Algorytm 2/3-aproksymacyjny dla Max-ATSP i 5/2-aproksymacyjny dla najkrótszego nadsłowa

Krzysztof Potępa

Maj 2022

1 Wstęp

W problemie Max-ATSP (Max-ATSP-Path) mamy dany skierowany graf pełny z nieujemnymi wagami na krawędziach i chcemy znaleźć w nim cykl (ścieżkę) Hamiltona o jak największej sumarycznej wadze. Problem ten jest NP-trudny, ale aproksymowalny z dokładnością do multiplikatywnej stałej. Z punktu widzenia algorytmów tekstowych, problem Max-ATSP-Path znajduje zastosowanie w problemie najkrótszego nadsłowa:

Twierdzenie 1 ([2, 4])**.** Mając dany algorytm α-aproksymacyjny dla Max-ATSP-Path, możemy uzyskać algorytm $\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\alpha\right)$-aproksymacyjny dla najkrótszego nadsłowa.

Autorzy pracy [1] pokazują prosty algorytm 2/3-aproksymacyjny dla problemu Max-ATSP. Algorytm ten konstruuje ścieżkę o wadze równej co najmniej 2/3 wagi optymalnego cyklu komiwojażera. W połączeniu z powyższym twierdzeniem, daje to algorytm 5/2-aproksymacyjny dla problemu najkrótszego nadsłowa.

Niech $G = (V, E)$ będzie skierowanym grafem pełnym, z wagami na krawędziach $w(u, v) \geq 0$, dla każdego $(u, v) \in E$. Przez OPT oznaczać będziemy wagę optymalnego rozwiązania Max-ATSP w grafie G.

Pokrycie cyklowe grafu G to podzbiór krawędzi $C \subseteq E$, taki że każdy wierzchołek ma dokładnie jedną wychodzącą i jedną wchodzącą krawędź. Waga pokrycia cyklowego $w(C)$ to suma wag jego krawędzi. Pokrycie cyklowe o największej wadze można znaleźć w czasie wielomianowym przez redukcję do dwudzielnego skojarzenia o największej wadze.

Łatwo zauważyć, że waga najcięższego pokrycia cyklowego jest nie mniejsza niż OPT, ponieważ cykl Hamiltona to szczególny przypadek pokrycia cyklowego. Rozważmy następujący algorytm aproksymacyjny dla ATSP:

1. Znajdź najcięższe pokrycie cyklowe C grafu G.
2. Usuń z każdego cyklu pokrycia najlżejszą krawędź.
3. Połącz powstałe ścieżki w cykl/ścieżkę komiwojażera w dowolny sposób.

Jeśli najmniejszy cykl (ze względu na liczbę krawędzi) w pokryciu ma rozmiar k, to powyższa procedura daje cykl komiwojażera C o wadze co najmniej $\frac{k-1}{k} \cdot w(C) \geq \frac{k-1}{k} \cdot$ OPT. Dzieje się tak, ponieważ z każdego cyklu usuwamy najlżejszą krawędź, więc może ona stanowić co najwyżej $1/k$ wagi cyklu.

Niestety, w ogólności w pokryciu cyklowym mogą wystąpić cykle rozmiaru 2, więc powyższy algorytm daje jedynie 1/2-aproksymację dla Max-ATSP. Co więcej, znalezienie najcięższego pokrycia cyklowego bez 2-cykli jest NP-trudne [3].

Główną ideą algorytmu [1] jest obserwacja, że jeśli zabronimy 2-cykli, ale zrelaksujemy nieco wymagania czym jest pokrycie cyklowe, to możemy znaleźć takie "pseudo-pokrycie" w czasie wielomianowym. Później autorzy pokazują, że także da się je przekształcić w ATSP o wadze co najmniej $\frac{2}{3}$ OPT.

2 2/3-aproksymacja dla Max-ATSP

Zaczniemy od zdefiniowania wspomnianego wcześniej "pseudo-pokrycia" cyklowego:

