

# Algorytmy optymalizacji dyskretnej 2025 / 26

## LABORATORIUM 2

Programowanie liniowe i całkowitoliczbowe

Termin realizacji: **ostatnie zajęcia przed 20.11.2025 r.**

**Warunek zaliczenia listy:** realizacja co najmniej czterech spośród zadań 1–6 (wraz ze sprawozdaniem).

W każdym z zadań 1–6 zapisz model programowania liniowego w wybranym języku i rozwiąż go za pomocą solvera GLPK (lub np. Cbc, HiGHS, ...). Rozwiązania należy uogólnić, tj. oddzielić model od danych tak, aby można było zadawać dane w pliku, na podstawie których solver będzie generował egzemplarz problemu i go rozwiązywał. Należy także maksymalnie sparametryzować zapis modelu.

### Zadanie 0.

Przeczytaj opis języka GNU MathProg (lub innego wybranego narzędzia do modelowania problemów LP/MIP, jak np. pakietu JuMP z języka Julia) i zapoznaj się z jego możliwościami.

### Zadanie 1. [0,5 pkt]

Przedsiębiorstwo lotnicze musi podjąć decyzję o zakupie paliwa do samolotów odrzutowych, mając do wyboru trzech dostawców. Samoloty tankują paliwo regularnie na czterech lotniskach, które obsługują.

Firmy paliwowe poinformowały, że mogą dostarczyć następujące ilości paliwa w nadchodzącym miesiącu: Firma 1 – 275 000 galonów, Firma 2 – 550 000 galonów i Firma 3 – 660 000 galonów. Niezbędne ilości paliwa na poszczególnych lotniskach są odpowiednio równe: na lotnisku 1 – 110 000 galonów, na lotnisku 2 – 220 000 galonów, na lotnisku 3 – 330 000 galonów i na lotnisku 4 – 440 000 galonów.

Koszt jednego galonu paliwa w \$ (z uwzględnieniem kosztów transportu) dostarczonego przez poszczególnych dostawców na każde z lotnisk przedstawia poniższa tabela.

	Firma 1	Firma 2	Firma 2
Lotnisko 1	10	7	8
Lotnisko 2	10	11	14
Lotnisko 3	9	12	4
Lotnisko 4	11	13	9

Wyznacz plan zakupu i dostaw paliwa na lotniska, który minimalizuje koszty. Następnie na jego podstawie odpowiedz na poniższe pytania.

- (a) Jaki jest minimalny łączny koszt dostaw wymaganych ilości paliwa na wszystkie lotniska?
- (b) Czy wszystkie firmy dostarczają paliwo?
- (c) Czy możliwości dostaw paliwa przez firmy są wyczerpane?

### Zadanie 2. [1 pkt]

Zakład może produkować cztery różne wyroby  $P_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , w różnych kombinacjach. Każdy z wyrobów wymaga pewnego czasu obróbki na każdej z trzech maszyn. Czasy te są podane w poniższej tabeli (w minutach na kilogram wyrobu). Każda z maszyn jest dostępna przez 60 godzin w tygodniu. Produkty  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  i  $P_4$  mogą być sprzedane po cenie, odpowiednio, 9, 7, 6 i 5 \$ za kilogram. Koszty zmienne (koszty pracy maszyn) wynoszą, odpowiednio, 2 \$ za godzinę dla maszyn  $M_1$  i  $M_2$  oraz 3 \$ za godzinę dla maszyny  $M_3$ . Koszty materiałowe wynoszą 4 \$ na każdy kilogram wyrobu  $P_1$  i 1 \$ na każdy kilogram wyrobu  $P_2$ ,  $P_3$  i  $P_4$ . W tabeli podany jest także maksymalny tygodniowy popyt na każdy z wyrobów (w kilogramach).

Produkt	Maszyna			Maksymalny popyt tygodniowy
	$M_1$	$M_2$	$M_3$	
$P_1$	5	10	6	400
$P_2$	3	6	4	100
$P_3$	4	5	3	150
$P_4$	4	2	1	500

Wyznacz optymalny tygodniowy plan produkcji poszczególnych wyrobów i oblicz zysk z ich sprzedaży.

### Zadanie 3. [1 pkt]

W trybie normalnej produkcji pewna firma wytwarza maksymalnie 100 jednostek towaru w każdym z  $K$  następujących po sobie okresów, gdzie koszt produkcji jednej jednostki towaru w okresie  $j \in \{1, \dots, K\}$  wynosi  $c_j$  \$. Firma może również uruchomić produkcję ponadwymiarową w wielkości do  $a_j$  dodatkowych jednostek towaru w okresie  $j$  przy koszcie jednostkowym  $o_j$  \$. Zapotrzebowanie na towar w okresie  $j$  wynosi  $d_j$  jednostek. Dane dla  $K = 4$  kolejnych okresów przedstawia poniższa tabela.

$j$	$c_j$	$a_j$	$o_j$	$d_j$
1	6 000	60	8 000	130
2	4 000	65	6 000	80
3	8 000	70	10 000	125
4	9 000	60	11 000	195

Ponadto firma może przechować w magazynie do 70 jednostek towaru z jednego okresu na kolejny po koszcie 1 500 \$ za każdą magazynowaną jednostkę przez jeden okres. Początkowo w magazynie znajduje się 15 jednostek towaru.

Wyznacz plan produkcji i magazynowania wytwarzanego towaru, który spełnia zapotrzebowania w każdym okresie i minimalizuje łączny koszt. Następnie na jego podstawie odpowiedz na poniższe pytania.

