Aproksymacja profilu wysokościowego

Krzysztof Gibała 160614

10. 06. 2018

1 Wprowadzenie

W celu zobrazowania, implementacji i wykorzystania metod interpolacyjnych, za zbior punktow referencyjnych objeto probki dotyczace roznych profili tras.

Kazda trasa traksowana jako zbior danych wejsciowych w postaci *(x, y)* posiadajaca 500 probek.

1.1 Interpolacja Lagrange'a

Rozważmy szereg punktów *(xj , f(xj))*, do tych punktów można dopasować wielomian stopnia n. Baza wielomianów *si(x)* dana jest przez funkcje Lagrange'a:

$$l_i(x) = \frac{\mathrm{Q}^n_{j=0,j\neq i}(x - x_j)}{\prod^n_{j=0,j\neq i}(x_i - x_j)} = \begin{cases} 1: \ x = x_i \\ 0: x = x_j \ \neq x_i \end{cases}$$

A wiec wielomian Lagrange'a mozna zapisac :

$$w(x) \ = \sum_{i=0}^{n} a_i l_i(x) \ = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{\mathrm{Q}^n_{j=0,j\neq i}(x - x_j)}{\mathrm{Q}^n_{j=0,j\neq i}(x_i - x_j)}$$

Na mocy warunku, że w węzłach wielomian interpolacyjny jest równy funkcji interpolowanej, otrzymuje się *ai = f(xi)*, a więc ostatecznie:

$$w(x) \ = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{\mathrm{Q}^n_{j=0,j\neq i}(x - x_j)}{\prod^n_{j=0,j\neq i}(x_i - x_j)}$$

1.2 Interpolacja funkcjami sklejanymi

Aproksymacja wielomianowa nie zawsze daje dobre rezultaty, szczególnie gdy zachodzi potrzeba użycia wielomianów wysokiego stopnia i dopasowanie staje się w charakterze oscylacyjne (efekt Rungego). Zachodzi wtedy potrzeba znalezienia metod, które będą dawały bardziej gładkie dopasowanie.

Metoda interpolacja funkcjami sklejanymi wymusza spelnienie kilku specyficznych dla niej warunkow.

Na początku rozważanej funkcji zdefiniowane zostają tablice które w pętli for inicjowane są wartościami zgodnie ze wzorem :

$$(\frac{\triangle x_{i-1}}{\triangle x_i})g''(x_{i-1}) + \ (\frac{2(x_{i+1} - x_{i-1})}{\triangle x_i})g''(x_i) + (1)g''(x_{i+1})$$

$$= 6 \ (\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(\triangle x_i)^2} - \ \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(\triangle x_i)(\triangle x_{i-1})}) \ , (1)$$

Przypisanie polega na umieszczeniu w tablicy A wartości stojącej przy *g′′(xi−1)*, w tablicy B wartości przy *g′′(xi)* oraz w tablicy C wartości przy *g′′(xi+1)*. Tablica D inicjowana jest wartościami wyliczonymi z prawej strony równości (1). Prócz tego w pętli wyliczany jest indeks *i0* stanowiący parametr i dla równania

$$g(x) \ = F_i(x) \ = \ \frac{g''(x_i)}{6} \ (\frac{(x_{i+1} - x)^3}{\triangle x_i} - \triangle x_i(x_{i+1} - x))$$

$$+\frac{g''(x_{i+1})}{6}\ (\frac{(x-x_i)^3}{\triangle x_i} - \triangle x_i(x-x_i))$$

$$+f(x_i)\ (\frac{x_{i+1-X}}{\triangle x_i})\ + f(x_{i+1})\ (\frac{x-x_i}{\triangle x_i})\ .\ (2)$$

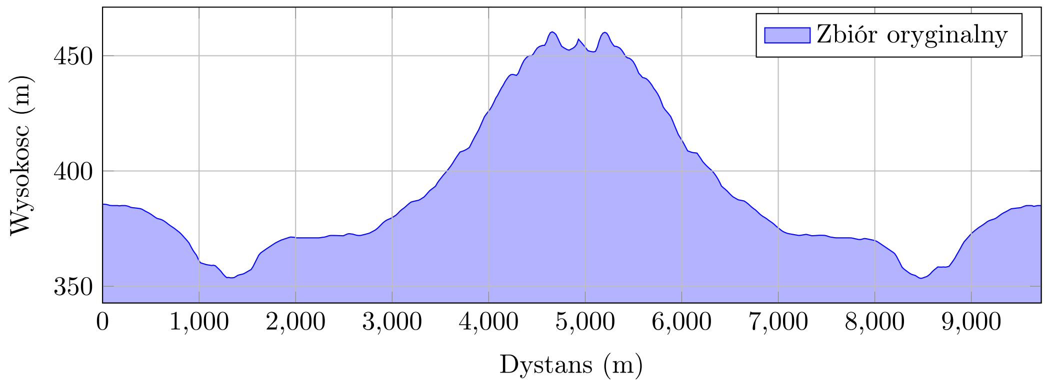
W kolejnej części rozwiązywany jest układ równań względem niewiadomych *g′′(xi) : i = 1, 2, . . . , n−1*, oraz zgodnie z :

