Санкт-Петербургский политехнический университет

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики, ФизМех

Направление подготовки

«01.03.02 Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №4

Тема "Решение алгебраической проблемы собственных значений"

Дисциплина "Численные методы"

Выполнил студент гр.5030102/00002 Желудев К.И.

Преподаватель: Добрецова С.Б.

15.12.2021

Санкт-Петербург

2021

1.1 Формулировка задания

Найти максимальное собственное число матрицы методом скалярных произведений с оптимальным сдвигом.
С помощью метода обратных итераций со сдвигом уточнить собственное число и найти собственный вектор матрицы.
Исследовать зависимость нормы ошибок (собственного вектора и собственного числа), нормы невязки и числа итераций от заданной точности при хорошей отделимости собственных чисел.

1.2 Постановка задачи

Каким образом получаются с.ч. и с.в

Дано: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$, точность ε. Что значит найти с точностью

Найти: λ_1, X_1: $AX_1 = \lambda X_1$ ✓

2. Алгоритм метода и условия его применимости

Условия применимости:

- $A > 0$ · A — матрица простой структуры
- $A = A^T$

Алгоритм: Поиск собственного числа

- Ввод: A — матрица ($A = (a_{ij})_{i=1,j=1}^{n,n}$), ε — точность, λ_2, λ_n — второе и n-ое по абсолютной величине собственные числа матрицы A.

тогда будет случайное ч. итерации

- Сгенерируем случайный вектор, который будет первоначальным приближением с координатами от 0 до 1.
- Получим матрицу B, сдвинув матрицу A на оптимальный параметр $\frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_n) = \mu$ $B = A - \mu E$ $(B = (b_{ij})_{i=1,j=1}^{n,n})$

```
1 ≤ i ≤ n:
    A[i][i] := A[i][i]-μ;
B = A;
```

$B_{ii} = A_{ii} - \mu \quad i = \overline{1,n}$

- Ортонормируем первоначальное приближение First_approx:

```
Xk = getOrthonormalVector(First_approx);
```

функция

- Цикл:

затем код

функции функции

```
λk-1 = λk; (λ1 = 0)
Xk-1 = Xk;
Xk = B * Xk-1   ( 1 ≤ i ≤ n:
                     Xk[i]=0;
                     1 ≤ j ≤ n:
                        Xk[i] += B[i][j]*Xk-1[j];
```

$\lambda_k = \frac{(X_k, X_k)}{(X_k, X_{k-1})}$ ($(\cdot,\cdot)$ — скалярное умножение)

```
Xk = getOrthonormalVector(Xk);
++(number_iter);
```

Условие выхода: $|\lambda_k - \lambda_{k-1}| < eps$

· Возврат: x_k, $\lambda_k + \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_n) = \lambda_k + \mu$

Уточнение собственного числа и собственного вектора

· Ввод: A – матрица, λ' – начальное приближение собственного числа, x' – начальное приближение собственного вектора, ε – точность.

· Ортонормируем первоначальное приближение x'

· x_k = getOrthonormalVector(x');

· Цикл

$x_{k-1} = x_k$

$\lambda_{k-1} = \lambda_k$ $(\lambda_1 = \lambda')$

сдвиг будет меняться => матрица -> и вырожденной

Решаем СЛАУ $(A - \lambda_{k-1}E)x_k = x_{k-1}$ (x_k – неизвестный столбец) методом LDL^T-разложения. x_k – решение.

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{k-1}[i]}{x_k[i]}}$$

или $\forall i$ или выбранное по какому-то правилу

x_k = getOrthonormalVector(x_k);

Условие выхода: $\|x_{k-1} - x_k\|_2 < eps$

· Возврат: x_k, λ_k – найденная с заданной точностью собственная пара

3. Анализ задачи. Проверка существования и единственности решения

LU выгоднее – ~~всего 2~~ системы

$A > 0$, A – матрица простой структуры <=> $\lambda_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

λ_i соответствует один линейно-независимый вектор

Поскольку $A = A^T$, то при решении СЛАУ в методе обратных итераций можно использовать LDL^T-разложение ($\det A \neq 0$, т.к. A – матрица простой структуры и $A > 0$; аналогично угловые миноры матрицы A отличны от нуля). Единственность решения обеспечивается ортонормированностью собственного вектора

4. Проверка условий применимости метода.

