезке. Необходимо поставить задачу Коши и найти её решение двумя изученными методами: методом Рунге-Кутты третьего порядка с коэффициентом ½ и схемой предиктор-корректор метода Адамса третьего порядка.

Требуется провести сравнение результатов по графикам ошибок на одном отрезке для двух значений шага; исследовать зависимость нормы погрешности и координаты максимального значения погрешности на отрезке от величины шага.

Постановка задачи

Дано ОДУ первого порядка, разрешенное относительно производной $y' = f\left(x, y\right)$, начальное условие $y\left(a\right) = y_a$, отрезок $\left[a, b\right]$ и величина шага h, определяемое числом n разбиения отрезка. Требуется найти табличную функцию $y^h = \left\{y_k\right\}_{k=0}^{n}$, определенную на равномерной сетке $x^h = \left\{x_k\right\}_{k=0}^{n}$, $x_k = a + \dfrac{b-a}{n}k$.

Предварительный анализ задачи

Для нахождения решения задачи Коши существует множество класса методов, например методы Рунге-Кутты и методы Адамса. Метод Рунге-Кутты получается при разложении функции в ряд Тейлора и замены суммы производных каких-то порядков на линейную комбинацию функций в промежуточных точках сетки. Метод Адамса использует идею замены функции на интерполяционный полином, который легко интегрировать. Находить табличные функции с заданными величинами шагов будем одношаговым методом Рунге-Кутты третьего порядка с коэффициентом ½ и схемой предиктор-корректор конечно-разностного метода Адама третьего порядка. При этом для последнего метода необходимые разгонные точки будем получать методом Рунге-Кутты третьего порядка с коэффициентом ½.

Алгоритмы и этапы решения

Условия применимости методов

1) $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \le M \quad \forall x \in \left[a, b\right], y$ - допустимых

2) условие Липшица по $y: \left| f\left(x, y_1\right) - f\left(x, y_2\right)\right| \le L\left|y_1 - y_2\right|, x \in \left[a, b\right], y_1, y_2$ - допустимые, $L \in \mathbb{R}$

Эти условия обеспечивают единственность решения задачи Коши

Этапы решения задачи

1) Подготовить переменные и функции, которые будут входными данными для алгоритмов: граничные точки отрезка, количество отрезков разбиения, начальное условие и функция, которая получается при разделении ОДУ относительно производной.

2) С помощью функций, реализующих алгоритмы методов, получить табличную функцию решения.

Описание алгоритмов

1) Метод Рунге-Кутты

- Ввод: отрезок $[a,b]$, количество отрезков разбиения n, начальное условие y_a и функция $f(x,y)$

- Основная часть:

$$h := \frac{b-a}{n};$$
$$x_0 := a;$$
$$y_0 := y_a;$$
$$i := \overline{0,n-1}:$$
$$k_1 := f(x_i, y_i);$$
$$k_2 := f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right);$$
$$k_3 := f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2);$$
$$y_{i+1} := y_i + h\frac{k_1 + 4k_2 + k_3}{6};$$
$$x_{i+1} := a + (i+1)h;$$

До цикла по отрезку и количеству его разбиения строится шаг. В цикле строится значение решения для очередной точки, при этом учитывается только значение решения в предыдущей точке.

- Вывод: табличная функция $y^h = \{y_k\}_{k=0}^{n}$

2) Схема предиктор-корректор

- Ввод: отрезок $[a,b]$, количество отрезков разбиения n, начальное условие y_a и функция $f(x,y)$

- Основная часть:

$h := \frac{b-a}{n};$

$x_0 := a;$

$y_0 := y_a;$

$i := \overline{0,1}:$

$k_1 := f(x_i, y_i);$

$k_2 := f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right);$

$k_3 := f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2);$

$y_{i+1} := y_i + h\frac{k_1 + 4k_2 + k_3}{6};$

$x_{i+1} := a + (i+1)h;$

$i := \overline{2, n-1}:$

$\gamma_{i+1} := y_i + \frac{h}{12}\left(23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})\right);$

$y_{i+1} := y_i + \frac{h}{12}\left(5f(x_{i+1}, \gamma_{i+1}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})\right);$

До цикла по отрезку и количеству его разбиения строится шаг. В первом цикле строятся разгонные точки по методу Рунге-Кутты третьего порядка с коэффициентом ½. Во втором цикле по предыдущим трем значениям решения строится предиктор γ_{i+1} , который впоследствии используется для построения окончательного значения решения – корректора y_{i+1}.

