Analyse des graphes de données

Hamamache Kheddouci
Laboratoire LIRIS
Université Claude Bernard Lyon 1
Hamamache.kheddouci@univ-lyon1.fr

1

Algorithmique des Graphes et Applications

Objectifs de la Partie I :

- Tour d'horizon sur la recherche actuelle dans les graphes
- Maîtrise des outils récents (graphes et algorithmes) pour la modélisation et la résolution de problèmes
- Applications des graphes dans les systèmes d'information, Big Data, fouille de données, réseaux sociaux,…

2

Contenu :

Par quels types de graphes peut-on modéliser ?
- Graphes statiques
- Graphes dynamiques
- Grands graphes d'interaction

Comment modéliser par les graphes ?
- Par des pramètres de graphes,
- Par des propriéties de structures (placement, décomposition,…)

Quels algorithmes pour la résolution de problèmes ?
- Algorithmes distribués
- Algorithmes dynamiques et incrémentaux (online)
- Algorithmes auto-stabilisants

Quels sont les domaines qui font appel aux graphes ?
- Systèmes distribués pair-à-pair
- Systèmes d'information
- Systèmes dynamiques
- …

3

Graphe ?

- Graphe non-orienté défini par G=(X,E) :
  - X ensemble de sommets ou de nœuds
  - E ensemble d'arêtes

H. Kheddouci Analyse de graphes 4

4

Recherche ?

- fondamentale
- appliquée

H. Kheddouci Analyse de graphes 5

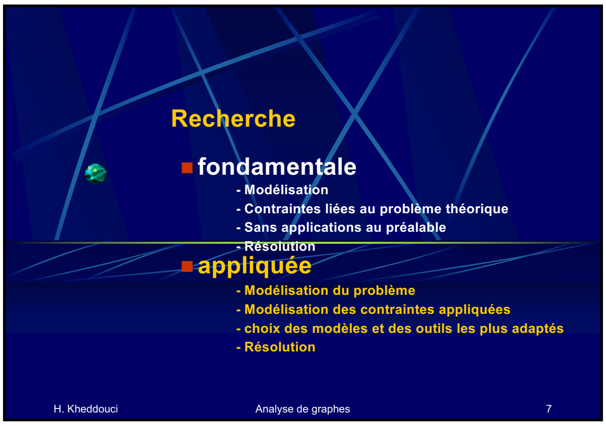
5

Recherche

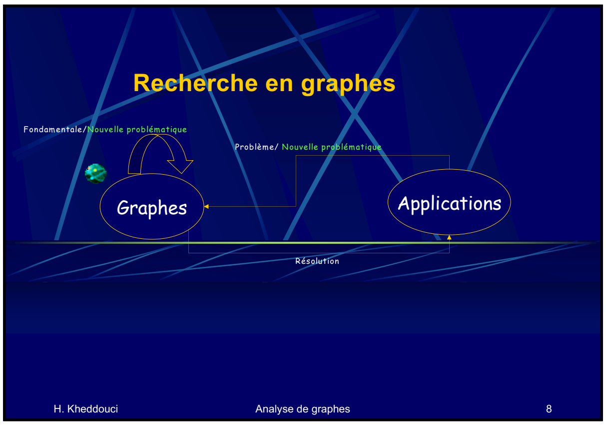
- fondamentale
  - Modélisation
  - Contraintes liées au problème théorique
  - Sans applications au préalable
  - Résolution
- appliquée

H. Kheddouci Analyse de graphes 6

6


Recherche
fondamentale
- Modélisation
- Contraintes liées au problème théorique
- Sans applications au préalable
- Résolution
appliquée
- Modélisation du problème
- Modélisation des contraintes appliquées
- choix des modèles et des outils les plus adaptés
- Résolution
H. Kheddouci
Analyse de graphes
7

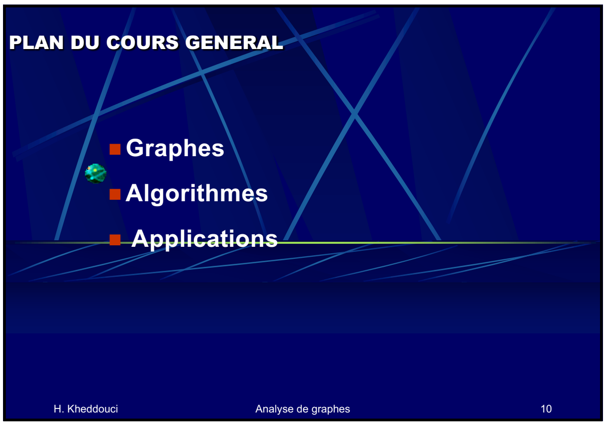
7


Recherche en graphes
Fondamentale/Nouvelle problématique
Problème/ Nouvelle problématique
Graphes
Applications
Résolution
H. Kheddouci
Analyse de graphes
8

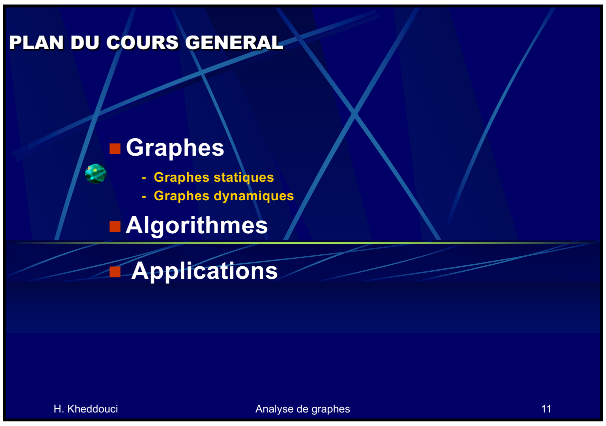
8


Recherche actuelle ?
Systèmes complexes
- Systèmes à grandes masses de données (Big Data)
- Graphes d'interaction (Web, internet, protéines,..)
- Grands réseaux
- ....
H. Kheddouci
Analyse de graphes
9

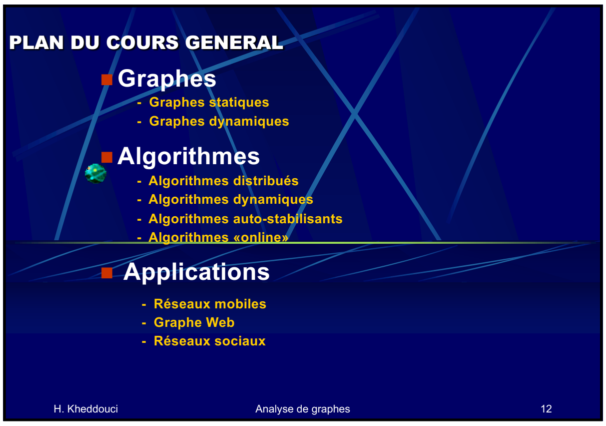
9


PLAN DU COURS GENERAL
Graphes
Algorithmes
Applications
H. Kheddouci
Analyse de graphes
10

10


PLAN DU COURS GENERAL
Graphes
- Graphes statiques
- Graphes dynamiques
Algorithmes
Applications
H. Kheddouci
Analyse de graphes
11

11


PLAN DU COURS GENERAL
Graphes
- Graphes statiques
- Graphes dynamiques
Algorithmes
- Algorithmes distribués
- Algorithmes dynamiques
- Algorithmes auto-stabilisants
- Algorithmes «online»
Applications
- Réseaux mobiles
- Graphe Web
- Réseaux sociaux
H. Kheddouci
Analyse de graphes
12

12

PLAN DU COURS (PARTIE I)

- Définitions & exemples
- Graphes (statiques)
- Graphes dynamiques
- Applications
- Conclusion

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 13

13

PLAN DU COURS

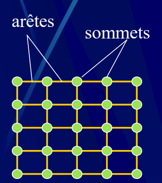
- Définitions & exemples
- Graphes (statiques)
- Graphes dynamiques
- Applications
- Conclusion

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 14

14

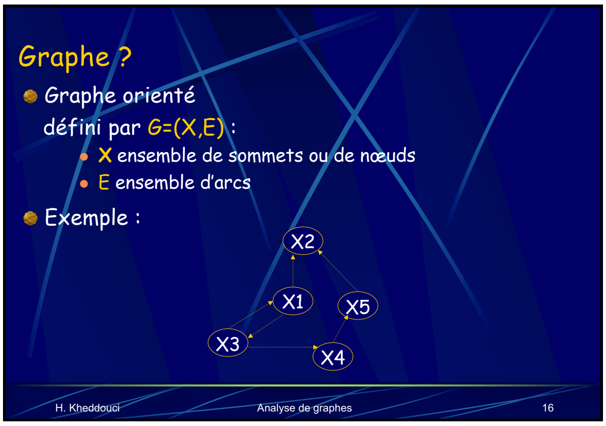
Graphe ?

