Chapter02 수의 표현

1.

(1) $3921.2711_{10} = 3\times10^3 + 9\times10^2 + 2\times10^1 + 1\times10^0 + 2\times10^{-1} + 7\times10^{-2} + 1\times10^{-3} + 1\times10^{-4}$

(2) $11011.101101_2 = 1\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0 + 1\times2^{-1} + 0\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 1\times2^{-4}$
$+ 0\times2^{-5} + 1\times2^{-6}$

(3) $716.24_8 = 7\times8^2 + 1\times8^1 + 6\times8^0 + 2\times8^{-1} + 4\times8^{-2}$

(4) $A40E.10C_{16} = 10(A) + 16^3 + 4\times16^2 + 0\times16^1 + 14(E)\times16^0 + 1\times16^{-1} + 0\times16^{-2} + 12(C)\times16^{-3}$

(5) $78142.554_{10} = 7\times10^4 + 8\times10^3 + 1\times10^2 + 4\times10^1 + 2\times10^0 + 5\times10^{-1} + 5\times10^{-2} + 4\times10^{-3}$

(6) $101111001.01001_2 = 1\times2^8 + 0\times2^7 + 1\times2^6 + 1\times2^5 + 1\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$
$+ 0\times2^{-1} + 1\times2^{-2} + 0\times2^{-3} + 0\times2^{-4} + 1\times2^{-5}$

(7) $4512.2761_8 = 4\times8^3 + 5\times8^2 + 1\times8^1 + 2\times8^0 + 2\times8^{-1} + 7\times8^{-2} + 6\times8^{-3} + 1\times8^{-4}$

(8) $30D1.BF_{16} = 3\times16^3 + 0\times16^2 + 13(D)\times16^1 + 1\times16^0 + 11(B)\times16^{-1} + 15(F)\times16^{-2}$

2.

$\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$	$\frac{3}{29}$ (하한항)	$\frac{5}{255} = \frac{1}{51}$	$\frac{78}{234} = \frac{39}{117}$	$\frac{16}{81}$ (하한항)
$\frac{7}{13}$ (하한항)	$\frac{21}{56} = \frac{3}{8}$	$\frac{42}{144} = \frac{7}{24}$	$\frac{19}{33}$ (하한항)	$\frac{51}{129} = \frac{17}{43}$

3.

유리수 : $5.525252525252\cdots$, $\sqrt{36}$, $4.153789275223...$, $\sqrt{225}$, $56.5656565656...$, $\sqrt{484}$

∵ 소수점 이하 자리가 유한하거나 일정수가 반복되고 있다.

무리수 : $1.142785351821\cdots$, $\sqrt{91}$, $1246.18523699874...$, $\sqrt{79}$

∵ 소수점 이하 자리가 임의의 숫자들로 무한히 나열된다.

4.

(1) $10 \neq 3628800$ (2) $\sum_{k=6}^{13} k^2 + 5 = 769$ (3) $\sum_{k=1}^{5}(6k + k^2) = 148$ (4) $\sum_{i=3}^{9} 8 = 56$

(5) $\sum_{i=6}^{13}(k^2 + 5) = 704$ (6) $\sum_{i=-3}^{4} i = 4$ (7) $\prod_{k=1}^{5} 5k = 375000$ (8) $\prod_{i=10}^{20} 3 = 177147$

(9) $\prod_{i=1}^{3}(i+1)^i = 1152$ (10) $\prod_{j=-2}^{2} j^2 = 0$ (11) $\prod_{j=-8}^{-2}(j+1) = -5040$ (12) $\prod_{j=-8}^{-2} j + 1 = -40319$

5.

(1) $6|72 = 12$ (2) $8 \nmid 90$ $90 \bmod 8 = 2$ (3) $4|124 = 31$

(4) $10 \nmid 211$ $211 \bmod 10 = 1$ (5) $13 \nmid 199$ $199 \bmod 13 = 4$ (6) $17|136 = 8$

(7) $9 \bmod 2 = 1$ (8) $142 \bmod 6 = 4$ (9) $198 \bmod 18 = 0$ $198|18$

(10) $294 \bmod 6 = 0$ $294|6$ (11) $255 \bmod 13 = 8$ (12) $186 \bmod 6 = 0$ $6|186$

6.

(1) $35.6875_{10} = 100011.1011_2 = 43.54_8 = 23.B_{16}$

(2) $157.40625_{10} = 10011101.01101_2 = 235.32_8 = 9D.68_{16}$

(3) $823.7265625_{10} = 1100110111.1011101_2 = 1467.564_8 = 337.BA_{16}$

(4) $1296.79296875_{10} = 10100010000.11001011_2 = 2420.626_8 = 510.CB_{16}$

7.

(1) $1011101.1101_2 = 93.8125_{10}$

(2) $11100111.101011_2 = 321.671875_{10}$

(3) $1010110.001101_2 = 85.203125_{10}$

(4) $263.156_8 = 179.21484375_{10}$

(5) $711.653_8 = 457.833984375_{10}$

(6) $431.77_8 = 281.984375_{10}$

(7) $FED.BCA_{16} = 4077.73681640625_{10}$

(8) $12D.29_{16} = 301.16015625_{10}$

(9) $A031.DE_{16} = 41009.8671875_{10}$

8.

(1) $1100111010110.10111111001_2 = 14726.5762_8 = 19D6BF2_{16}$

(2) $101100100011110.0001010001011_2 = 54436.05054_8 = 591E.1458_{16}$

(3) $10000101111011.1111100101101_2 = 200573.76244_8 = 217B.F968_{16}$

(4) $1110001100101001100011 1.11100011001_2 = 34312307.7062_8 = 7194C7.E32_{16}$

9.

(1) $15.36_8 = 1101.01111_2$

(2) $1623.7715_8 = 1110010011.111111001101_2$

(3) $5216.3471_8 = 101010001110.011100111001_2$

(4) $39E.8AD2_{16} = 1110011110.1000101_2$

(5) $C04B.100F_{16} = 1100000001001011.0001000000001111_2$

(6) $AB12.CD98_{16} = 1010101100010010.1100110110011_2$

10.

부호화-절대값	부호화-1의 보수	부호화-2의 보수
(1) 00111010	00111010	00111010
(2) 11011011	10100100	10100101
(3) 10001110	11110001	11110010
(4) 01100010	01100010	01100010
(5) 10100111	11011000	11011001
(6) 00010101	00010101	00010101

11.

10진수	부호화-절대값	부호화-1의 보수	부호화-2의 보수
$+42_{10}$	00101010	00101010	00101010
-42_{10}	10101010	11010101	11010110
$+77_{10}$	01001101	01001101	01001101
-77_{10}	11001101	10110010	10110011

(1) $42_{10} + 77_{10} = 00101010 + 01001101 = 01110111 = 119_{10}$: 1의 보수와 2의 보수 연산 동일

(2) $-42_{10} + 77_{10} = 11010101 + 01001101 = (1)00100010 = 00100011 = +35_{10}$: 1의 보수

$-42_{10}+77_{10}=11010110+01001101=00100011=+35_{10}$: 2의 보수

(3) $42_{10}-77_{10}=00101010+10110010=11011100\rightarrow$ 1의 보수 $\rightarrow 10100011=-35_{10}$: 1의 보수

$42_{10}-77_{10}=00101010+10110011=11011101\rightarrow$ 2의 보수 $\rightarrow 10100011=-35_{10}$: 2의 보수

(4) $-42_{10}-77_{10}=11010101+10110010=10001000\rightarrow$ 1의 보수 $\rightarrow 11110111=-119_{10}$: 1의 보수

$-42_{10}-77_{10}=11010110+10110011=10001001\rightarrow$ 2의 보수 $\rightarrow 11110111=-119_{10}$: 2의 보수

10진수	부호화-절대값	부호화-1의 보수	부호화-2의 보수
$+17_{10}$	00010001	00010001	00010001
-17_{10}	10010001	11101110	11101111
$+100_{10}$	01100100	01100100	01100100
-100_{10}	11100100	10011011	10011100

(5) $17_{10}+100_{10}=00010001+01100100=01110101=+117_{10}$: 1의 보수와 2의 보수 연산 동일

(6) $17_{10}-100_{10}=00010001+10011011=10101100\rightarrow$ 1의 보수 $\rightarrow 11010011=-83_{10}$: 1의 보수

$17_{10}-100_{10}=00010001+10011100=10101101\rightarrow$ 2의 보수 $\rightarrow 11010011=-83_{10}$: 2의 보수

(7) $-17_{10}+100_{10}=11101110+01100100=01010011=+83_{10}$: 1의 보수

$-17_{10}+100_{10}=11101111+01100100=01010011=+83_{10}$: 2의 보수

(8) $-17_{10}-100_{10}=11101110+10011011=10001010\rightarrow$ 1의 보수 $\rightarrow 11110101=-117_{10}$: 1의 보수

$-17_{10}-100_{10}=11101111+10011100=10001011\rightarrow$ 2의 보수 $\rightarrow 11110101=-117_{10}$: 2의 보수

Chapter03 논리

1.

(1) 명제 아님, 질문은 진리값을 구분할 수 없다. (2) 명제, 거짓(F)

(3) 명제 아님, 주관적 의견은 진리값을 구분할 수 없다.

(4) 명제 아님, 변수 x의 범위를 알 수 없으므로 진리값을 구분할 수 없다.

(5) 명제, 참(T) (6) 명제, 참(T) (7) 명제, 거짓(F)

(8) 명제 아님, 주관적 의견은 진리값을 구분할 수 없다. (9) 명제, 참(T)

(10) 명제 아님, 주관적 의견은 진리값을 구분할 수 없다.

2.