- Вывод: табличная функция $y^h = \{y_k\}_{k=0}^{n}$

Теоретические выкладки для оценки результатов исследований

Поскольку при каждой итерации методов мы переходим на новую интегральную кривую, то ошибка при переходе к очередной точке будет увеличиваться. Ожидается, что график ошибки будет монотонен и что координата максимального значения погрешности будет совпадать с правой границей отрезка.

1) Метод Рунге-Кутты

Задача Коши $\begin{cases} y' = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

$x, x+h \in [a,b]$

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{1!}y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \ldots + \frac{h^s}{s!}y^{(s)}(x) + O(h^{s+1})$$

$$\Delta_s y(x) = \frac{h}{1!}f(x,y) + \frac{h^2}{2!}\frac{d}{dx}f(x,y) + \ldots + \frac{h^s}{s!}\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}f(x,y)$$

Заменим $\Delta_s y(x)$ некоторой функцией $\delta_s y(x,h)$, которая будет линейной комбинацией значений f и будет удовлетворять условию

$$\Delta_s y(x) = \delta_s y(x,h) + O\left(h^{s+1}\right)$$

$$\delta_s y(x,h) = \frac{h}{6}\left(f\left(x_i, y_i\right) + 4f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}\right) + f\left(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2\right)\right)$$

Так, на одном шаге погрешность метода составляет $O\left(h^{s+1}\right)$, где $s = 3$ - порядок метода.

На всем отрезке ошибка

$|\varepsilon_k| \le h^s D$, где

$D = \bar{c}\,(b-a)\,e^{L(b-a)}$

$\bar{c}$ - верхняя граница локальных погрешностей на каждом шаге, L - верхняя граница интегралов вида $\int\limits_t^T \left| f_y'(x,y) \right| dx$, $(b-a)$ - длина отрезка.

Так, на всем отрезке погрешность метода составляет $O\left(h^s\right)$

2) Схема предиктор-корректор метода Адамса

Локальная погрешность метода составляет $|\varepsilon_k| \le h^{r+2} D$, где $(r+1) = 3$ - «шаговость» метода. Порядок $O\left(h^4\right)$

При этом порядок глобальной погрешности на один меньше локальной, т. е. равен $O\left(h^3\right)$

Контрольные тесты

Решается задача Коши $y' = f(x,y)$, $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y^3}{xy^2}$ на отрезке $[a,b] = [1{,}1;3]$ с начальным условием $y_a = y(a)$, где $y(x) = \sqrt[3]{3x^2(x-1)}$ - точное решение ОДУ, a - левая граница отрезка.

Проводится сравнение результатов по графикам ошибок на отрезке $[a,b] = [1{,}1;3]$ для двух значений шага, определяемых количеством отрезком разбиения $n = \{16, 32\}$.

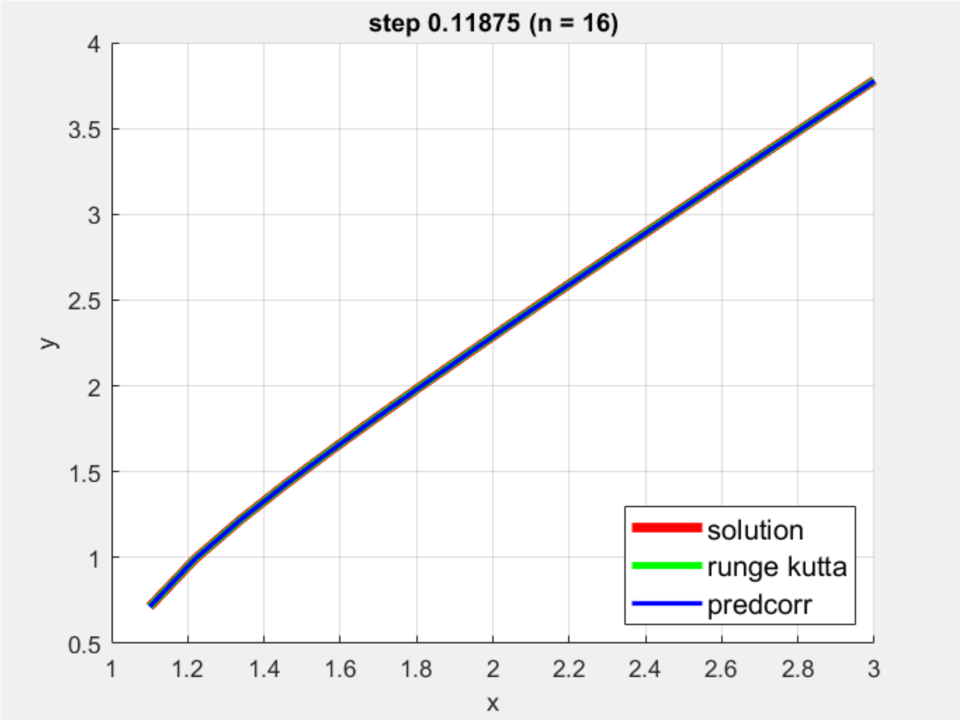
Проводятся исследования зависимости нормы погрешности и координаты максимального значения погрешности на отрезке $[a,b] = [1{,}1;3]$ от величины шага, определяемой количеством отрезков разбиения $n = \left\{2^2, 2^3, \ldots, 2^{17}\right\}$.

