Algorytmy optymalizacji dyskretnej 2025/26
Laboratorium 2: Programowanie liniowe i całkowitoliczbowe

Krzysztof Zając

18 listopada 2025

Zadanie 1: Minimalizacja kosztów paliwa

1. Opis modelu

Niech F będzie zbiorem firm, a L zbiorem lotnisk.

- **Zmienne:** $x_{fl} \geq 0$ — ilość paliwa (galony) od $f \in F$ do $l \in L$.
- **Dane:** c_{fl} (koszt), p_f (podaż), z_l (zapotrzebowanie).
- **Cel:** Minimalizacja $\sum_{f\in F} \sum_{l\in L} c_{fl} \cdot x_{fl}$
- **Ograniczenia:**
  1. Pokrycie zapotrzebowania: $\sum_{f\in F} x_{fl} = z_l \quad \forall l \in L$
  2. Limit podaży: $\sum_{l\in L} x_{fl} \leq p_f \quad \forall f \in F$

2. Wyniki i interpretacja

```
--- Rozwiązywanie modelu Minimalizacja_kosztow_paliwa ---
Status: Optimal
Zmienne:
Paliwo_('F1',_'L2') = 165000.0
Paliwo_('F1',_'L4') = 110000.0
Paliwo_('F2',_'L1') = 110000.0
Paliwo_('F2',_'L2') = 55000.0
Paliwo_('F3',_'L3') = 330000.0
Paliwo_('F3',_'L4') = 330000.0
Wynik (funkcja celu):
OBJ = 8525000.0
```

- **(a)** Minimalny łączny koszt dostaw wynosi 8 525 000.0 \$.
- **(b)** Tak, wszystkie trzy firmy realizują dostawy.
- **(c)** Firmy 1 i 3 wyczerpały swoje limity. Firma 2 nie wyczerpała limitu (dostarcza 165 000 z 550 000 galonów).

Zadanie 2: Maksymalizacja zysku produkcji

1. Opis modelu

Niech P będzie zbiorem produktów, a M zbiorem maszyn.

- **Zmienne:** $p_i \geq 0$ — ilość produktu $i \in P$ (w kg).
- **Dane:** t_{ij} (czas obróbki), D_j (dostępność maszyny), C_i (cena), $K_{m,i}$ (koszt materiału), $K_{p,j}$ (koszt pracy maszyny), P_i^{max} (popyt).
- **Cel:** Maksymalizacja zysku

$$\max \sum_{i \in P} (C_i - K_{m,i}) \cdot p_i - \sum_{j \in M} \left(\frac{K_{p,j}}{60} \cdot \sum_{i \in P} (t_{ij} \cdot p_i) \right)$$

- **Ograniczenia:**
  1. Dostępność maszyn: $\sum_{i \in P} t_{ij} \cdot p_i \leq D_j \quad \forall j \in M$
  2. Popyt: $p_i \leq P_i^{max} \quad \forall i \in P$

2. Wyniki i interpretacja

```
--- Rozwiązywanie modelu Maksymalizacja_zysku_produkcji ---
Status: Optimal
Zmienne:
p1 = 125.0
p2 = 100.0
p3 = 150.0
p4 = 500.0
Wynik (funkcja celu):
OBJ = 3632.5
```

Maksymalny tygodniowy zysk wynosi 3632.5 \$. Optymalny plan to 125kg P1 oraz produkcja równa maksymalnemu popytowi dla P2 (100kg), P3 (150kg) i P4 (500kg).

Zadanie 3: Minimalizacja kosztów produkcji i magazynowania

1. Opis modelu

Niech $j \in \{1, \ldots, K\}$ będzie zbiorem okresów.