$$g''(x_0)\ = 0$$

$$g''(x_n)\ = 0$$

przypisywane są zera dla *g′′(x0)* i *g′′(xn)*. Ostatecznie na podstawie (1) i wyliczonych wartości obliczana jest wartość interpolująca funkcję *xf* w punkcie *x*.

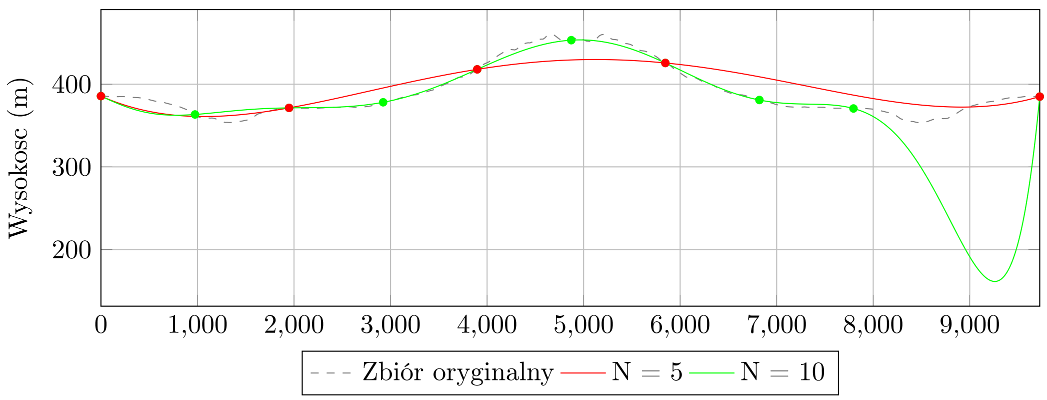
2.1 Trasa o jednym wyraźnym wzniesieniu



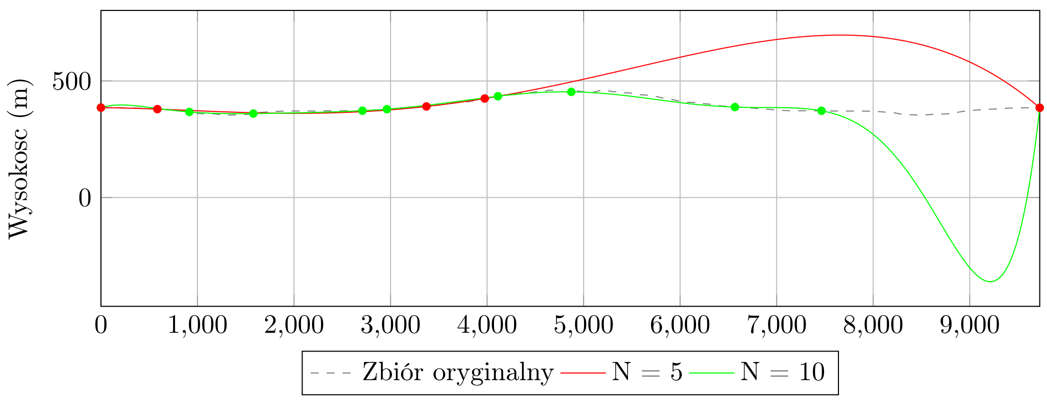
Wykres. 1: Podgladowy charakter profilu trasy.