(1) $\neg q$ (2) $q\vee p$ (3) $\neg p\wedge r$ (4) $r\vee q$

(5) $p\wedge\neg q$ (6) $r\rightarrow\neg p$ (7) $(\neg q\wedge r)\rightarrow\neg p$ (8) $\neg(q\vee\neg p)\wedge r$

(9) $\neg r\rightarrow\neg q\vee p$ (10) $\neg(p\rightarrow r)\rightarrow(q\rightarrow r)$

3.

(1) 사건명제

p	q	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg(\neg p \wedge q)$
T	T	F	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

(2) 사건명제

p	q	$\neg q$	$p \oplus q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$(p \oplus q) \vee (p \leftrightarrow \neg q)$	$\neg[(p \oplus q) \vee (p \leftrightarrow \neg q)]$
T	T	F	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	T	F	F	F	T

(3) 항진명제

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

(4) 사건명제

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$	$\neg(p \vee \neg q) \rightarrow \neg q$
T	T	F	T	F	T
T	F	T	T	F	T
F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	F	T

(5) 사건명제

p	q	r	$\neg q$	$p \vee r$	$\neg(p \vee r)$	$\neg q \rightarrow r$	$\neg(p \vee r) \rightarrow (\neg q \rightarrow r)$
T	T	T	F	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	F	T	F	F

(6) 모순명제

p	q	r	$\neg p$	$r \rightarrow \neg q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(r \rightarrow \neg p) \wedge \neg(p \vee q) \wedge q$
T	T	T	F	F	T	F	F
T	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	F	F	T	F	F
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	F	T	F
F	F	F	T	T	F	T	F

(7) 모순명제

p	q	$p\oplus q$	$p\leftrightarrow q$	$(p\oplus q)\wedge(p\leftrightarrow q)$
T	T	F	T	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

(8) 항진명제

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p\leftrightarrow\neg q$	$p\leftrightarrow\neg r$	$(p\leftrightarrow\neg q)\oplus(p\leftrightarrow\neg r)\oplus r$	$[(p\leftrightarrow\neg q)\oplus(p\leftrightarrow\neg r)\oplus r]\leftrightarrow q$
T	T	T	F	F	F	F	T	T
T	T	F	F	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	F	T	F	T
F	F	F	T	T	F	F	F	T

4.

(1) $p\rightarrow q(\equiv q\rightarrow p$의 역) : 부산이 대한민국의 수도이면, 워싱턴 DC는 미국의 수도이다. : 참(T)

$p\rightarrow q$의 역($\equiv q\rightarrow p$) : 워싱턴 DC가 미국의 수도이면, 부산은 대한민국의 수도이다. : 거짓(F)

$p\rightarrow q$의 이($\equiv \neg p\rightarrow\neg q\equiv q\rightarrow p$의 대우) : 부산이 대한민국의 수도가 아니면 워싱턴 DC는 미국의 수도가 아니다. : 거짓(F)

$p\rightarrow q$의 대우($\equiv \neg q\rightarrow\neg p\equiv q\rightarrow p$의 이) : 워싱턴 DC가 미국의 수도가 아니면 부산은 대한민국의 수도가 아니다. : 참(T)

(2) $p\rightarrow q(\equiv q\rightarrow p$의 역) : $3\times 13<11$이면 삼각형 내각의 합은 200도이다.

$p\rightarrow q$의 역($\equiv q\rightarrow p$) : 삼각형 내각의 합은 200도이면, $3\times 13<11$이다.

$p\rightarrow q$의 이($\equiv \neg p\rightarrow\neg q\equiv q\rightarrow p$의 대우) : $3\times 13\geq 11$이면 삼각형 내각의 합은 200도가 아니다.

$p\rightarrow q$의 대우($\equiv \neg q\rightarrow\neg p\equiv q\rightarrow p$의 이) : 삼각형 내각의 합은 200도가 아니면, $3\times 13\geq 11$이다.

(3) $p\rightarrow q(\equiv q\rightarrow p$의 역) : 자연수가 0보다 큰 정수이면 직선은 두 점을 지난다.

$p\rightarrow q$의 역($\equiv q\rightarrow p$) : 직선이 두 점을 지나면 자연수가 0보다 큰 정수이다.

$p\rightarrow q$의 이($\equiv \neg p\rightarrow\neg q\equiv q\rightarrow p$의 대우) : 자연수가 0보다 큰 정수가 아니면 직선은 두 점을 지나지 않는다.

$p\rightarrow q$의 대우($\equiv \neg q\rightarrow\neg p\equiv q\rightarrow p$의 이) : 직선이 두 점을 지나지 않으면 자연수가 0보다 큰 정수가 아니다.

(4) $p\rightarrow q(\equiv q\rightarrow p$의 역) : 모든 실수 x가 $\frac{\sqrt{4x}}{5}>5$를 만족하면, $2x+1=k$일 때 모든 정수 x에 대해 k는 짝수이다.

$p\rightarrow q$의 역($\equiv q\rightarrow p$) : $2x+1=k$일 때 모든 정수 x에 대해 k는 짝수이면, 모든 실수 x가 $\frac{\sqrt{4x}}{5}>5$를 만족한다.

$p\rightarrow q$의 이($\equiv \neg p\rightarrow\neg q\equiv q\rightarrow p$의 대우) : 어떤 실수 x가 $\frac{\sqrt{4x}}{5}>5$를 만족하지 않으면, $2x+1=k$일 때

어떤 정수 x에 대해 k는 짝수가 아니다.

$p \to q$의 대우($\equiv \neg q \to \neg p \equiv q \to p$의 이) : $2x+1=k$일 때 어떤 정수 x에 대해 k는 짝수가 아니면, 어떤 실수 x가 $\dfrac{\sqrt{4x}}{5} > 5$를 만족하지 않는다.

5.

(1) $\neg(p \oplus q) \equiv \neg[(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)]$ $\because$ XOR 정의
$\equiv \neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(p \wedge \neg q)$ $\because$ 드 모르간의 법칙
$\equiv [\neg(\neg p) \vee \neg q] \wedge [\neg p \vee \neg(\neg q)]$ $\because$ 드 모르간의 법칙
$\equiv (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$ $\because$ 이중부정의 법칙
$\equiv (q \to p) \wedge (p \to q)$ $\because$ 함축법칙
$\equiv p \leftrightarrow q$ $\because$ 쌍방조건명제의 정의

(2) $(p \vee q) \to r \equiv \neg(p \vee q) \vee r$ $\because$ 함축법칙
$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r$ $\because$ 드 모르간의 법칙
$\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$ $\because$ 분배법칙
$\equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$ $\because$ 함축법칙

(3) $\neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv [\neg p \wedge \neg(\neg q)] \vee (\neg p \wedge \neg q)$ $\because$ 드 모르간의 법칙
$\equiv (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ $\because$ 이중부정의 법칙
$\equiv \neg p \wedge (q \vee \neg q)$ $\because$ 분배법칙
$\equiv \neg p \wedge \mathbb{T}$ $\because$ 부정법칙
$\equiv \neg p$ $\because$ 항등법칙

(4) $\{p \wedge [\neg(\neg p \vee q)]\} \vee (p \wedge q) \equiv \{p \wedge [\neg(\neg p) \wedge \neg q]\} \vee (p \wedge q)$ $\because$ 드 모르간의 법칙
$\equiv [p \wedge (p \wedge \neg q)] \vee (p \wedge q)$ $\because$ 이중부정의 법칙
$\equiv (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$ $\because$ 결합 / 멱등법칙
$\equiv p \wedge (\neg q \vee q)$ $\because$ 분배법칙
$\equiv p \wedge \mathbb{T}$ $\because$ 부정법칙
$\equiv p$ $\because$ 항등법칙

(5) $\{(p \to q) \vee (p \to r)\} \to (q \vee r) \equiv \neg[(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)] \vee (q \vee r)$ $\because$ 함축법칙
$\equiv \neg(\neg p \vee q \vee r) \vee (q \vee r)$ $\because$ 교환 / 결합 / 멱등법칙
$\equiv [\neg(\neg p) \wedge \neg(q \vee r)] \vee (q \vee r)$ $\because$ 결합 / 드 모르간의 법칙
$\equiv [p \wedge \neg(q \vee r)] \vee (q \vee r)$ $\because$ 이중부정의 법칙
$\equiv [p \vee (q \vee r)] \wedge [\neg(q \vee r) \vee (q \vee r)]$ $\because$ 분배법칙
$\equiv [p \vee (q \vee r)] \wedge \mathbb{T}$ $\because$ 부정법칙
$\equiv p \vee q \vee r$ $\because$ 항등법칙

(6) $[(\neg p \wedge r) \to \neg q] \vee [p \to (q \vee \neg r)] \equiv [\neg(\neg p \wedge r) \vee \neg q] \vee [\neg p \vee (q \vee \neg r)]$ $\because$ 함축법칙
$\equiv \{[\neg(\neg p) \vee \neg r] \vee \neg q\} \vee [\neg p \vee (q \vee \neg r)]$ $\because$ 드 모르간의 법칙
$\equiv (p \vee \neg q \vee \neg r) \vee [\neg p \vee (q \vee \neg r)]$ $\because$ 이중부정의 법칙
$\equiv (p \vee \neg p) \vee (\neg q \vee q) \vee \neg r$ $\because$ 교환/결합/멱등법칙
$\equiv \mathbb{T} \vee \mathbb{T} \vee \neg r$ $\because$ 부정법칙
$\equiv \mathbb{T}$ $\because$ 멱등/지배법칙

(7) (문제 수정)$(p \to q) \wedge (\neg p \leftrightarrow q) \equiv (p \to q) \wedge [(\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p)]$ $\because$ 쌍방조건명제의 정의
$\equiv (\neg p \vee q) \wedge \{[\neg(\neg p) \vee q] \wedge (\neg q \vee \neg p)\}$ $\because$ 함축법칙
$\equiv (\neg p \vee q) \wedge [(p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)]$ $\because$ 이중부정의 법칙
$\equiv [(\neg p \wedge p) \vee q] \wedge (\neg q \vee \neg p)$ $\because$ 결합/분배법칙
$\equiv (\mathbb{F} \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$ $\because$ 부정법칙
$\equiv q \wedge (\neg q \vee \neg p)$ $\because$ 항등법칙