- Graphe non-orienté
  défini par G=(X,E) :
  - X ensemble de sommets ou de nœuds
  - E ensemble d'arêtes
- Exemple :

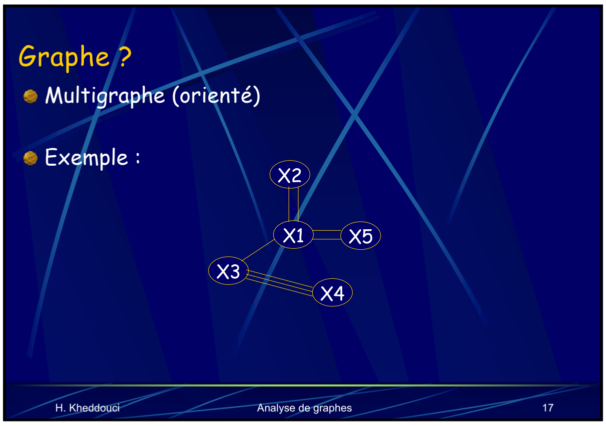


H. Kheddouci — Analyse de graphes — 15

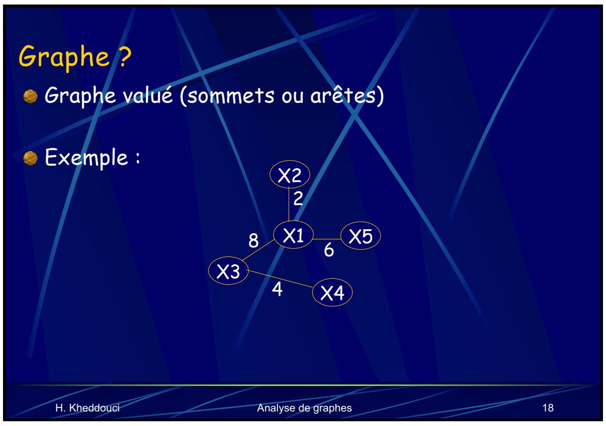
15


Graphe ?
Graphe orienté
défini par G=(X,E) :
X ensemble de sommets ou de nœuds
E ensemble d'arcs
Exemple :
X2
X1
X5
X3
X4
H. Kheddouci
Analyse de graphes
16

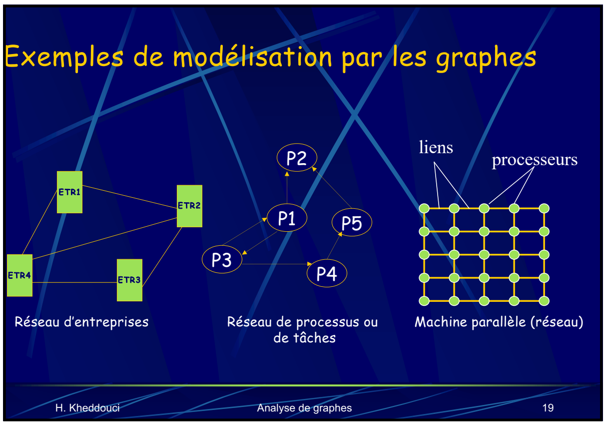
16


Graphe ?
Multigraphe (orienté)
Exemple :
X2
X1
X5
X3
X4
H. Kheddouci
Analyse de graphes
17

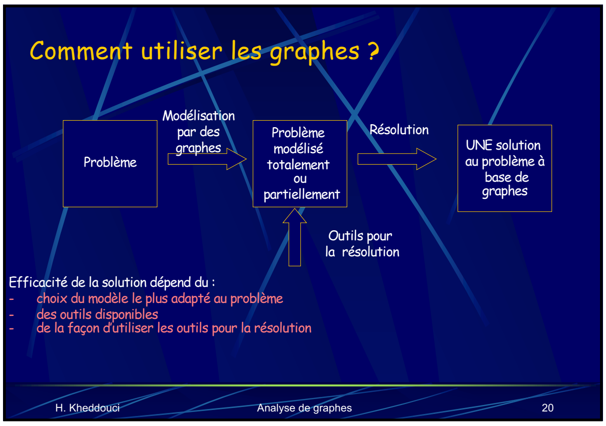
17


Graphe ?
Graphe valué (sommets ou arêtes)
Exemple :
X2
2
8
X1
6
X5
X3
4
X4
H. Kheddouci
Analyse de graphes
18

18


Exemples de modélisation par les graphes
ETR1
ETR2
ETR4
ETR3
Réseau d'entreprises
P2
P1
P5
P3
P4
Réseau de processus ou de tâches
liens
processeurs
Machine parallèle (réseau)
H. Kheddouci
Analyse de graphes
19

19


Comment utiliser les graphes ?
Problème
Modélisation par des graphes
Problème modélisé totalement ou partiellement
Résolution
UNE solution au problème à base de graphes
Outils pour la résolution
Efficacité de la solution dépend du :
- choix du modèle le plus adapté au problème
- des outils disponibles
- de la façon d'utiliser les outils pour la résolution
H. Kheddouci
Analyse de graphes
20

20


Autres définitions
Le degré
Degré d'un sommet = nombre de voisins
Degré maximum = le plus grand degré du graphe
Degré minimum = le plus petit degré du graphe
Charge (importance) d'un nœud, flux entrant/sortant,…
Une chaîne
- Une suite d'arêtes consécutives sur le graphe
- La distance entre deux sommets x, y de G est la longueur de la plus courte chaîne entre ces deux sommets.
Le diamètre d'un graphe est la plus grande distance dans le graphe
Plus court chemin, diamètre, couverture,…
H. Kheddouci
Analyse de graphes
21

21

Autres définitions

- Un cycle

Une chaîne fermée.
Un cycle est hamiltonien s'il passe par tous les sommets du graphe une et une seule fois
Non-terminaison, instabilité, couverture, …

- La connexité

Un graphe est connexe s'il existe une chaîne entre toute paire de sommets du graphe

Si le graphe n'est pas connexe alors il contient des composantes connexes

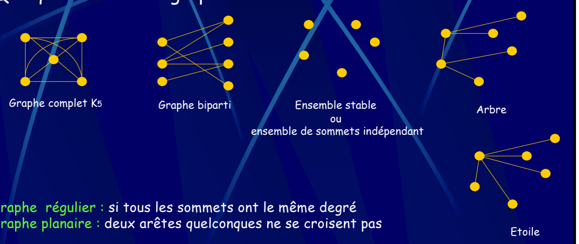
Un graphe est k-connexe si entre toute paire de sommets il existe k chaînes disjointes (en sommets)
La tolérance aux pannes

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 22

22

Autres définitions

Quelques classes de graphes



- Graphe régulier : si tous les sommets ont le même degré
- Graphe planaire : deux arêtes quelconques ne se croisent pas
- …

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 23

23

Thèmes de recherche sur les graphes

- Etude de structures dans les graphes
- Etude de paramètres de graphes

Buts :
- Mieux connaître les graphes
- Dégager des propriétés intéressantes sur les (classes) de graphes
- Développer des algorithmes puissants sur les graphes
- Utiliser les graphes pour modéliser ou résoudre des problèmes d'optimisation, ou autres

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 24

24

PLAN DU COURS

- Définitions & exemples
- Graphes (statiques)
  - Structures dans les graphes
  - Paramètres de graphes
- Graphes dynamiques
- Conclusion

H. Kheddouci Analyse de graphes 25

25

PLAN DU COURS

- Définitions & exemples
- Graphes (statiques)
  - Structures dans les graphes
  - Paramètres de graphes
- Graphes dynamiques
- Conclusion

H. Kheddouci Analyse de graphes 26

26

Thème : Structures dans les graphes

- Décomposition de graphes
  - Décomposition sommets
  - Décomposition arêtes

Décomposer un graphe G en sous-graphes (H_1, H_2,…,H_k) de G tel que $G= H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k$

H. Kheddouci Analyse de graphes 27

27

Etude de structures dans les graphes

A. Décomposition sommets

Problème difficile sur le graphe G !