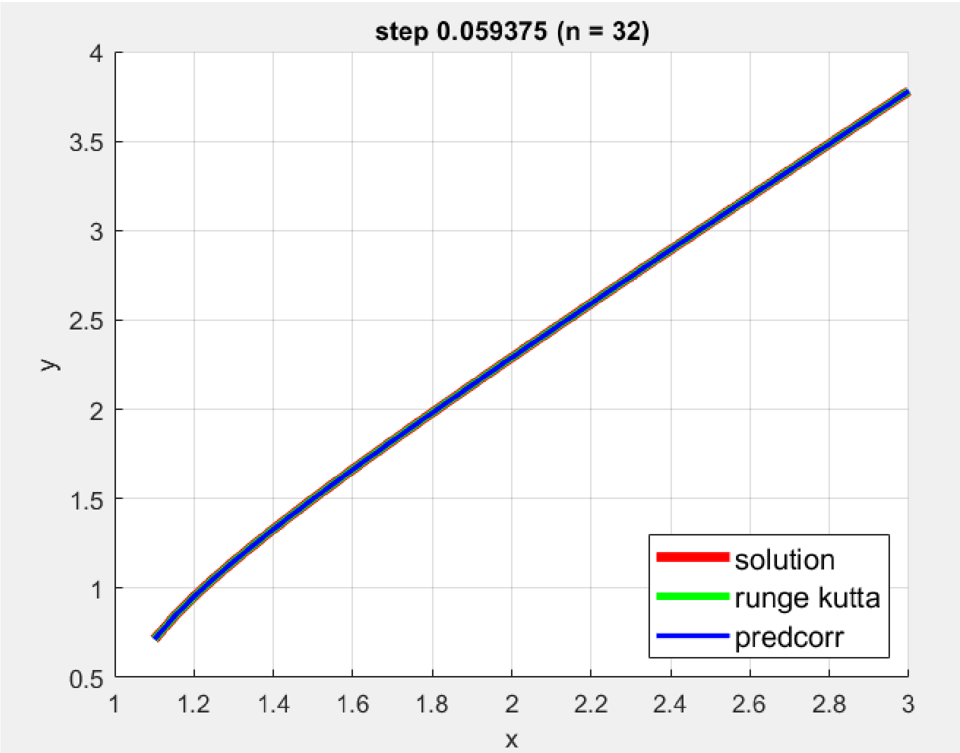
Были взяты такие значения количества отрезков, при которых видны различия методов: при $n \le 2$ схема предиктор-корректор вырождается в метод Рунге-Кутта, а при $n \ge 2^{17}$ графики зависимости нормы погрешности начинают сливаться в одну линию. Это происходит потому, что при таких величинах шага погрешность становится сравнимой с

машинным эпсилоном.
При каждом n мы для двух методов фиксируем норму погрешности и координату максимального значения погрешности.