$\equiv (q \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ ∵ 분배법칙
$\equiv \mathbb{F} \vee (q \wedge \neg p)$ ∵ 부정법칙
$\equiv \neg p \wedge q$ ∵ 항등/교환법칙

(8) (문제 수정)$(p \wedge q) \oplus (p \vee q) \equiv [\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)] \vee [(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)]$ ∵ XOR 정의
$\equiv [(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)] \vee [(p \wedge q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)]$ ∵ 드 모르간의 법칙
$\equiv [(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)] \vee [(p \wedge \neg p) \wedge (q \wedge \neg q)]$ ∵ 교환/결합법칙
$\equiv [(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)] \vee \mathbb{F}$ ∵ 부정/멱등법칙
$\equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ ∵ 항등법칙
$\equiv [(\neg p \vee \neg q) \wedge p] \vee [(\neg p \vee \neg q) \wedge q]$ ∵ 분배법칙
$\equiv [(\neg p \wedge p) \vee (\neg q \wedge p)] \vee [(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge q)]$ ∵ 분배법칙
$\equiv [\mathbb{F} \vee (\neg q \wedge p)] \vee [(\neg p \wedge q) \vee \mathbb{F}]$ ∵ 부정법칙
$\equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ ∵ 항등/교환법칙
$\equiv p \oplus q$ ∵ XOR 정의

(9) $(p \vee r) \oplus (q \vee r) \equiv [\neg(p \vee r) \wedge (q \vee r)] \vee [(p \vee r) \wedge \neg(q \vee r)]$ ∵ XOR 정의
$\equiv [(\neg p \wedge \neg r) \wedge (q \vee r)] \vee [(p \vee r) \wedge (\neg q \wedge \neg r)]$ ∵ 드 모르간의 법칙
$\equiv \{\neg p \wedge [\neg r \wedge (q \vee r)]\} \vee \{[(p \vee r) \wedge \neg r] \wedge \neg q\}$ ∵ 결합법칙
$\equiv \{\neg p \wedge [(\neg r \wedge q) \vee (\neg r \wedge r)]\} \vee \{[(p \wedge \neg r) \vee (r \wedge \neg r)] \wedge \neg q\}$ ∵ 분배법칙
$\equiv \{\neg p \wedge [(\neg r \wedge q) \vee \mathbb{F}]\} \vee \{[(p \wedge \neg r) \vee \mathbb{F}] \wedge \neg q\}$ ∵ 부정법칙
$\equiv [(\neg p \wedge q) \wedge \neg r] \vee [(p \wedge \neg q) \wedge \neg r]$ ∵ 항등/교환/결합법칙
$\equiv [(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)] \wedge \neg r$ ∵ 분배법칙
$\equiv (p \oplus q) \wedge \neg r$ ∵ XOR 정의

(10) $(p \wedge r) \vee [(p \vee q) \wedge \neg r] \vee (q \wedge r) \equiv (p \wedge r) \vee [(p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)] \vee (q \wedge r)$ ∵ 분배법칙
$\equiv [(p \wedge r) \vee (p \wedge \neg r)] \vee [(q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r)]$ ∵ 결합법칙
$\equiv [p \wedge (r \vee \neg r)] \vee [q \wedge (\neg r \vee r)]$ ∵ 결합법칙
$\equiv (p \wedge \mathbb{T}) \vee (q \wedge \mathbb{T})$ ∵ 부정법칙
$\equiv p \vee q$ ∵ 항등법칙

6.

(1) $X = \{x | x \in Z\}$, $Y = \{y | y \in N\}$일 때, $P(x,y) = x^2 - y^2 > 0$

$\forall x \forall y P(x,y)$:거짓(F) $\forall x \exists y P(x,y)$:참(T) $\exists x \forall y P(x,y)$:거짓(F) $\exists x \exists y P(x,y)$:참(T)

$\forall y \forall x P(x,y)$:거짓(F) $\forall y \exists x P(x,y)$:참(T) $\exists y \forall x P(x,y)$:거짓(F) $\exists y \exists x P(x,y)$:참(T)

(2) $X = \{x | x \in R\}$, $Y = \{y | y \in R\}$일 때, $P(x,y) : x^2 + y^2 \geq 0$

$\forall x \forall y P(x,y)$:참(T) $\forall x \exists y P(x,y)$:참(T) $\exists x \forall y P(x,y)$:참(T) $\exists x \exists y P(x,y)$:참(T)

$\forall y \forall x P(x,y)$:참(T) $\forall y \exists x P(x,y)$:참(T) $\exists y \forall x P(x,y)$:참(T) $\exists y \exists x P(x,y)$:참(T)

(3) $X = \{x | x \in N\}$, $Y = \{y | y \in Z\}$일 때, $P(x,y) : x - |y| = x + y$

$\forall x \forall y P(x,y)$:거짓(F) $\forall x \exists y P(x,y)$:참(T) $\exists x \forall y P(x,y)$:거짓(F) $\exists x \exists y P(x,y)$:참(T)

$\forall y \forall x P(x,y)$:거짓(F) $\forall y \exists x P(x,y)$:참(T) $\exists y \forall x P(x,y)$:거짓(F) $\exists y \exists x P(x,y)$:참(T)

7.

(1) $\exists x P(x)$: 거짓(F)
(2) $\forall x [Q(x) \vee R(x)]$: 참(T)
(3) $\forall x [S(x) \vee T(x) \vee U(x)]$: 거짓(F)
(4) $\exists x [\neg V(x) \wedge \neg W(x)]$: 참(T)

(5) $\neg \forall x X(x)$: 거짓(F)

(6) $\exists x[V(x) \wedge W(x) \wedge R(x)]$: 거짓(F)

10.

(1) 유효추론

	p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \vee q$
$p \rightarrow q$	T	T	T	T	T
$q \rightarrow p$	T	F	F	T	T
$\therefore p \vee q$	F	T	T	F	T
	F	F	T	T	F

(2) 유효추론

	p	q	r	$p \vee r$	$p \rightarrow q$	$r \rightarrow q$
	T	T	T	T	T	T
$p \vee r$	T	T	F	T	T	T
$p \rightarrow q$	T	F	T	T	F	F
$r \rightarrow q$	T	F	F	T	F	T
$\therefore q$	F	T	T	T	T	T
	F	T	F	F	T	T
	F	F	T	T	T	F
	F	F	F	F	T	T

(3) 허위추론

	p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow \neg r$	$\neg q \rightarrow p$
	T	T	T	F	F	T	F	T
	T	T	F	F	T	T	T	T
$p \wedge q \rightarrow \neg r$	T	F	T	T	F	F	T	T
$\neg q \rightarrow p$	T	F	F	T	T	F	T	T
$\therefore p$	F	T	T	F	F	F	T	T
	F	T	F	F	T	F	T	T
	F	F	T	T	F	F	T	F
	F	F	F	T	T	F	T	F

(4) 허위추론

	p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$p \vee q \vee \neg r$
	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T
$\neg p \vee \neg q$	T	T	F	F	F	T	F	T	F	T
$\neg q \rightarrow r$	T	F	T	F	T	F	T	T	T	T
$p \rightarrow r$	T	F	F	F	T	T	T	F	F	T
$\therefore p \vee q \vee \neg r$	F	T	T	T	F	F	T	T	T	T
	F	T	F	T	F	T	T	T	T	T
	F	F	T	T	T	F	T	T	T	F
	F	F	F	T	T	T	T	F	T	T

11.

(1) (a) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ (b) $q \rightarrow s$ (c) $\neg t$ (d) $\neg p \vee t$ (e) $p \vee \neg(r \wedge s)$

(f) (c)와 (d) : 소거 : $\neg p$

(g) (e)와 (f) : 소거 & 드모르간/함축법칙 : $\neg(r \wedge s) \equiv r \rightarrow \neg s$

(h) (a) : 함축/드모르간/이중부정/분배법칙 : $(p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$

(i) (h) : 논리곱(& 함축법칙) : $p \vee r$ 또는 $\neg q \vee r \equiv q \rightarrow r$

(j) (f)와 (i)($p \vee r$) : 부정논법 : r

(k) (g)와 (j) : 긍정논법 : $\neg s$

(l) (b)와 (k) : 부정논법 : $\neg q$ $\therefore \neg q$

(2) (a) $p \vee q$　(b) $q \to r$　(c) $\neg(p \wedge s) \vee t$　(d) $\neg r$　(e) $q \vee (u \wedge s)$

(f). (b)와 (d) : 부정논법 : $\neg q$

(g) (a)와 f : 소거 : p

(h) (e)와 (f) : 소거 : $u \wedge s$

(i) (h) : 논리곱 : u 또는 s

(j) (g)와 (i)(s) : 논리곱 : $p \wedge s$

(k) (c)와 (j) : 소거 : t　$\therefore\ t$

(3) (a)$[\neg(p \wedge t) \vee r] \vee s$　(b) $u \to p$　(c) $\neg q \vee (u \wedge t)$　(d) $\neg s$

(e) (a)와 (d) : 소거 & 드모르간/결합/함축법칙 : $\neg(p \wedge t) \vee r \equiv \neg p \vee \neg t \vee r \equiv p \to (t \to r)$

(f) (c) : 분배/함축법칙 & 논리곱 : $(\neg q \vee u) \wedge (\neg q \vee t) \equiv (q \to u) \wedge (q \to t) \equiv q \to u$ 또는 $q \to t$

(g) (b)와 (f)($q \to u$) : 추이 : $q \to p$

(h) (e)와 (g) : 추이 : $q \to (t \to r)$　$\therefore\ q \to (t \to r)$

(4) (a) $\neg p \vee q$　(b) $r \vee s$　(c) $q \to s$　(d) $(\neg p \wedge r) \to u$　(e) $\neg u \vee t$　(f) $\neg s$

(g) (a)와 (c) : 함축법칙($p \to q$) & 추이 : $p \to s$

(h) (g)와 (f) : 부정논법 : $\neg p$

(i) (b)와 (f) : 소거 : r

(j) (h)와 (i) : 논리곱 : $\neg p \wedge r$

(k) (d)와 (j) : 긍정논법 : u

(l) (e)와 (k) : 소거 : t　$\therefore\ t$

12.