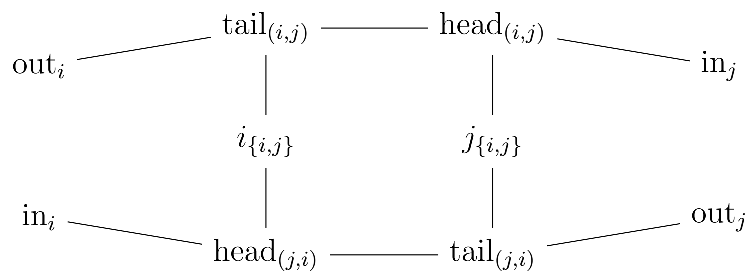
Definicja 1. Niech $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ będzie grafem otrzymanym z G przez zamianę każdej krawędzi $(i, j) \in E$ przez wierzchołek $v_{(i,j)}$ i dwie krawędzie $(i, v_{(i,j)})$ oraz $(v_{(i,j)}, j)$, obydwie z wagą $\frac{1}{2}w(i, j)$. *Pokrycie cyklowe bez 2-cykli, ale z półkrawędziami*, grafu G, to podzbiór krawędzi $\tilde{C} \subseteq \tilde{E}$ taki że:
(a) każdy wierzchołek w V ma dokładnie jedną wychodzącą i wchodzącą krawędź w $\tilde{C}$;
(b) dla każdej krawędzi $(i, j) \in E$, zbiór $\tilde{C}$ albo nie zawiera żadnej krawędzi ze zbioru $\{(i, v_{(i,j)}), (v_{(i,j)}, j), (j, v_{(j,i)}), (v_{(j,i)}, i)\}$, albo dokładnie jedną incydentną do i i jedną incydentną do j.

Intuicyjnie, sytuacja że do $\tilde{C}$ należą krawędzie $(i, v_{(i,j)})$ i $(v_{(i,j)}, j)$ odpowiada wybraniu skierowanej krawędzi (i, j), tak jak w zwykłym pokryciu cyklowym. Jeśli natomiast do $\tilde{C}$ należą $(i, v_{(i,j)})$ i $(j, v_{(j,i)})$ to możemy myśleć, że do pokrycia wzięliśmy krawędź, która ma dwa początki, i jej waga to średnia wag $w(i, j)$ i $w(j, i)$. Analogicznie, jeśli do $\tilde{C}$ należą $(v_{(i,j)}, j)$ i $(v_{(j,i)}, i)$ to możemy myśleć o krawędzi, która ma dwa końce. Warunek (a) zapewnia, że w każdym wierzchołku jedna krawędź ma początek i jedna koniec.

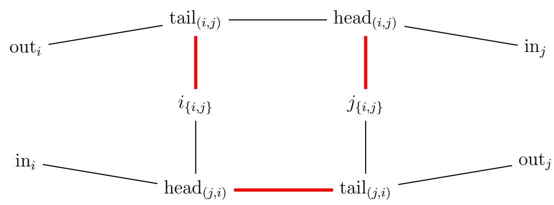
Jeśli graf ma co najmniej 3 wierzchołki, to każdy cykl komiwojażera odpowiada pewnemu pokryciu $\tilde{C}$, więc znów waga najcięższego pokrycia jest nie mniejsza niż OPT. Autorzy pracy pokazują, że najcięższe takie pokrycie można znaleźć w czasie wielomianowym, a następnie wykorzystują je by znaleźć trzy zbiory ścieżek o sumarycznej wadze równej $2w(\tilde{C})$. Aby otrzymać 2/3-aproksymację dla Max-ATSP, wystarczy wziąć zbiór ścieżek o największej wadze i połączyć jego ścieżki w dowolny sposób.

Lemat 1. Pokrycie cyklowe o największej wadze bez 2-cykli, ale z półkrawędziami, można znaleźć w czasie wielomianowym.

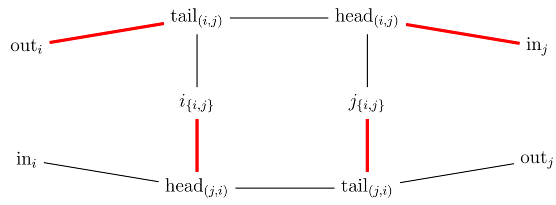
Dowód. Redukujemy problem do problemu najcięższego skojarzenia w grafie G' (niedwudzielnym). Dla każdego wierzchołka $i \in V$, tworzymy w G' wierzchołki in_i oraz out_i. Dla każdej pary krawędzi $(i, j), (j, i) \in E$, tworzymy następujący gadżet:



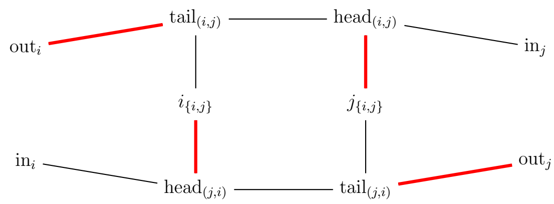
W tak skonstruowanym grafie G' szukamy skojarzenia doskonałego M o największej wadze. Mamy następujące możliwości jakie krawędzie zostały skojarzone w pojedynczym gadżecie (z pominięciem symetrycznych przypadków):



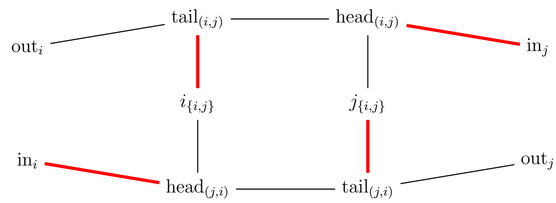
(a) Nie bierzemy nic do pokrycia.