Diviser pour mieux régner

Décomposition sommets/arêtes

28

Etude de structures dans les graphes

A. Décomposition sommets

Diviser pour mieux régner

Solution sur le graphe est déduite à partir des solutions sur les sous-graphes.

29

Etude de structures dans les graphes

A. Décomposition sommets

1. La récurrence est un outil privilégié en mathématiques et en informatique.
2. Réduction d'une classe vers une autre => décomposition.
3. Dans les graphes plusieurs problèmes très difficiles et coûteux en espace et en temps :
   - Résolution de problèmes NP pour certaines classes de graphes
   - Visualisation de grands graphes, analyse/navigation de grands graphes,
   - Transformations dans les graphes, ...
4. Solution : chercher une décomposition hiérarchique.
5. Mais pas de miracles : chaque décomposition est adaptée à certains problèmes et pas à d'autres.

30

Etude de structures dans les graphes

A. Décomposition sommets

Exemples de décomposition

- Décomposition modulaire

- Soit X dans V(G). On dit que X est un module si pour tout y de (V(G) – X) soit y est relié à tous les éléments de X soit à aucun.
- Un module est trivial s'il est égal à V(G) ou {} ou {v} avec v un sommet quelconque de V(G).
- Un graphe est *premier* s'il ne comporte que des modules triviaux.
- Un module *fort* est un module qui ne chevauche pas avec un autre module.

Définition. *La décomposition modulaire d'un graphe G est l'ensemble de tous ses modules forts. Le graphe peut être représenté sous forme d'arbres avec :*
- le module trivial V(G) comme racine,
-les modules triviaux {v} comme feuilles,
- Les modules non triviaux comme nœuds internes sachant qu'une relation (arête) père-fils *entre deux modules* Y *et* X est ajoutée *si* X est inclus dans Y .

31

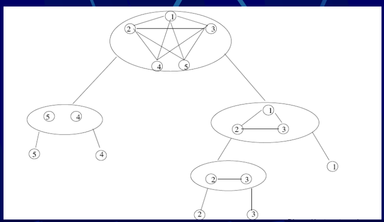
Etude de structures dans les graphes

A. Décomposition sommets

Exemples de décomposition

- Décomposition modulaire

Exemple



32

Etude de structures dans les graphes

A. Décomposition sommets

Exemples de décomposition

- Décomposition modulaire

- La décomposition modulaire est un problème solvable en temps polynomial (il existe plusieurs algorithmes en temps O(n + m)).
- Elle est utile pour un codage compact des graphes (factoriser les listes d'adjacence)
- Elle est utile pour la résolution de problèmes NP dans certaines classes de graphes, en dessins de graphes, reconnaissance de graphes, ...

33

Etude de structures dans les graphes

A. Décomposition sommets

Exemples de décomposition

- Clustering

$C = \{X1, X2, \ldots, Xk\}$ est une couverture de G si $\bigcup Xi = V(G)$ et chaque Xi est connexe.
On appelle Xi un cluster.

- La taille des clusters et l'interaction entre clusters (chevauchement, nombre de liens entre deux clusters) sont de bons critères pour juger la qualité d'une couverture.

Deux paramètres importants :
Rayon d'un cluster (la taille des Clusters)
Sparsité (interaction entre clusters)

34

Etude de structures dans les graphes

Décomposer tout le graphe en sous-graphes

Problème plus général que le clustering:

Peut-on décider si un graphe *G* connexe à *n* sommets est partitionnable (décomposable) en *p* sous-graphes connexes de tailles $k_1, k_2, \ldots, k_p$ pour tout *p* et tout k_i tels que $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$?

Et peut-on construire ces sous-graphes en temps raisonnable ?

Très important également pour les utilisateurs d'une machine parallèle !!

35

Etude de structures dans les graphes

Exemple d'application de la décomposition sommets à la technologie de groupes en production

Produits(5)

Machines(4)

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
M_1	1	0	1	0	0
M_2	0	1	1	0	1
M_3	1	0	0	1	0
M_4	0	0	1	0	1

Question :
Peut-on décomposer le système en k cellules autonomes avec un minimum d'interactions entre elles ?

36

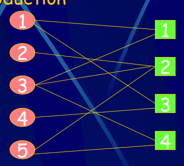
Etude de structures dans les graphes

Exemple d'application de la décomposition sommets à la technologie de groupes en production

Produits(5)

Machines(4)

1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
0	0	1	0	1



Question :
Peut-on décomposer le système en k cellules autonomes avec un minimum d'interactions entre elles ?

Question :
Quel est le minimum d'arêtes à retirer du graphe pour le décomposer en k sous-graphes bipartis connexes (k-décomposition) ?

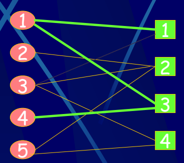
37

Etude de structures dans les graphes

Produits(5)

Machines(4)

1	0	1	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
0	0	1	0	1



Question :
Peut-on décomposer le système en k cellules autonomes avec un minimum d'interaction entre elles ?

Question :
Quel est le minimum d'arêtes à retirer du graphe pour le décomposer en k sous-graphes bipartis connexes (k-décomposition) ?

38

Thème : Structures dans les graphes

B. Décomposition arêtes

Décomposer un graphe G en sous-graphes (H_1, H_2,…,H_k) de G tels que :

- $G= H1 \cup H2 \cup ,…, \cup Hk$
- H_i ensemble d'arêtes
- Les Hi peuvent être différents ou isomorphes à un certain H

39

Etude de structures dans les graphes

B. Décomposition arêtes

Un graphe donné contient t-il un ou plusieurs sous-graphes particuliers ?

Étant donnés une structure S et un graphe G :

- G contient-il S ?
- Combien de copies de S dans G ?
- peut-on les construire ?
- G contient-il des structures voisines à S?
- …

Conjectures : $(G_1, G_2,\ldots,G_k)$ --> G, sous conditions

G_i : clique, cycle, arbre, chaîne,…

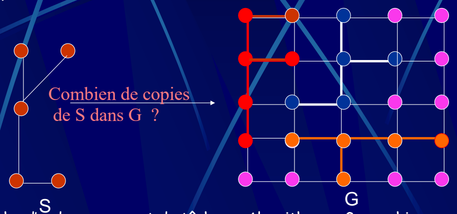
G : graphe complet, graphes réguliers, ….

H. Kheddouci   Analyse de graphes   40

40

Etude de structures dans les graphes

Application dans un réseau de machines



S : graphe d'ordonnancement de tâches = Algorithme, G : machine parallèle ou réseau de machines

- Exécution simultanée
- Test des processeurs de l'architecture
- Copies de secours/tolérance aux pannes
- …

H. Kheddouci   Analyse de graphes   41

41

Etude de structures dans les graphes

Placement de graphes

Définition

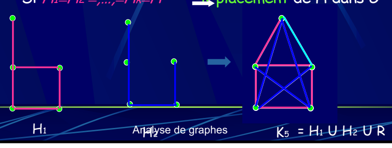
Placement $H_1, H_2, \ldots, H_k$ dans G :

$$E(G)=H'_1 \cup H'_2 \cup \ldots \cup H'_k \cup R$$

avec H'_i isomorphe à H_i et R ensemble des arêtes restantes.

Remarques : - Si $R = \emptyset$, alors Placement = décomposition de G en H_i

- Si $H_1 \equiv H_2 \equiv,\ldots,\equiv H_k \equiv H$ → k-placement de H dans G



H. Kheddouci   Analyse de graphes   42

42

Etude de structures dans les graphes

Placement de graphes

Historique

Problème : ($H_1, H_2, \ldots, H_k$) dans K_n

2 variantes du problème de placement :

- Placer un maximum de graphes dans K_n !

  Exemple : Kheddouci, Saclé, Marshall & Woźniak en 2001,

  $(G_1, G_2, G_3) \longrightarrow K_n$, Si $|E(G_i)| \leq n-3$, pour $i=1,2,3$

- Placer un nombre fixe de graphes dans $K_n - E(G)$!