(1) p : 집이 단독주택이다.　q : 보물은 침실에 있다.

r : 거실에 난초가 있다.　s : 보물은 주방에 있다.

(a) $p \to \neg q$　(b) $r \to q$　(c) p　(d) $r \vee s$

(e) (a)와 (c) : 긍정논법 : $\neg q$

(f) (b)와 (e) : 부정논법 : $\neg r$

(g) (d)와 (f) : 소거 : s　∴ 보물은 주방에 있다.

(2) p : 선희가 퇴근한다.　q : 영수와 저녁을 먹는다.　r : 쇼핑을 한다.

s : 영화티켓을 영수에게 준다.　t : 회사 보고서를 작성한다.　u : 영수는 운동을 한다.

(a) $\neg p \to (q \wedge \neg r)$　(b) $s \to r$　(c) $t \to \neg p$　(d) $\neg u$　(e) $t \vee u$

(f) (d)와 (e) : 소거 : t

(g) (c)와 (f) : 긍정논법 : $\neg p$

(h) (a)와 (g) : 긍정논법 : $q \wedge \neg r$

(i) (h) : 논리곱 : q 또는 $\neg r$

(j) (b)와 (i)($\neg r$) : 부정논법 : $\neg s$　∴ 영화티켓을 영수에게 주지 않는다.

(3) p : 방을 치운다.　q : 설겆이를 한다.　r : 책을 읽는다.

s : 그림을 그린다.　t : 음악을 듣는다.

(a) $p \to (q \wedge \neg r)$　(b) $\neg q \vee \neg r$　(c) $(p \vee r) \to s$　(d) $t \wedge \neg s$　(e) $\neg t \to (p \vee r)$

(f) (d) : 논리곱 : t 또는 $\neg s$

(g) (c)와 (f)($\neg s$) : 부정논법 : $\neg(p \vee r)$

(h) (e)와 (g) : 부정논법 : t

(i) (a) : 함축/분배법칙 & 논리곱 : $\neg p \vee (q \wedge \neg r) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to \neg r)$

$\equiv p \to q$ 또는 $p \to \neg r$

(j) (b)와 (i)($p \to q$) : 함축법칙 & 추이 : $p \to \neg r$

(k) (h)와 (j) : 논리곱 : $(p \to \neg r) \wedge t$

∴ 방을 치우면 책을 읽지 않고, 그리고 음악을 듣는다.

Chapter04 증명

1.

$a = 2k(k \in Z)$, $b = 2l+1(l \in Z)$일 때, $a-b = 2k-(2l+1) = 2k-2l-1 = 2(k-l)-1$.

2.
$n=3k(k\in Z)$일 때, $n^2=(3k)^2=9k^2=3(3k^2)$.

3.
$n-m=2k(k\in Z)$이면, $n=2k-m$이고 $n^3-m^3=(2k-m)^3-m^3=8k^3-12k^2m+6km^2-m^3-m^3$
$=2(4k^3-6k^2m+3km^2-m^3)$.

4.
$a+4=2k(k\in Z)$일 때 $4a+3=4(2k)+3=8k+3=2(4k+1)+1$.

5.
$a=2n+1(a\in N,\ n\in Z,\ n\geq 0)$일 때 $a^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1$이다. $n(n+1)$은 항상 짝수이므로, ($\because$ $n=2l(l\in Z)$일 때, $n(n+1)=2l(2l+1)=2(2l^2+l)$) $n(n+1)=2k(k\in Z)$이며 $a^2=4n(n+1)+1=4\cdot 2k+1=8k+1$.

6.
$\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}=\dfrac{(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2}{abc}$이다. 이때, 0이 아닌 정수 a, b, c는 덧셈과 곱셈에 대해 닫혀있으므로 $(ab)^2+(bc)^2+(ac)^2$와 abc는 정수이며 $abc\neq 0$이다.

7.
$a=b$이므로 $\sqrt{ab}=\sqrt{a^2}=a=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a+a}{2}=\dfrac{2a}{2}$.

8.
$b|a$, $c|b$이므로 $a=bk(k\in Z)$, $b=cl(l\in Z)$이다. $a=bk=clk$이므로 $c|a$이다.

9.
$a=k^2(k\in Z)$, $b=l^2(l\in Z)$이면 $ab=k^2l^2=(kl)^2$

10.
$3n+2$는 3으로 나누어떨어진다고 가정. $3|(3n+2)$이라면, $3n+2=3k(k\in Z)$이고 $2=3(k-n)$. 그러나 2는 3의 배수가 아니므로 $3n+2$는 3으로 나누어 떨어지지 않는다.

11.
a가 3의 배수이면 a^3도 3의 배수임을 증명. $a=3k(k\in Z)$일 때 $a^3=(3k)^3=3(9k^3)$이므로 a^3은 3의 배수이다.

12.
a가 짝수이면 a^3+7은 홀수임을 증명. $a=2k(k\in Z)$일 때, $a^3+7=(2k)^3+7=2(4k^3+3)+1$

13.
a, b가 모두 유리수이면 $a+b$는 유리수임을 증명. $a=\dfrac{w}{x}(w,x\in Z,\ x\neq 0)$, $b=\dfrac{y}{z}(y,z\in Z,\ z\neq 0)$일

때, $a+b=\frac{w}{x}+\frac{y}{z}=\frac{wz+xy}{xz}$로 정수는 덧셈과 곱셈에 닫혀있고 $w,x,y,z\in Z$이므로 $wz+xy, xz\in Z$, $x,z\neq 0$이므로 $xz\neq 0$이다. 그러므로 $a+b=\frac{wz+xy}{xz}$는 유리수. ∴ 실수 a, b에 대해 $a+b$가 무리수이면, a와 b 둘 중 하나는 무리수이다.

14.
$a=b$이면 $4ab=(a+b)^2$임을 증명. $a=b$이면, $4ab=4a^2=(a+b)^2=(a+a)^2=(2a)^2$

15.
유리수와 무리수의 합이 유리수라고 가정. $a,c\in Q$, $a\neq 0$, $\sqrt{b}\in I$일 때, $a+\sqrt{b}=c$. 양변을 제곱하면 $(a+\sqrt{b})^2=a^2+2a\sqrt{b}+b=c^2$이고 $\sqrt{b}=\frac{c^2-a^2-b}{2a}$. 유리수는 뺄셈과 곱셈, 나눗셈에 대해 닫혀있으므로 $\frac{c^2-a^2-b}{2a}\in Q$로 $\sqrt{b}\in I$에 위배된다. ∴ 유리수와 무리수의 합이 무리수이다.

16.
$\sqrt{2}$가 무리수일 때, $1+3\sqrt{2}$가 유리수 $\frac{a}{b}(a,b\in Z,\ b\neq 0)$라고 가정. $1+3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$의 양변을 제곱.
$(1+3\sqrt{2})^2=1+6\sqrt{2}+2=3+6\sqrt{2}=\frac{a^2}{b^2}$. 좌변에 $\sqrt{2}$만 남기면, $\sqrt{2}=\frac{a^2-3b^2}{6b^2}$. $a,b,3,6\in Z$, $6,b\neq 0$이고 정수는 덧셈과 곱셈에 닫혀있으므로 $a^2-3b^2, 6b^2\in Z$, $6b^2\neq 0$. ∴ $\sqrt{2}$가 무리수일 때, $1+3\sqrt{2}$가 유리수임은 모순. ∴ $\sqrt{2}$가 무리수일 때, $1+3\sqrt{2}$는 무리수이다.

17.
n이 짝수이면 $3n+2$가 짝수임을 증명. $n=2k(k\in Z)$, $3n+2=3(2k)+2=2(3k+1)$. ∴ n이 짝수이면 $3n+2$가 짝수이다. ∴ 모든 정수 n에 대해 $3n+2$가 홀수면 n이 홀수이다.

18.
$m\leq 8\wedge n\leq 8$이면 $m\times n\leq 64$임을 증명. m과 n에 대한 범위 중 최대값은 각각 8이므로 $m\times n$의 최대값은 64($=8\times 8$). ∴ $m\leq 8\wedge n\leq 8$이면 $m\times n\leq 64$. ∴ 두 자연수 m,n에 대해 $m\times n>64$면, $m>8$이거나 $n>8$

19.
$a\leq 10\wedge b\leq 10$일 때 $a\times b\leq 100$임을 증명. a와 b에 대한 범위 중 최대값은 각각 8이므로 $a\times b$의 최대값은 100(10×10) ∴ $a\leq 10\wedge b\leq 10$일 때 $a\times b\leq 100$. ∴ 두 양의 실수의 곱이 100보다 크면 두 수 중 적어도 하나는 10보다 크다.

20.
$x=2$이고 $y=-3$이면 $x>y$이지만 $x^2=2^2=4<y^2=(-3)^2=9$이므로 모든 실수 x,y에 대해 $x>y$면 $x^2>y^2$이 성립하지 않는다.

21.
$n=42$이면, $n^2-n+41=n(n-1)+41=42\cdot 41+41=41(42+1)$로 41의 배수가 된다. ∴ n이 양의 정수일 때 n^2-n+41는 소수가 아니다.

22.

