Laboratorium 3
Interpolacja

Krzysztof Solecki

18 Marca 2023

1 Treści zadań

1.1 Zadania

1. Dane są trzy węzły interpolacji (-2.9,1), (0,1.5), (2.3,3.9), proszę obliczyć wielomian interpolacyjny 2-go stopnia, wykorzystując:

   (a) jednomiany

   (b) wielomiany Lagrange'a

   (c) wielomiany wg wzoru Newton'a

Pokazać że trzy reprezentacje dają ten sam wielomian

2. Wyrazić następujący wielomian metodą Hornera: $p(t) = 3t^3 - 7t^2 + 5t - 4$

3. Ile mnożeń trzeba wykonać do ewaluacji wielomianu p(t) stopnia n-1 w danym punkcie t jeżeli wybieramy jako reprezentacje:

   (a) jednomiany

   (b) wielomiany Lagrange'a

   (c) wielomiany Newton'a

1.2 Zadania domowe

1.

   (a) Obliczyć wielomian interpolacyjny dla danych (0.5,5.5), (1,14.5), (1.5,32.5), (2,62.5) przy pomocy jednomianów

   (b) obliczyć wielomian interpolacyjny Lagrange'a dla tych samych danych i pokazać, że wielomian będzie ten sam co w (a)

   (c) obliczyć wielomian interpolacyjny Newtona dla tych samych danych korzystając z metody używającej trójkąta różnic i metody różnic skończonych i pokazać, że każda metoda daje ten sam wynik

2. Dowieść, że wzór używający różnic skończonych yi= f [x1, x2, ..., xj] rzeczywiście daje współczynnik j-tej funkcji bazowej w interpolującym wielomianie Newtona.

3. Wykonać interpolację funkcji f(x) = |sin(x)| w przedziale [-4,4] przy użyciu wielomianów Lagrange'a 2-go, 5-go oraz 10-go stopnia, dla równoodległych węzłów interpolacji. Narysować wykres na papierze w kratkę oraz go zinterpretować

2 Rozwiązania - zadania laboratoryjne

1. (a) Jednomiany:
Za pomocą podanych węzłów interpolacji możemy skonstruować wielomin $W(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. W celu znalezienia współczynników a_0, a_1, a_2 musimy obliczyć układ równań:

$$\begin{cases} a_0 - 2.9a_1 + (-2.9)^2a_2 = 1 \\ a_0 + 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 = 1.5 \\ a_0 + 2.3a_1 + (2.3)^2a_2 = 3.9 \end{cases} . \tag{1}$$

Rozwiązaniami tego układu równań są: $a_0 = 1.5, a_1 = 0.6582, a_2 = 0.167512$. Zatem szukany wielomian to: $W(x) = 0.167512x^2 + 0.6582x + 1.5$

(b) Wielomiany Lagrange'a:

$$W(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 =$$
$$\frac{(x-0)(x-2.3)}{(-2.9-0)(-2.9-2.3)}1 + \frac{(x+2.9)(x-2.3)}{(0-2.9)(0-2.3)}1.5 + \frac{(x+2.9)(x-0)}{(2.3+2.9)(2.3-0)}3.9 = 0.167512x^2 + 0.6582x + 1.5$$

(c) Wielomiany ze wzoru Newton'a:

$$W(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$f[x_0] = 1, f[x_1] = 1.5, f[x_2] = 3.9,$$
$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{1.5-1}{0+2.9} = 0.17241$$
$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{3.9-1.5}{2.3-0} = 1.04378$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0} = 0.16757$$

Otrzymujemy wielomian postaci:

$$W(x) = 1 + 0.17241(x - 2.9) + 0.16757(x + 2.9)(x - 0) = 0.167512x^2 + 0.6582x + 1.5$$

Wniosek: Dla wszystkich trzech metod otrzymaliśmy ten sam wielomian.

2. Po przekszałceniu wzoru otrzymujemy:

$$p(t) = 3t^3 - 7t^2 + 5t - 4 = t(3t^2 + 7t + 5) - 4 = t(t(3t + 7) + 5) - 4$$

3.

(a) Za pomocą schematu Hornera dostajemy n-1 mnożeń.

(b) Jeżeli wybieramy reprezentację jako wielomian Lagrange'a otrzymujemy n^2 mnożeń:
Dla n wyrazów musimy wykonać n-1 mnożeń, a następnie każdy wyraz dodatkowo mnożymy przez rzędną. Daje nam to $n(n-1) + n = n^2$ mnożeń.

(c) Jeżeli wybieramy reprezentację jako wielomian Newton'a, wówczas chąc obliczyć p_k potrzebujemy k mnożeń, gdzie $k \in [0,n-1]$, więc ilość mnożeń to: $\sum_{k=1}^{n-1} k = n^2$

Wniosek: Najmniejszą ilość mnożeń uzyskamy korzystając ze schematu Hornera.

