Automat Aho-Corasik

— omówienie —

Piotr Mikołajczyk

1 Wprowadzenie

Niech $\mathcal{W} = \{w_1, ..., w_k\}$ będzie zbiorem wzorców (niepustych słów nad alfabetem Σ). Otrzymawszy słowo $T \in \Sigma^n$ chcemy wyznaczyć wszystkie indeksy z $[n]$, na których w T zaczyna się pewien wzorzec z $\mathcal{W}$. Naturalnym rozwiązaniem jest k-krotne użycie jednego z wydajnych (liniowych) algorytmów do szukania pojedynczego wzorca. Podejście takie oczywiście jest poprawne, niestety skutkuje złożonością czasową $\Theta(kn)$. Okazuje się, że na podstawie $\mathcal{W}$ jesteśmy w stanie skonstruować w czasie $\Theta(\sum_{i\in[k]} |w_i|)$ odpowiednią strukturę, która będzie potrafiła znaleźć naraz wszystkie wystąpienia wzorców oglądając T wyłącznie raz. Przed nami: automat Aho-Corasick.

2 Idea

Pomysł polega na zbudowaniu odpowiedniego deterministycznego automatu skończonego $\mathcal{A}$. Czytając T będziemy podróżować zgodnie z krawędziami $\mathcal{A}$. W każdym stanie s będziemy mieć zapisaną listę tych wzorców z $\mathcal{W}$, które *kończą się* w s – tzn. aby znaleźć się w stanie s musieliśmy przejść skądś krawędziami etykietowanymi kolejnymi literami pewnego wzorca. Spacerowanie po $\mathcal{A}$ wzdłuż T możemy interpretować jako poruszanie się *jednocześnie* po wszystkich słowach z $\mathcal{W}$.

Zaczniemy konstrukcję od utworzenia *drzewa trie* na podstawie $\mathcal{W}$. Następnie dodamy do każdego stanu informacje o wzorcach które się w nim kończą i podniesiemy funkcję przejścia z częściowej do totalnej. Na koniec uprościmy automat. Po tych zabiegach otrzymamy strukturę, dzięki której wyszukiwanie wielu wzorców okaże się bardzo proste:

```
1  def find_occurrences(self, text, n):
2    state = self._root
3    for i in range(1, n + 1):
4      state = state.nxt(text[i])
5    for keyword_len in state.output():
6      start_pos = i - keyword_len + 1
7      yield text[start_pos:i + 1], start_pos
```

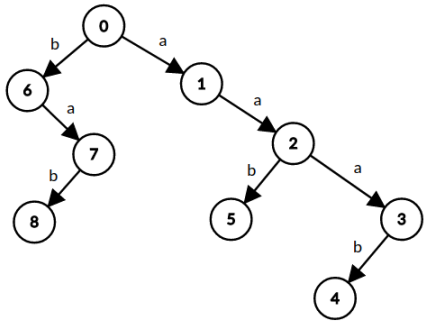
Warto zwrócić uwagę na fakt, że jeśli dany zbiór wzorców chcemy wyszukać w wielu różnych tekstach $T_1, ..., T_t$, to wystarczy tylko raz skonstruować automat Aho-Corasick i użyć go niezależnie na każdym z T_j.

3 Konstrukcja

Uwaga: sednem naszych rozważań jest opis sposobu, w jaki można przechodzić pomiędzy stanami automatu. Wygodnie nam będzie utożsamić ze sobą różne podejścia realizacji – równoważne dla nas będą pojęcia zbioru etykietowanych krawędzi (skierowanych) pomiędzy dwoma stanami, funkcji mapujących pary (stan, symbol) w stan oraz lokalne w stanach tablice routingu.

3.1 Drzewo trie

Mając zbiór słów $\mathcal{W}$ nad alfabetem Σ możemy w prosty sposób zbudować tzw. *drzewo trie*, ozn. $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$. Jest to skierowane, ukorzenione drzewo, którego krawędzie etykietowane są symbolami z Σ. Każde słowo $w \in \mathcal{W}$ ma odpowiadającą mu ścieżkę z korzenia, etykietowaną kolejnymi literami w. Jeśli $w \in \mathcal{W}$ nie jest prefiksem żadnego innego słowa z $\mathcal{W}$, to jego ścieżka kończy się w liściu. Inaczej ujmując, istnieje bijekcja pomiędzy ścieżkami w $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$ a wszystkimi (różnymi) prefiksami słów z $\mathcal{W}$. Krawędź etykietowaną symbolem a pomiędzy s_1 a s_2 możemy kodować jako trójkę (s_1, a, s_2).