$n=2k+1(k\in Z)$일 때 $\frac{n-1}{2}=\frac{2k+1-1}{2}=k$로 홀수만이 아닌 모든 정수이다. ∴ 모든 정수 n에 대해 n이 홀수면 $\frac{n-1}{2}$이 홀수인 것은 아니다.

23.

$n=1$일 때, $2\cdot 1-1=1=1^2$이므로 성립

$n=k$일 때, $(2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-2)+\dots(2k-1)=k^2$이 성립한다고 가정.

$n=k+1$일 때, $(2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-2)+\dots(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$이 성립하는지 증명

$(2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-2)+\dots(2k-1)+[2(k+1)-1]=k^2+[2(k+1)-1]=k^2+2k+1=(k+1)^2$

∴ $n\geq 1$인 자연수 n에 대해 $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$이 성립한다.

24.

$n=1$일 때, $1^2=1=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$이므로 성립

$n=k$일 때, $1^2+2^2+\dots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$이 성립한다고 가정

$n=k+1$일 때, $1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$

$$=\frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

∴ $n\geq 1$인 자연수 n에 대해 $\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이 성립한다.

25.

$n=3$일 때, $4^3=64=\frac{4(4^3-16)}{3}$이므로 성립

$n=k$일 때, $4^3+4^4+4^5+\dots+4^k=\frac{4(4^k-16)}{3}$이 성립한다고 가정

$n=k+1$일 때, $4^3+4^4+4^5+\dots+4^k+4^{k+1}=\frac{4(4^k-16)}{3}+4^{k+1}=\frac{4\cdot 4^{k+1}-64}{3}=\frac{4(4^{k+1}-16)}{3}$

∴ $n\geq 3$인 자연수 n에 대해 $4^3+4^4+4^5+\dots+4^n=\frac{4(4^n-16)}{3}$이 성립한다.

26.

$n=2$일 때, $1(1+1)=2=\frac{2(2-1)(2+1)}{3}$이므로 성립

$n=k$일 때, $1(1+1)+2(2+1)+\dots+(k-1)[(k-1)+1]=\frac{k(k-1)(k+1)}{3}$이 성립한다고 가정

$n=k+1$일 때, $1(1+1)+2(2+1)+\dots+(k-1)[(k-1)+1]+k(k+1)-\frac{k(k-1)(k+1)}{3}+k(k+1)$

$$=\frac{k^3+3k^2+2k}{3}=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

∴ $n\geq 2$인 자연수에 대해 $\sum_{i=1}^{n-1}i(i+1)=\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$이 성립한다.

27.
$n=0$일 때, $0=2 \bullet 0 \bullet (0+1)$이 성립.
$n=k$일 때, $0+4+8+...+4k=2k(k+1)$이 성립한다고 가정.
$n=k+1$일 때, $0+4+8+...+4k+4(k+1)=2k(k+1)+4(k+1)=2(k^2+3k+2)=2(k+1)[(k+1)+1]$
$\therefore$ 음이 아닌 정수에 대하여 $0+4+8+...+4n=2n(n+1)$이 성립한다.

28.
$n=7$일 때, $3^7=2187<7!=5040$이 성립
$n=k$일 때, $3^k<k!$이 성립한다고 가정.
$n=k+1$일 때, $3^{k+1}=3 \bullet 3^k<(k+1)!$
귀납가정의 양변에 3을 곱하면 $3 \bullet 3^k<3k!$이므로 $3 \bullet 3^k<3k!<(k+1)!$을 증명.
$3k!<(k+1)!$는 $3k!<k!(k+1)$이므로 양변에서 $k!$을 나누면 $3<(k+1)$. $k \geq 7$이므로 $3<(k+1)$는 항상 성립. $\therefore$ $3k!<(k+1)!$이 성립하고 귀납가정이 성립하므로 $3 \bullet 3^k<3k!<(k+1)!$ $\therefore$ $3^{k+1}=3 \bullet 3^k<(k+1)!$이 성립.
$\therefore$ $n \geq 7$인 자연수일 때, $3^n<n!$이 성립한다.

29.
$n=6$일 때, $6!=720>6^3=216$이 성립.
$n=k$일 때, $k!>k^3$이 성립한다고 가정.
$n=k+1$일 때, $(k+1)!=k!(k+1)>(k+1)^3$
귀납가정의 양변에 $(k+1)$을 곱하면, $k!(k+1)>k^3(k+1)$이므로 $k!(k+1)>k^3(k+1)>(k+1)^3$을 증명.
$k^3(k+1)>(k+1)^3$의 양변에서 $(k+1)$을 나누면 $k^3>(k+1)^2$. k의 범위에서 최소값은 6이므로 6을 대입하면 $6^3=261>(6+1)^2=49$이므로 성립. $\therefore$ $k^3(k+1)>(k+1)^3$이 성립하고 귀납가정이 성립하므로 $k!(k+1)>k^3(k+1)>(k+1)^3$이 성립. $\therefore$ $n \geq 6$인 자연수일 때, $n!>n^3$이 성립한다.

30.
$n=5$일 때, $2^5=32>5^2=25$가 성립
$n=k$일 때, $2^k>k^2$이 성립한다고 가정.
$n=k+1$일 때 $2^{(k+1)}=2 \bullet 2^k>(k+1)^2$
귀납가정의 양변에 2을 곱하면, $2 \bullet 2^k>2k^2$이므로 $2 \bullet 2^k>2k^2>(k+1)^2$임을 증명. $2k^2>(k+1)^2$에서 우변의 항을 좌변으로 이항하면 $2k^2-(k+1)^2=k^2-2k-1>0$. $k \geq 5$이므로 $k^2-2k-1=14>0$로 성립. $\therefore$ $2k^2>(k+1)^2$와 귀납가정에 의해 $2 \bullet 2^k>2k^2>(k+1)^2$이 성립. $\therefore$ $n \geq 5$인 자연수에 대해 $2^n>n^2$가 성립한다.

31. $n \geq 3$인 자연수 n에 대해 $2n+1<2^n$임을 증명하라.
$n=3$일 때, $2 \bullet 3+1=7<2^3=8$이 성립.
$n=k$일 때, $2k+1<2^k$가 성립한다고 가정.
$n=k+1$일 때, $2(k+1)+1<2^{k+1}=2 \bullet 2^k$
귀납가정의 양변에 2를 곱하면, $2(2k+1)<2 \bullet 2^k$이므로 $2(k+1)+1<2(2k+1)<2 \bullet 2^k$임을 증명. $2(k+1)+1<2(2k+1)$에서 $2k+3<4k+2$이고 좌변을 우변으로 이항하면 $0<2k-1$. k 범위의 최소값은 3이므로 $0<2k-1$이 성립하고, 따라서 $2(k+1)+1<2(2k+1)<2 \bullet 2^k$이 성립. $\therefore$ $n \geq 3$인 자연수

n에 대해 $2n+1<2^n$이 성립한다.

32.

$n=4$일 때, $4!=24>4^2=16$이 성립.

$n=k$일 때, $k!>k^2$이 성립한다고 가정.

$n=k+1$일 때, $(k+1)!=k!(k+1)>(k+1)^2$

귀납가정의 양면에 $(k+1)$을 곱하면, $k!(k+1)>k^2(k+1)$이므로 $k!(k+1)>k^2(k+1)>(k+1)^2$임을 증명. $k^2(k+1)>(k+1)^2$에서 $k^3+k^2>k^2+2k+1$이고 우변을 좌변으로 이항하면 $k^3-2k-1>0$으로 k 범위의 최소값은 4이므로 $k^3-2k-1>0$이 성립. 따라서 $k!(k+1)>k^2(k+1)>(k+1)^2$이 성립. $\therefore$ $n \geq 4$인 자연수 n에 대해 $n!>n^2$이 성립한다.

Chapter05 집합

1.

(1) $A=\{1,2,3,4\}$

(2) $B=\{b|1<b<20, b\text{는 소수}\}$

(3) $C=\{5,8,11,14,17,20,23,26,29,32\}$

(4) $D=\{d|d\text{는 요일 이름}\}$

(5) $E=\{\text{봄},\text{여름},\text{가을},\text{겨울}\}$

(6) $F=\{f|f=4k, k \geq 0, k \in Z\}$

2.

(1) $A \subset U$

(2) $B \subset U$

(3) $U \subset C$

(4) $U \subset D$

(5) $\dfrac{35}{105} \not\in U$

(6) $10.3721 \not\in U$

(7) $5 \in U$

(8) $-5 \not\in U$

3.

$A=D=G$, $B=F=H$

4.

(1) $A \cup B=\{x|-3 \leq x<2\}$

(2) $B \cup C=\{-1<x<2 \vee 6<x \leq 8\}$

(3) $A \cap B=\{x|-1<x \leq 0\}$

(4) $A \cap C=\varnothing$

(5) $A-B=\{x|-3 \leq x \leq -1\}$

(6) $C-B=\{x|6<x \leq 8\}$

(7) $A-C=\{x|-3 \leq x \leq 0\}$(문제수정)

(8) $B-A=\{0<x<2\}$

(9) $A \oplus B=\{x|-3 \leq x \leq -1 \vee 0<x<2\}$

(10) $B \oplus C=\{x|-1<x<2 \vee 6<x \leq 8\}$

(11) $\overline{A}=\{x|x<-3 \vee x>0\}$

(12) $\overline{B}=\{x|x \leq -1 \vee x \geq 2\}$

(13) $\overline{C}=\{x|x \leq 6 \vee x>8\}$

(14) $\overline{A \cap B}=\{x|x \leq -1 \vee x>0\}$

(15) $\overline{A \cap C}=R$

5.

(1) $A \times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(a,5),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(b,5),$
$(c,1),(c,2),(c,3),(c,4),(c,5)\}$

(2) $B \times A=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c),$
$(4,a),(4,b),(4,c),(5,a),(5,b),(5,c)\}$

(3) $|A \times B|=15$

(4) $|B \times A|=15$

(5) $P(A)=\{\{\ \},\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\}\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$

(6) $|P(B)|=2^5=32$

6.