Hedetniemi et al. en 1981

2-placement de T (non-étoile) dans K_n

H. Kheddouci Analyse de graphes 43

43

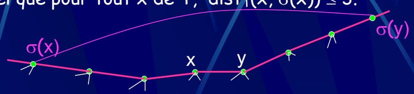
Etude de structures dans les graphes

Placement de graphes

Historique

Woźniak en 1991 :

Théorème : Il existe un 2-placement σ de T (non-étoile) dans K_n tel que pour tout x de T, $dist_T(x, \sigma(x)) \leq 3$.



Corollaire :

Il existe un 2-placement de T (non-étoile) dans T^7

T^p est construit à partir de T en ajoutant des arêtes entre toute paire de sommets à distance au plus p

H. Kheddouci Analyse de graphes 44

44

Etude de structures dans les graphes

Placement de graphes

Historique

Théorème ***Kheddouci, Saclé & Woźniak 2000 :***

Deux copies arête-disjointes d'un arbre T non-étoile sont plaçables dans T^4

Conjecture ***Kheddouci, Saclé & Woźniak 2000 :***

Deux copies arête-disjointes d'un arbre T non-étoile sont plaçables dans T^3

Remarque : T^2 n'a pas suffisamment d'arêtes pour placer 2 copies de T

H. Kheddouci Analyse de graphes 45

45

Etude de structures dans les graphes

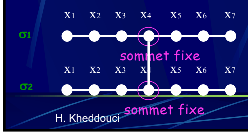
Placement de graphes

Conjecture *Kheddouci, Saclé & Woźniak 2000* :

Deux copies arête-disjointes d'un arbre T non-étoile sont plaçables dans T^3

Problème

Plus difficile à cause des sommets fixes $\sigma(x)=x$, pour $x \in V(T)$.



$\forall \sigma$ tel que $\sigma(T) \subset T^3$
nous avons $\sigma(x_4) = x_4$

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 46

46

Etude de structures dans les graphes

Placement de graphes

Exercice

Est-ce qu'il existe un $\sigma(P(x,y)) \subset (P(x,y))^3$, **avec** $dist_P(x, \sigma(x)) = 1$ et $dist_P(y, \sigma(y)) \in \{0,1\}$?

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 47

47

Etude de structures dans les graphes

Autres applications :

- Extraction de connaissances (CBR,…)

Base de cas = Graphe
Requête = sous-graphe
→ Meilleur matching

- Découverte/composition de services Web

Graphe de services, quel graphe ?
Requête = sous-graphe, quel sous-graphe ?

- Extraction d'information d'une base de données

Base de données distribuée = graphe
Requête = sous-graphe

- Localisation d'objets dans des images
- reconnaissance de l'écriture,
- …

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 48

48

Etude de structures dans les graphes

- Mieux étudier un problème complexe (par décomposition)
- Mieux paralléliser les algorithmes
- Choisir une sous-structure adaptée pour résoudre un problème
- Perfectionner les algorithmes de recherche, découverte, diffusion,…
- …

49

PLAN DU COURS

- Définition & exemples
- Graphes (statiques)
  - Structures dans les graphes
  - Paramètres de graphes
- Graphes dynamiques
- Conclusion

50

Paramètres de graphes

Paramètre d'un graphe : Une évaluation sur les sommets et/ou les arêtes d'un graphe.

Exemples :
- Colorations de sommets et d'arêtes (nombre ou indice chromatique,…)
- Feedback Vertex Set : minimum de sommets à retirer d'un graphe pour casser tous les cycles
- Longueur du plus long cycle,
- Ensemble de sommets indépendants,
- …

51

Paramètres de graphes

Buts :

- Caractériser des familles de graphes ayant une propriété donnée (hamiltonisme,…)
- Transformer un graphe en un autre vérifiant une propriété souhaitée (graphe régulier -> multigraphe irrégulier,…),
- Modéliser des problèmes réels (en informatique ou autre). Le calcul du paramètre permet de résoudre le problème en question.

52

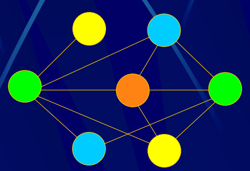
Paramètre de Coloration

- *Coloration d'un graphe :* affecter une couleur à chaque sommet de sorte que deux sommets reliés par une arête aient des couleurs différentes

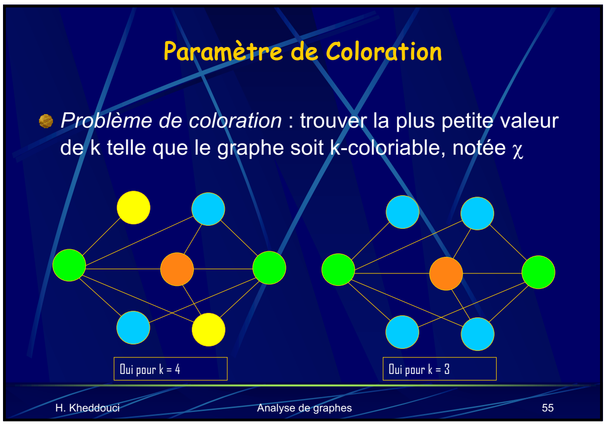
53

Paramètre de Coloration

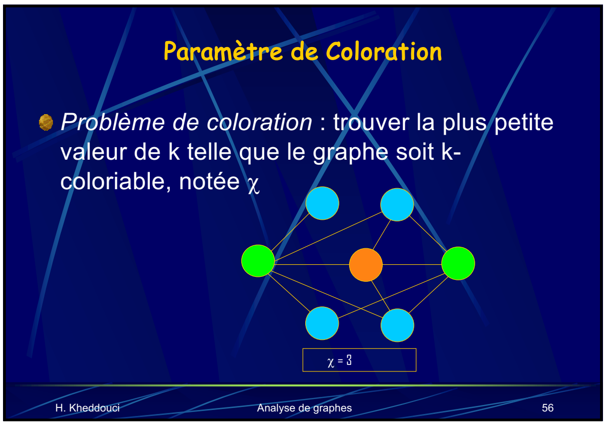
- *Coloration d'un graphe :* affecter une couleur à chaque sommet de sorte que deux sommets reliés par une arête aient des couleurs différentes



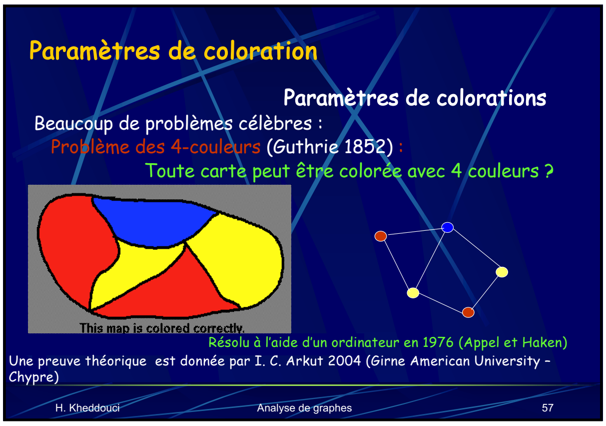
54


Paramètre de Coloration
Problème de coloration : trouver la plus petite valeur de k telle que le graphe soit k-coloriable, notée χ
Oui pour k = 4
Oui pour k = 3
H. Kheddouci
Analyse de graphes
55

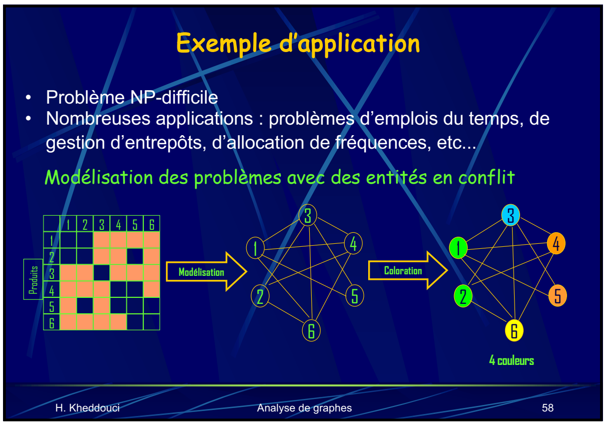
55


Paramètre de Coloration
Problème de coloration : trouver la plus petite valeur de k telle que le graphe soit k-coloriable, notée χ
χ = 3
H. Kheddouci
Analyse de graphes
56

