1.1. Формулировка задания

Решить СЛАУ методом Зейделя с заданными параметрами. Исследовать зависимость нормы фактической ошибки, нормы невязки и числа итераций при фиксированном определителе матрицы коэффициентов СЛАУ и начальном приближении от заданной точности.

1.2. Постановка задания ~~и~~

Дано: $Ax = B$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – матрица коэффициентов,
$x \in \mathbb{R}^n$ – вектор неизвестных.
$B \in \mathbb{R}^n$ – вектор свободных членов.

Задана точность ε.
Найти вектор неизвестных x с точностью ε, т.е. $\|x^* - x\|_\infty \le \varepsilon$, x^* – точное решение

2. Алгоритм метода и условия его применимости.

Алгоритм:

- Ввод: A, B, ε – матрица коэффициентов, вектор свободных членов соответственно., точность
- Приведем СЛАУ $Ax = B$ к виду удобному для итераций $x = Cx + g$. при помощи канонической формулы итерационных методов

$$B_k \frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\alpha_k} + Ax^{(k)} = b, \text{ где } \alpha_k = \frac{1}{\|A\|}, \; B_k = E \quad A>0, A = A^T$$

не такая — какая

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g, \text{ где } C = \left(E - \frac{1}{\|A\|}A\right), \; g = \frac{b}{\|A\|}$$

$\|C\| < 1$ — нужно в случае когда C – матрица перехода. В м. Зейделя м. перех. $\left(E - \frac{A}{\|A\|}\right)\left(E - \frac{A}{\|A\|}\right)$

- Цикл (k-ая итерация):

$$x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + g_1$$
$$x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + c_{23}x_3^{(k)} + \ldots + c_{2n}x_n^{(k)} + g_2$$
$$\ldots$$
$$x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + c_{n3}x_3^{(k+1)} + \ldots + c_{nn}x_n^{(k)} + g_n$$

Критерий остановки:

$$\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty < \varepsilon, \text{ если } \|C\|_\infty \le \frac{1}{2}, \text{ иначе } \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_\infty < \varepsilon \frac{1 - \|C\|_\infty}{\|C\|_\infty}$$

- После цикла: $x^{(l)}$ – искомый вектор неизвестных, где l – номер последней итерации, найденный с точностью eps.

Условия применимости:

- $\det A \neq 0$ ← для чего → как это проверить, когда есть точки
- $\|C\| < 1$. Была выбрана бесконечная норма. матр. A

3. Анализ задачи. Проверка существования и единственности решения.

При $\det A \neq 0$ СЛАУ имеет единственное решение.
Для $\|C\| < 1$ достаточно диагонального преобладания в не достаточно

матрице А.

4. Проверка условий применимости метода.

Создадим матрицу А с фиксированным определителем через произведение $Q^T F Q$, где F – верхняя треугольная, Q – ортогональная матрицы.

$F: \quad f_{ii} = 0{,}8 + \frac{0{,}9-0{,}8}{N-1}(i-1) \quad i=1,2,\dots,N$, где $N=15$ – размерность СЛАУ

$f_{ij} = 0{,}01 * rand() \quad i<j,$

так матрица F с диагональным преобладанием и $\det F = \prod_{i=1}^{N} f_{ii}$

$Q = E - \frac{2ww^T}{\|w\|\cdot\|w\|}$, где w – произвольный вектор с элементами rand(). Q – матрица отражения, ортогональная, с диагональным преобладанием.

Диаг преобл. F не влечёт Диаг. преобл. A

$\det A = \det(Q^T F Q) = \det Q^T \cdot \det F \cdot \det Q = \det F.$

По построению матрица А с диагональным преобладанием, $\|C\|_\infty < 1$. Условия применимости соблюдены.

5. Тестовый пример

Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Точное решение $X^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

она симметричная?!

~~$\det A = 48 \neq 0$.~~

~~$|a_{11}| = 4 > |a_{12}| + |a_{13}| = 1+1 = 2$~~ $\quad |A_{11}| = 4 > 0$

~~$|a_{22}| = 3 > |a_{21}| + |a_{23}| = 1+1 = 2$~~ $\quad |A_{22}| = 11 > 0 \;\Rightarrow\; A > 0$

~~$|a_{33}| = 5 > |a_{31}| + |a_{32}| = 1+1 = 2$~~ $\quad |A| = 50 > 0$

~~А диагонально доминирующая~~.