(1) 1) $|$복지 $\cup$ 시설 $\cup$ 구조$| = |$복지$| + |$시설$| + |$구조$| - |$복지$\cap$시설$| - |$복지$\cap$구조$|$

$- |$시설$\cap$구조$| + |$복지$\cap$시설$\cap$구조$|$

$= 62 + 40 + 90 - 30 - 14 - 20 + 10 = 138$

$\therefore$ $|$복지 $\cup$ 시설 $\cup$ 구조$| + |\overline{\text{복지} \cup \text{시설} \cup \text{구조}}| = 138 + 60 = 198$

2) $|$복지$| - |$복지$\cap$시설$| - |$복지$\cap$구조$| + |$복지$\cap$시설$\cap$구조$| = 62 - 30 - 14 + 10 = 28$

$|$시설$| - |$복지$\cap$시설$| - |$시설$\cap$구조$| + |$복지$\cap$시설$\cap$구조$| = 40 - 30 - 20 + 10 = 0$

$|$구조$| - |$복지$\cap$구조$| - |$시설$\cap$구조$| + |$복지$\cap$시설$\cap$구조$| = 90 - 14 - 20 + 10 = 66$

(2) 1) $|$프로그래밍$\cup$이산수학$\cup$자료구조$| + |\overline{\text{프로그래밍} \cup \text{이산수학} \cup \text{자료구조}}| = 187 + 13 = 200$

2) $|$프로그래밍$\cap$이산수학$| = |$프로그래밍$| + |$이산수학$| - |$프로그래밍$\cup$이산수학$| = 80 + 95 - 137 = 38$

3) $|$프로그래밍$\cup$자료구조$| = |$프로그래밍$| + |$자료구조$| - |$프로그래밍$\cap$자료구조$| = 80 + x - 40 = 130$

$\therefore$ $x = |$자료구조$| = 90$

4) $|$프로그래밍 $\cup$ 이산수학 $\cup$ 자료구조$| = |$프로그래밍$| + |$이산수학$| + |$자료구조$|$

$- |$프로그래밍$\cap$이산수학$| - |$프로그래밍$\cap$자료구조$| - |$이산수학$\cap$자료구조$|$

$+ |$프로그래밍$\cap$이산수학$\cap$자료구조$|$

$= 80 + 95 + 90 - 38 - 40 - 38 + x = 187$

$\therefore$ $x = |$프로그래밍 $\cap$ 이산수학 $\cap$ 자료구조$| = 38$

7. 집합의 대수 법칙을 이용해 다음을 증명하거나 간략히 하라.(문제수정)

(1) $A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$ $\because$ 합집합의 정의

$\Leftrightarrow x \in A \vee [x \in B \wedge x \in C]$ $\because$ 교집합의 정의

$\Leftrightarrow [x \in A \vee x \in B] \wedge [x \in A \vee x \in C]$ $\because$ 논리연산의 분배법칙

$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\because$ 합집합 & 교집합 정의

(2) $A \cap \overline{A} \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A$ $\because$ 교집합의 정의

$\Leftrightarrow$ $\mathbb{F}$ $\because$ 논리연산의 부정법칙

$\Leftrightarrow \varnothing$

(3) $(A - B) \cup (C - B) = (A \cap \overline{B}) \cup (C \cap \overline{B})$ $\because$ 차집합의 정의

$= (A \cup C) \cap \overline{B}$ $\because$ 분배법칙

$= (A \cup C) - B$ $\because$ 차집합의 정의

(4) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$ $\because$ 차집합의 정의

$= (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$ $\because$ 드모르간의 법칙

$= (A \cap \overline{A}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B})$ $\because$ 분배/교환칙

$= (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$ $\because$ 보/항등법칙

$= A \oplus B$ $\because$ 대칭차집합의 정의

(5) $(A \cup B) - \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) \cap \overline{\overline{(A \cap B)}}$ $\because$ 차집합의 정의

$= [(A \cup B) \cap A] \cap B$ $\because$ 이중보/결합법칙

$= A \cap B$ $\because$ 이중보/결합법칙

(6) $(\overline{A} \cup B) \cap \overline{(A \cap B) \cup (A - B)} = (\overline{A} \cup B) \cap \overline{(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})}$ $\because$ 차집합의 정의

$= (\overline{A} \cup B) \cap [\overline{(A \cap B)} \cap \overline{(A \cap \overline{B})}]$ $\because$ 드모르간의 법칙

$= (\overline{A} \cup B) \cap [(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)]$ $\because$ 드모르간/이중보법칙

$= (\overline{A} \cup B) \cap [\overline{A} \cup (\overline{B} \cap B)]$ $\because$ 분배법칙

$= (\overline{A} \cup B) \cap \overline{A}$ ∵ 보/항등법칙

$= \overline{A}$ ∵ 흡수법칙

(7) $(A \oplus B) - (A \cup B) = [(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] \cap \overline{A \cup B}$ ∵ 대칭차집합/차집합의 정의

$= \{[(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] \cap \overline{A}\} \cap \overline{B}$ ∵ 드모르간/결합법칙

$= \{[(\overline{A} \cap \overline{A}) \cap B] \cup [(A \cap \overline{A}) \cap \overline{B}]\} \cap \overline{B}$ ∵ 분배/교환/결합법칙

$= [(\overline{A} \cap B) \cup (\varnothing \cap \overline{B})] \cap \overline{B}$ ∵ 멱등/보법칙

$= \overline{A} \cap (B \cap \overline{B})$ ∵ 지배/항등/결합법칙

$= \varnothing$ ∵ 보/지배법칙

(8) $[(A \cap B) - (C - B)] - [(B - A) \cup (B \cap C)]$

$= [(A \cap B) \cap \overline{(C \cap \overline{B})}] \cap \overline{[(B \cap \overline{A}) \cup (B \cap C)]}$ ∵ 차집합의 정의

$= [(A \cap B) \cap (\overline{C} \cup \overline{\overline{B}})] \cap [(\overline{B} \cup \overline{\overline{A}}) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})]$ ∵ 드모르간의 법칙

$= [(A \cap B) \cap (B \cup \overline{C})] \cap [(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})]$ ∵ 교환/이중보법칙

$= (A \cap B) \cap [(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})]$ ∵ 결합/흡수법칙

$= \{B \cap [A \cap (A \cup \overline{B})]\} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$ ∵ 교환/결합법칙

$= (A \cap B) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$ ∵ 흡수/교환법칙

$= A \cap [(B \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{C})]$ ∵ 결합/분배법칙

$= A \cap B \cap \overline{C}$ ∵ 보/항등법칙

Chapter06 행렬

1.

(1) $a_{12} = 2$ $a_{21} = 4$ $a_{33} = 7$ $a_{43} = 3$

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 9 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

2.

(1) , (3) 앞의 행렬의 열의 수와 뒤의 행렬의 행의 수가 같지 않다.

(2) $(D \times A) + B = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 2 \\ 51 & 8 \end{bmatrix}$

(4) $C - (A \times D) = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 8 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 & -5 & -11 \\ 8 & -8 & -13 \\ 2 & -1 & -14 \end{bmatrix}$

(5) 피연산행렬의 크기가 맞지 않다.

(6) $B + O = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (7) $C \times I = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 8 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ (8) $3A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 15 & 3 \\ 24 & 0 \end{bmatrix}$

3. 다음 행렬의 전치행렬을 구하고 원래 대칭행렬인지 구별하라.

(1) $A^T = A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \\ 8 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$: 대칭행렬

(2) $B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

4.

(1) $(C \odot B) \vee A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $(C \odot B) \wedge A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \wedge \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $(B \odot C) \vee D = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $(B \odot C) \wedge D = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

5.

(1) $\det(A) = 6 \times 3 - [(-1) \times 2] = 20$

(2) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{20} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$

6. 다음 정사각행렬을 보고 질문에 답하라.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 10 & -4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 3 & -8 & 3 \\ -1 & 7 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

(1) $\det(A) = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 10 & -4 \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 10 & -4 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\det(B) = 2(-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$

$\det(C) = -3(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 10 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} + 3(-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -240$

$\det(D) = (-2)(-1)^5 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 1(-1)^6 \begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 1$

(2) $M_{B11} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $M_{B12} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $M_{B13} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$M_{B21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $M_{B22} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $M_{B23} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$M_{B31} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $M_{B32} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $M_{B33} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$M_{C11} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $M_{C12} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $M_{C13} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ $M_{C14} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 2 & 10 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{C21} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 10 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $M_{C22} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $M_{C23} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 10 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ $M_{C24} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$M_{C31} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $M_{C32} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ $M_{C33} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ $M_{C34} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$M_{C41}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 5\\ 1 & -3 & 0\\ 10 & 3 & 0\end{bmatrix}\quad M_{C42}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 5\\ 4 & -3 & 0\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}\quad M_{C43}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 10 & 0\end{bmatrix}\quad M_{C44}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0\\ 4 & 1 & -3\\ 2 & 10 & 3\end{bmatrix}$$

$$M_{D11}=\begin{bmatrix}7 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\quad M_{D12}=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad M_{D13}=\begin{bmatrix}-1 & 7\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$M_{D21}=\begin{bmatrix}-8 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\quad M_{D22}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad M_{D23}=\begin{bmatrix}3 & -8\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$M_{D31}=\begin{bmatrix}-8 & 3\\ 7 & -3\end{bmatrix}\quad M_{D32}=\begin{bmatrix}3 & 3\\ -1 & -3\end{bmatrix}\quad M_{D33}=\begin{bmatrix}3 & -8\\ -1 & 7\end{bmatrix}$$