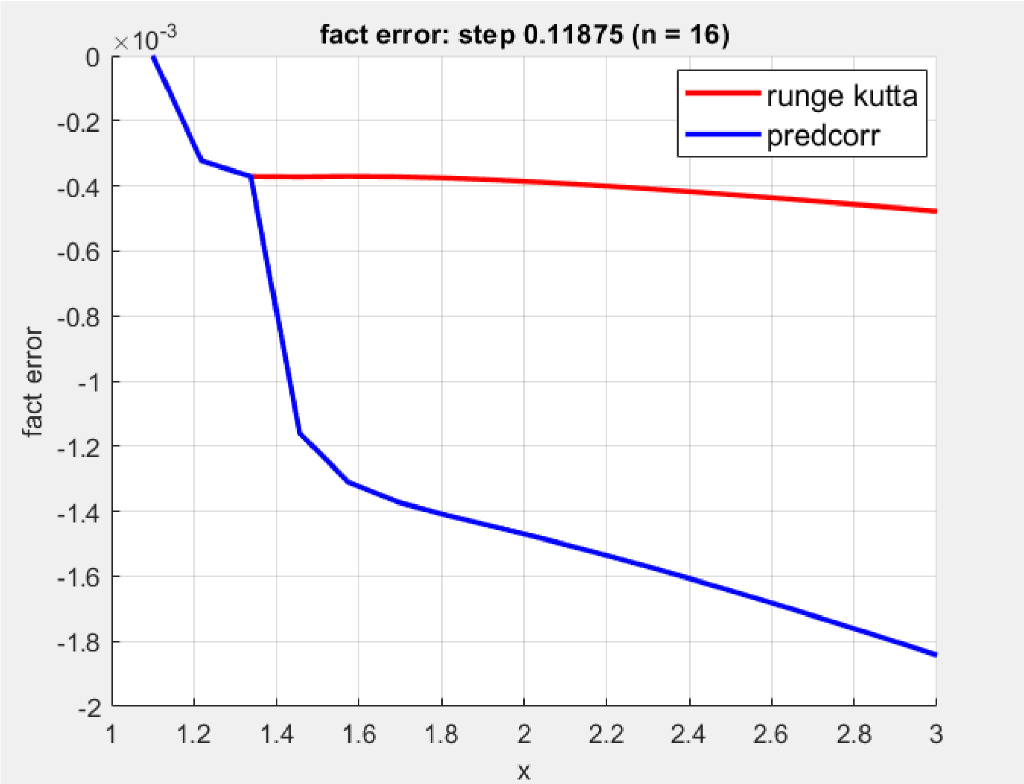
Численный анализ

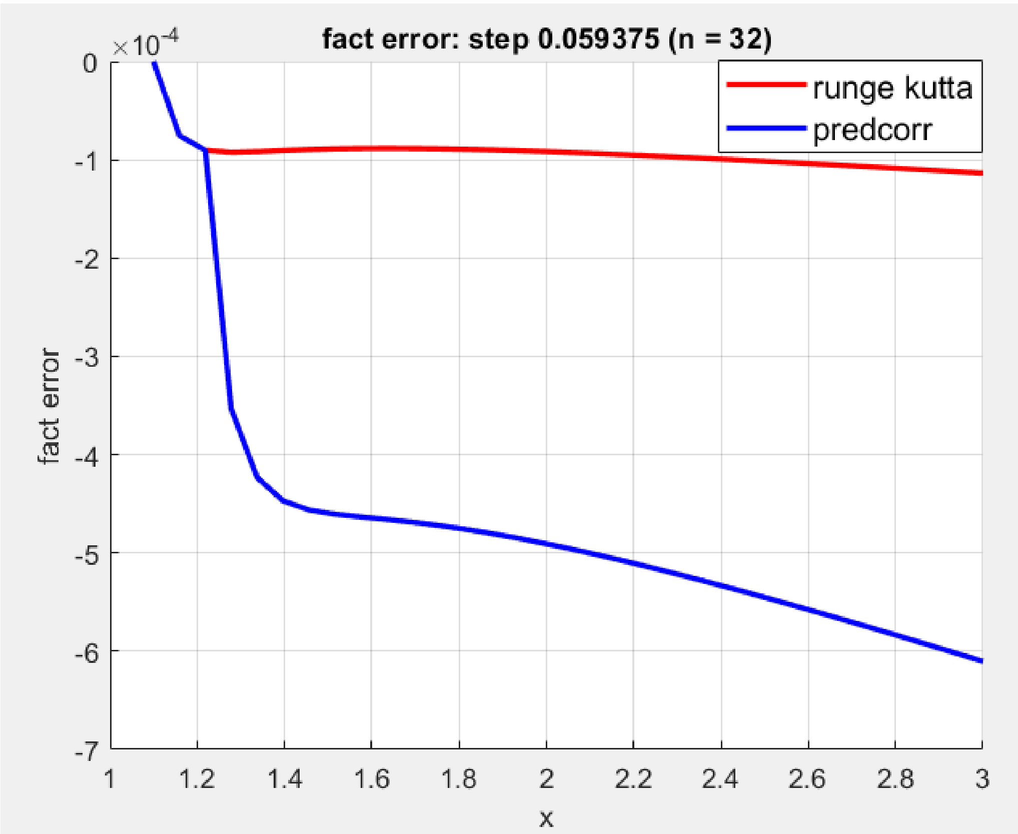
Ниже приведены графики точного решения и решений, полученных двумя методами, в точках, соответствующих величинам шага.