2.1.1 Wpływ liczby punktów węzłowych na wyniki oraz charakterystyki ich rozmieszczenia

1. Metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a

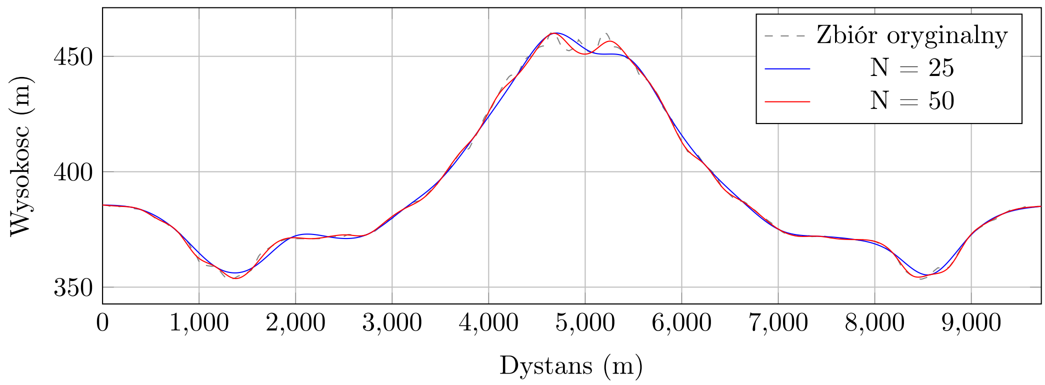


Wykres. 2: Wpływ liczby punktów węzłowych rozmieszczonych rownomiernie na wyniki.

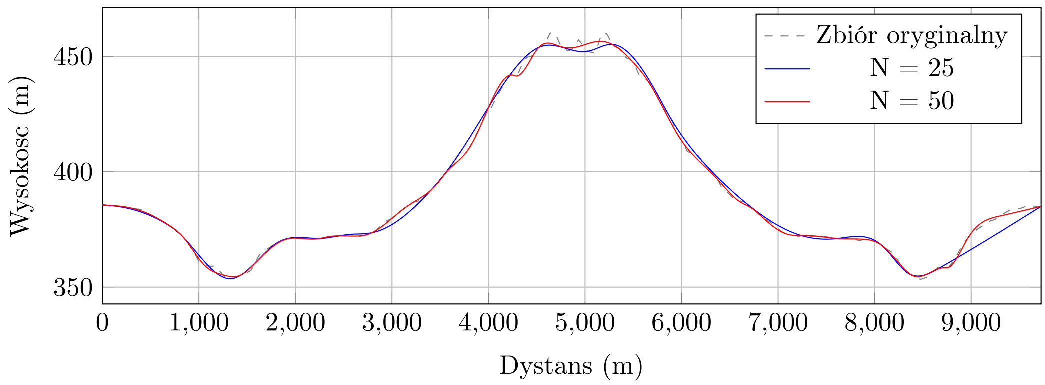


Wykres. 3: Wpływ liczby punktów węzłowych rozmieszczonych nierownomiernie na wyniki.

2. Metoda wykorzystująca funkcje sklejane trzeciego stopnia

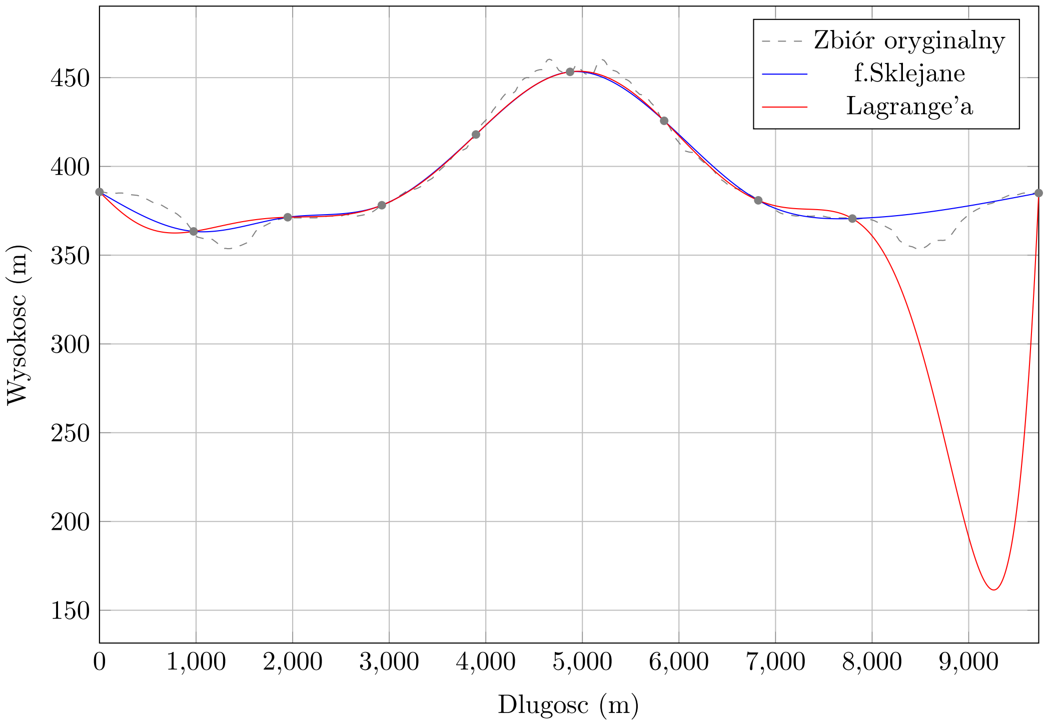


Wykres. 1: Wpływ liczby punktów węzłowych rozmieszczonych rownomiernie na wyniki.



