M2 Data Science - PGM
TD1

1. Calculer le nombre de graphes de n noeuds avec m types d'arcs possibles entre chaque couple de noeuds. Calculer le nombre de graphes non dirigés distincts de n noeuds.

2. Estimer un majorant du nombre de modèles d'indépendance conditionnelle possibles dans les distributions de probabilité sur n variables ?

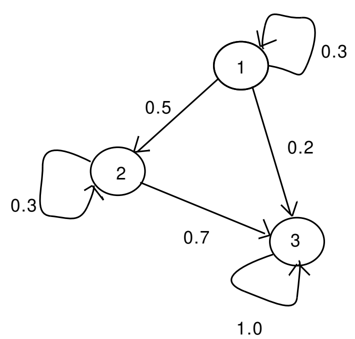
3. Montrer que $X \perp (Y, Z) \mid W$ implique $X \perp Y \mid W$ d'après les propriétés de l'indépendance conditionnelle (i.e. les axiomes des semi-graphoïdes).

4. Afficher tous les DAGs et les UGs de 4 variables n'encodant aucune indépendance conditionnelle.

5. **Axiomes d'indépendance conditionnelle**. 0n suuppose que :
   (a) $X_3 \perp X_1 \mid X_2$
   (b) $X_4 \perp (X_1, X_2) \mid X_3$
   (c) $X_5 \perp (X_1, X_2, X_3) \mid X_4$

   Montrer que $X_3 \perp (X_1, X_5) \mid (X_2, X_4)$ d'après les propriétés de l'indépendance conditionnelle.

6. **Chaîne de Markov cachée**.



Etats	1	2	3
P(a)	1.0	0.5	0.0
P(b)	0.0	0.5	1.0

FIGURE 1 – Chaîne de Markov cachée et probabilités d'émission de symboles.

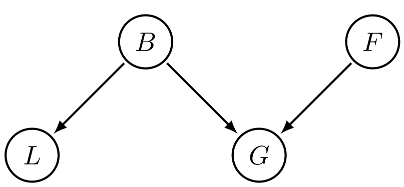
La Figure 1 montre une chaîne de Markov cachée comprenant 3 états 1, 2 ,3. Les valuations des arcs sont les probabilités de transition entre les états. On suppose que le systéme markovien étudié visite ces états succesivement avec les probabilités initiales $\pi = (0.6, 0.4, 0)$. Dans chaque état, le systéme émet un symbole choisi dans l'alphabet V={a,b} avec les probabilités d'émission affichées.
— Evaluer la probabilité de la suite d'observation *aab*.
— Déterminer la *meilleure* suite d'états qui rend la séquence observée, *aab*, la plus probable.

7. **Réseau bayésien**. Le but de cet exercice est de construire un réseau bayésien à partir des données de la Table 1.
   (a) Construire la structure partiellement dirigéé du réseau bayésien de 4 noeuds (B, CS, PM, Ch). Pour cela on admettra que les seules indépendances (conditionnelles) entre les variables sont : $B \perp Ch$, $PM \perp Ch$ et $B \perp CS|PM$. Diriger les arcs restants arbitrairement.
   (b) Faire l'apprentissage des tables de probabilités grâce à la table d'apprentissage.
   (c) Inférer la probabilité de CS=oui sachant que PM=non.
   (d) Inférer la probabilité de Ch=non sachant que CS=oui et B=oui.

Peau mate	Chapeau	Crème Solaire	Bronzé
non	oui	non	non
oui	non	oui	oui
non	non	non	oui
non	non	oui	non
non	oui	non	non
oui	oui	non	non
oui	oui	oui	oui
non	non	oui	oui
non	oui	non	oui
oui	oui	non	non
non	non	non	non
non	non	oui	oui
oui	oui	non	oui

TABLE 1 – Table d'apprentissage

8. **Réseau bayésien**. Consider the Bayesian network Figure 2 with a new variable L being the child of B. Suppose that $P(L = 1 \mid B = 1) = 0.8$ and $P(L = 1 \mid B = 0) = 0.0$. "$L = 1$" denotes "the car headlights are well functioning".
   (a) Compute $P(L = 0)$.
   (b) Compute L and F independent ?
   (c) Compute $P(F = 1 \mid G = 0, L = 1)$ and compare to $P(F = 1 \mid G = 0)$. Are F and L independent given G ?
   (d) Write down all the conditional and inconditional independencies encoded in this directed acyclic graph.
   (e) What is the compression rate in terms of memory space ?



$$P(G = 1 \mid B = 1, F = 1) = 0.8$$
$$P(G = 1 \mid B = 1, F = 0) = 0.2$$
$$P(G = 1 \mid B = 0, F = 1) = 0.2$$
$$P(G = 1 \mid B = 0, F = 0) = 0.1$$
$$P(B = 1) = 0.9$$
$$P(F = 1) = 0.9$$

FIGURE 2 – L=car headLights, B=Battery, F=Fuel tank, G=Gauge reading. Full=1, Empty=0.

9. **Progammation dynamique**. Dans une usine de fabrication de produits chimiques, on utilise un produit U en quantité finie a. Ce produit peut être utilisé dans deux processus de fabrication P_1 et P_2. Lorsqu'une quantité x du produit U est utilisée dans un cycle de P_1, elle permet un profit de $3x$; lorsqu'elle est utilisée dans un cycle de P_2, elle permet un profit de $2x$. Cependant ce catalyseur est totalement régénéré par P_2 alors qu'il ne l'est qu'au trois quarts par P_1. Toute quantité non utilisée est perdue du fait de l'instabilité du catalyseur. On notera $z_t(x)$ le profit maximal qu'on peut escompter avec une quantité x du produit U et que ce produit est utilisé pendant t cycles. On suppose que le produit n'est actif que durant trois cycles de fabrication.
   — Ecrire les équations de récurrence permettant de calculer $z_t(x)$ en utilisant le principe de la programmation dynamique.
   — Résoudre "à la main" ce système et en déduire la fonction valeur de la stratégie optimale.
   — En déduire la politique optimale.