56

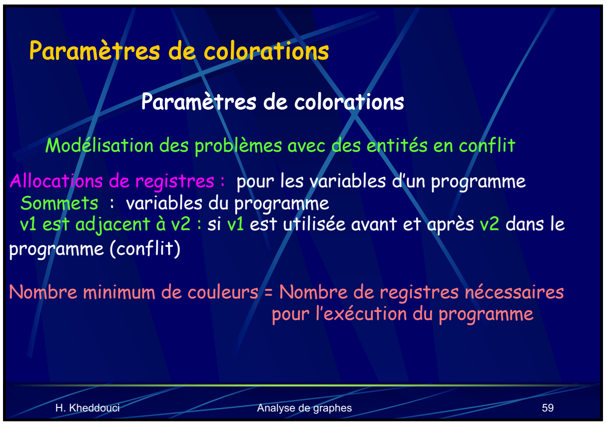

Paramètres de coloration
Paramètres de colorations
Beaucoup de problèmes célèbres :
Problème des 4-couleurs (Guthrie 1852) :
Toute carte peut être colorée avec 4 couleurs ?
This map is colored correctly.
Résolu à l'aide d'un ordinateur en 1976 (Appel et Haken)
Une preuve théorique est donnée par I. C. Arkut 2004 (Girne American University - Chypre)
H. Kheddouci
Analyse de graphes
57

57



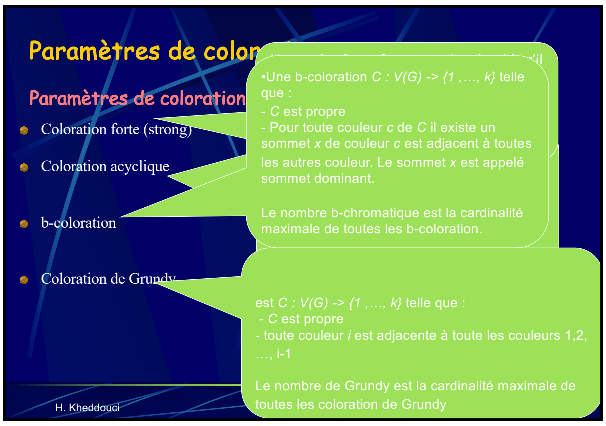
Exemple d'application
• Problème NP-difficile
• Nombreuses applications : problèmes d'emplois du temps, de gestion d'entrepôts, d'allocation de fréquences, etc...
Modélisation des problèmes avec des entités en conflit
Produits
Modélisation
Coloration
4 couleurs
H. Kheddouci
Analyse de graphes
58

58



Paramètres de colorations
Paramètres de colorations
Modélisation des problèmes avec des entités en conflit
Allocations de registres : pour les variables d'un programme
Sommets : variables du programme
v1 est adjacent à v2 : si v1 est utilisée avant et après v2 dans le programme (conflit)
Nombre minimum de couleurs = Nombre de registres nécessaires pour l'exécution du programme
H. Kheddouci
Analyse de graphes
59

59



Paramètres de color
Paramètres de coloration
Coloration forte (strong)
Coloration acyclique
b-coloration
Coloration de Grundy
•Une b-coloration C : V(G) -> {1 ,…, k} telle que :
- C est propre
- Pour toute couleur c de C il existe un sommet x de couleur c est adjacent à toutes les autres couleur. Le sommet x est appelé sommet dominant.
Le nombre b-chromatique est la cardinalité maximale de toutes les b-coloration.
est C : V(G) -> {1 ,…, k} telle que :
- C est propre
- toute couleur i est adjacente à toute les couleurs 1,2, …, i-1
Le nombre de Grundy est la cardinalité maximale de toutes les coloration de Grundy
H. Kheddouci

60

Paramètres de graphes

Paramètres de coloration

- Coloration forte (strong)

C une coloration propre C1, C2, …, Ck telle que $\forall$ u $\in$ V(G), $\exists$ i $\in$ {1,…,k} : u est adjacente à tous les sommets de Ci

- Meilleure diffusion dans un réseau
- Meilleure diffusion par classe (message spécifique)
- Sommets dominants des classes (meilleure couverture des couleurs)

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 61

61

Paramètres de graphes

Paramètres de coloration

K-coloration forte «Strong k-coloring»

- Un graphe G est fortement k-colorable s'il admet une coloration propre $C^1, C^2, \dots, C^k$ telle que:

$$\forall\, u \in V(G),\ \exists\, i \in \{1,\dots,k\} : u \sim C^i$$

- Un graphe G fortement k-colorable admet une k-coloration forte

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 62

62

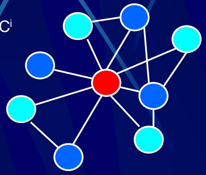
Paramètres de graphes

Paramètres de coloration

k-coloration forte «Strong k-coloring»

- Un graphe G (simple et connexe) est **Strictement Fortement k-colorable** s'il admet une coloration propre $C^1, C^2, \dots, C^k$ telle que:

$$\begin{cases} \forall\, u \in V(G),\ \exists\, i \in \{1,\dots,k\} : u \sim C^i \\ \text{et} \\ \forall\, i \in \{1,\dots,k\} : C^i \neq \varnothing \end{cases}$$



Le Strict Strong k-coloring est Np-Complet pour k ≥ 3.

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 63

63

Paramètres de graphes

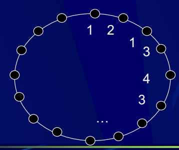
Paramètres de coloration

k-coloration forte «Strong k-coloring»

- Une borne inférieure intuitive: (cette coloration est propre)

$$\chi(G) \le \chi_{ss}(G)$$

$$\chi_{ss}(P_n) = 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$



$$\chi_{ss}(C_n) = 2\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$$

n >= 5

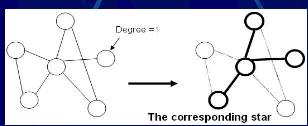
64

Paramètres de graphes

k-coloration forte «Strong k-coloring»

L'idée d'un algorithme de construction d'une k-coloration forte

- Chercher les sous-graphes bipartis complets ou les étoiles dans le graphe
- Commencer par les étoiles (sommets de degré 1).



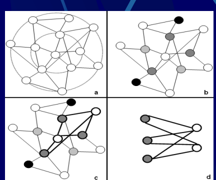
65

Paramètres de graphes

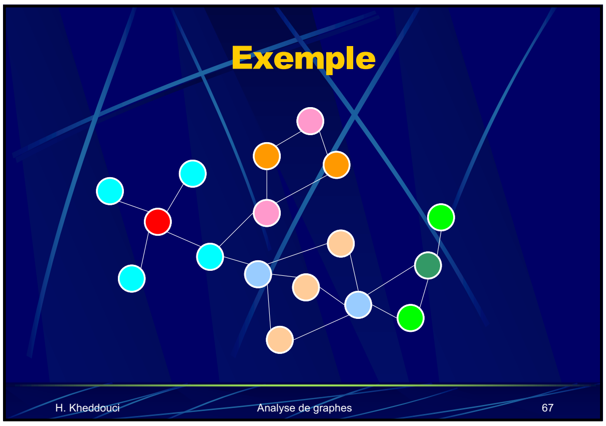
k-coloration forte «Strong k-coloring»

L'idée d'un algorithme de construction d'une k-coloration forte

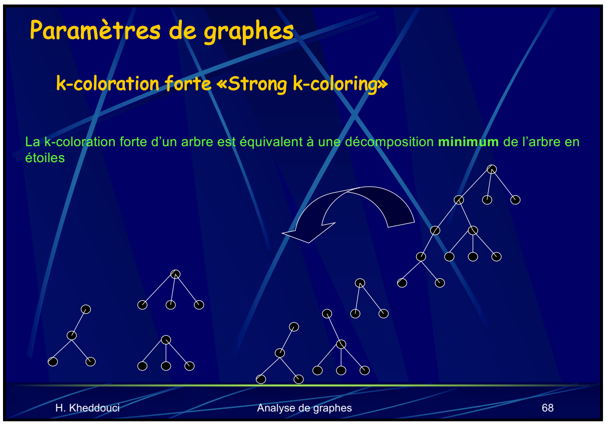
- Puis, construire les bipartis complets.