Rysunek 1: $\mathcal{T}_{\{aaab,aab,bab,ba\}}$

3.2 Plan

Zacznijmy temat konstrukcji od zdefiniowania funkcji, które będą nam potrzebne. Niech $\mathcal{W}$ oznacza zbiór wzorców, $\mathcal{T}$ oznacza drzewo trie dla $\mathcal{W}$ (skrót dla $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$), $\mathfrak{r}$ oznacza korzeń $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ oznacza zbiór wierzchołków $\mathcal{T}$ (czyli docelowo zbiór stanów $\mathcal{A}$).

- `goto` :: $\mathcal{S} \times \Sigma \mapsto \mathcal{S}$ – ta funkcja w zasadzie reprezentuje zbiór krawędzi $\mathcal{T}$; dodatkowo jednak, dla każdego symbolu w Σ, który nie etykietuje żadnej krawędzi wychodzącej z $\mathfrak{r}$, dodajemy pętlę w $\mathfrak{r}$; czyli:

$$\texttt{goto}(s_1, a) = \begin{cases} s_2 & \text{jeśli } (s_1, a, s_2) \in E[\mathcal{T}] \\ \mathfrak{r} & \text{jeśli } s_1 = \mathfrak{r} \ \wedge \forall_s \ (\mathfrak{r}, a, s) \notin E[\mathcal{T}] \\ \texttt{None} & \end{cases}$$

- `output` :: $\mathcal{S} \mapsto \wp(\mathcal{W})$ – jak zostało już wspomniane, chcemy w każdym stanie s przechowywać listę wzorców, których wystąpienie w T będzie poświadczone odwiedzeniem stanu s; w sporym zakresie możemy to obliczyć już przy konstrukcji $\mathcal{T}$ (np. wracając do rysunku 1, $\texttt{output}(1) = \varnothing$, $\texttt{output}(5) = \{aab\}$, $\texttt{output}(7) = \{ba\}$); będziemy musieli jeszcze jednak obsłużyć przypadki, gdy jeden wzorzec będzie sufiksem drugiego (np. $\texttt{output}(4) = \{aaab, aab\}$)

- `fail` :: $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ – ostatecznie $\mathcal{A}$ będzie skonstruowane na wierzchołkach $\mathcal{T}$ więc już teraz możemy spróbować zinterpretować obecność w stanie s po przeczytaniu j-tego symbolu T – otóż etykiety na ścieżce pomiędzy $\mathfrak{r}$ a s tworzą najdłuższy możliwy prefiks któregoś ze wzorców z $\mathcal{W}$, który da się dopasować w T kończąc na pozycji j; funkcja `goto` jest częściowa, a więc dla niektórych stanów i niektórych symboli nie mamy zdefiniowanego przejścia (na razie otrzymamy `None`); aby nie utknąć i zachować poprawność interpretacji, to $\texttt{fail}(s)$ musi wskazywać na taki stan s', żeby słowo powstałe ze ścieżki $\mathfrak{r} \rightsquigarrow s'$ było najdłuższym możliwym sufiksem słowa odpowiadającemu $\mathfrak{r} \rightsquigarrow s$; w dalszej części utożsamiać będziemy ścieżki ze słowami;

  Chodzenie krawędziami `fail` opiera się na identycznym pomyśle co rekurencyjne używanie tablic *Border* w algorytmie Morrisa-Pratta. Warto również zauważyć, że `fail` nie ma sensu definiować dla $\mathfrak{r}$.

- `next` :: $\mathcal{S} \times \Sigma \mapsto \mathcal{S}$ – trzy zdefiniowane funkcje powyżej zupełnie wystarczają, aby nasz docelowy automat robił to, czego pragniemy; jak jednak łatwo zauważyć, próba przeczytania jednego znaku z T może wymagać więcej niż jednego przejścia krawędzią korzystając z `goto` oraz `fail` – możemy musieć schodzić wzdłuż `fail` wielokrotnie; aby uniknąć tego, pod sam koniec utworzymy funkcję `next`, która skompresuje nam tego typu ścieżki i zastąpi `goto` oraz `fail`

3.3 Obliczanie `goto`, `output`, `fail`

Jak już wiemy *co* chcemy policzyć, to możemy przejść do tego *jak* to zrobić. Funkcję `goto` oraz część `output`, jak już zauważyliśmy, możemy obliczyć konstruując $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$:

```
1  def _construct_goto(self, keywords, alphabet):
2    for k, k_len in keywords:
3      self._enter(k, k_len)
4
5    for a in alphabet:
6      if self._root.goto(a) is None:
7        self._root.update_goto(a, self._root)
8
9  def _enter(self, keyword, keyword_len):
10   current_state = self._root
11   j = 1
12
13   while j < keyword_len and current_state.goto(keyword[j]) is not None:
14     current_state = current_state.goto(keyword[j])
15     j += 1
16
17   for a in keyword[j:keyword_len + 1]:
18     next_state = AhoCorasickAutomaton.Node()
19     current_state.update_goto(a, next_state)
20     current_state = next_state
21
22   current_state.append_outputs([(keyword, keyword_len)])
```

Funkcja `def _enter(...)` uzupełnia częściowo skonstruowane drzewo trie o ścieżkę dla podanego wzorca, w razie potrzeby tworząc nowe węzły. W pętli w wierszu 5. uzupełniamy definicję `goto` dla korzenia.