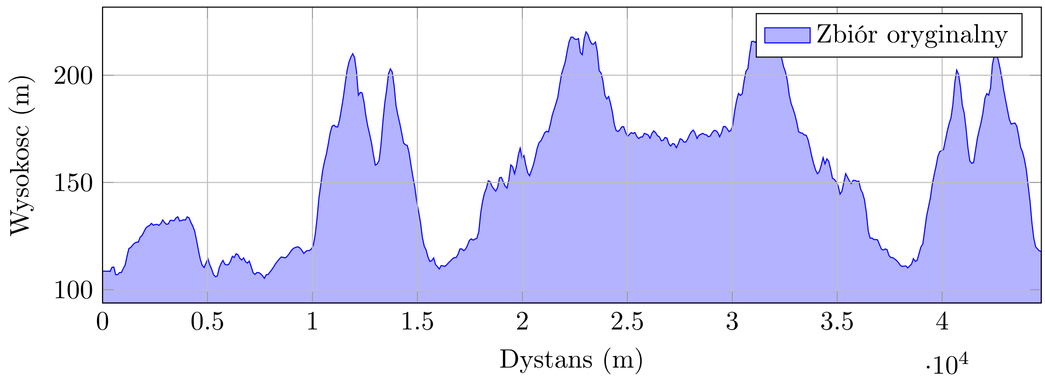
Wykres. 2: Wpływ liczby punktów węzłowych rozmieszczonych nierownomiernie na wyniki.

2.1.2 Zestawienie dwoch wykorzystywanych metod



Wykres. 1: Zestawienie dwoch metod

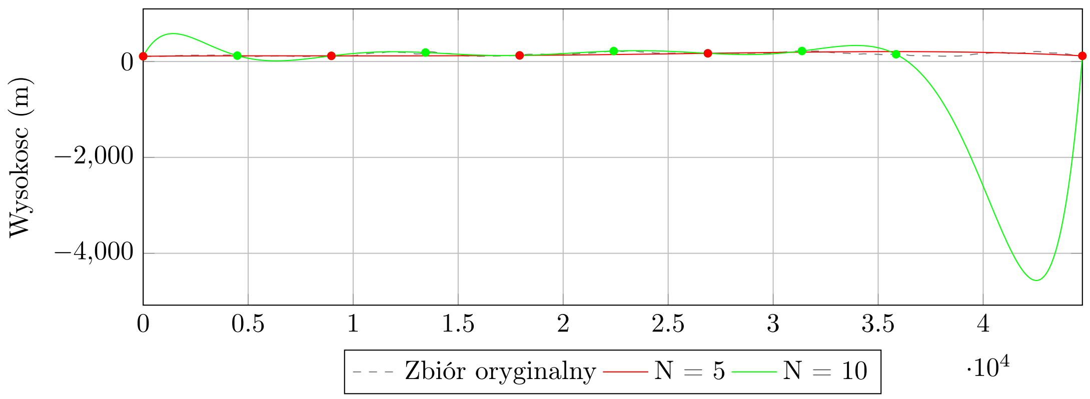
2.2 Trasa o wielu stromych wzniesieniach



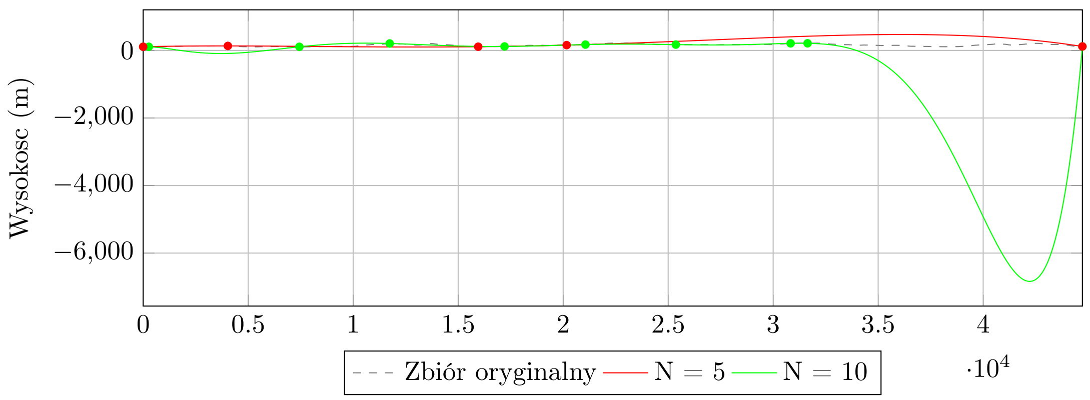
Wykres. 1: Podgladowy charakter profilu trasy.