Запишем чему равны C и g в форме ~~$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$~~ $x^{(k+1)} = \underline{C}x^{(k+1)} + \overline{\overline{C}}x^{(k)} + g$, $C = \underline{C} + \overline{\overline{C}}$

$C = E - \frac{1}{\|A\|_\infty} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$

$g = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\|C\|_\infty = \frac{6}{7} > \frac{1}{2}$, $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon \frac{1-\|C\|}{\|C\|}$ – критерий остановки.

$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{7}\left(3x_1^{(k)} + x_2^{(k)} - x_3^{(k)} + 4\right)$

$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{7}\left(x_1^{(k+1)} + 4x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 1\right)$

$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{7}\left(-x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + 2x_3^{(k)} + 5\right)$

Пусть $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1 итерация:

$x_1^{(1)} = \frac{4}{7} \approx 0{,}5714$

$x_2^{(1)} = \frac{1}{7}(0{,}5714 + 1) \approx 0{,}2245$

$x_3^{(1)} = \frac{1}{7}(-0{,}5714 + 0{,}2245 + 5) \approx 0{,}6647$

$\|x^{(1)} - x^{(0)}\| = 0{,}6647 < \varepsilon \frac{1-6/7}{6/7} = 6\varepsilon$

$\frac{0{,}6647}{6} \approx 0{,}11 < \varepsilon$ когда будет так?

2 итерация:

$x_1^{(2)} = \frac{1}{7}(3 \cdot 0{,}5714 + 0{,}2245 - 0{,}6647 + 4) \approx 0{,}7534$

$x_2^{(2)} = \frac{1}{7}(0{,}7534 + 4 \cdot 0{,}2245 + 0{,}6647 + 1) \approx 0{,}4737$

$x_3^{(2)} = \frac{1}{7}(-0{,}7534 + 0{,}4737 + 2 \cdot 0{,}6647 + 5) \approx 0{,}8647$

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0{,}7534 - 0{,}5714 \\ 0{,}4737 - 0{,}2245 \\ 0{,}8647 - 0{,}6647 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0{,}187 < 6\varepsilon.$$

3 итерация:

$x_1^{(3)} = \frac{1}{7}(3 \cdot 0{,}7534 + 0{,}4737 - 0{,}8647 + 4) \approx 0{,}8385$

$x_2^{(3)} = \frac{1}{7}(0{,}8385 + 4 \cdot 0{,}4737 + 0{,}8647 + 1) \approx 0{,}6568$

$x_3^{(3)} = \frac{1}{7}(-0{,}8385 + 0{,}6568 + 2 \cdot 0{,}8647 + 5) \approx 0{,}9357$

$$\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} 0{,}8385 - 0{,}7534 \\ 0{,}6568 - 0{,}4737 \\ 0{,}9357 - 0{,}8647 \end{pmatrix} \right\|_\infty = 0{,}071 < 6\varepsilon.$$

что за матрица

6. Подготовка контрольных тестов.

- Диагональные элементы матрицы B, определяющие определитель матрицу СЛАУ A: $b_{ii} = 0{,}8 + \frac{0{,}9-0{,}8}{N-1}(i-1)$, $i = 1, 2, \ldots, N$
- Начальное приближение x: $(0, 0, \ldots, 0)^T$
- Точное решение x^*: $(1, 2, \ldots, N)^T$
- Точности ε: $10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-15}$

$0{,}8^{15} < \det A = \prod b_{ii} \leq 0{,}9^{15}$

7. Модульная структура программы.

$A, b, x^*, \det A$?

- systems_t readSystems(void)

Читает из файла совокупность СЛАУ, в которую входят матрица коэффициентов, столбец свободных членов и точное решение; и определитель матрицы. Возвращает эту совокупность.

- double getInfNormMatrix(matrix_t matrix)

Принимает матрицу, возвращает её бесконечную норму.

- double getInfNormColumn(column_t column)

Принимает вектор, возвращает её бесконечную норму.

- pair<matrix_t, column_t> prepareSeidelMethod(matrix_t matrix_A, column_t column_B).

Принимает матрицу A и столбец свободных членов СЛАУ. Возвращает матрицу C и вектор g, участвующие в итерационной формуле ~~x=Cx+g~~. $x^{(k+1)} = \underline{C}x^{(k+1)} + \bar{\bar{C}}x^{(k)} + g$, $C = \underline{C} + \bar{\bar{C}}$.