Funkcję `fail` powinniśmy obliczać dla coraz bardziej odległych od `r` węzłów – podobnie jak w algorytmie Morrisa-Pratta długości najdłuższych borderów obliczaliśmy na podstawie wartości dla krótszych słów:

```
1  def _construct_fail(self, alphabet):
2    q = Queue()
3    for s in (self._root.goto(a) for a in alphabet):
4      if s != self._root:
5        q.put(s)
6        s.update_fail(self._root)
7
8    while not q.empty():
9      current = q.get()
10     for a, child in ((a, current.goto(a)) for a in alphabet):
11       if child is not None:
12         q.put(child)
13
14         fallback = current.fail()
15         while fallback.goto(a) is None:
```

```
16            fallback = fallback.fail()
17
18          child_fallback = fallback.goto(a)
19          child.update_fail(child_fallback)
20          child.append_outputs(child_fallback.output())
```

Przechodzimy zatem po $\mathcal{T}$ za pomocą algorytmu BFS. Będąc w wierzchołku `current`, widząc krawędź etykietowaną przez `a` do wierzchołka `child`, chcemy obliczyć wartość `fail(child)`. Szukamy więc najdłuższego sufiksu słowa generowanego przez $\mathtt{r} \rightsquigarrow$ `child` obecnego w $\mathcal{T}$. Będzie to najdłuższy sufiks ścieżki $\mathtt{r} \rightsquigarrow$ `current`, który można przedłużyć o symbol `a`.

Znalazłszy odpowiedni wierzchołek – `child_fallback` – powiększamy zbiór `output(child)` o wartości z `output(child_fallback)` – z oczywistej indukcji wynika, że `output(child_fallback)` zawiera już wszystkie wzorce, które są sufiksami $\mathtt{r} \rightsquigarrow$ `child_fallback`.

3.4 Obliczanie `next`

Jeśli `goto` była określona dla $s \in \mathcal{S}$ oraz $a \in \Sigma$, to $\mathtt{next}(s, a) = \mathtt{goto}(s, a)$. W przeciwnym wypadku będąc w s i chcąc przejść symbolem a, powinniśmy schodzić krawędziami `fail` tak długo, aż znajdziemy się w s', dla którego $\mathtt{goto}(s', a) \neq$ `None`. Jest to podobny zabieg co poprawka Knutha do algorytmu Morrisa-Pratta.

```
1  def _construct_next(self, alphabet):
2    q = Queue()
3    for a in alphabet:
4      a_child = self._root.goto(a)
5      self._root.update_next(a, a_child)
6      if a_child != self._root:
7        q.put(a_child)
8    self._root.use_only_next()
9
10   while not q.empty():
11     current = q.get()
12     for a, child in ((a, current.goto(a)) for a in alphabet):
13       if child is not None:
14         q.put(child)
15         current.update_next(a, child)
16       else:
17         fallback = current.fail()
18         current.update_next(a, fallback.next(a))
19     current.use_only_next()
```

Instrukcje w wierszach 8. oraz 19. pozwalają zwolnić pamięć zapominając o wartościach funkcji `goto` i `fail`. Formalnie dopiero teraz, struktura $\mathcal{A}$ ze zbiorem stanów $\mathcal{S}$ oraz funkcją przejścia `next` jest deterministycznym automatem skończonym.

4 Analiza

4.1 Analiza poprawności

Z tego, co już zostało przedstawione, powinna wynikać poprawność zastosowanej metody. Aby jednak formalnie jej dowieść, wystarczy postawić trzy proste lematy:

Lemat. *Niech $s, t \in \mathcal{S}$ i niech u, v będą słowami generowanymi przez ścieżki $\mathtt{r} \rightsquigarrow s$ i $\mathtt{r} \rightsquigarrow t$. Wówczas $\mathtt{fail}(s) = t \iff v$ jest najdłuższym właściwym sufiksem u, który jest prefiksem pewnego $w_i \in \mathcal{W}$.*

Lemat. *Słowo k należy do $\mathtt{output}(s) \iff w \in \mathcal{W}$ oraz k jest sufiksem słowa generowanego przez $\mathtt{r} \rightsquigarrow s$.*

Lemat. *Po przeczytaniu j znaków z T znajdujemy się w stanie s $\iff$ słowo generowane przez $\mathtt{t} \rightsquigarrow s$ jest najdłuższym sufiksem $T[1..j]$, który jest prefiksem pewnego $w \in \mathcal{W}$.*

Ich uzasadnienia są prostymi dowodami rekurencyjnymi zapisanymi we fragmentach kodu powyżej.

