

Лабораторная работа 1.3.3

Тема: измерение вязкости воздуха по течению в тонких трубках

Артамонов Кирилл, Б01-005
artamonov.ks@phystech.edu
28 апреля 2021 г.

Введение

Цель работы: экспериментально исследовать свойства течения газов по тонким трубкам при различных числах Рейнольдса; выявить область применимости закона Пуазейля и с его помощью определить коэффициент вязкости воздуха.

Приборы и материалы: система подачи воздуха (компрессор, поводящие трубы); газовый счетчик барабанного типа; спиртовой микроманометр с регулируемым наклоном; набор трубок различного диаметра с выходами для подсоединения микроманометра; секундомер.

Теоретическая часть

Движение газа в трубках вызывается перепадом внешнего давления ΔP на концах труб. Сила вязкого трения как в жидкостях, так и в газах описывается законом Ньютона: касательное напряжение между слоями пропорционально перепаду скорости течения в направлении, поперечном потоку. В частности, если жидкость течет вдоль оси ox , а скорость течения $v_x(y)$ зависит от координаты y , в каждом слое возникает направленное по x касательное напряжение:

$$\tau_{xy} = -\eta \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (1)$$

Где η — коэффициент динамической вязкости (вязкость) среды.

Также нас интересует такая величина, как объемный расход Q . Он равен объему жидкости, протекающему через сечение трубы в единицу времени. Эта величина зависит от перепада давления ΔP , а также от параметров газа (плотности ρ и η) и геометрических параметров трубы (радиуса R и длины l).

Характер течения в трубе

Характер течения в трубе может быть **ламинарным** (течение, при котором жидкость или газ перемещаются слоями без перемешивания без беспорядочных быстрых изменений скорости и давления) или **турбулентным** (оно характеризуется образованием вихрей и активным перемешиванием слоев, при этом

даже в стационарном течении в каждой точке имеют место существенные флуктуации скорости течения и давления)

Характер течения в трубе определяется безразмерной величиной — числом Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho u l}{\eta}, \quad (2)$$

Где:

u — характерная скорость потока,

ρ — плотность среды,

η — коэффициент вязкости

l — характерный размер системы

Эта величина характеризует отношение кинетической энергии движения элемента объёма жидкости к потерям энергии из-за трения в нем $Re \sim K/A_{\text{тр}}$.

Число Рейнольдса, при котором характер течения изменится с ламинарного на турбулентный называется критическим значением числа Рейнольдса $Re_{\text{кр}}$.

Экспериментальным путем установлено, что переход к турбулентному течению **по трубкам круглого сечения** наблюдается при $Re_{\text{кр}} = 10^3$ (в качестве u выбрана

средняя скорость потока, определяемая через полный расход по формуле $\bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2}$,

а в качестве характерного размера — радиус трубы R). Число Рейнольдса для различных тел не является универсальным.

В рамках задачи будем считать течение газа несжимаемым (то есть плотность среды будем считать постоянной). Для газов такое пренебрежение допустимо, если:

- 1) относительный перепад давления в трубе мал ($\Delta P \ll P$)
- 2) скорость течения значительно меньше скорости звука (число Маха $< < 1$).

В нашем же опыте максимальная разность давлений 30 см водного столба (причем это при турбулентном течении), что составляет примерно 3 % от атмосферного давления.

Течение Пуазейля

Направим ось xx вдоль трубы по направлению потока. В ламинарном потоке скорость течения среды $\rho\rho$ будет направлена всюду по xx (линии тока параллельны стенкам трубки), а давление постоянно в пределах любого сечения и зависит только от продольной координаты $P(x)$. Будем искать частное решение — *установившееся* течение, в котором профиль скорости $u(r)$ (распределение скорости в зависимости от расстояния до оси r) одинаков в любом по-перечном сечении, то есть не зависит от x .