3 Rozwiązania - zadania domowe

1. (a) Jednomiany. Obliczamy następujący układ równań:

$$\begin{cases} a_0 + 0.5a_1 + (0.5)^2 a_2 + (0.5)^3 a_3 = 5.5 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 14.5 \\ a_0 + 1.5a_1 + (1.5)^2 a_2 + (1.5)^3 a_3 = 32.5 \\ a_0 + 2a_1 + (2)^2 a_2 + (2)^3 a_3 = 62.5 \end{cases} . \tag{2}$$

Otrzymujemy następujące rozwiązania tego układu: $a_0 = 2.5, a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 4$. Zatem szukany wielomian to: $W(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$

(b) Wielomian Lagrange'a. Podstawiamy do wzoru:

$$W(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3 = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$$

(c) Trójkąt ilorazów róznicowych:

x$_i$	f[x$_i$]	f[x$_i, x_{i+1}$]	f[x$_{i,x_{i+2}}$]	f[x$_i, x_{i+3}$]
0,5	5,5			
		18		
1	14,5		18	
		36		4
1,5	32,5		24	
		60		
2	62,5			

Table 1: Trójkąt ilorazów różnicowych

Postać wielomianu: $W(x) = 5.5 + (x-0.5)18 + (x-0.5)(x-1)18 + (x-0.5)(x-1)(x-1.5)4 =$
$= 4x^3 + 6x^2 + 2x + 2.5$

Wniosek: Uzyskane wielomiany są identyczne.

2.

Rozpatrzmy wielomian $w_n(x)$ w postaci wzoru Newton'a:
$w_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$ Mając różnicę opartą na k węzłach (od 0 do k):

$$f[x_0, x_1, ..., x_k] = \frac{f[x_1,x_2,..,x_k]-f[x_0,x_1,..,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

Chcemy pokazać, że $a_j = f(x_0, .., x_j)$ Oznaczmy przez $w_{i,j}(x)$ wielomian interpolujący funkcję dla węzłów od i do j. Pokażemy, że:

$$w_{i,j} = \frac{(x-x_i)w_{i+1,j}(x)-(x-x_j)w_{i,j-1}(x)}{x_j-x_i}$$

W tym celu musimy pokazać, że funkcja przyjmuje wartości $f(x_i)...f(x_j)$ w węzłach od i do j. Oznaczmy więc prawą stronę powyższego równania jako v(x).
Jeżeli x $= x_i$, to:

$$v(x_i) = \frac{-(x_i-x_j)w_{i,j-1}(x_i)}{x_j-x_i} = w_{i,j-1}(x_i) = f[x_i]$$

Stąd, jeżeli x $= x_j$:

$$v(x_j) = w_{i+1,j}(x_j) = f[x_j]$$

Zatem rekurencyjna zależność $w_{i,j}$ jest spełniona. Załóżmy indukcyjnie, że teza jest prawdziwa ze względu na stopień wielomianu, czyli:

$$a_j = f(x_0, .., x_j)$$

Jeżeli stopień wielomianu n=0 to $a_0 = f(x_0)$. Zauważmy, że:

$$w_{0,n} = w_{0,n-1} + a_0(x_0 \cdot x_1 \cdot ... \cdot x_{n-1}), \text{ gdzie } a^n \text{ jest współczynnikiem przy przy } x^n.$$

Wcześniej pokazaliśmy, że:

$$w_{0,n} = \frac{(x-x_0)w_{1,n}(x)-(x-x_n)w_{0,n-1}(x)}{x_n-x_0}$$

Z założenia indykcyjnego wiemy, że współczynniki przy $x^n - 1$ w wielomianie $w_{1,n}iw_{0,n-1}$ są oparte o ilorazy różnicowe $f(x_1, ..., x_n)if(x_0, ..., x_{n-1})$, więc:

$$a_n = \frac{f(x_1,...,x_n)-f(x_0,...,x_{n-1}}{x_n-x_0} = f(x_0, ..., x_n)$$

Co należało udowodnić.

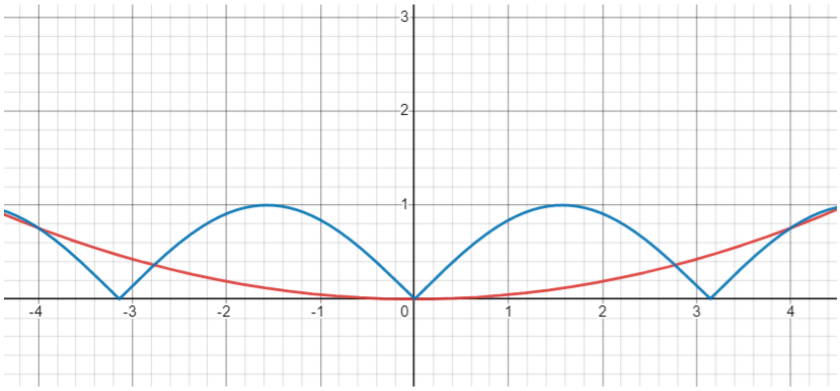
Wniosek: Pokazaliśmy, że wzór używający różnic skończonych yi= f [x1, x2, ..., xj] rzeczywiście daje współczynnik j-tej funkcji bazowej w interpolującym wielomianie Newtona.