(b) $(i, v_{(i,j)}), (v_{(i,j)}, j) \in \tilde{C}$



(c) $(i, v_{(i,j)}), (j, v_{(j,i)}) \in \tilde{C}$



(d) $(v_{(i,j)}, j), (v_{(j,i)}, i) \in \tilde{C}$

Łatwo sprawdzić, że skojarzenia doskonałe w grafie G' odpowiadają pokryciom. □

Lemat 2. Niech $\tilde{C}$ będzie pokryciem cyklowym bez 2-cykli, ale z półkrawędziami, dla grafu G. W czasie wielomianowym, można skonstruować trzy zbiory rozłącznych wierzchołkowo ścieżek $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, o sumarycznej wadze równej $2w(\tilde{C})$.

Dowód. Niech F będzie zbiorem skierowanych i nieskierowanych krawędzi, powstałym z $\tilde{C}$ w następujący sposób. Dla każdej pary wierzchołków $i, j \in V$, jeśli $(i, v_{(i,j)})$ i $(v_{(i,j)}, j)$ należą do $\tilde{C}$, to do zbioru F dodajemy krawędź skierowaną (i, j). Jeśli natomiast do zbioru $\tilde{C}$ należą $(i, v_{(i,j)})$ i $(j, v_{(j,i)})$, albo $(v_{(i,j)}, j)$ i $(v_{(j,i)}, i)$, to do zbioru F dodajemy krawędź nieskierowaną $\{i, j\}$.

Skonstruujemy trzy zbiory ścieżek $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, takie że każda krawędź $(i, j) \in F$ występuje w dokładnie dwóch zbiorach, a każda krawędź $\{i, j\} \in F$ występuje raz jako (i, j) w jednym zbiorze oraz raz jako (j, i) w innym zbiorze. Łatwo zauważyć, że sumaryczna waga tych zbiorów to będzie dokładnie $2w(\tilde{C})$.

Niech F' będzie słabo spójną składową grafu (V, F). Jeśli zignorujemy skierowanie krawędzi, to F' jest cyklem rozmiaru co najmniej 3. Ponadto, liczba nieskierowanych krawędzi w F' jest parzysta, a skierowane ścieżki (być może puste) po obu stronach każdej nieskierowanej krawędzi mają przeciwną orientację.

Jeśli F' nie zawiera nieskierowanych krawędzi, to jest skierowanym cyklem. W takim przypadku, niech $e_1, e_2 \in F'$ będą dowolnie wybranymi krawędziami. Do $\mathcal{P}_1$ dodajemy ścieżkę $\{e_1, e_2\}$, do $\mathcal{P}_2$ dodajemy ścieżkę $F' \setminus \{e_1\}$, a do $\mathcal{P}_3$ dodajemy ścieżkę $F' \setminus \{e_2\}$.

Załóżmy teraz, że F' zawiera jakieś nieskierowane krawędzie. W tej sytuacji, do $\mathcal{P}_1$ dodajemy krawędzie skierowane zgodnie ze wskazówkami zegarami oraz nieskierowane krawędzie, które także kierujemy zgodnie ze wskazówkami zegara. Analogicznie, do $\mathcal{P}_2$ dodajemy tak samo powstałe ścieżki, ale dla skierowania przeciwnego do wskazówek zegara. Do $\mathcal{P}_3$ dodajemy wszystkie skierowane krawędzie i tylko je.

Powyższa konstrukcja nie działa jeśli F' jest nieskierowanym cyklem lub skierowane krawędzie tworzą jedną ścieżkę. W przypadku gdy F' jest nieskierowanym cyklem, zarówno do $\mathcal{P}_1$ jak i $\mathcal{P}_2$ dodamy cykl. W przypadku gdy F' zawiera jeden skierowany segment, to do dokładnie jednego z tych zbiorów dodamy cykl. Oryginalny dowód w pracy proponuje coś, co wydaje się bezsensowne: wybieramy dowolną nieskierowaną krawędź i odwracamy jej kierunek w $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$. Taki zabieg usuwa cykl skierowany, ale nie zapewnia że są to zbiory rozłącznych wierzchołkowo ścieżek.

Problem ten jednak łatwo naprawić inaczej. W przypadku, gdy F' zawiera jeden skierowany segment, wybieramy dowolną krawędź nieskierowaną F', i przenosimy ją z odpowiedniego $\mathcal{P}_i$ do $\mathcal{P}_3$. Podobnie, gdy F' jest nieskierowanym cyklem, wybieramy dwie krawędzie nieskierowane, które nie mają wspólnego końca, i przenosimy jedną z nich z $\mathcal{P}_1$ do $\mathcal{P}_3$, a drugą z $\mathcal{P}_2$ do $\mathcal{P}_3$. Zawsze możemy wybrać takie krawędzie, bo jeśli F' jest nieskierowanym cyklem, to ma co najmniej cztery krawędzie. □

Twierdzenie 2. Istnieje algorytm 2/3-aproksymacyjny dla problemu Max-ATSP. W szczególności, algorytm ten znajduje ścieżkę, której waga to co najmniej 2/3 optymalnego rozwiązania Max-ATSP.

