Laboratorium 4
Aproksymacja

Krzysztof Solecki

24 Marca 2023

1 Treści zadań

1.1 Zadania

1. Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale [0,1] wielomianem pierwszego stopnia metodą średniokwadratową ciągłą dla w(x)=1.

2.Aproksymować funkcję $f(x) = 1 + x^3$ w przedziale [0,1] wielomianem stopnia drugiego przy użyciu wielomianów Legendre'a.

1.2 Zadania domowe

1. Napisz procedurę realizującą metodę aproksymacji punktowej za pomocą wielomianów drugiego stopnia

2. Oblicz wartości funkcji $f(x) = 1 - x^2$ w dyskretnych punktach xi: xi=-1+ 0.5*i, i=0,1..4, a następnie aproksymuj funkcję wielomianami Grama stopnia trzeciego.

2 Rozwiązania - zadania laboratoryjne

1. Aproksymujemy wielomianami $\phi_n(x) = x^n$, tak więc funkcja aproksymująca ma postać:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i(x), c_i \in \mathbb{R}$$

Odległość od funkcji aproksymowanej w metryce $L_1^2([0,1])$ wynosi:

$$\delta(f,F) = \int_0^1 [\mathrm{F(x)} - \mathrm{f(x)}]^2\, \mathrm{d}x = \int_0^1 [\sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n}} \mathrm{c_i}\phi_\mathrm{i}(\mathrm{x}) - \mathrm{f(x)}]^2\, \mathrm{d}x$$

Aby znaleźć minimum funkcji w zależności od współczynników ci porównujemy jej pochodne względem tych współczynników do 0:

$$\frac{\partial\delta}{\partial c_i} = 2\int_0^1 [F(x) - f(x)]\phi_i(x)dx = 0$$
$$\int_0^1 [F(x) - f(x)]\phi_i(x)dx = 0$$
$$\int_0^1 F(x)\phi_i(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx$$
$$\int_0^1 \sum_{j=0}^{n} c_j\phi_j(x)\phi_i(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx$$
$$\sum_{j=0}^{n} c_j \cdot \int_0^1 \phi_j(x)\phi_i(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx, i \in \{0, 1..n\}$$

W naszym przypadku ($n = 1$) równania te wyrażone w postaci macierzowej mają postać:

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 \phi_0(x)\phi_0(x)dx & \int_0^1 \phi_0(x)\phi_1(x)dx \\ \int_0^1 \phi_1(x)\phi_0(x)dx & \int_0^1 \phi_1(x)\phi_1(x)dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 f(x)\phi_0(x)dx \\ \int_0^1 f(x)\phi_1(x)dx \end{bmatrix}$$

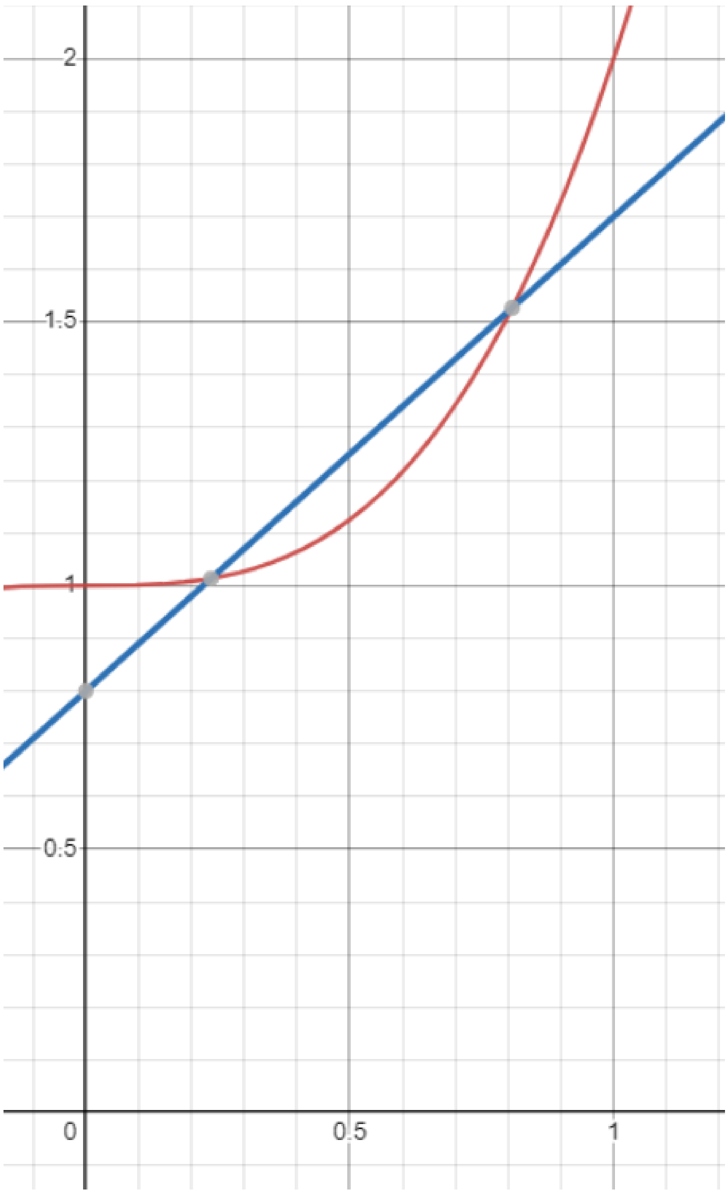
$$\int_0^1 \phi_0(x)\phi_0(x)dx = \int_0^1 1 \cdot 1dx = x|_0^1 = 1$$
$$\int_0^1 \phi_1(x)\phi_0(x)dx = \int_0^1 1 \cdot xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$
$$\int_0^1 \phi_1(x)\phi_1(x)dx = \int_0^1 x \cdot xdx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$$
$$\int_0^1 \phi_0(x)f(x)dx = \int_0^1 1 \cdot \left(1 + x^3\right) dx = \frac{x^4}{4} + x|_0^1 = \frac{5}{4}$$
$$\int_0^1 \phi_1(x)f(x)dx = \int_0^1 x \cdot \left(1 + x^3\right) dx = \int_0^1 x \cdot \left(x + x^4\right) dx = \frac{x^5}{5} + \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{7}{10}$$