- double getFactError(column_t ground_truth_solution, column_t calc_solution, bool print_error).

Принимает точное и вычисленное решения, логическую переменную. Возвращает норму фактической ошибки (бесконечную). Если print_error == TRUE, то норма печатается на экран.

- double getDiscrepancy(matrix_t matrix_A, column_t calc_solution, column_t column_B, bool print_discrepancy).

Принимает матрицу A, вычисленное решение, столбец B и логическую переменную print_discrepancy. если она TRUE, то результат функции выводится на экран. Функция возвращает бесконечную норму невязки.

. void writeDependence(double eps, double fact_error, double discrepancy, int number_iter).

Принимает точность, нормы фактической ошибки и невязки, количество итераций. Записывает параметры функции в файл в новую строку.

. bool converge(column_t x_k, column_t x_k_1, double norm_c, double eps).

Принимает решения, полученные на k и k+1 итерациях, бесконечную норму матрицы перехода C и точность. Возвращает TRUE, если выполнен критерий остановки итерационного процесса, иначе FALSE.

. column_t seidelMethod(matrix_t C, column_t g, column_t first_approx, double eps, int* number_iteration, bool print_calculations).

где D

$x^{(k+1)} = \underline{C}x^{(k+1)} + \bar{C}x^{(k)} + g$

$\cancel{x = Cx + g}$

$C = \underline{C} + \bar{C}$.

Принимает C и g, участвующие в формуле метода Зейделя, ~~ссылку на переменную~~, куда начальное приближение, точность, запишется количество итераций, и логическую переменную: если она TRUE, то печатаются промежуточные векторы. Возвращает вычисленное решение с точностью eps.

8. Анализ результатов

На построенном графике зависимости количества итераций от заданной точности при фиксированных начальном приближении и определителе матрицы коэффициентов СЛАУ видна линейная зависимость в полулогарифмическом масштабе.

Аналогичная линейная зависимость видна на графике зависимости норм фактической ошибки и невязки от точности в логарифмическом масштабе. ~~Кривая, отвечающая норме невязки, лежит чуть ниже второй кривой вследствие неравенства: ||Ax − B|| ≤ ||A||·||x − x*||. При построении был выбран определитель, меньший 1. Однако при увеличении определителя взаимное расположение кривых меняется.~~

$\|A\|$ — не $\det(A)$

При самых больших точностях кривые „расходятся".

9. Выводы

~~При близости определителя матрицы коэффициентов СЛАУ к 1~~ характеры зависимостей норм фактической ошибки и невязки крайне схожи, кривые почти накладываются друг на друга, поэтому для изучения зависимостей для норм целесообразно выбрать невязку.

к чему

Метод Зейделя в общем случае неприменим. На практике можно приводить матрицы коэффициентов к матрицам с диагональным преобладанием элементарными преобразованиями над строками для применения метода.

Достигается ли точность? ~~[illegible]~~ Точная

Сколько ~~раз~~ итераций нужно на [illegible]

10. Исправление недочетов.

2. Алгоритм метода и условия его применимости.

Алгоритм:

Ввод: A, b, ε — матрица коэффициентов, вектор свободных членов и точность соответственно.

Приведем СЛАУ $Ax=b$ к форме метода итераций Зейделя $x^{(k+1)} = \underline{C}x^{(k+1)} + \overline{\overline{C}}x^{(k)} + g$, где $\underline{C}$ — нижняя треугольная матрица с нулевыми диагональными элементами, $\overline{\overline{C}}$ — верхняя треугольная матрица, $C = \underline{C} + \overline{\overline{C}}$, $C = E - \frac{1}{\|A\|_\infty}A$, $g = \frac{b}{\|A\|_\infty}$, $x^{(k)}$ и $x^{(k+1)}$ — векторы-решения, полученные на k-ой и (k+1)-ой итерациях.

Цикл (k-ная итерация):

$$x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + g_1$$

$$x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{22}x_2^{(k)} + c_{23}x_3^{(k)} + \ldots + c_{2n}x_n^{(k)} + g_2$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + c_{n3}x_3^{(k+1)} + \ldots + c_{nn}x_n^{(k)} + g_n$$

Критерий остановки:

$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < \varepsilon$, если $\|C\|_\infty < \frac{1}{2}$, иначе $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty < \varepsilon \frac{1-\|C\|_\infty}{\|C\|_\infty}$

После цикла:

$x^{(l)}$ — искомый вектор неизвестных, найденный с точностью eps, где l — номер последней итерации.