Dowód. Znajdujemy pokrycie cyklowe bez 2-cykli, ale z półkrawędziami, korzystając z Lematu 1. Następnie budujemy zbiory ścieżek korzystając z Lematu 2. Wybieramy zbiór ścieżek $\mathcal{P}_i$ o największej wadze, i zwracamy dowolną ścieżkę, która zawiera wszystkie krawędzie $\mathcal{P}_i$. □

3 5/2-aproksymacja dla najkrótszego nadsłowa

W problemie najkrótszego nadsłowa, mamy dany zbiór słów $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$, i chcemy znaleźć najkrótsze słowo s, które zawiera wszystkie s_i. Zakładamy dla uproszczenia, że zbiór S nie zawiera słowa s_i, które jest podsłowem innego słowa s_j, dla $i \neq j$.

Dla słów s i t, definiujemy nakładkę $\mathrm{ov}(s,t)$ jako najdłuższe słowo y takie że $s = xy$ i $t = yz$, dla pewnych niepustych słów x oraz z. Przez $\mathrm{pref}(s,t)$ oznaczamy słowo x, tzn. słowo s po usunięciu sufiksu $\mathrm{ov}(s,t)$. Dla ustalonej kolejności słów $s_1, ..., s_n$, najkrótsze nadsłowo to:

$$\mathrm{pref}(s_1, s_2)\,\mathrm{pref}(s_2, s_3)\ldots\mathrm{pref}(s_{n-1}, s_n)\,\mathrm{pref}(s_n, s_1)\,\mathrm{ov}(s_n, s_1)$$

Redukcja problemu najkrótszego nadsłowa do problemu Max-ATSP-Path przebiega następująco:

1. Niech $G = (S, E)$ będzie grafem takim że $w(s_i, s_j) = |\mathrm{pref}(s_i, s_j)|$.
2. Znajdź pokrycie cyklowe C grafu G o najmniejszym koszcie.
3. Zbuduj zbiór reprezentantów R. Dla każdego cyklu tworzymy jednego reprezentata w R: jest nim najkrótsze nadsłowo, które zawiera słowa w kolejności występowania na cyklu (wybieramy najlepsze z możliwych rozcięć cyklu).
4. Niech $G' = (R, E')$ będzie grafem takim że $w(r_i, r_j) = |\mathrm{ov}(r_i, r_j)|$ dla $r_i, r_j \in R$.
5. Znajdź α-aproksymację dla Max-ATSP-Path w grafie G'. Niech P będzie kolejnością wierzchołków na znalezionej ścieżce.
6. Zwróć najkrótsze nadsłowo, które zawiera słowa w kolejności zgodnej z P.

Kroki 1-3 mają na celu znalazienie zbioru nadsłów R o tej własności, że słowa mają nieduże nakładki. W krokach 4-6 używamy algorytmu dla Max-ATSP-Path by znaleźć kolejność słów R, dla której słowa najbardziej na siebie nachodzą. Łatwo zauważyć, że gdyby słowa w zbiorze R miały duże nakładki, to aproksymacja w krokach 3-6 nie dawałaby dobrej aproksymacji dla najkrótszego nadsłowa R. Okazuje się, że zbiór reprezentantów wybrany tak jak powyżej daje następującą aproksymację:

Twierdzenie 3 ([2, 4])**.** Powyższy algorytm jest $\left(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\alpha\right)$-aproksymacyjny dla problemu najkrótszego nadsłowa.

Przystępne opracowanie tej redukcji wraz z dowodami można znaleźć w [4]. Podstawiając $\alpha = 2/3$ dostajemy ostateczny wynik:

Twierdzenie 4. Istnieje algorytm 5/2-aproksymacyjny dla problemu najkrótszego nadsłowa.

Literatura

[1] Paluch, Katarzyna, Khaled Elbassioni, and Anke Van Zuylen. "Simpler approximation of the maximum asymmetric traveling salesman problem." STACS'12 (29th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science). Vol. 14. LIPIcs, 2012.

[2] Breslauer, Dany, Tao Jiang, and Zhigen Jiang. "Rotations of periodic strings and short superstrings." Journal of Algorithms 24.2 (1997): 340-353.

[3] Bläser, Markus, and Bodo Manthey. "Two approximation algorithms for 3-cycle covers." International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization. Springer, Berlin, Heidelberg, 2002.

[4] Mucha, Marcin. "A tutorial on shortest superstring approximation." (2007).