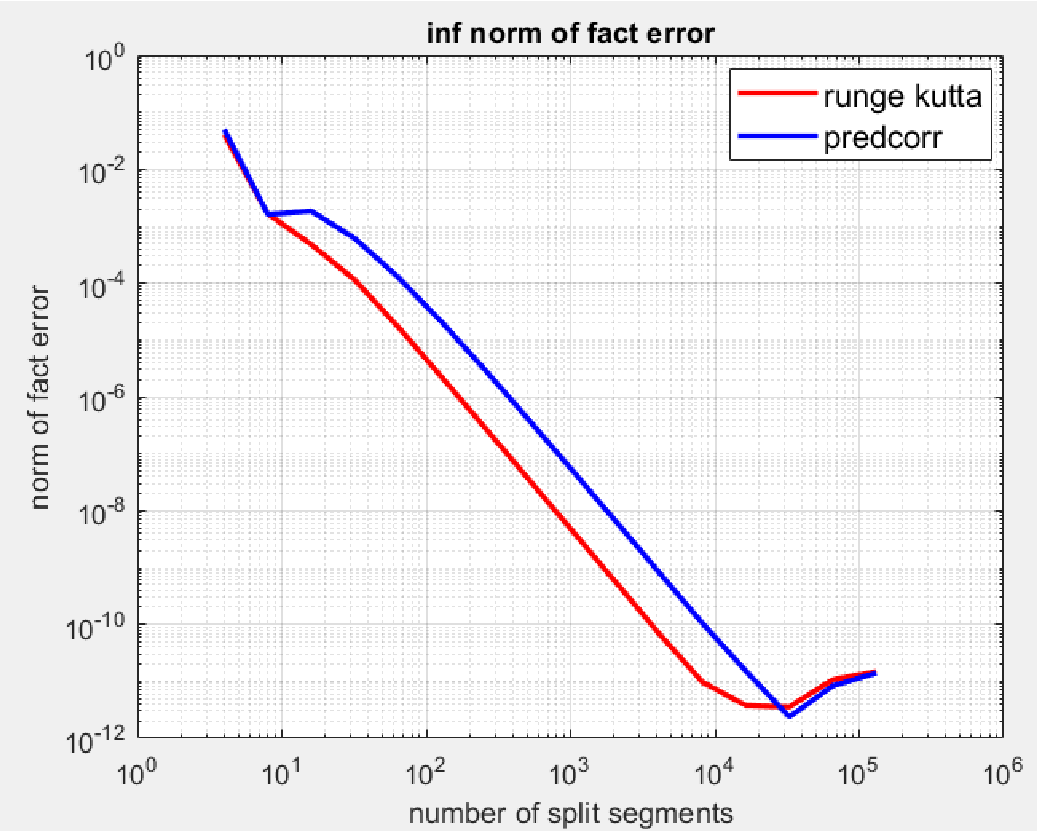
Все графики визуально слились в одну линию. Следовательно фактическая ошибка в точках достаточно мала. Это мы можем видеть на двух следующих графиках.





Действительно, для фиксированного шага ошибки в точках для двух методов одного порядка. Причём при уменьшении шага (увеличении n) ошибки для каждого метода уменьшаются примерно в 4 раза, что соответствует теории. Для двух графиков в первых трёх точках мы можем наблюдать наложение линий, поскольку начальные условия совпадают и в схеме предиктор-корректор разгонные точки берутся по методу Рунге-Кутты третьего порядка.

Мы можем видеть, что для двух шагов схема предиктор-корректор находит решение менее точное, чем метод Рунге-Кутты. Такая же зависимость наблюдается при различных n.



При средних n график, соответствующих схеме предиктор-корректор, лежит выше другой линии примерно на один порядок. Линии визуально при малых n накладываются ввиду вырождения метода Адамса и при больших n из-за начала расходимости методов: погрешность методов становится меньше машинного эпсилон. Для всех n координаты максимального значения погрешности одинаковы и равны b.

Выводы

Метод Рунге-Кутты находит более точное решение ОДУ первого порядка чем схема предиктор-корректор. При выборе слишком малого шага наблюдается расходимость двух методов ввиду машинного представления чисел. Схема предиктор-корректор требует меньших вызовов функции: за одну итерацию алгоритм вызывает функцию один раз вместо трёх, что важно при сложных вычислениях. Во всех случаях максимум погрешности наблюдался в правой границе отрезка.