Podstawiając do równania (1):

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 21 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$
$$-5c_1 = -4, \quad 1c_0 + 2c_1 = 5$$
$$c_0 = \frac{4}{5}, \quad c_1 = \frac{9}{10}$$

Z tego wynika że nasza funkcja aproksymująca jest postaci:

$$F(x) = 0.9x + 0.8$$



Rys. 1: Funkcja aproksymująca i aproksymowana

Wykres zaznaczony kolorem czerwonym to funkcja aproksymowana f(x) = $x^3 + 1$, a kolorem niebieskim funkcja aproksymująca F(x) = 0.9x+0.8

Wniosek: Można zauważyć, że funkcja nie jest zbyt dokładnie przybliżona.

2. Pierwsze trzy wielomiany Legendre'a:

$$L_0(x) = 1$$
$$L_1(x) = x$$
$$L_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Są one ortogonanle z wagą 1 w sensie metryki L^2 na przedziale [-1, 1]. W związku z tym:

$$\forall_{i \neq j, i, j \in 1,2,3} \int_{-1}^{1} L_i(x) L_j(x) dx = 0$$

Nasz badany przedział jest od niego różny, w związku z tym zastosujemy podstawienie transformujące nam przedział [0,1] na [-1, 1]:

$$t = 2(x - \frac{1}{2}) \rightarrow x = \frac{1}{2}(t+1)$$

Nasza funkcja aproksymowana przyjmie postać:

$$f(t) = (\frac{1}{2}(t+1))^3 + 1, t \in [-1, 1]$$

A nasza funkcja aproksymująca przyjmie postać:

$$F(t) = \sum_{i=0}^{2} c_i L_i(t), t \in [-1, 1]$$

Potem wracając do x zmiennej x otrzymamy funkcję interpolującą. Postępując analogicznie do zadania pierwszego nasz problem sprowadzamy do rozwiązania poniższego równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} L_0(t)L_0(t)dt & \int_{-1}^{1} L_0(t)L_1(t)dt & \int_{-1}^{1} L_0(t)L_2(t)dt \\ \int_{-1}^{1} L_1(t)L_0(t)dt & \int_{-1}^{1} L_1(t)L_1(t)dt & \int_{-1}^{1} L_1(t)L_2(t)dt \\ \int_{-1}^{1} L_2(t)L_0(t)dt & \int_{-1}^{1} L_2(t)L_1(t)dt & \int_{-1}^{1} L_2(t)L_2(t)dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_1(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_2(t)dt \end{bmatrix}$$

Korzystając z zależności (1) mamy:

$$\begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} L_0(t)L_0(t)dt & 0 & 0 \\ 0 & \int_{-1}^{1} L_1(t)L_1(t)dt & 0 \\ 0 & 0 & \int_{-1}^{1} L_2(t)L_2(t)dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_1(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_2(t)dt \end{bmatrix}$$

Czyli:

$$\begin{bmatrix} c_0 \int_{-1}^{1} L_0(t)L_0(t)dt \\ c_1 \int_{-1}^{1} L_1(t)L_1(t)dt \\ c_2 \int_{-1}^{1} L_2(t)L_2(t)dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_1(t)dt \\ \int_{-1}^{1} f(t)L_2(t)dt \end{bmatrix}$$