2.2.1 Wpływ liczby punktów węzłowych na wyniki oraz charakterystyki ich rozmieszczenia

1. Metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a

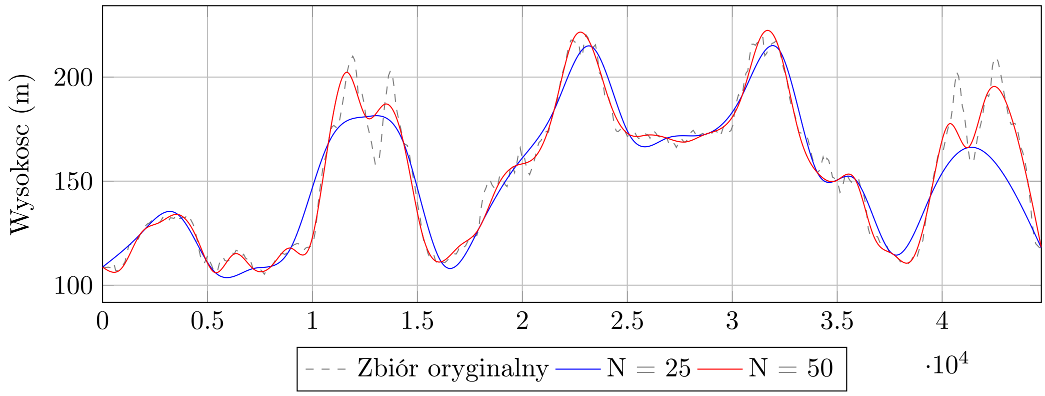


Wykres. 2: Wpływ liczby punktów węzłowych rozmieszczonych rownomiernie na wyniki.

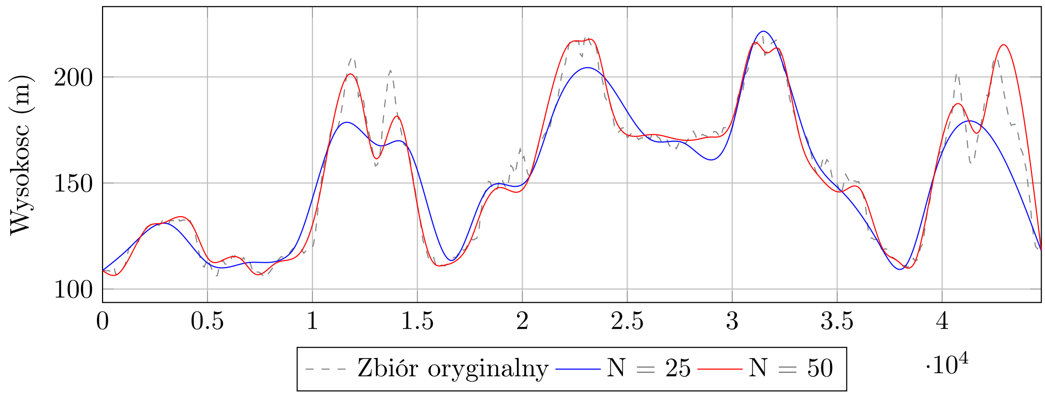


Wykres. 3: Wpływ liczby punktów węzłowych rozmieszczonych nierownomiernie na wyniki.