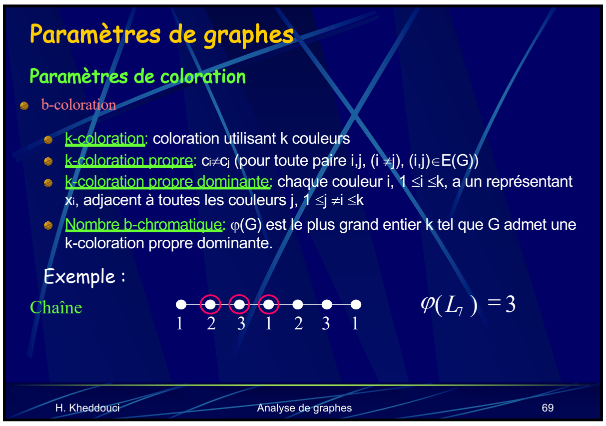
66


Exemple
H. Kheddouci
Analyse de graphes
67

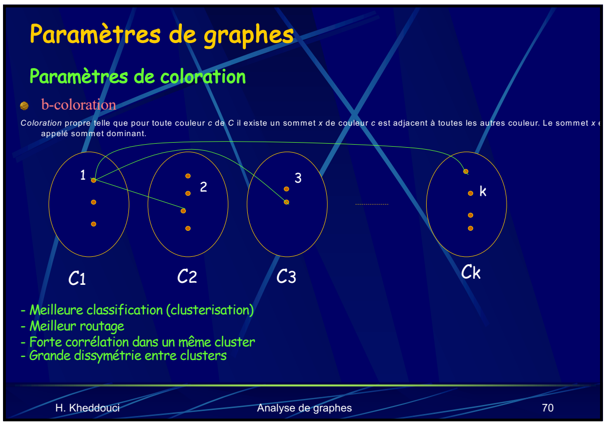
67


Paramètres de graphes
k-coloration forte «Strong k-coloring»
La k-coloration forte d'un arbre est équivalent à une décomposition minimum de l'arbre en étoiles
H. Kheddouci
Analyse de graphes
68

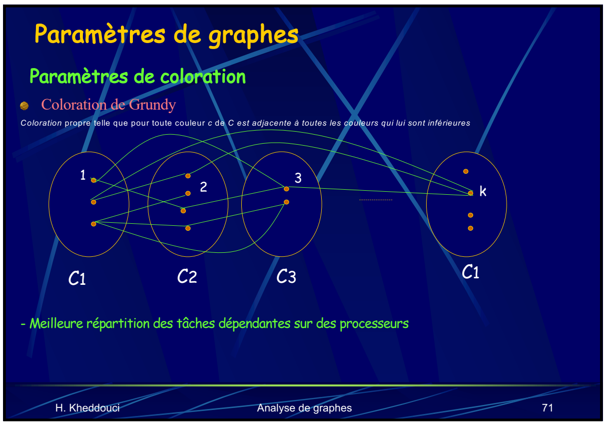
68


Paramètres de graphes
Paramètres de coloration
b-coloration
k-coloration: coloration utilisant k couleurs
k-coloration propre: $c_i \neq c_j$ (pour toute paire i,j, (i ≠j), (i,j)∈E(G))
k-coloration propre dominante: chaque couleur i, 1 ≤i ≤k, a un représentant x_i, adjacent à toutes les couleurs j, 1 ≤j ≠i ≤k
Nombre b-chromatique: φ(G) est le plus grand entier k tel que G admet une k-coloration propre dominante.
Exemple :
Chaîne
1 2 3 1 2 3 1
$\varphi(L_7) = 3$
H. Kheddouci
Analyse de graphes
69

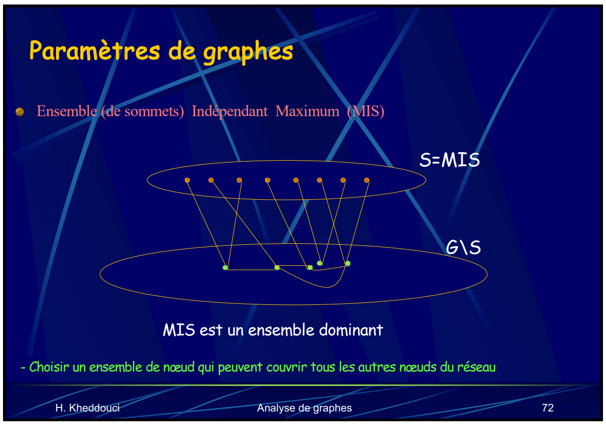
69


Paramètres de graphes
Paramètres de coloration
b-coloration
Coloration propre telle que pour toute couleur c de C il existe un sommet x de couleur c est adjacent à toutes les autres couleur. Le sommet x e
appelé sommet dominant.
1
2
3
k
C1
C2
C3
Ck
- Meilleure classification (clusterisation)
- Meilleur routage
- Forte corrélation dans un même cluster
- Grande dissymétrie entre clusters
H. Kheddouci
Analyse de graphes
70

70


Paramètres de graphes
Paramètres de coloration
Coloration de Grundy
Coloration propre telle que pour toute couleur c de C est adjacente à toutes les couleurs qui lui sont inférieures
1
2
3
k
C1
C2
C3
C1
- Meilleure répartition des tâches dépendantes sur des processeurs
H. Kheddouci
Analyse de graphes
71

71


Paramètres de graphes
Ensemble (de sommets) Indépendant Maximum (MIS)
S=MIS
G\S
MIS est un ensemble dominant
- Choisir un ensemble de nœud qui peuvent couvrir tous les autres nœuds du réseau
H. Kheddouci
Analyse de graphes
72

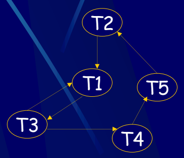
72

Paramètres de graphes

- Feedback Vertex set (FVS)

Feedback Vertex set (FVS) : ensemble minimum de sommets à retirer d'un graphe pour casser tous les cycles.

Graphe de dépendance



- Système d'exploitation
- Circuits VLSI
- …

73

Paramètres de graphes

- Algorithmes pour le calcul du paramètre
- Calcul des bornes (supérieure et inférieure) et valeur exacte du paramètre pour des classes de graphes
- Proposée un graphe pour lequel le calcul du paramètre donne la valeur souhaitée
- Version distribuée
- Nouveaux paramètres liés à des problèmes à étudier !!!

74

Les graphes statiques sont-ils suffisants pour modéliser tous les systèmes ?

Non ! Pas les systèmes dynamiques !

75

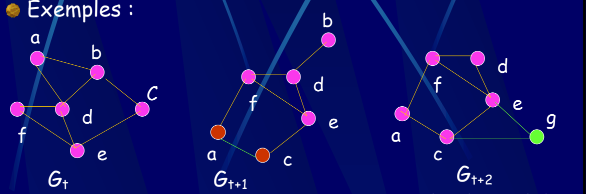
PLAN DU COURS

- Présentation
- Graphes (statiques)
- **Graphes dynamiques**
- Applications
- Conclusion

76

Graphe dynamique ?

- défini par $G_t=(X_t,E_t)$:
  - X_t ensemble de sommets à l'instant t
  - E_t ensemble d'arêtes (ou d'arcs) à l'instant t
- Exemples :



mvt a et c, + arête (a,c), -(a,b), -(b,c)

Départ de b, arrivée de g, + arêtes (g,e),(g,c)

77

Graphe dynamique

- Définition :

- $G_{t+1}= G_t \pm$ {sommets, arêtes}
- une suite de graphes $G_0, G_1, \ldots, G_n$:

Transformation de graphes $G_0 \xrightarrow{\sigma 01} G_1 \xrightarrow{\sigma 12} G_2 \xrightarrow{\sigma 23} \ldots \xrightarrow{\sigma n\text{-}1,n} G_n$

- Propriétés des graphes dynamiques
  - Propriétés classiques → propriétés dans le temps
    plus court chemin dans le temps, connexité dans le temps,…
  - Nouvelles propriétés spécifiques : distribution de degrés, diamètre moyen,…
  - Nouvelle algorithmique : algorithme dynamique, online,…

78

Graphe dynamique

- **Définition**

$G_t=(X_t,E_t)$:

- X_t ensemble de sommets à l'instant t
- E_t ensemble d'arêtes (ou d'arcs) à l'instant t

- **Changements topologiques :**

- changements d'états
- pannes sommets/arêtes
- mobilité : départ/arrivée sommets/arêtes

- **Exemples :** systèmes dynamiques et/ou distribués

- Systèmes reconfigurables
- Systèmes à pannes
- Réseaux de mobiles
- Graphe Web
- Réseaux de véhicules
- ....