Будем создавать матрицу A как произведение Q^TDQ.

D – диагональная матрица. На её диагонали расположим положительные числа. Тогда при $|Q| \neq 0$ $A > 0$ и A – матрица простой структуры

$Q = E - 2\frac{\omega \otimes \omega^T}{\|\omega\|_2 \cdot \|\omega\|_2}$ (ω – произвольный вектор, $\|\omega\|_2 \neq 0$) – ортогональная матрица.

$A = A^T$ $(A = (Q^TDQ)^T = (DQ)^T(Q^T)^T = Q^TD^TQ = Q^TDQ = A)$

5. Тестовый пример.

Рассмотрим работу метода на $A = \begin{pmatrix} 1,7630 & 0,8617 & 0,3678 \\ 0,8617 & 4,6848 & 0,4989 \\ 0,3678 & 0,4989 & 2,0522 \end{pmatrix}$

с собственными числами $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$. λ_1 соответствует собственный вектор $X_1 = \begin{pmatrix}0,2381\\0,9524\\0,1905\end{pmatrix}$

Выберем начальное приближение $X^{(0)} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ (уже ортонормир.)

$B = A - \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_3)E = A - \frac{3}{2}E$

$B = \begin{pmatrix}-0,737 & 0,8617 & 0,3628\\0,8617 & 3,1848 & 0,4989\\0,3628 & 0,4989 & 0,5522\end{pmatrix}$, $\lambda^{(0)} = 0$

1: $X^{(1)} = B \cdot X^{(0)} = B \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,8617\\3,1848\\0,4989\end{pmatrix}$

$\lambda^{(1)} = \dfrac{(X^{(1)}, X^{(1)})}{(X^{(1)}, X^{(0)})} = \dfrac{11,1344}{3,1848} \approx 3,496$

$X^{(1)} = \dfrac{X^{(1)}}{\|X^{(1)}\|_2} = \begin{pmatrix}0,2582\\0,9544\\0,1495\end{pmatrix}$

$|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}| = 3,496 > eps$

2: $X^{(2)} = B\ X^{(1)} = B \begin{pmatrix}0,2582\\0,9544\\0,1495\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,8155\\3,3366\\0,6524\end{pmatrix}$

$\lambda^{(2)} = \dfrac{(X^{(2)}, X^{(2)})}{(X^{(2)}, X^{(1)})} = \dfrac{12,2736}{11,6546} \approx 1,049$

$X^{(2)} = \dfrac{X^{(2)}}{\|X^{(2)}\|_2} = \begin{pmatrix}0,2333\\0,9543\\0,1866\end{pmatrix}$

$|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}| = |1,049 - 3,496| = 2,447 > eps$

если знаем ответ, а если $|\lambda - \lambda|$ то ещё далеко

3: $X^{(3)} = B \cdot X^{(2)} = B \begin{pmatrix}0,2333\\0,9543\\0,1866\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0,8347\\3,3334\\0,6638\end{pmatrix}$

$\lambda^{(3)} = \dfrac{(X^{(3)}, X^{(3)})}{(X^{(3)}, X^{(2)})} = \dfrac{12,2489}{3,4997} \approx 3,500$ (3,500+1,5=5 – близкое к ответу вычисление)

$X^{(3)} = \dfrac{X^{(3)}}{\|X^{(3)}\|_2} = \begin{pmatrix}0,2385\\0,9524\\0,1897\end{pmatrix}$ (близкий к ответу вектор)