2. Metoda wykorzystująca funkcje sklejane trzeciego stopnia

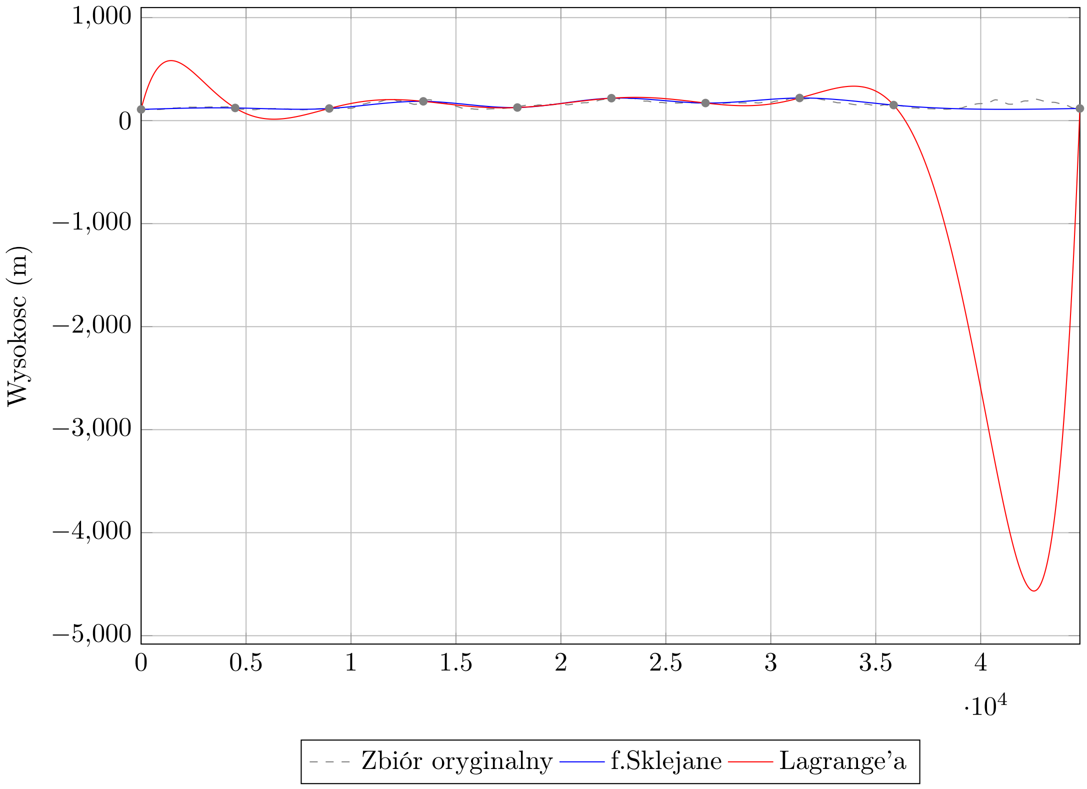


Wykres. 1: Wpływ liczby punktów węzłowych rozmieszczonych rownomiernie na wyniki.



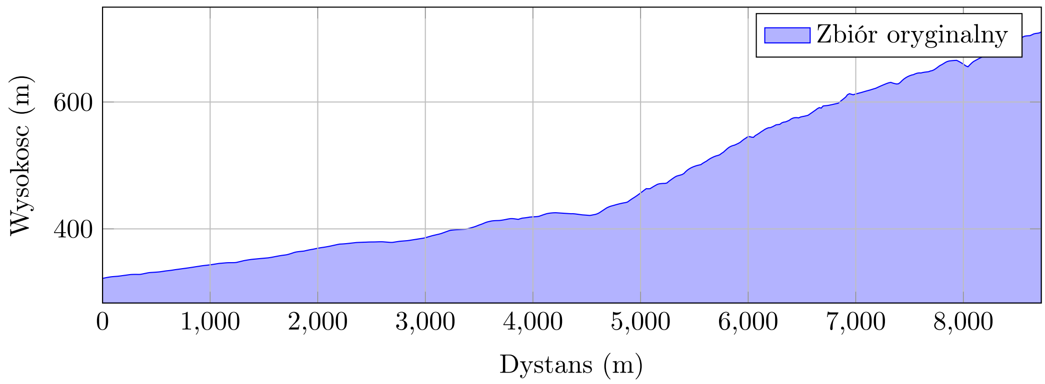
Wykres. 2: Wpływ liczby punktów węzłowych rozmieszczonych nierownomiernie na wyniki.

