# 2. Systemy liczbowe

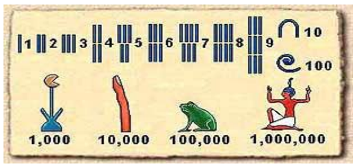
**2.1. <u>System liczbowy</u>** – zbiór reguł jednolitego zapisu , nazewnictwa i działań na liczbach. Do zapisywania liczb zawsze używa się pewnego skończonego zbioru znaków, zwanych cyframi. Cyfry można zestawiać ze sobą na różne sposoby (według określonych przez dany system reguł) otrzymując nieskończoną liczbę kombinacji.
Systemy liczbowe dzielimy najogólniej na:

- **addytywne –** systemy w których wartość liczby jest sumą wartości jej znaków cyfrowych.
- **pozycyjne –** systemy, w których wartość liczby jest zależna od położenia (pozycji) cyfry w liczbie.

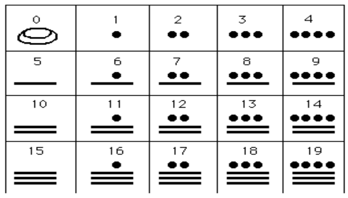
## 2.2. Przykłady najstarszych systemów liczbowych:

- **System karbowy –** najstarszy system liczbowy, addytywny, powstały około 30.000 lat p.n.e. Polegał on na żłobieniu w kościach karbów, których ilość oznaczała określoną liczbę.

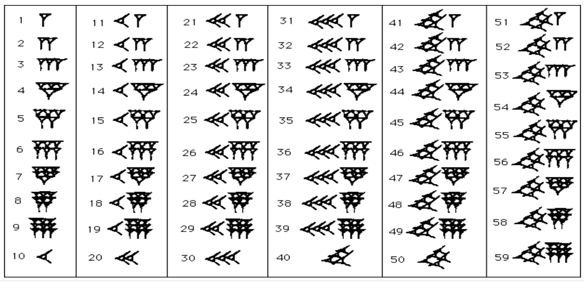
- **System egipski –** przykład systemu addytywnego, w którym do oznaczania kolejnych potęg liczby 10 używano hieroglifów.




- **System Majów -** jest systemem pozycyjnym dwudziestkowy. Majowie używali tylko 3 symboli, w tym symbol oznaczający zero! Cyfry 0-19 są zbudowane w systemie addytywnym. System Majów nie ma żadnego ograniczenia co do wielkości zapisywanych liczb.




- **System babiloński** - to 60 - system pozycyjny. Cyfry 1-59 systemu babilońskiego zbudowane są ze znaku jednostek i dziesiątek w systemie addytywnym. Kłopotliwe było oznaczanie zera.



- **System grecki** – system addytywny alfabetyczny, ponieważ liczebniki greckie oznaczane były kolejnymi literami alfabetu. Ten system pozwala zapisywać liczby od 1 do 999. Z większymi wartościami Grecy poradzili sobie, stosując cyfry od 1 do 9 z dodatkowo zapisanymi specjalnymi znakami.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | α | alpha | 10 | ι | iota | 100 | ρ | rho |
| 2 | β | beta | 20 | κ | kappa | 200 | σ | sigma |
| 3 | γ | gamma | 30 | λ | lambda | 300 | τ | tau |
| 4 | δ | delta | 40 | μ | mu | 400 | υ | upsilon |
| 5 | ϵ | epsilon | 50 | ν | nu | 500 | ϕ | phi |
| 6 | ϛ | vau* | 60 | ξ | xi | 600 | χ | chi |
| 7 | ζ | zeta | 70 | o | omicron | 700 | ψ | psi |
| 8 | η | eta | 80 | π | pi | 800 | ω | omega |
| 9 | θ | theta | 90 | ϙ | koppa* | 900 | ϡ | sampi |

- **System rzymski** – najpopularniejszy, stosowany dziś system addytywny. System rzymski wywodzi się bezpośrednio z etruskiego sposobu zapisu liczb. Z reguł zmieniono m.in. tę, że jeżeli za cyfrą większą stoi mniejsza, to od większej należy odjąć mniejszą.

| cyfra rzymska | wartość |
|---|---|
| I | 1 |
| V | 5 |
| X | 10 |
| L | 50 |
| C | 100 (od łacińskiego *centum*) |
| D | 500 |
| M | 1000 (od łacińskiego *milum*) |

- **System arabski –** to system dziesiętny, który został zapoczątkowany w Indiach w V w. n.e., a rozpowszechnił się w krajach arabskich dzięki matematykowi al-Chwarizmi (VIIIw). Do rozwoju i popularyzacji systemu dziesiętnego w Europie przyczynił się włoski matematyk i podróżnik Leonardo Fibonacci (XI-XIIw).