$|\lambda^{(3)} - \lambda^{(2)}| = |3,500 - 1,049| = 2,451 > eps$

Уточнение собственного числа и собственного вектора

Первоначальное приближение $X^{(0)} = \begin{pmatrix}0,2385\\0,9524\\0,1897\end{pmatrix}$ уже ортонормировано

1. Решаем СЛАУ $(A - \lambda^{(0)}E)X^{(1)} = X^{(0)}$ относительно $X^{(1)}$ методом LDL^T-разложения

$A - \lambda^{(0)}E = \begin{pmatrix}-3,737 & 0,8617 & 0,3628\\0,8617 & -0,3152 & 0,4989\\0,3628 & 0,4989 & -2,9478\end{pmatrix}$. $X^{(1)} = \begin{pmatrix}16934,5219\\67737,7767\\13548,3350\end{pmatrix}$

получилось вырождение матриц с 4 зн. после запятой

$\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} + \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\dfrac{X^{(0)}[i]}{X^{(1)}[i]} = 5$, $X^{(1)} = \dfrac{X^{(1)}}{\|X^{(1)}\|_2} = \begin{pmatrix}0,2381\\0,9524\\0,1905\end{pmatrix}$

$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_2 = 0{,}0012 < eps$.
Таким образом мы нашли собственную пару с точностью ~~eps~~.

6. Подготовка контрольных тестов

- $N=10$ – размерность матрицы
- $\lambda_i = [8;\ 18{,}7857;\ 28{,}5714;\ 38{,}8571;\ 49{,}1429;\ 59{,}4286;\ 69{,}7143;\ 80;\ 93;\ 154]$ – собственные числа матрицы с хорошей отделимостью собственных чисел
- $epses = [10^{-1}, 10^{-2}, \dots, 10^{-15}]$ – заданные точности

Для иллюстрации оптимальности сдвига на $\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_n)$ были использованы сдвиги на $0, 5, \dots, 60$. Точность взята 10^{-6}.

7. Модульная структура программы

- system_t readSystem(void)

Читает из файла „matrix.txt" матрицу A, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и собственный вектор. Возвращает переменную, содержащую вышеприведенные данные.

- double scalarComposition(column_t col1, column_t col2)

Принимает два вектора, возвращает их скалярное произведение.

- double getSecNormColumn(column_t column)

Принимает вектор, возвращает ее евклидову норму.

- matrix_t shiftMatrix(matrix_t matrix, double m)

Принимает матрицу A и число m. Возвращает матрицу A−mE.

- column_t getOrthonormalVector(column_t col)

Принимает вектор. Возвращает ~~ортонормированный~~ нормированный по евклидовой норме вектор.

- pair <column_t, double> methodScalarComposition(matrix_t matrix, double eps, column_t first_approx, int* number_iter, double shift)

Принимает матрицу, точность, первоначальное приближение собственного вектора, число ~~смещения~~ сдвиг. Ищет и возвращает собственную пару, соответствующую максимальному по модулю собственному числу, методом скалярных произведений со ~~смещением~~ сдвигом.

- double getSecNormOfDiscrepancy(matrix_t matrix, double eigen_value, column_t eigen_vector)

Принимает матрицу и собственную пару матрицы. Возвращает евклидову норму невязки $\|Ax - \lambda x\|_2$

- double getSecNormOfFactualError(column_t col1, column_t col2)

Принимает два вектора. Возвращает евклидову норму ~~фактической ошибки~~ их разности

