Obliczenia Naukowe - Laboratorium 3

Krzysztof Zając

22 listopada 2025

1 Wstęp i opis metod

Celem laboratorium jest implementacja oraz przetestowanie trzech metod rozwiązywania równań nieliniowych $f(x) = 0$: metody bisekcji, metody Newtona (stycznych) oraz metody siecznych. Wszystkie funkcje znajdują się w module `Solvers`.

1.1 Metoda Bisekcji

Metoda ta opiera się na twierdzeniu Darboux. Dla funkcji ciągłej w przedziale $[a, b]$, jeśli $f(a)f(b) < 0$, to w przedziale istnieje pierwiastek. W każdej iteracji dzieli się przedział na połowę i wybiera podprzedział, w którym funkcja zmienia znak.

1.2 Metoda Newtona

Metoda iteracyjna wykorzystująca pochodną funkcji. Kolejne przybliżenie oblicza się ze wzoru:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Metoda ta charakteryzuje się szybką zbieżnością w pobliżu pierwiastka, ale wymaga znajomości pochodnej.

1.3 Metoda Siecznych

Metoda ta aproksymuje pochodną ilorazem różnicowym. Wzór iteracyjny przyjmuje postać:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

2 Zadanie 4

2.1 Opis problemu

Zadanie polega na wyznaczeniu pierwiastka równania $f(x) = \sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ przy użyciu trzech metod z zadanymi parametrami $\delta = \epsilon = 0.5 \times 10^{-5}$.

2.2 Wyniki

Stosuje się następujące parametry startowe:

- Bisekcja: przedział $[1.5, 2.0]$
- Newton: $x_0 = 1.5$
- Sieczne: $x_0 = 1, x_1 = 2$

Tabela 1: Wyniki dla funkcji $f(x) = \sin(x) - 0.25x^2$

Metoda	Przybliżenie (r)	Wartość $f(r)$	Iteracje	Błąd
Bisekcja	1.9337539	-2.70×10^{-7}	16	0
Newton	1.9337537	-2.24×10^{-8}	4	0
Sieczne	1.9337536	1.56×10^{-7}	4	0

2.3 Wnioski

Wszystkie metody zbiegają do wyniku $x \approx 1.93375$. Metody Newtona oraz siecznych okazują się najszybsze (4 iteracje), natomiast metoda bisekcji wymaga 16 iteracji, co potwierdza jej liniową zbieżność.

3 Zadanie 5

3.1 Opis problemu

Celem jest znalezienie punktów przecięcia wykresów funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$. Problem sprowadza się do znalezienia miejsc zerowych funkcji $g(x) = 3x - e^x$. Dokładność $\delta = \epsilon = 10^{-4}$.

3.2 Wyniki

Funkcja posiada dwa miejsca zerowe. Dobiera się przedziały izolacji $[0, 1]$ oraz $[1, 2]$.

Tabela 2: Wyniki metody bisekcji dla $3x - e^x = 0$

Przedział	Przybliżenie (r)	Wartość $f(r)$	Iteracje	Błąd
$[0, 1]$	0.6191406	9.07×10^{-5}	9	0
$[1, 2]$	1.5120849	7.62×10^{-5}	13	0

3.3 Wnioski

Metoda bisekcji poprawnie identyfikuje oba punkty przecięcia. Liczba iteracji jest zbliżona dla obu przedziałów, a metoda skutecznie znajduje rozwiązania w założonej dokładności.

4 Zadanie 6

4.1 Opis problemu

Należy znaleźć miejsca zerowe funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $f_2(x) = xe^{-x}$. Bada się zachowanie metod dla różnych punktów startowych. Dokładność $\delta = \epsilon = 10^{-5}$.

4.2 Wyniki

Funkcja $f_1(x) = e^{1-x} - 1$ **(Miejsce zerowe:** $x = 1$**)**

Tabela 3: Wyniki dla $f_1(x)$

Metoda	Parametry	Wynik (r)	Iteracje	Błąd
Bisekcja	$[-0.5, 1.5]$	1.0	2	0
Newton	$x_0 = 0.5$	1.0000000	4	0
Newton	$x_0 = 5.0$	-29.59815	20	1
Sieczne	$x_0 = 0, x_1 = 2$	1.0000017	6	0

Dla $x_0 = 5.0$ metoda Newtona nie osiąga zbieżności w zadanym limicie iteracji (Błąd 1), a wynik drastycznie odbiega od pierwiastka.

Funkcja $f_2(x) = xe^{-x}$ **(Miejsce zerowe:** $x = 0$**)**

Tabela 4: Wyniki dla $f_2(x)$

Metoda	Parametry	Wynik (r)	Iteracje	Błąd
Bisekcja	$[-0.5, 0.5]$	0.0	1	0
Newton	$x_0 = 0.5$	-3.06×10^{-7}	5	0
Newton	$x_0 = 1.0$	1.0	1	2
Sieczne	$x_0 = \pm 0.5$	5.38×10^{-6}	6	0

Dla $x_0 = 1.0$ metoda Newtona zwraca błąd nr 2, co oznacza pochodną bliską zeru.

4.3 Wnioski

- Metoda bisekcji okazuje się niezawodna; w sprzyjających warunkach (symetryczny przedział względem pierwiastka) trafia w wynik natychmiastowo.
- Metoda Newtona jest wrażliwa na punkt startowy. Dla f_1 i $x_0 = 5$ (płaski wykres) ucieka w kierunku $-\infty$.
- Dla f_2 w punkcie $x = 1$ pochodna wynosi zero, co powoduje błąd dzielenia przez zero w metodzie Newtona.