(3) $\det(M_{B11})=1$ $\quad\det(M_{B12})=-2$ $\quad\det(M_{B13})=-2$

$\det(M_{B21})=1$ $\quad\det(M_{B22})=2$ $\quad\det(M_{B23})=0$

$\det(M_{B31})=2$ $\quad\det(M_{B32})=6$ $\quad\det(M_{B33})=2$

$$\det(M_{C11})=-2(-1)^6\begin{vmatrix}1 & -3\\ 10 & 3\end{vmatrix}=-66\qquad \det(M_{C12})=-2(-1)^6\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-36$$

$$\det(M_{C13})=-2(-1)^6\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 10\end{vmatrix}=-76\qquad \det(M_{C14})=-3(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 10\\ 2 & 2\end{vmatrix}+3(-1)^5\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=30$$

$$\det(M_{C21})=3(-1)^4\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-48\qquad \det(M_{C22})=3(-1)^4\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-48$$

$$\det(M_{C23})=5(-1)^4\begin{vmatrix}2 & 10\\ 2 & 2\end{vmatrix}-2(-1)^6\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 10\end{vmatrix}=-128\qquad \det(M_{C24})=3(-1)^4\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$\det(M_{C31})=-3(-1)^4\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & -2\end{vmatrix}=48\qquad \det(M_{C32})=-3(-1)^4\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & -2\end{vmatrix}=48$$

$$\det(M_{C33})=5(-1)^4\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}-2(-1)^6\begin{vmatrix}3 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=48\qquad \det(M_{C34})=-3(-1)^5\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0$$

$$\det(M_{C41})=5(-1)^4\begin{vmatrix}1 & -3\\ 10 & 3\end{vmatrix}=165\qquad \det(M_{C42})=5(-1)^4\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 3\end{vmatrix}=90$$

$$\det(M_{C43})=5(-1)^4\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 10\end{vmatrix}=190\qquad \det(M_{C44})=-3(-1)^5\begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 10\end{vmatrix}+3(-1)^6\begin{vmatrix}3 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix}=45$$

$\det(M_{D11})=1$ $\quad\det(M_{D12})=-1$ $\quad\det(M_{D13})=2$

$\det(M_{D21})=-2$ $\quad\det(M_{D22})=3$ $\quad\det(M_{D23})=-6$

$\det(M_{D31})=3$ $\quad\det(M_{D32})=-6$ $\quad\det(M_{D33})=13$

(4) $A_{M_B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & -6 & 2\end{bmatrix}\quad A_{M_C}=\begin{bmatrix}-66 & 36 & -76 & -30\\ 48 & -48 & 128 & 0\\ 48 & -48 & 48 & 0\\ -165 & 90 & -190 & 45\end{bmatrix}\quad A_{M_D}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 6\\ 3 & 6 & 13\end{bmatrix}$

(5) $B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -6\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}\quad C^{-1}=-\frac{1}{240}\begin{bmatrix}-66 & 48 & 48 & -165\\ 36 & -48 & -48 & 90\\ -76 & 128 & 48 & -190\\ -30 & 0 & 0 & 45\end{bmatrix}\quad D^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\\ 2 & 6 & 13\end{bmatrix}$

(6)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 4 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \therefore B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 8 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -5 & \frac{38}{3} & 0 & \frac{8}{3} & 1 & -\frac{19}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{38}{15} & 0 & -\frac{8}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{19}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{33}{15} & 0 & -\frac{3}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{33}{30} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{18}{15} & 0 & \frac{3}{15} & \frac{1}{5} & -\frac{9}{15} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{38}{15} & 0 & -\frac{8}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{19}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{11}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{11}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{38}{15} & 0 & -\frac{8}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{19}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{3}{16} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{11}{40} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{55}{80} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{6}{40} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{30}{80} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{38}{120} & -\frac{8}{15} & -\frac{1}{5} & \frac{475}{600} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & -\frac{3}{16} \end{array}\right] \therefore\ C^{-1} = -\frac{1}{240}\begin{bmatrix} -66 & 48 & 48 & -165 \\ 36 & -48 & -48 & 90 \\ -76 & 128 & 48 & -190 \\ -30 & 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -8 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -7 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -8 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -7 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 13 & -6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -7 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 13 & -6 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 3 & \frac{13}{2} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 13 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 & 13 \end{array}\right] \qquad \therefore\ D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

8.

(1) 가우스 소거법 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -9 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -9 \\ 0 & 11 & -13 & 32 \\ 0 & 5 & -7 & 20 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & -9 \\ 0 & 1 & -\frac{13}{11} & \frac{32}{11} \\ 0 & 5 & -7 & 20 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{11} & \frac{32}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{11} & \frac{60}{11} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{11} & \frac{32}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + \frac{5}{11}z = -\frac{3}{11} \\ y - \frac{13}{11}z = \frac{32}{11} \\ z = -5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = -5 \end{cases}$$

위에 이어서 가우스 조르단 소거법 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right]$

(2) (문제수정 동그라미 부분)가우스 소거법 :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 3 & 29 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -16 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 11 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 25 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -14 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 13 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & -2 & -12 & -64 \\ 0 & 0 & 2 & 16 & 88 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 44 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} w + x + y + z = -2 \\ x + 5z = 25 \\ y + 6z = 32 \\ z = 6 \end{cases} \qquad \therefore\ w = 1,\ x = -5,\ y = -4,\ z = 6$$

위에 이어서 가우스 조르단 소거법 :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 & -27 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -10 & -59 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

(3) 가우스 소거법 :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & -5 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -4 \\ 0 & -13 & 0 & 13 \\ 0 & -11 & -2 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -11 & -2 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x+5y-z=-4 \\ \quad\;\; y \qquad =-1 \\ \qquad\quad z=3 \end{cases} \qquad \therefore\ x=4,\ y=-1,\ z=3$$

위에 이어서 가우스 조르단 소거법 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

(4) 가우스 소거법 : $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 9 \\ 3 & -2 & 2 & 3 & -3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 8 & 7 & 8 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 8 & 7 & 8 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -16 & -15 & 18 \\ 0 & 0 & -33 & -40 & 19 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{16} & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & -33 & -40 & 19 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{16} & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{145}{16} & \frac{145}{8} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{16} & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} w-x-\ y-\quad z=\ 0 \\ \quad\ x+5y+\ \ 6z=-3 \\ \qquad\quad y+\frac{15}{16}z=\frac{9}{8} \\ \qquad\qquad\quad z=2 \end{cases} \qquad \therefore\ w=-10,\ x=-\frac{45}{4},\ y=-\frac{3}{4},\ z=2$$

위에 이어서 가우스 조르단 소거법 : $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{16} & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{16} & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{21}{16} & -\frac{69}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{15}{16} & \frac{9}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{45}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

(5) 가우스 소거법 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & -4 & -11 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -4 & -11 \\ 2 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} x-y+\quad z=-3 \\ \quad\ y-\frac{3}{2}z=-7 \\ \qquad\quad z=8 \end{cases} \qquad \therefore\ x=-6,\ y=5,\ z=8$$

위에 이어서 가우스 조르단 소거법 : $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -10 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$

(6) (문제수정 동그라미 부분)가우스 소거법 : $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 30 \\ -1 & -5 & 3 & 3 & -8 \\ 1 & 1 & -2 & -4 & 9 \\ 4 & -3 & 0 & 6 & 9 \end{array}\right] \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 & 9 \\ -1 & -5 & 3 & 3 & -8 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 30 \\ 4 & -3 & 0 & 6 & 9 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 & 9 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & 13 & 3 \\ 0 & -7 & 8 & 22 & -27 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & -10 & -13 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 8 & 22 & -27 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & -10 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & -39 & -53 & -11 \\ 0 & 0 & -62 & -69 & -48 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & -10 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{53}{39} & \frac{11}{39} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{595}{39} & -\frac{1190}{39} \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & -10 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{53}{39} & \frac{11}{39} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} w + x - 2y - 4z = 9 \\ x - 10y - 13z = -3 \\ y + \frac{53}{39}z = \frac{11}{39} \\ z = -2 \end{cases} \qquad \therefore w = 6,\ x = 1,\ y = 3,\ z = -2$$

위에 이어서 가우스 조르단 소거법 : $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & -10 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{53}{39} & \frac{11}{39} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & -10 & -13 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{53}{39} & \frac{11}{39} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{73}{39} & \frac{380}{39} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{23}{39} & -\frac{7}{39} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{53}{39} & \frac{11}{39} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Chapter07 관계

1.

(1) $R = A \times B = \{(x,1), (x,2), (x,3), (y,1), (y,2), (y,3), (z,1), (z,2), (z,3)\}$

(2) $R = A \times B = \{(a,e), (a,f), (a,g), (b,e), (b,f), (b,g), (c,e), (c,f), (c,g), (d,e), (d,f), (d,g)\}$

2.