·void researchOptimalShift(matrix_t matrix)
Принимает матрицу. Применяет метод скалярного произведения со смещением 0,5,...,60 с точностью 10^{-6}. Записывает в файл зависимость кол-ва итераций от смещения.
· pair<matrix_t, column_t> getLDLtFactorization(matrix_t matrix_A)
Принимает матрицу A. Факторизует её в виде $A=LDL^T$. Возвращает L и D.
· column_t solveLDLtSystem(pair<matrix_t, column_t> factorization, column_t column_B)
Принимает ~~факторизацию~~ матрицуL и D и столбец свободных членов. Решает СЛАУ в 3 этапа: прямая подстановка, деление на диагональные элементы и обратная подстановка. Возвращает столбец-решение.
· column_t solveSystem(matrix_t matrix_A, column_t column_B)
Принимает матрицу и столбец свободных членов СЛАУ. Возвращает решение, найденное методом LDL^T-разложения.
· pair<column_t, double> reverseIterationsWithShift(matrix_t A, double start_lambda, column_t start_vec, double eps)
Принимает матрицу, первоначальное приближение собственной пары этой матрицы и точность. Возвращает уточненную собственную пару. методом обр. итер.

8. Анализ результатов

Графики зависимостей норм невязки и фактической ошибки в логарифмическом масштабе линейно возрастают. Норма невязки на 2 порядка больше нормы фактической ошибки. При точности 10^{-14} и меньше нормы перестают уменьшаться. всегда?
Аналогичные зависимости наблюдаются на графиках точность-модуль ошибки собственного числа и точность-количество итераций. Привести числа для фикс. точности

9. Выводы

При дополнительных требованиях к матрице и знании других собственных чисел можно достаточно быстро и точно найти собственную пару. Из-за больших требований к матрице и знания определенных чисел спектра метод нецелесообразный к применению.
Было проиллюстрировано, что сдвиг, определявший по формуле $\frac{1}{2}|\lambda_1+\lambda_n|$ действительно оптимален. Поэтому на практике оптимальный сдвиг можно искать перебором.
Достигнута-ли точность

1.2. Постановка задачи

Дано: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матрица с собственными числами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$, точность ε.

Найти: λ_1, x_1 с точностью ε, т.е. $|\lambda_1^* - \lambda_1| < \varepsilon$ и $\|x_1^* - x_1\|_2 < \varepsilon$, где λ_1^* и x_1^* — точная собственная пара, соответствующая максимальному по модулю собственному числу.

2. Алгоритм метода и условия его применимости

Поиск собственного числа.

Вместо генерации случайного вектора — первоначального приближения возьмем вектор $(1, 0, \ldots, 0)^T$.

- Получим матрицу B сдвигом A на $\mu = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_n)$:

$B_{ii} = A_{ii} - \mu \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

- Нормируем первоначальное приближение first_approx:

$$x_k = \frac{first\_approx}{\|first\_approx\|_2}$$

- Цикл:

$\lambda_{k-1} = \lambda_k \quad (\lambda_1 = 0)$

$x_{k-1} = x_k$

$x_k = B x_{k-1}$

$$\lambda_k = \frac{(x_k, x_k)}{(x_k, x_{k-1})}$$

$$x_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_2}$$

Условие выхода: $|\lambda_k - \lambda_{k-1}| < \varepsilon$.

- Возврат: $x_k, \lambda_k + \mu$.

Уточнение собств. числа и вектора.

- Нормируем первоначальное приближение:

$$x_k = \frac{x'}{\|x'\|_2}$$

- Цикл:

$x_{k-1} = x_k$

$\lambda_{k-1} = \lambda_k \quad (\lambda_1 = \lambda')$

Решаем СЛАУ $(A - \lambda_{k-1} E) x_k = x_{k-1}$ относит. x_k методом LU-разложения

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{k-1}^i}{x_k^i} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n : x_k^i \neq 0.$$

$$x_k = \frac{x_k}{\|x_k\|_2}$$

Условие выхода: $\|x_{k-1} - x_k\|_2 < \varepsilon$

- Возврат: x_k, λ_k

3. Тестовый пример

Рассмотрим работу метода на $A = \begin{pmatrix} 1,2630 & 0,8617 & 0,3678 \\ 0,8617 & 4,6848 & 0,4989 \\ 0,3678 & 0,4989 & 2,0522 \end{pmatrix}$ с с.ч. $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$. λ_1 соответствует с.в. $x_1 = \begin{pmatrix} 0,2381 \\ 0,9524 \\ \ldots \end{pmatrix}$.