4.2 Analiza złożoności

Konstrukcja całego automatu polega na sekwencyjnym wywołaniu procedur obliczających funkcje przejścia:

```
class AhoCorasickAutomaton:
  def __init__(self, keywords, alphabet):
    self._root = AhoCorasickAutomaton.Node()
    self._construct_goto(keywords, alphabet)
    self._construct_fail(alphabet)
    self._construct_next(alphabet)
```

Niech $m = \max_i |w_i|$. Bardzo łatwo zauważyć, że każdą z powyższych operacji wykonać można w czasie $\mathcal{O}(km)$ (dokładnie $\Theta(\sum_{i\in[k]} |w_i|)$) – za każdym razem przechodzimy po całym drzewie $\mathcal{T}$ odwiedzając każdy wierzchołek dokładnie raz oraz wykonując $\Theta(1)$ operacji w każdym z nich. Zakładamy również, że łączenie zbiorów `output` wykonuje się w czasie stałym (jak np. listy wiązane). Warto dodać, że moc Σ wlicza się w zapotrzebowanie (zarówno pamięciowe jak i czasowe) liniowo – rozmiar grafu jest z góry ograniczony przez $|\Sigma| \cdot km$ (z każdego wierzchołka może wychodzi $|\Sigma|$ krawędzi). Konstrukcja $\mathcal{A}$ oraz wyszukiwanie w T odbywają się w czasie liniowo proporcjonalnym do wielkości $\mathcal{T}$.

Pozostaje zastanowić się, ile czasu zajmie przeczytanie tekstu T ($|T| = n$) i wypisanie wszystkich wystąpień wzorców. Moc Σ traktujemy jak stałą.

Najpierw rozważmy sytuację, w której nie zgłaszamy żadnego wystąpienia wzorca (możemy np. tylko zaznaczyć pozycje T o których wiemy, że na nich coś się kończy):

- używając funkcji `goto` oraz `fail` wykonamy co najwyżej $2n$ przejść w $\mathcal{A}$ – po przeczytaniu dowolnego symbolu przejdziemy dokładnie raz według funkcji `goto` i być może wielokrotnie krawędziami `fail`; łatwo jednak zaobserwować, że każde przejście `fail` skraca odległość z obecnego wierzchołka do $\mathtt{t}$, a z $\mathtt{t}$ zawsze można wyjść używając `goto`; zatem nie możemy przejść krawędziami `fail` więcej razy niż przeszliśmy `goto`;

  można również spojrzeć na to w ten sposób, że przechodząc automatem $\mathcal{A}$ wzdłuż T, pamiętamy dwa wskaźniki w T – słowo pomiędzy nimi to właśnie to, które jest generowane przez ścieżkę z korzenia do obecnego wierzchołka; przejście `goto` przesuwa 'prawy' wskaźnik o 1 w prawo, przejście `fail` przesuwa 'lewy' wskaźnik o dodatnią liczbę pozycji w prawą, ale na tyle małą by nie przeskoczyć prawego;

- używając funkcji `next`, przy każdym przeczytanym symbolu z T wykonujemy zawsze jedno przejście – n ruchów

Problem może się pojawić, gdy będziemy chcieli wypisywać wszystkie wystąpienia wzorców. Pesymistycznym przykładem jest $\mathcal{W} = \{a, a^2, a^3, ..., a^k\}$ oraz $T = a^n$. Liczba wystąpień będzie $\Theta(kn)$. Jednakże, nie jest to wada zastosowanego algorytmu – każdy inny algorytm zgłaszający wszystkie wystąpienia wzorców musiałby wykonać co najmniej tyle samo pracy.

Zatem możemy określić złożoność czasową wyszukiwania wielu wzorców w tekście za pomocą automatu Aho-Corasick jako liniową w stosunku do sumy długości wszystkich wzorców oraz ilości ich wystąpień.

5 Zastosowanie do wzorców 2D

Okazuje się, że bardzo prosto można użyć automatu Aho-Corasick do wyszukiwania wzorców dwuwymiarowych. W skrócie:

1. niech T będzie kwadratową tablicą rozmiaru n^2, P - kwadratową tablicą rozmiaru m^2 o różnych kolumnach, $m < n$

2. niech $\mathcal{W}$ będzie zbiorem kolumn P
3. automatem Aho-Corasick szukamy $\mathcal{W}$ w każdej z kolumn T; jeśli fragment j-tej kolumny od indeksu i pokrywa się z k-tą kolumną P, to niech $T_P[i][j] = k$
4. algorytmem KMP szukamy w każdym wierszu T_P ciągu $(1, 2, ..., m)$

Całość działa w czasie liniowym od wielkości wejścia i rozmiaru zbioru z którego pochodzą elementy w T oraz P.