- **Zmienne:** $pn_j \geq 0$ (prod. normalna), $pp_j \geq 0$ (prod. ponadwymiarowa), $m_j \geq 0$ (magazyn na koniec j).
- **Dane:** c_j, o_j (koszty prod.), a_j (limit pp_j), d_j (popyt), C_{norm} (limit pn_j), C_{mag} (limit m_j), K_{mag} (koszt magaz.), m_0 (pocz. magazyn).
- **Cel:** Minimalizacja $\sum_{j=1}^{K}(c_j \cdot pn_j + o_j \cdot pp_j + K_{mag} \cdot m_j)$
- **Ograniczenia:**
  1. Bilans magazynu: $m_{j-1} + pn_j + pp_j = d_j + m_j \quad \forall j$
  2. Limity: $pn_j \leq C_{norm}$, $pp_j \leq a_j$, $m_j \leq C_{mag} \quad \forall j$

2. Wyniki i interpretacja

```
--- Rozwiązywanie modelu Minimalizacja_kosztow_produkcji_i_magazynowania ---
Status: Optimal
Zmienne:
Magazyn_0 = 15.0
Magazyn_2 = 70.0
Magazyn_3 = 45.0
Produkcja_nadwymiarowa_1 = 15.0
Produkcja_nadwymiarowa_2 = 50.0
Produkcja_nadwymiarowa_4 = 50.0
Produkcja_normalna_1 = 100.0
... (prod. normalna 2, 3, 4 = 100.0) ...
Wynik (funkcja celu):
OBJ = 3842500.0
```

- **(a)** Minimalny łączny koszt wynosi 3 842 500.0 \$.
- **(b)** Produkcja ponadwymiarowa jest konieczna w Okresie 1 (15j), 2 (50j) i 4 (50j).
- **(c)** Możliwości magazynowania są wyczerpane na koniec Okresu 2 (70j).

Zadanie 4: Najkrótsza ścieżka z limitem czasu

1. Opis modelu

Dany jest graf $G = (N, A)$, start i°, koniec j°.

- **Zmienne:** $x_{ij} \in \{0, 1\}$ — czy łuk $(i, j) \in A$ jest na ścieżce.
- **Dane:** c_{ij} (koszt), t_{ij} (czas), T (limit czasu).
- **Cel:** Minimalizacja $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \cdot x_{ij}$
- **Ograniczenia:**
  1. Limit czasu: $\sum_{(i,j)\in A} t_{ij} \cdot x_{ij} \leq T$
  2. Zachowanie przepływu: $\sum x_{ik} - \sum x_{kj} = 1$ (dla $k = i^\circ$), -1 (dla $k = j^\circ$), 0 (pozostałe).

2. Wyniki i interpretacja

Egzemplarz (a): $T = 15$

```
--- Rozwiązywanie modelu Najkrotsza_sciezka_z_limitem_czasu ---
Status: Optimal
Zmienne:
Sciezka_(1,_2) = 1.0
Sciezka_(2,_3) = 1.0
Sciezka_(3,_5) = 1.0
Sciezka_(5,_7) = 1.0
Sciezka_(7,_9) = 1.0
Sciezka_(9,_10) = 1.0
Wynik (funkcja celu):
OBJ = 13.0
```

Ścieżka (a): **1** $\rightarrow$ **2** $\rightarrow$ **3** $\rightarrow$ **5** $\rightarrow$ **7** $\rightarrow$ **9** $\rightarrow$ **10**. Koszt: 13.0. Czas: 15.0 (dokładnie limit).

Egzemplarz (b):

```
--- Rozwiązywanie modelu Najkrotsza_sciezka_z_limitem_czasu ---
Status: Optimal
Zmienne:
Sciezka_(1,_3) = 1.0
Sciezka_(3,_4) = 1.0
Sciezka_(4,_10) = 1.0
Wynik (funkcja celu):
OBJ = 10.0
```

Ścieżka (b): **1** $\rightarrow$ **3** $\rightarrow$ **4** $\rightarrow$ **10**. Koszt: 10.0.

3. Pytania teoretyczne

- **(c) Czy całkowitoliczbowość jest potrzebna?** Tak. Dodatkowe ograniczenie czasu $\sum t_{ij} \cdot x_{ij} \leq T$ niszczy strukturę totalnie unimodularną macierzy ograniczeń. Zabranie tegoż ograniczenia mogłaby dać rozwiązanie ułamkowe (np. "pół"jednej ścieżki i "pół"drugiej).
- **(d) Czy po usunięciu limitu czasu rozwiązanie jest akceptowalne?** Niekoniecznie. Po usunięciu limitu czasu otrzymamy najtańszą ścieżkę (co jest poprawnym połączeniem), ale jej czas przejazdu może przekroczyć limit T z oryginalnego problemu.