Czyli:

$$c_i = \frac{\int_{-1}^{1} f(t)L_i(t)dt}{\int_{-1}^{1} L_i^2(t)dt}$$

Obliczamy poszczególne całki potrzebne do rozwiązania:

$$\int_{-1}^{1} f(t)L_0(t)dt = \int_{-1}^{1} (\frac{1}{2}(t+1))^3 + 1dt = 2.5$$
$$\int_{-1}^{1} f(t)L_1(t)dt = \int_{-1}^{1} t \cdot ((\frac{1}{2}(t+1))^3 + 1)dt = 0.3$$
$$\int_{-1}^{1} f(t)L_2(t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}(3t^2 - 1)((\frac{1}{2}(t+1))^3 + 1)dt = 0.1$$
$$\int_{-1}^{1} L_0^2(t)dt = \int_{-1}^{1} 1^2 dt = 2$$
$$\int_{-1}^{1} L_1^2(t)dt = \int_{-1}^{1} t^2 dt = \frac{2}{3}$$
$$\int_{-1}^{1} L_2^2(t)dt = \int_{-1}^{1} (\frac{1}{2}(3t^2 - 1))^2 dt = 0.4$$

Podstawiając do wzoru (3) otrzymujemy:

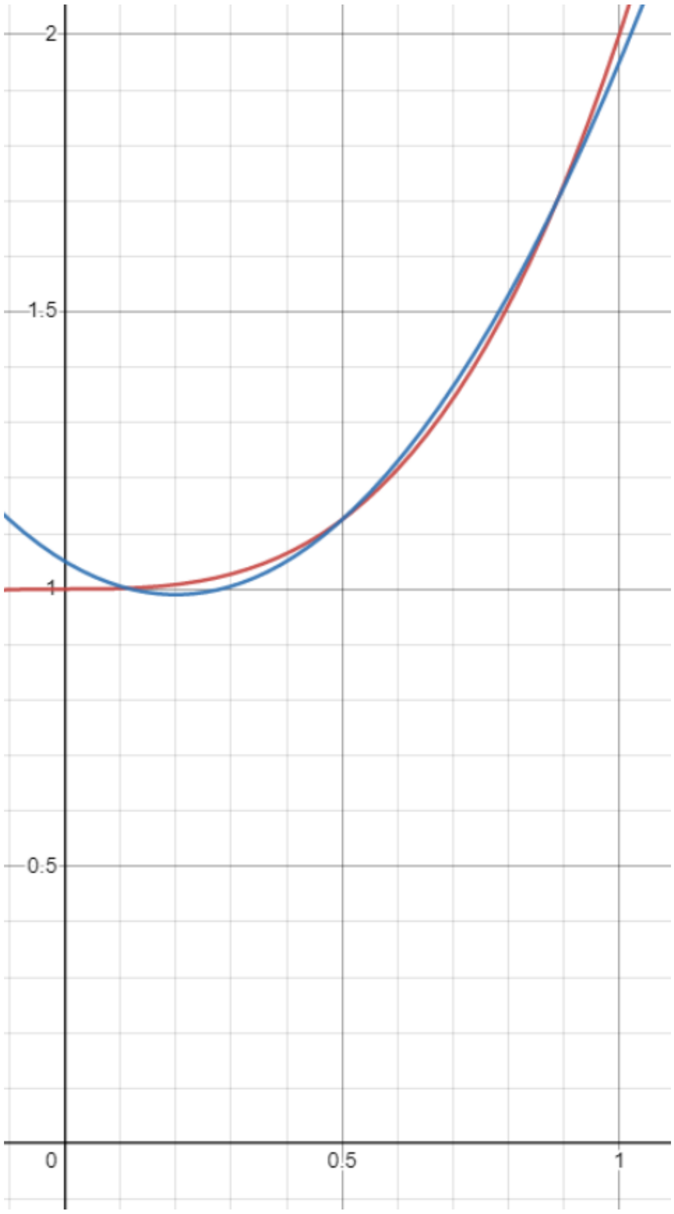
$$c_0 = \frac{2.5}{2} = 1.25$$
$$c_1 = \frac{0.3}{\frac{2}{3}} = 0.45$$
$$c_2 = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$$

Czyli nasza funkcja aproksymująca ma postać:

$$F(t) = 1.25 + 0.45t + 0.25 \cdot \frac{1}{2}(3t^2 - 1)$$

Wracając do zmiennej x mamy:

$$F(t) = 1.25 + 0.45(2x - 1) + 0.25 \cdot \frac{1}{2}(3(2x - 1)^2 - 1) = 1.5x^2 - 0.6x + 1.05$$



Rys. 2: Funkcja aproksymująca i aproksymowana

Wykres zaznaczony kolorem czerwonym to funkcja aproksymowana f(x) $= x^3 + 1$, a kolorem niebieskim funkcja aproksymująca F(x) $=1.5x^2 - 0.6x + 1.05$

Wniosek: Po zwiększeniu stopnia wielomianu i użyciu wielomianów Lagrange'a otrzymaliśmy znacznie lepsze przybliżenie. Można także zaobserwować, że poza przedziałem [0,1] przybliżenie nie jest już tak dokładne.