(1) ${}_aR_{1y}$ $\cancel{{}_aR_{1z}}$ ${}_bR_{1w}$ ${}_bR_{1x}$ $\cancel{{}_cR_{1y}}$ $\cancel{{}_dR_{1w}}$ ${}_dR_{1x}$ $\cancel{{}_aR_{2y}}$ ${}_aR_{2z}$ ${}_bR_{2w}$ $\cancel{{}_bR_{2x}}$ $\cancel{{}_cR_{2y}}$ $\cancel{{}_dR_{2w}}$ ${}_dR_{2x}$

$\cancel{{}_aR_{3y}}$ $\cancel{{}_aR_{3z}}$ $\cancel{{}_bR_{3w}}$ $\cancel{{}_bR_{3x}}$ $\cancel{{}_cR_{3y}}$ $\cancel{{}_dR_{3w}}$ $\cancel{{}_dR_{3x}}$

(2) $dom(R_1) = dom(R_2) = dom(R_3) = A = \{a, b, c, d\}$

$codom(R_1) = codom(R_2) = codom(R_3) = B = \{w, x, y, z\}$

$ran(R_1) = ran(R_2) = B = \{w, x, y, z\}$ $\qquad ran(R_3) = \varnothing$

(3) $R_1^{-1} = \{(w,a), (w,b), (x,b), (x,c), (x,d), (y,a), (y,d), (z,b), (z,c)\}$

$R_2^{-1} = \{(w,b), (w,d), (x,a), (x,d), (y,c), (y,d), (z,a), (z,b), (z,c)\}$

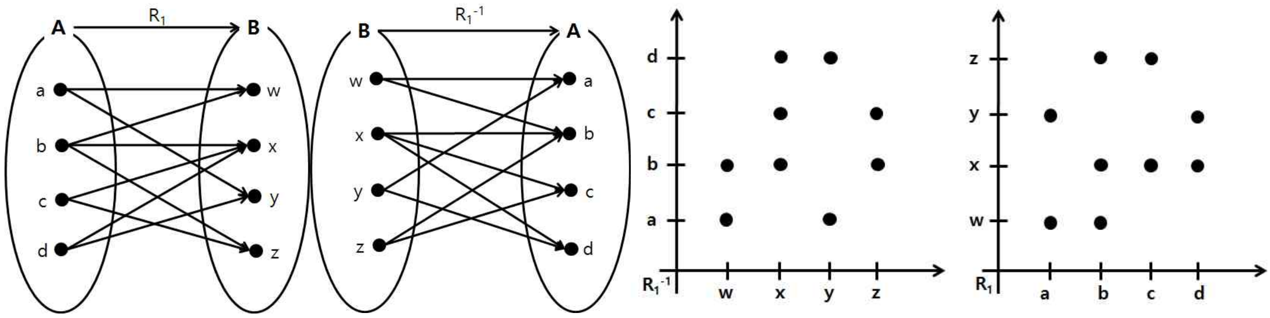
$R_3^{-1} = \varnothing$

(4) $dom(R_1^{-1}) = dom(R_2^{-1}) = dom(R_3^{-1}) = B = \{w, x, y, z\}$

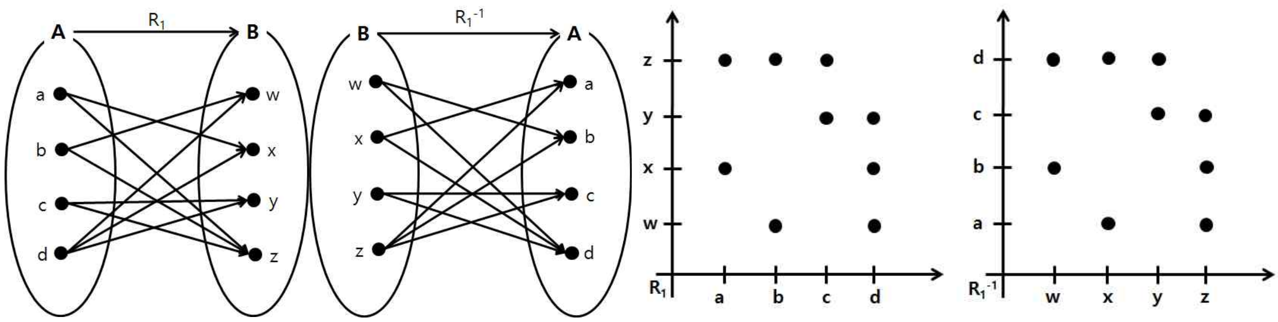
$codom(R_1^{-1}) = codom(R_2^{-1}) = codom(R_3^{-1}) = A = \{a, b, c, d\}$

$ran(R_1^{-1}) = rna(R_2^{-1}) = A = \{a, b, c, d\}$ $\qquad ran(R_3^{-1}) = \varnothing$

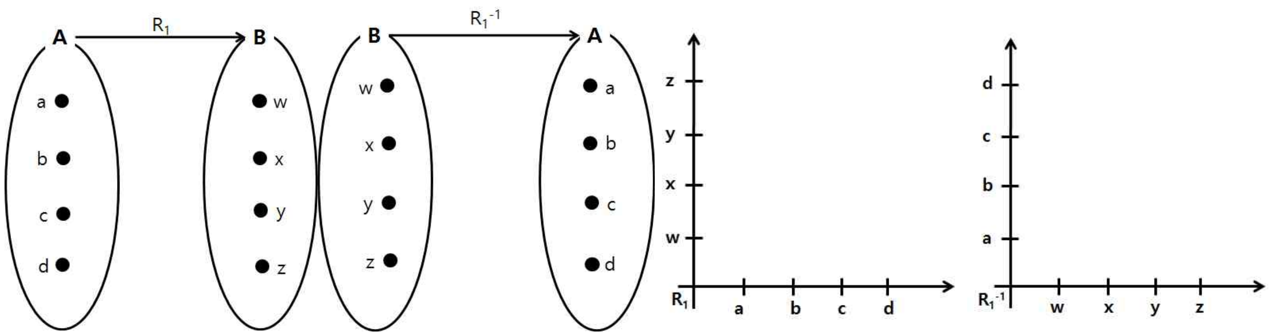
(5)



$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_{R_1^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$



$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_{R_2^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$



$M_{R_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_{R_3^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

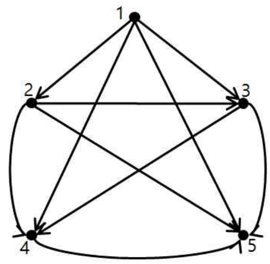
3.

(1)

(2)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

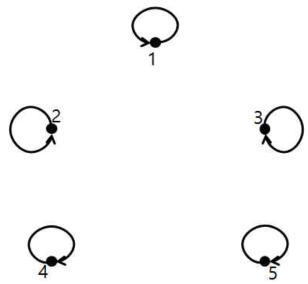
비반사, 반대칭, 추이



(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

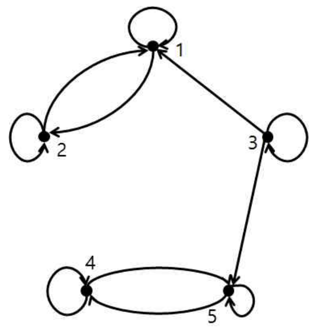
반사, 대칭, 반대칭, 추이



(4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

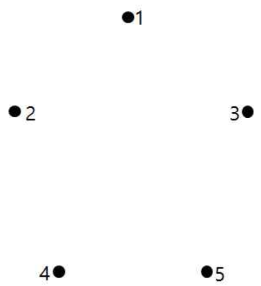
반사



(5)

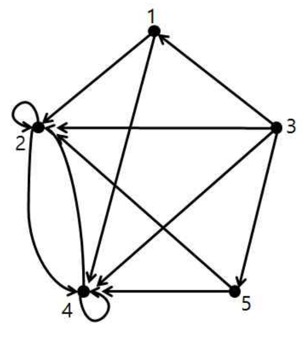
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

비반사, 대칭, 반대칭, 추이



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

어떤 성질도 가지고 있지 않다.



4.

(1) $S \circ R = \{(1,x), (1,y), (1,z), (2,x), (2,y), (2,z), (3,x), (3,y), (3,z), (4,x), (4,y), (4,z)\}$

(2) $S \circ R = \{(1,x), (1,y), (1,z), (2,x), (2,y), (2,z), (3,x), (3,y), (3,z), (4,x), (4,z)\}$

(3) $S \circ R = \{(1,x), (1,y), (2,y), (2,z), (3,x), (3,y), (3,z), (4,x), (4,y), (4,z)\}\}$

5. 집합 $A=\{a,b,c,d\}$에서 집합 $B=\{w,x,y,z\}$에 대한 관계 R과 S가 다음과 같을 때, $S \circ R$과 $R \circ S$를 구하라.

(1) $S \circ R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c),(d,d)\}$

$R \circ S=\{(w,w),(w,x),(w,y),(w,z),(x,w),(x,x),(x,y),(x,z),(y,w),(y,x),(y,y),(y,z),(z,w),(z,x),(z,y),(z,z)\}$

(2) $S \circ R=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(c,c),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)\}$

$R \circ S=\{(w,z),(x,w),(x,x)\,(x,y),(y,y),(y,z),(z,w),(z,x),(z,y),(z,z)\}$

(3) $S \circ R=\{(a,a),(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(b,d),(c,a),(c,c),(d,a),(d,d)\}$

$R \circ S=\{(w,w),(w,y),(w,z),(x,w),(x,y),(x,z),(y,w),(y,y),(y,z),(z,w),(z,y),(z,z)\}$

6.

(1) $$R^2=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$R^3=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

(2) $S=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&0&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$ $S=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3),(3,4),(4,2),(4,4)\}$

(3) $T=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$ $T=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

(4) $$R^2=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$R^3=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$R^4=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\odot\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$$R^*=U=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

$U=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

(5) $O=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$ $[1]=[2]=[3]=[4]=\{1,2,3,4\}$

(6) $(2,2),(3,3)\not\in R$ $\therefore$ 반사관계가 아니다.

$(1,2)\in R$이지만 $(2,1)\not\in R$ $(2,3)\in R$이지만 $(3,2)\not\in R$

$(3,1) \in R$이지만 $(1,3) \notin R$ $(3,4) \in R$이지만 $(4,3) \notin R$

$(4,2) \in R$이지만 $(2,4) \notin R$ ∴ 반대칭관계이다.

$(2,3) \in R$, $(3,1) \in R$이지만 $(2,1) \notin R$ ∴ 추이관계가 아니다

∴ 부분순서관계가 아니다.

7.

(1) 극대 : a / 극소 : i / 최대 : a / 최소 : i

(2) 극대 : a / 극소 : b, c / 최대 : a / 최소 : 없음

(3) 극대 : a, b / 극소 : g, h / 최대 : 없음 / 최소 : 없음

(4) 극대 : a, d / 극소 : e / 최대 : 없음 / 최소 : e