Zadanie 5: Minimalizacja liczby radiowozów

1. Opis modelu

Niech P będzie zbiorem posterunków, Z zbiorem zmian.

- **Zmienne:** $x_{pz} \geq 0$, całkowite — liczba radiowozów z $p \in P$ na $z \in Z$.
- **Dane:** R_z (wymagane na zmianie), D_p (wymagane w dzielnicy).
- **Cel:** Minimalizacja $\sum_{p \in P} \sum_{z \in Z} x_{pz}$
- **Ograniczenia:**
  1. Wymagania na zmianę: $\sum_{p \in P} x_{pz} \geq R_z \quad \forall z \in Z$
  2. Wymagania dla dzielnicy: $\sum_{z \in Z} x_{pz} \geq D_p \quad \forall p \in P$

2. Wyniki i interpretacja

```
--- Rozwiązywanie modelu Minimalizacja_liczby_radiowozow ---
Status: Optimal
Zmienne:
Radiowozy_p1_z1 = 2.0, Radiowozy_p1_z2 = 5.0, Radiowozy_p1_z3 = 3.0
Radiowozy_p2_z1 = 3.0, Radiowozy_p2_z2 = 7.0, Radiowozy_p2_z3 = 9.0
Radiowozy_p3_z1 = 5.0, Radiowozy_p3_z2 = 8.0, Radiowozy_p3_z3 = 6.0
Wynik (funkcja celu):
OBJ = 48.0
```

Całkowita minimalna liczba radiowozów wynosi 48. Optymalny przydział przedstawia poniższa tabela:

Tabela 1: Optymalny przydział radiowozów

	Zmiana 1	**Zmiana 2**	**Zmiana 3**	**Suma (Dzielnica)**
Posterunek 1	2.0	5.0	3.0	10.0
Posterunek 2	3.0	7.0	9.0	19.0
Posterunek 3	5.0	8.0	6.0	19.0
Suma (Zmiana)	**10.0**	**20.0**	**18.0**	**48.0**

Zadanie 6: Rozmieszczenie kamer

1. Opis modelu

Dany jest teren o wymiarach $m \times n$. Niech C będzie zbiorem kontenerów, a M zbiorem wolnych miejsc, gdzie można ustawić kamerę. Kamera posiada zasięg k. Niech $N(c)$ oznacza zbiór miejsc $(i, j) \in M$, z których widać kontener $c \in C$ (w zasięgu k w linii prostej/Manhattan).

- **Zmienne:** $x_{ij} \in \{0, 1\}$ — zmienna binarna, równa 1, jeśli kamera jest ustawiona w miejscu $(i, j) \in M$, 0 w przeciwnym razie.
- **Cel:** Minimalizacja łącznej liczby kamer:

$$\min \sum_{(i,j)\in M} x_{ij}$$

- **Ograniczenia:**
    1. Pokrycie każdego kontenera: $\sum_{(i,j)\in N(c)} x_{ij} \geq 1 \quad \forall c \in C$

2. Wyniki i interpretacja

Eksperyment A: Zasięg $k = 1$

```
--- Rozwiązywanie modelu Rozmieszczenie_kamer_k=1 ---
Status: Optimal
Zmienne:
Kamera_(0,_1) = 1.0
Kamera_(0,_3) = 1.0
Kamera_(3,_2) = 1.0
Kamera_(4,_2) = 1.0
Wynik (funkcja celu):
OBJ = 4.0
```

Dla małego zasięgu $k = 1$ minimalna liczba kamer potrzebna do pokrycia wszystkich kontenerów wynosi 4. Kamery zostały rozmieszczone w punktach: (0, 1), (0, 3), (3, 2) oraz (4, 2).

Eksperyment B: Zasięg $k = 2$

```
--- Rozwiązywanie modelu Rozmieszczenie_kamer_k=2 ---
Status: Optimal
Zmienne:
Kamera_(0,_2) = 1.0
Kamera_(4,_2) = 1.0
Wynik (funkcja celu):
OBJ = 2.0
```

Zwiększenie zasięgu kamer do $k = 2$ pozwoliło na zredukowanie ich liczby o połowę. W tym przypadku wystarczą tylko 2 kamery umieszczone w punktach (0, 2) oraz (4, 2), aby zapewnić pełny monitoring kontenerów.