2.2.2 Zestawienie dwoch wykorzystywanych metod



Wykres. 1: Zestawienie dwoch metod

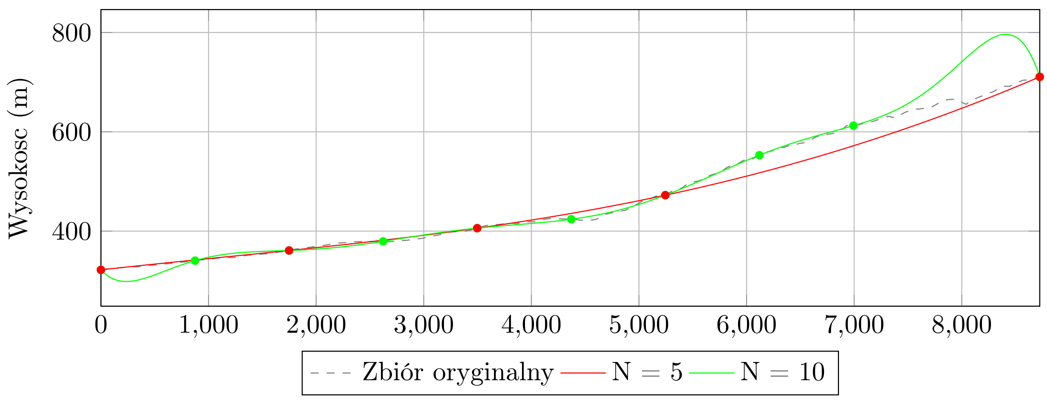
2.3 Trasa bez wzgorz



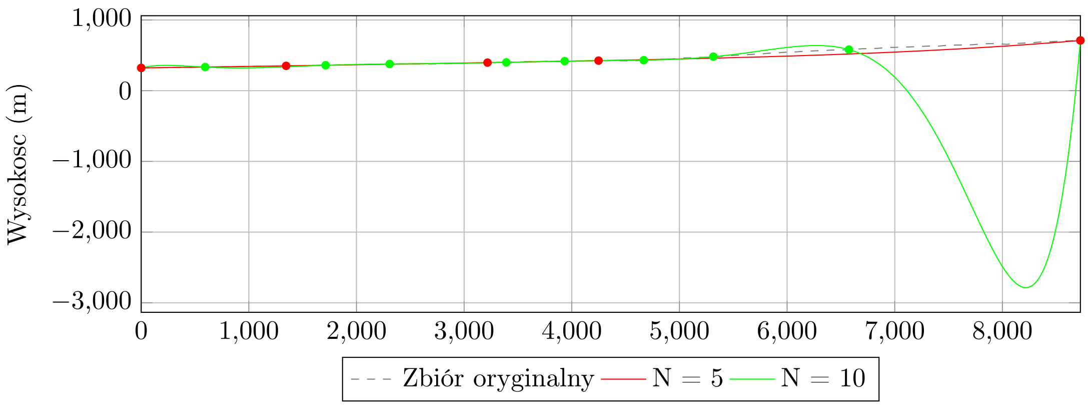
Wykres. 1: Podgladowy charakter profilu trasy.

2.3.1 Wpływ liczby punktów węzłowych na wyniki oraz charakterystyki ich rozmieszczenia

1. Metoda wykorzystująca wielomian interpolacyjny Lagrange'a

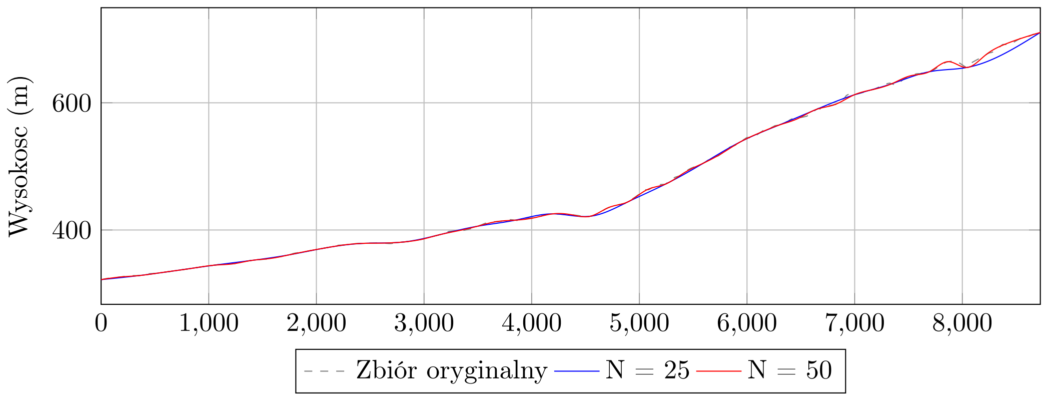


Wykres. 2: Wpływ liczby punktów węzłowych rozmieszczonych rownomiernie na wyniki.

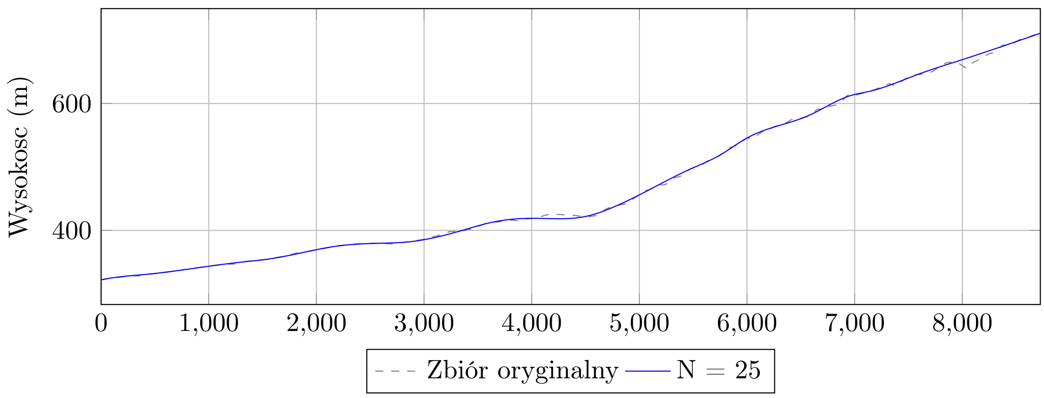


Wykres. 3: Wpływ liczby punktów węzłowych rozmieszczonych nierownomiernie na wyniki.