3. Interpolacja funkcji |sinx|:

(a) Wielomian stopnia drugiego: bierzemy węzły $x_0 = -4, x_1 = 0, x_2 = 4$

$$W_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

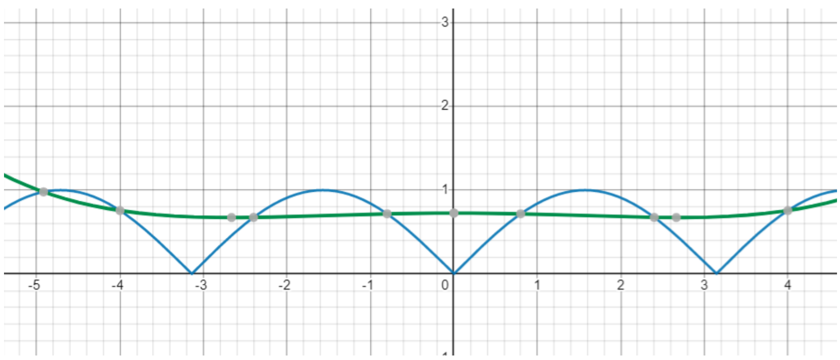
Wynikiem po uproszczeniu jest wielomian: $W_2(x) = -\frac{1}{16}x^2 sin4 \approx 0.0473x^2$



Rys. 1: Interpolacja dla dwóch punktów

(b) Wielomian stopnia piątego: bierzemy węzły $x_0 = -4, x_1 = -2.4, x_2 = -0.8, x_3 = 0.8, x_4 = 2.4, x_5 = 4$ Po uproszczeniach wielomianu Lagrange'a za pomocą narzędzi komputerowych (programu WolframAlpha) otrzymujemy wielomian:

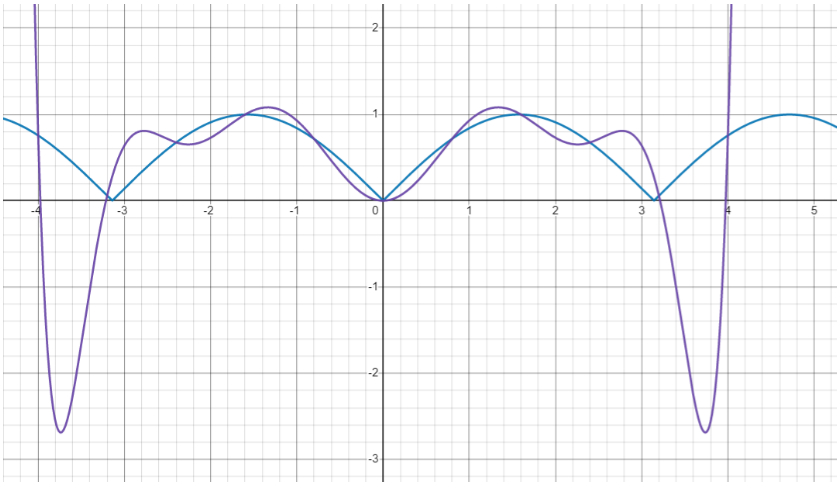
$$W_5 x) \approx 0.00104984x^4 - 0.0149012x^2 + 0.726463$$



Rys. 2: Interpolacja dla pięciu punktów

(c) Wielomian stopnia dziesiątego: bierzemy węzły $x_0 = -4, x_1 = -3.2, x_2 = -2.4, x_3 = -1.6, x_4 = -0.8, x_5 = 0, x_6 = 0.8, x_7 = 1.6, x_8 = 2.4, x_9 = 3.2, x_10 = 4$ Po uproszczeniach wielomianu Lagrange'a za pomocą narzędzi komputerowych (programu WolframAlpha) otrzymujemy wielomian:

$$W_10x) \approx 0.000314469x^10 - 0.0112205x^8 + 0.139228x^6 - 0.736444x^4 + 1.53805^2$$



Rys. 3: Interpolacja dla dziesięciu punktów

Wnioski: Wielomian 2 stopnia dosyć słabo przybliża kształt zadanej funkcji. W punktach interpolacji znalazło się 0, więc funkcja interpolująca posiada miejsce zerowe. Wielomian 5 stopnia przybliża kształt trochę lepiej, chociaż wciąż są znaczne rozbieżności (w punktach interpolacji nie ma tym razem 0, stąd funkcja interpolująca nie posiada miejsc zerowych). Wielomian 10 stopnia dobrze przybliża kształt funkcji w przedziale $[-\pi, \pi]$. Poza tym przedziałem jakość interpolacji jest bardzo zła, czego powodem jest efekt Rungego. Aby mu przeciwdziałać, należałoby zmienić rozmieszczenie węzłów interpolacji.

4 Bibliografia

1. Katarzyna Rycerz: Materiały wykładowe z przedmiotu Metody Obliczeniowe w Nauce i Technice
2. https://www.desmos.com/calculator?lang=pl
3. https://www.wolframalpha.com/
4. https://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=MN09