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |
| ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ٠ |

## 2.3. Konwersja liczb z systemu (p) na (10)

Pozycyjnym systemem liczbowym nazywamy parę **(p, $Z_p$)**, gdzie

**p** - jest podstawą systemu

**$Z_p$** - jest skończonym zbiorem znaków {0,1,2,...p-1} , zwanych cyframi

W systemie pozycyjnym liczbę przedstawia się jako ciąg cyfr z indeksem dolnym (p) oznaczającym podstawę systemu. Wartość liczby zależy od cyfr w danym ciągu i miejsc, na których się one w ciągu znajdują . Cyfry ustawiamy na kolejnych pozycjach numerując je od **prawej strony kolejnymi liczbami całkowitymi w porządku rosnącym, tak aby pierwsza pozycja na lewo od przecinka miała numer 0.**

Wartość dziesiętna liczby

$$C_{n-1}C_{n-2}...C_2C_1C_0\, ,\, C_{-1}C_{-2}C_{-3}..._{(p)}$$

zapisanej w systemie pozycyjnym o podstawie **p**, wynosi

$$W = C_{n-1}\, p^{n-1} + C_{n-2}\, p^{n-2} + ... + C_2\, p^2 + C_1\, p^1 + C_0\, p^0 + C_{-1}\, p^{-1} + C_{-2}\, p^{-2} + C_{-3}\, p^{-3} + ...$$

**Np.**

$$1614_{(5)} = 1\cdot5^3+6\cdot5^2+1\cdot5^1+4\cdot5^0 = 1\cdot125+6\cdot25+1\cdot5+4 = 125+150+5+4 = 284_{(10)}$$

$$0{,}72_{(8)} = 7\cdot8^{-1}+2\cdot8^{-2} = 7\cdot0{,}125+2\cdot0{,}015625 = 0{,}875+ 0{,}03125 = 0{,}90625_{(10)}$$

$$10100{,}01_{(2)} = 1\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0+0\cdot2^{-1}+1\cdot2^{-2} = 16+4+0{,}25=20{,}25_{(10)}$$

## 2.4. Konwersja liczb z systemu (10) na system (p)

- **Liczby naturalne**

Dla przedstawienia liczby naturalnej n na system pozycyjny przy podstawie p wykonujemy następujące czynności:

1. Obliczamy iloraz i resztę liczby **n** przez podstawę **p**, otrzymaną resztę oznaczamy symbolem **$r_1$**
2. Obliczamy iloraz i resztę otrzymanego w punkcie 1 ilorazu przez podstawę **p**, otrzymaną resztę ozn. symbolem **$r_2$**
3. Wykonujemy krok 2 tak długo, aż otrzymamy iloraz równy 0 i resztę **$r_k$**
4. Otrzymane reszty zapisujemy obok siebie w postaci ciągu symboli w kolejności odwrotnej do ich wyliczania:

$$n = (r_k r_{k-1}...\, r_2 r_1)_{(p)}$$

- **Ułamki dziesiętne**

Dla przedstawienia ułamka właściwego **u** na system pozycyjny przy podstawie **p** wykonujemy następujące czynności:

1. Obliczamy iloczyn liczby **u** przez **p** a następnie oddzielamy część całkowitą wyniku od części ułamkowej. Część całkowitą oznaczamy przez $c_1$
2. Obliczamy iloczyn część ułamkowej z poprzedniego punktu przez podstawę **p** a następnie oddzielamy część całkowitą wyniku od części ułamkowej . Część całkowitą oznaczamy przez $c_2$
3. Wykonujemy krok 2 tak długo, aż otrzymamy część ułamkową równą 0 i całkowitą $c_k$ .
4. Otrzymane liczby **$c_1$, $c_2$, ... $c_k$** zapisujemy obok siebie w postaci ciągu symboli po przecinku w kolejności ich wyliczania:

$$u = (0{,}c_1c_2...c_k)_{(p)}$$

- **Liczby rzeczywiste dodatnie konwertujemy osobno po rozbiciu na część całkowitą i ułamkową**

**Np.** $156 = 2130_{(4)}$ $0{,}0703125 = 0{,}0102_{(4)}$ więc $156{,}0703125 = 2130{,}0102_{(4)}$

÷4

| | |
|---|---|
| 156 | = 39 r 0 |
| 39 | = 9 r 3 |
| 9 | = 2 r 1 |
| 2 | = **0** r 2 |

·4

| | |
|---|---|
| 0,0703125 | = 0,28125 |
| 0,28125 | = 1,125 |
| 0,125 | = 0,5 |
| 0,5 | = 2,**0** |

## 2.5. Systemy pozycyjne o podstawie będącej potęgą 2

### 2.5.1. System binarny:

System binarny jest najprostszym systemem pozycyjnym. Podstawa **p** = 2.
Do zapisu liczb potrzebne są więc tylko dwie cyfry: **0** i **1**. Konwersje z (2) na (10) i odwrotnie odbywają się wg schematu opisanego w punktach 1.3 i 1.4. System jest powszechnie używany w informatyce.