H. Kheddouci Analyse de graphes 79

79

Graphe dynamique et algorithme dynamique

Etude des propriétés de la structure dynamique :
Propriété P vérifiée dans G_t, est-elle vraie dans G_{t+1} ?
avec $G_{t+1}= G_t \pm$ {sommets, arêtes}

Algorithmique dynamique :
Algorithme qui prend en compte les changements topologiques ajout/suppression sommets/arêtes

H. Kheddouci Analyse de graphes 80

80

Graphe dynamique et algorithme dynamique

Problème :
Etant donné un algorithme A sur G_t,

Comment A fonctionnera sur G_{t+1} sans recalculer entièrement la solution sur G_{t+1} ?

H. Kheddouci Analyse de graphes 81

81

Algorithmes dynamiques

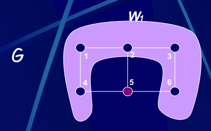
Hypothèse : Un algorithme sur G !

a) Ajout d'un sommet
b) Suppression d'un sommet
c) Ajout d'arête
d) Suppression d'arête

Totalement dynamique a) + b) + c) +d)
Partiellement dynamique a) + b) ou c) +d)

82

Algorithme Totalement Dynamique pour la construction d'un Minimal Feedback Vertex Set



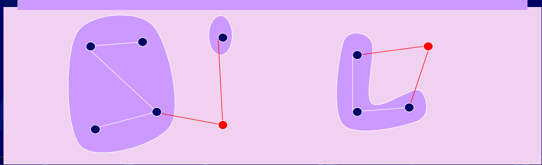
○ Un sommet dans F (i.e=f).
● Un sommet dans S (i.e=s).
W_1 La composante connexe numéro *1* de *G[F]*.

- Ajouter un sommet.
- Ajouter une arête.
- Supprimer un sommet.
- Supprimer une arête.

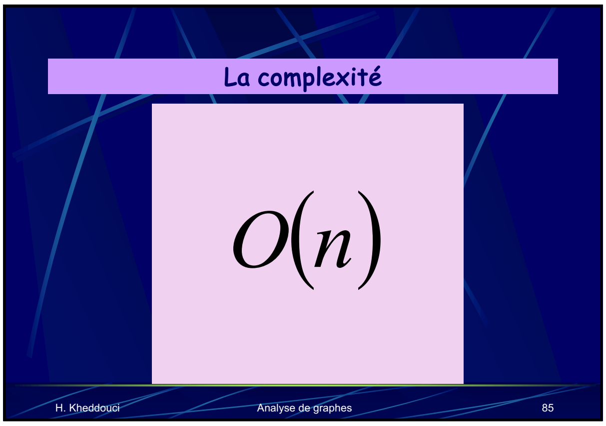
83

Ajouter un sommet

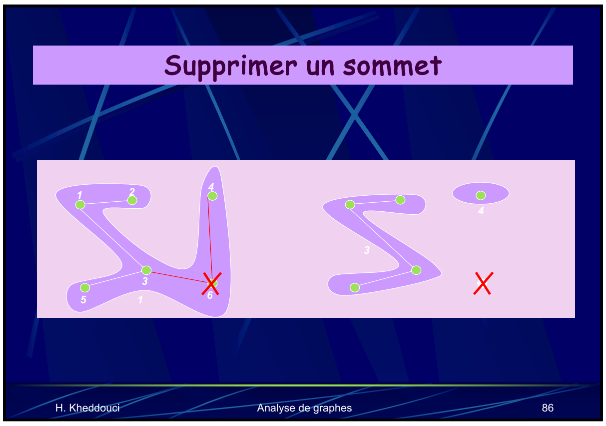
- **Add_Vertex(i)**
  - ***Si*** *i est un sommet cyclique avec F* ***alors*** *i.e=s (i∈S);*
  - ***Sinon*** *i.s=2 (i∈F).*



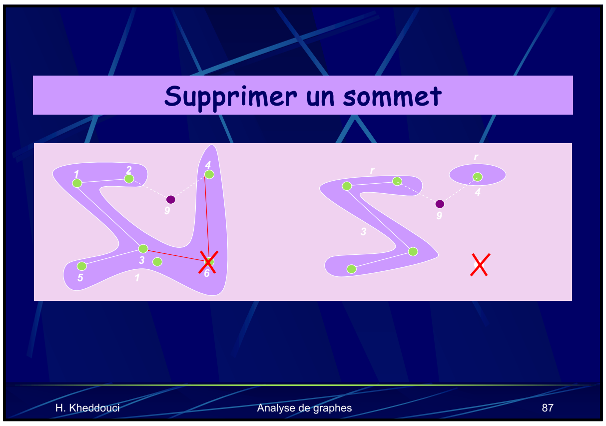
84


La complexité
O(n)
H. Kheddouci
Analyse de graphes
85

85


Supprimer un sommet
H. Kheddouci
Analyse de graphes
86

86


Supprimer un sommet
H. Kheddouci
Analyse de graphes
87

87

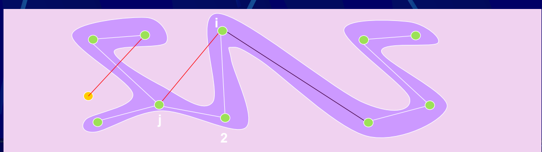
La complexité

$$O\big((\Delta-1)(n-\Delta)\big)$$

H. Kheddouci Analyse de graphes 88

88

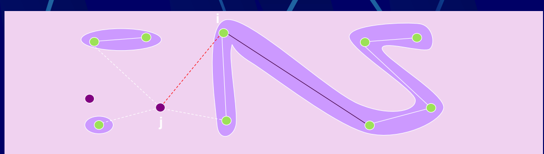
Ajouter une arête



H. Kheddouci Analyse de graphes 89

89

Ajouter un arête



H. Kheddouci Analyse de graphes 90

90

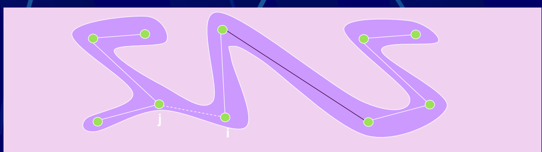
La complexité

$$O((\Delta - 1)(n - \Delta))$$

H. Kheddouci Analyse de graphes 91

91

Supprimer une arête



H. Kheddouci Analyse de graphes 92

92

La complexité

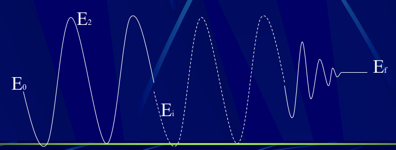
$$O(n)$$

H. Kheddouci Analyse de graphes 93

93

Algorithmes auto-stabilisants

- ✓ Le protocole auto-stabilisant a été introduit par Dijkstra en 1973.
- ✓ Il garantie la convergence vers un état légitime dans un temps fini sans intervention extérieure.
- ✓ Démon/Ordonnanceur sur les sommets actifs/privilégiés :
  - centralisé
  - distribué



94

Algorithme auto-stabilisant pour le routage en présence de pannes

Le problème ...

Etant donnés,

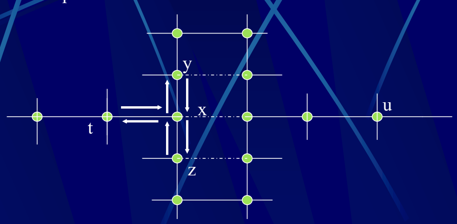
- Une grille à 2 dimensions
- Un routage à déflection
- Quelques liens (de communication) tombent en panne en temps réel !

Comment le réseau peut être auto-stabilisant (en présence de pannes sur ses liens) : garantir à un message d'atteindre sa destination dans un nombre fini d'étapes ?