2. Metoda wykorzystująca funkcje sklejane trzeciego stopnia

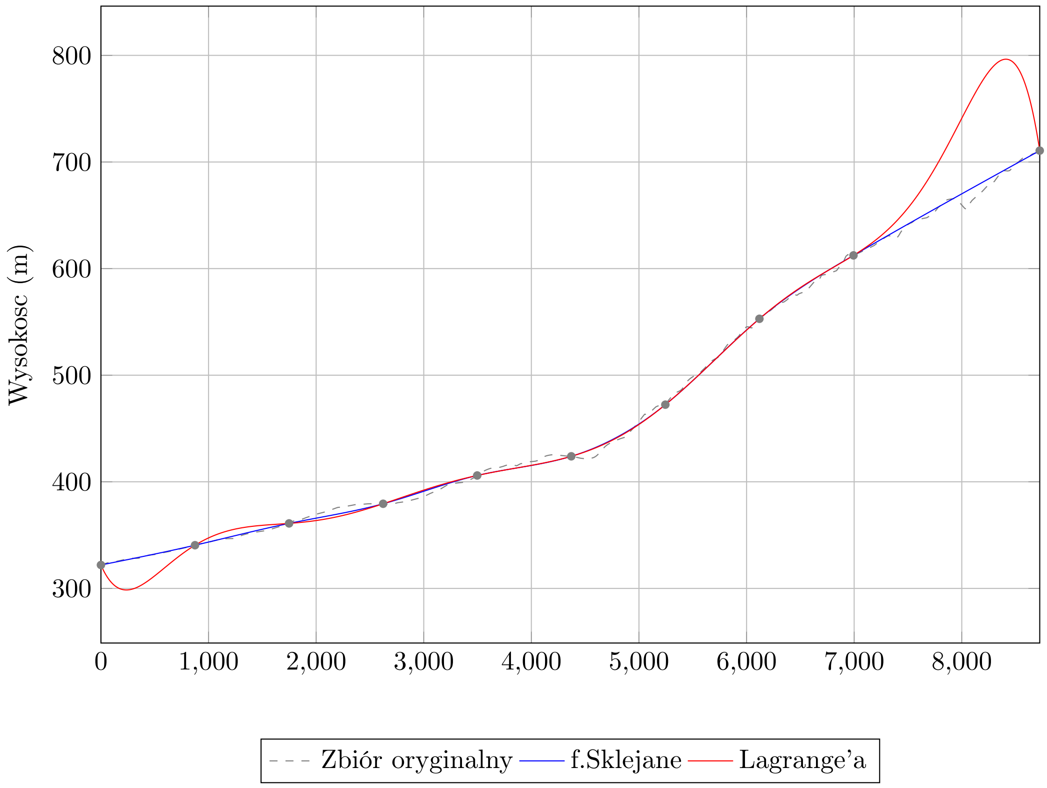


Wykres. 1: Wpływ liczby punktów węzłowych rozmieszczonych rownomiernie na wyniki.



Wykres. 2: Wpływ liczby punktów węzłowych rozmieszczonych nierownomiernie na wyniki.

2.3.2 Zestawienie dwoch wykorzystywanych metod



Wykres. 1: Zestawienie dwoch metod

3 Wnioski

Profile tras a mianowicie ich teren jest nieprzewidywalny, jego zmiany nie podlegają żadnym regułom,prawdopodobnie dlatego metoda funkcji sklejanych jest lepsza, bo próbuje odwzorować teren po małym kawałku, prawie że osobno, jedynie pamiętając o ciągłości.

Im trasa jest bardziej zróżnicowana, z dużą liczbą stromych zboczy i ostrych wierzchołków, tym więcej węzłów potrzeba, by uzyskać rozsądne przyblizenie funkcji.

To, która metoda będzie 'lepsza"', zawsze ostatecznie zależy od dostępnych danych, ich rozmieszczenia, profilu terenu i celu aproksymacji. W dodatku, czasami nawet mniejsza liczba węzłów daje lepsze wyniki, więc należy sprawdzić wiele możliwości, pozwoli to na dostosowanie danych wyjsciowych do zadawalajacego nas wyniku.