- **Kolejne potęgi 2**

| | | |
|---|---|---|
| $2^0 = 1$ | $2^4 = 16$ | $2^8 = 256$ |
| $2^1 = 2$ | $2^5 = 32$ | $2^9 = 512$ |
| $2^2 = 4$ | $2^6 = 64$ | $2^{10} = 1024$ |
| $2^3 = 8$ | $2^7 = 128$ | |

- **Arytmetyka w systemie (2):**

Działania w systemie (2) są wykonywane identycznie jak w systemie (10). Wystarczy pamiętać, że **$1_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$**

**Np.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | | 1 | 1 | | |
| | | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| + | | | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | **1** | **0** | **0** | **1** | **1** | **0** | **1** |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | | 2 | 2 | |
| | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 2 |
| | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| - | | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | | | | • | | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| | | | | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| | | | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | | |
| + | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | | | | |
| **1** | **0** | **0** | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | **0** | **1** | **0** |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | **0** | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | : | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| - | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| | - | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | | | | | | | | |
| | | | - | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| | | | | | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| | | | | - | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | |
| | | | | | = | = | = | = | = | 0 | | | | | | |

### 2.5.2. System heksadecymalny:

System heksadecymalny jest systemem pozycyjnym o podstawie **p**=16.
Do zapisu liczb potrzebne jest szesnaście cyfr: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F**. System szesnastkowy sprawdza się szczególnie przy zapisie dużych liczb takich jak adresy pamięci, zakresy parametrów itp.

**Np.**

$$\mathbf{7DC9}_{(16)} = 7 \cdot 16^3 + 13 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 9 \cdot 16^0 = 28672+3328+192+9 = \mathbf{32201_{(10)}}$$

### 2.5.3. Szybka konwersja między systemami

Szybką konwersję między systemami o podstawach 2, 4, 8, 16 umożliwia następująca tabela:

| (16) | (8) | (4) | (2) | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 3 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 4 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 5 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 6 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 8 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 9 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | A |
| 1 | 0 | 1 | 1 | B |
| 1 | 1 | 0 | 0 | C |
| 1 | 1 | 0 | 1 | D |
| 1 | 1 | 1 | 0 | E |
| 1 | 1 | 1 | 1 | F |

Np.

Rozważmy liczbę **$1111011_{(2)}$**

$0111\ 1011_{(2)} = 7B_{(16)}$

$001\ 111\ 011_{(2)} = 173_{(8)}$

$01\ 11\ 10\ 11_{(2)} = 1323_{(4)}$

**Zadania.**

**z.2.1.** Jaką największą liczbę da się zapisać w systemie rzymskim (bez dodatkowych znaków).

**z.2.2.** Znajdź wartości liczb:

- **a)** MMDCCCXCIX
- **b)** $1010001101{,}001_{(2)}$
- **c)** $A2B{,}1_{(12)}$
- **d)** $A2B{,}1_{(16)}$

**z.2.3.** Zapisz liczbę 1854,5 w systemie:

- **a)** (2)
- **b)** (5)
- **c)** (12)
- **d)** (16)

**z.2.4.** Przedstaw w systemie (2) liczby:

- **a)** 255,1875
- **b)** 1976,525
- **c)** $32{,}1_{(5)}$
- **d)** $777{,}7_{(8)}$

**z.2.5.** Dane są liczby: a=110110, b=11101, c=1010111110. Wykonaj działania:

- **a)** c+b
- **b)** a-b
- **c)** a·b
- **d)** c:a

**z.2.6.** Uzupełnij tabelę:

| (2) | (4) | (8) | (16) | (10) |
|---|---|---|---|---|
| 1010011100,001 | | | | |
| | 3210,3 | | | |
| | | 263,5 | | |
| | | | FA,B | |
| | | | | 2018,1 |

**z.2.7.** Zapisz liczbę $A0B{,}4_{(16)}$ w systemie:

- **a)** (3)
- **b)** (12)
- **c)** alfabetycznym Greków
- **d)** Majów:)

**z.2.8.** Znajdź wartość (AND , OR oznaczają *operacje boolowskie*):

- **a)** $217_{(8)}$ AND $A6_{(16)}$
- **b)** $217_{(8)}$ OR $A6_{(16)}$