95

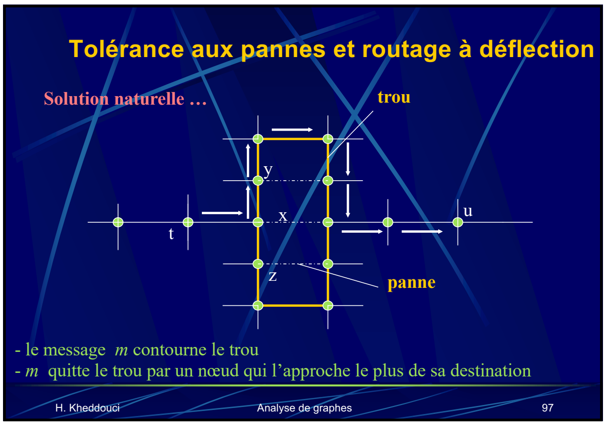
Tolérance aux pannes et routage à déflection

Situation bloquante …

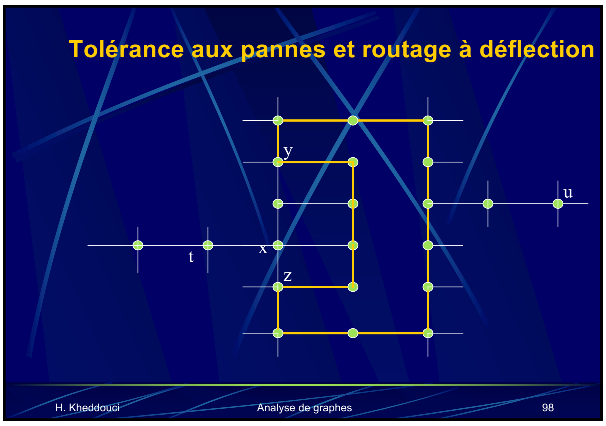


Le message *m* ne peut pas atteindre sa destination u !!

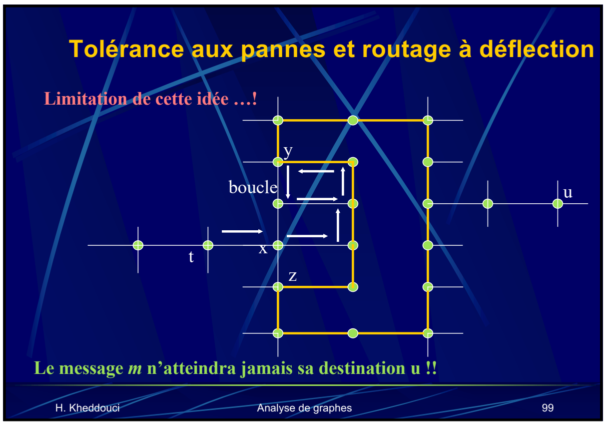
96


Tolérance aux pannes et routage à déflection
Solution naturelle …
trou
y
x
t
u
z
panne
- le message m contourne le trou
- m quitte le trou par un nœud qui l'approche le plus de sa destination
H. Kheddouci
Analyse de graphes
97

97


Tolérance aux pannes et routage à déflection
y
u
t
x
z
H. Kheddouci
Analyse de graphes
98

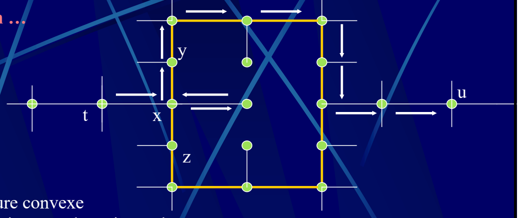
98


Tolérance aux pannes et routage à déflection
Limitation de cette idée …!
y
boucle
u
t
x
z
Le message m n'atteindra jamais sa destination u !!
H. Kheddouci
Analyse de graphes
99

99

Tolérance aux pannes et routage à déflection

Solution …



- structure convexe
- ne contient pas de petits cycles
- le message *m* empreinte le périmètre de cette structure
- *m* quitte cette structure par un nœud qui l'approche le plus de sa destination
- *m ne*

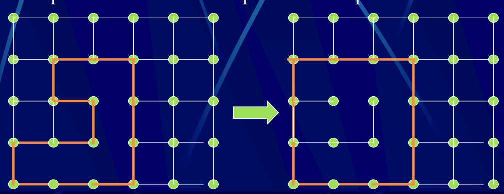
100

Tolérance aux pannes et routage à déflection

SOLUTION

Etendre le trou à une structure convexe appelée **enveloppe (covering)**

Une enveloppe d'un trou est la plus petite sous-grille contenant ce trou sachant que la bordure ne contient pas de liens en pannes



101

Algorithme de construction de l'enveloppe

Contraintes

- Le réseau reste connexe
- Un nœud peut être adjacent à au plus 3 pannes
- Les pannes interviennent qu'au niveau des liens de communication
- Les liens de la bordure de la grille ne peuvent pas être en pannes

102

Algorithme séquentiel de construction d'une enveloppe

Soit N1 l'ensemble des nœuds de degré 1
Soit N2 l'ensemble des nœuds de degré 2

```
do
begin
 while (N1 <> 0)
  begin
   soit  x de N1 et xy de E(M(d1,d2));
   d(y)--;
   if (d(y)==1) then
              begin
               N1= N1 U {y};
               N2=N2 \ {y};
              end
  if d(y)==2 then  N2= N2 U {y};
  N1=N1 \ {x};
 end
```

```
 soit z de N2 et zt de E(M(d1,d2));
 bloquer(zt);
 d(z)--;
 d(t)--;
 N1= N1 U {z};
 N2=N2 \ {z};
end
 while (N1 <> 0) et (N2 <> 0)
```

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 103

103

Algorithme distribué de construction de l'enveloppe

```
Tout nœud de degré 1 (appartient à  N1)
Begin
Il informe son voisin qu'il possède un degré 1
End

Tout nœud de degré 2 (appartient à N2)
begin
If  ce nœud reçoit un message d'un nœud de
degré 1 then begin
              Il préserve ce lien
               Il  décrémente son degré de 1
              end
        else begin
             Il coupe le lien avec un noeud
               de degré différent de 1
              Il  décrémente son degré de 1
              end
end
```

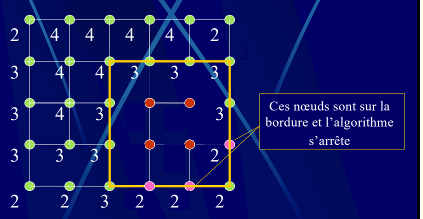
```
Tout nœud de degré 3 ou 4
begin
If ce nœud  reçoit un message à partir
d'un nœud de degré 1
     then begin
        Il préserve ce lien
        Il  décrémente son degré de 1
      end

 If ce nœud  reçoit un message à partir
d'un nœud de degré 2
 then Il  décrémente son degré de 1
end
```

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 104

104

Algorithme distribué de construction d'une enveloppe

Exemple

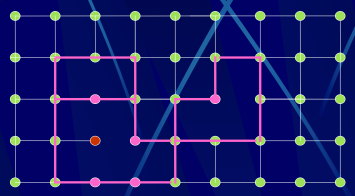


H. Kheddouci — Analyse de graphes — 105

105

Algorithme distribué de construction d'une enveloppe

Exemple



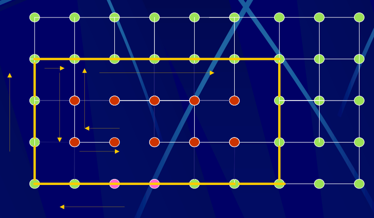
- Nœud de degré 1
- Nœud de degré 2
- Nœud de degré 3 or 4

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 106

106

Algorithme distribué de construction d'une enveloppe

Exemple

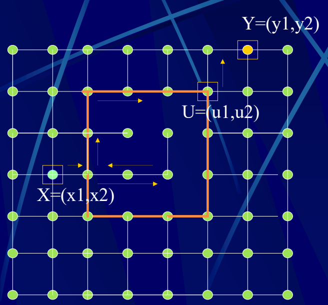


- Nœud de degré 1
- Nœud de degré 2
- Nœud de degré 3 or 4

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 107

107

Un message atteint sa destination



- Si la destination est sur l'enveloppe => trivial
- Sinon il existe un nœud U sur l'enveloppe à partir duquel le message *m* quitte l'enveloppe et s'approche plus de sa destination

H. Kheddouci — Analyse de graphes — 108

108