Выберем начальное приближение $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (уже нормир.)

1: — // —

2: — // —

3: — // —

4: $x^{(4)} = B \cdot x^{(3)} = \begin{pmatrix} -0{,}2370 & 0{,}8617 & 0{,}3628 \\ 0{,}8617 & 3{,}1848 & 0{,}4989 \\ 0{,}3628 & 0{,}4989 & 0{,}5522 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2385 \\ 0{,}9524 \\ 0{,}1897 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8330 \\ 3{,}3334 \\ 0{,}6664 \end{pmatrix}$

$$\lambda^{(4)} = \frac{(x^{(4)}, x^{(4)})}{(x^{(4)}, x^{(3)})} = \frac{12{,}2495}{3{,}4998} \approx 3{,}5001$$

$$x^{(4)} = \frac{x^{(4)}}{\|x^{(4)}\|_2} = \begin{pmatrix} 0{,}2380 \\ 0{,}9527 \\ 0{,}1905 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda^{(4)} - \lambda^{(3)}| = |3{,}5001 - 3{,}5000| = 0{,}0001$$

6. Подготовка контрольных тестов.

Для иллюстрации оптимальности сдвига на $\frac{1}{2}(\lambda_2+\lambda_4)$ для поиска макс. по модулю с.ч. были использованы сдвиги на 0, 5, ..., 60, т.к. при $\mu \leq \frac{\lambda_1+\lambda_4}{2} = 81$ будет находиться нужное с.ч. При этом сдвиги на более чем 60 не были рассмотрены для сохранения хорошей отделимости с.ч. сдвинутой матрицы. Точность взята 10^{-6}.

7. Модульная структура программы

pair<matrix_t, matrix_t> getLUFactorization(matrix_t A)

Принимает матрицу A. Возвращает матрицы L и U: A=LU.

column_t solveLUSystem(pair<matrix_t, matrix_t> factorization, column_t B)

Принимает матрицы LU и столбец своб. членов B. Решает СЛАУ Ly=B, затем Ux=y. Возвращает x.

column_t solveSystem(matrix_t A, column_t B).

Решает СЛАУ Ax=B методом LU-разложения. Принимает матрицу и столбец A и B. Возвращает решение x.

8. Анализ результатов.

	До уточнения				После уточнения		
ε	$\|x-x^*\|_2$	$\|Ax-\lambda x\|_2$	$\|\lambda-\lambda^*\|$	N-iter	$\|x-x^*\|_2$	$\|Ax-\lambda x\|_2$	$\|\lambda-\lambda^*\|$
10^{-1}	$7{,}5\cdot10^{-3}$	$9{,}9\cdot10^{-1}$	$1{,}4\cdot10^{-7}$	6	$1{,}0\cdot10^{-6}$	$2{,}5\cdot10^{-7}$	$2{,}5\cdot10^{-7}$
10^{-2}	$1{,}3\cdot10^{-3}$	$1{,}7\cdot10^{-1}$	$4{,}0\cdot10^{-4}$	8	$4{,}8\cdot10^{-9}$	$7{,}9\cdot10^{-4}$	$7{,}9\cdot10^{-4}$
10^{-15}	$1{,}9\cdot10^{-9}$	$1{,}7\cdot10^{-7}$	$8{,}5\cdot10^{-14}$	23	$4{,}6\cdot10^{-16}$	$1{,}2\cdot10^{-15}$	$8{,}5\cdot10^{-14}$

9. Выводы

Без уточнения с.в. методом обратных итераций с.ч. было найдено с нужной точностью $\varepsilon \geq 10^{-13}$. С.в. достигает нужной точности при $\varepsilon \geq 10^{-3}$. ~~С уточнением~~

С уточнением с.в. достигает при заданной точности точность вплоть до машинного эпсилон при $\varepsilon \in [10^{-15}; 10^{-5}]$.