3 Rozwiązania - zadania domowe

1. Procedura realizująca metodę aproksymacji punktowej za pomocą wielominaów drugiego stopnia:

   (a) Wczytaj dane o znanych punktach x_i i wartościach funkcji aproksymowanej $f(x_i)$

   (b) Rozwiąż następujące równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} 1 & \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^2 & \sum_{i=0}^{n} x_i^3 & \sum_{i=0}^{n} x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i f(x_i) \\ \sum_{i=0}^{n} x_i 2 f(x_i) \end{bmatrix}$$

   (c) Rozwiązaniem jest funkcja: F(x) $=c_2x^2 - c_1x + c_0$

2. Dla danego zbioru wielomianów nasza funkcja będzie ich kombinacją liniową:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i(x), c_i \in \mathbb{R}$$

Problem znowu sprowadza się do znalezienia współczynników ci poprzez rozwiązanie równania macierzowego postaci:

$$A_{m\times m} \cdot C_{m\times 1} = F_{m\times 1}$$

Gdzie:

$$A_{i,j} = \sum_{q=0}^{n} \phi_i(x_q)\phi_j(x_q)$$
$$C_i = c_i$$
$$F_i = \sum_{q=0}^{n} \phi_i(x_q)y_q$$

y_q- wartość aproksymowanej funkcji w i-tym punkcie. Macierz A można sprowadzić do macierzy diagonalnej poprzez zastosowanie wielomianów ortogonalnych na zbiorze punktów znanych do aproksymacji. Przykładem takich wielomianów są wielomiany Grama. Są one zdefiniowane następująco:

$$F_{k,n} = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} \binom{k+s}{s} \frac{x^{[s]}}{n^{[s]}}$$

gdzie:

$$r^{[s]} = r(r-1)...(r-s+1))$$

Te wielomiany do stopnia trzeciego mają postać:

$$P_{0,n} = 1,$$
$$P_{1,n} = 1 - 2\tfrac{t}{n},$$
$$P_{2,n} = 1 - 6\tfrac{t}{n} + 6\tfrac{t(t-1)}{n(n-1)}$$
$$P_{3,n} = 1 - 12\tfrac{t}{n} + 30\tfrac{t(t-1)}{n(n-1)} - 2 - \tfrac{t(t-1)(t-2)}{n(n-1)(n-2)}$$

Są one ortogonalne w punktach 0,1,2,3,... Aby zmienić ortogonalność na podane równoodległe punkty stosujemy podstawienie:

$$q = \tfrac{x-x_0}{h}$$

Dla naszego problemu (n =4) otrzymujemy wielomiany:

$$P_{0,4}(x) = 1,$$
$$P_{1,4}(x) = -x$$
$$P_{2,4} = 2x^2 - 1$$
$$P_{3,4} = -\tfrac{20}{3}x^3 + \tfrac{17}{3}x$$

W związku z tym że macierz jet diagonalna to tak jak w zadaniu 2 można wyprowadzić wzory na poszczególne współczynniki:

$$c_i = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} y_i P_{k,n}(t_i)}{\sum\limits_{i=0}^{n} P_{k,n}^2(t_i)}$$

Po obliczeniach otrzymujemy:

$$c_0 = 0.5$$
$$\mathrm{c}_1 = 0$$
$$\mathrm{c}_2 = -0.5$$
$$\mathrm{c}_3 = 0$$

Po podstawieniu daje nam to:

$$\text{F(x)} = 0.5 \cdot 1 - 0.5(2x^2 - 1) = -x^2 + 1$$

Wniosek: Uzyskana funkcja jest dokładnie zadaną funkcją - ma to sens ponieważ aproksymujemy wielomian drugiego stopnia wielomianami stopnia trzeciego i minimalizujemy w pewnym sensie odległość między nimi.

4 Bibliografia

1. Katarzyna Rycerz: Materiały wykładowe z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
2. https://www.desmos.com/calculator?lang=pl
3. https://www.wolframalpha.com/
4. https://pl.wikipedia.org/wiki/Aproksymacja
5. https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Legendre