Условия применимости:

- $A > 0$, $A = A^T$

3. Анализ задачи. Проверка существования и единственности решения.

По теореме о сходимости линейных одношаговых стационарных итерационных методов $B \cdot \frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{\alpha} + Ax^{(k-1)} = b$, где $\alpha = \frac{1}{\|A\|_\infty}$, $B = E$ если $A > 0$, $\alpha > 0$ и $\left(B - \frac{\alpha}{2}A\right) > 0$, то пос-ть $x^{(k)}$ сходится к точному решению $Ax=b$ при любом начальном приближении $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$

4. Проверка условий применимости метода

$$A > 0 \iff \begin{cases} A = A^T \\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0 \end{cases}$$

Создадим симметрическую матрицу A с положительными собственными числами через произведение Q^TDQ, где D — диагональная матрица, Q — ортогональная.

D: $d_{ii} = 2 + \frac{3-2}{N-1}(i-1)$ $i = 1, 2, \ldots, N$, где $N = 15$ — размерность СЛАУ.

$Q = E - \frac{2\omega \otimes \omega^T}{\|\omega\| \cdot \|\omega\|}$, где ω — произвольный вектор с элементами rand() (ненулевой). Q — ортогональная матрица отражения.

Коэффициенты α и B из канонического вида линейных одношаговых итерационных методов $B\frac{x^{(k)} - x^{(k-1)}}{\alpha} + Ax^{(k)} = b$ таковы, что условия теоремы о сходимости заведомо выполняются:

• $\alpha = \frac{1}{\|A\|_\infty} > 0$

• $(2\|D\|_\infty \cdot E - D) > 0 \Rightarrow (2\|A\|_\infty E - D) > 0$, т.к. $\|A\| = \|D\|$

$$\left(\begin{array}{l} A = Q^T D Q,\ \|A\| \le \|Q^T\| \cdot \|D\| \cdot \|Q\| \\ \|A\| \le cond(Q)\,\|D\| = \|D\| \\ D = QAQ^T,\ \|D\| \le \|A\| \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow 2\|A\|_\infty Q^T E Q - Q^T D Q > 0 \Rightarrow E - \frac{A}{2\|A\|_\infty} > 0$$

6. Подготовка контрольных тестов.

• Элементы диагональной матрицы D, участвующей при построении матрицы A: $d_{ii} = 2 + \frac{3-2}{N-1}(i-1)$ $i = 1, 2, \ldots, N$

• Начальное приближение $X^{(0)}$: $(0, 0, \ldots, 0)^T$.

• Точности ε: $10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-15}$.

7. Модульная структура программы

• systems_t readSystems(void)

Читает из файла определитель матрицы СЛАУ, 15 совокупностей, в каждую из которых входит матрица коэффициентов с заданным определителем, столбец свободных членов и точное решение. Возвращает определитель и 15 совокупностей для дальнейших исследований зависимостей от точностей.

8. Анализ результатов.

$\det A \approx 829421$

ε	$\|x - x^*\|_\infty$	$\|Ax - B\|_\infty$	number_iter
10^{-1}	$1{,}8 \cdot 10^{-2}$	$3{,}8 \cdot 10^{-2}$	7
10^{-2}	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$	$7{,}4 \cdot 10^{-3}$	8
10^{-3}	$1{,}9 \cdot 10^{-4}$	$4{,}0 \cdot 10^{-4}$	12
...	...	...	...
10^{-14}	$2{,}3 \cdot 10^{-14}$	$8{,}9 \cdot 10^{-15}$	40
10^{-15}	$1{,}9 \cdot 10^{-14}$	$3{,}6 \cdot 10^{-15}$	45

Достигается нужная точность при $\varepsilon \geq 10^{-13}$. На изменение точности на порядок в среднем требуется 4 итерации.

9. Выводы.

Метод Зейделя в общем случае неприменим к решению СЛАУ. На практике достаточно трудоемко проверять положительную определенность матрицы коэффициентов, поэтому возможна корректировка условий применимости метода к решению СЛАУ.

Нужные точности при $\varepsilon < 10^{-13}$ не достигаются ввиду погрешностей машинной арифметики.