- Jaki jest minimalny łączny koszt produkcji i magazynowania towaru?
- W których okresach firma musi zaplanować produkcję ponadwymiarową?
- W których okresach możliwości magazynowania towaru są wyczerpane?

### Zadanie 4. [1 pkt]

Dana jest sieć połączeń między miastami reprezentowana za pomocą skierowanego grafu  $G = (N, A)$ , gdzie  $N$  jest zbiorem miast (wierzchołków), a  $A$  jest zbiorem połączeń między miastami (łuków). Dla każdego połączenia z miasta  $i$  do miasta  $j$ ,  $(i, j) \in A$ , dane są koszt przejazdu  $c_{ij}$  oraz czas przejazdu  $t_{ij}$ . Dane są również dwa miasta  $i^\circ, j^\circ \in N$ .

Celem jest znalezienie połączenia (ścieżki) od miasta  $i^\circ$  do miasta  $j^\circ$ , którego całkowity koszt jest najmniejszy i całkowity czas przejazdu nie przekracza z góry zadanego czasu  $T$ .

- Rozwiąż poniższy egzemplarz problemu (wygenerowany we współpracy z Microsoft Copilot :)). Rysunek grafu znajduje się w pliku `rcsp_graph_ex4.pdf` (czerwone koszty, niebieskie czasy).

$N = \{1, \dots, 10\}$ ,  $i^\circ = 1$ ,  $j^\circ = 10$ ,  $T = 15$ . Kolejne krawędzie podane są w postaci  $(i, j, c_{ij}, t_{ij})$ :

(1, 2, 3, 4), (1, 3, 4, 9), (1, 4, 7, 10), (1, 5, 8, 12), (2, 3, 2, 3), (3, 4, 4, 6), (3, 5, 2, 2), (3, 10, 6, 11), (4, 5, 1, 1), (4, 7, 3, 5), (5, 6, 5, 6), (5, 7, 3, 3), (5, 10, 5, 8), (6, 1, 5, 8), (6, 7, 2, 2), (6, 10, 7, 11), (7, 3, 4, 6), (7, 8, 3, 5), (7, 9, 1, 1), (8, 9, 1, 2), (9, 10, 2, 2).

- Zaproponuj własny egzemplarz problemu i rozwiąż go. Graf ma mieć co najmniej  $n \geq 10$  wierzchołków, najtańsza ścieżka spełniająca ograniczenia na czas przejazdu ma mieć  $\geq 3$  krawędzie i mieć większy koszt niż najtańsza ścieżka w wersji bez ograniczeń (ta ma mieć  $\geq 2$  krawędzie).

- (c) Czy ograniczenie na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych jest potrzebne? Jeśli nie, to uzasadnij dlaczego. Jeśli tak, to zaproponuj kontrprzykład, w którym po usunięciu ograniczeń na całkowitoliczbowość (tj. mamy przypadek, w którym model jest modelem programowania liniowego) zmienne decyzyjne w rozwiązaniu optymalnym nie mają wartości całkowitych.
- (d) Czy po usunięciu ograniczenia na czasy przejazdu w modelu bez ograniczeń na całkowitoliczbowość zmiennych decyzyjnych i rozwiązaniu problemu otrzymane połączenie zawsze jest akceptowalnym rozwiązaniem? Uzasadnij odpowiedź.

#### **Zadanie 5. [0,5 pkt]**

Rozwiąż problem z zadania 5. z Listy 2 na ćwiczenia dla podanych tam danych. W opisie rozwiązania przedstaw optymalny przydział radiowozów dla każdej zmiany i dzielnicy oraz podaj całkowitą liczbę wykorzystywanych radiowozów.

#### **Zadanie 6. [1 pkt]**

Firma przeładunkowa składa na swoim terenie kontenery z cennym ładunkiem. Teren podzielony jest na  $m \times n$  kwadratów. Kontenery składowane są w wybranych kwadratach. Jeden kwadrat może być zajmowany przez co najwyżej jeden kontener. Firma musi rozmieścić kamery, żeby monitorować kontenery. Każda kamera może obserwować  $k$  kwadratów na lewo,  $k$  kwadratów na prawo,  $k$  kwadratów w górę i  $k$  kwadratów w dół. Kamera nie może być umieszczona w kwadracie zajmowanym przez kontener.

Zaplanuj rozmieszczenie kamer w kwadratach tak, aby każdy kontener był monitorowany przez co najmniej jedną kamerę oraz liczba użytych kamer była jak najmniejsza.

Rozwiąż własny egzemplarz powyższego problemu z parametrami  $m, n \geq 5$ . Podaj rozwiązania dla co najmniej dwóch różnych wartości parametru  $k$ .

---

Rozwiązania problemów z zadań 1–6 przedstaw w **zwięzłym** sprawozdaniu (plik pdf), które powinno zawierać:

1. opis modeli

- (a) definicje zmiennych decyzyjnych (opis, jednostki),
- (b) ograniczenia (nie umieszczaj źródeł modelu),
- (c) funkcja celu,

2. krótki opis rozwiązywanych egzemplarzy, uzyskane wyniki oraz ich interpretację.

W sprawozdaniu do opisu modeli (zmienne, ograniczenia, funkcja celu) **należy zastosować zapis matematyczny** (a nie zapis w wybranym języku modelowania)!

Do sprawozdania należy dołączyć pliki z modelami programowania liniowego / liniowego całkowitoliczbowego. Pliki powinny być skomentowane – powinny zawierać imię i nazwisko autora, komentarze zmiennych, zaetykietowane ograniczenia oraz komentarze ograniczeń.