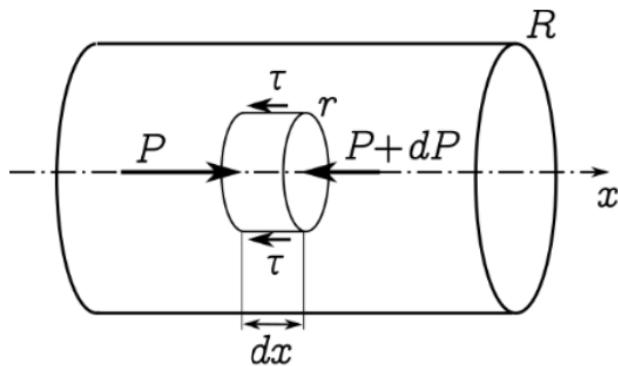


Рисунок 1. Для вывода формула Пуазейля

Выделим соосный трубе цилиндр некоторого радиуса r и длины dx (см. Рис. 1). Поскольку при *стационарном* течении жидкость течёт *без ускорения*, сумма всех сил, действующих на жидкость в цилиндре, должна быть равна нулю. На жидкость внутри цилиндра действует направленная вдоль оси трубы сила $F_{1x} = -dP \cdot \pi r^2$, где $dP = P(x + dx) - P(x) < 0$ — разность давлений в сечениях на торцах выделенного участка.

На боковые поверхности цилиндра действует касательная сила вязкого трения $F_{2x} = -\tau \cdot 2\pi r dx$, где по закону Ньютона (1) касательное напряжение равно $\tau = -\eta \cdot \frac{du}{dr}$.

$$\text{Из условия баланса сил: } F_{1x} + F_{2x} = 0 \text{ найдем } \frac{dP}{dx} = -\eta \cdot \frac{2du}{r dr} \quad (3)$$

В установившемся течении правая часть полученного выражения является функцией только радиуса r . В левой части (3) находится *градиент давления*, который не зависит от rr вовсе, и, следовательно, обе части уравнения (3) являются *константами*. Тогда, проводя интегрирование, приходим к следующему. Во-первых, давление в трубе является линейно убывающей функцией координаты:

$$P(x) = P_0 - \frac{\Delta P}{l} x \quad (4)$$

где ΔP — перепад давления на участке длиной l , P_0 — давление в начале участка (в точке $x = 0$). Во-вторых, профиль скорости является параболической функцией с максимумом на оси трубы:

$$u(r) = u_{max} - \frac{\Delta P}{4l} \cdot r^2$$

Для нахождения константы интегрирования u_{max} необходимо дополнительно задать *граничное условие*. Для течения вязкой жидкости обычно используют так называемое *условием прилипания*: касательная скорость потока вблизи стенок считается равной скорости движения самих стенок. Физически это означает, что на молекулярном уровне стенки являются шероховатыми, так что при ударе о них молекулы в среднем полностью теряют направленную x -компоненту импульса. В рассматриваемой задаче стенки неподвижны, поэтому имеем:

$$u|_{r=R} = 0 \quad (5)$$

Отсюда найдем $u_{max} = \frac{\Delta P}{4l} \cdot R^2$ и профиль скорости:

$$u(R) = \frac{\Delta P}{4l} \cdot (R^2 - r^2) \quad (6)$$

Проинтегрируя $u(r)$ по сечению трубы мы получим объемный расход жидкости в зависимости от перепадов давления на концах:

$$Q = \int_0^R u(r) \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi R^4 \Delta P}{8\eta l} \quad (7)$$

Если течение жидкости имеет ламинарный характер то мы можем вычислить объемный расход с помощью формулы (7) — формулы Пуазейля.

Заметим, что средняя скорость потока при пуазей- левском течении, как видно из (7), оказывается вдвое меньше максимальной: $\bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{u_{max}}{2}$

Формула Пуазейля (7) позволяет найти вязкость газа по зависимости расхода от перепада давления в трубе и используется в качестве основной расчётной формулы в данной работе.

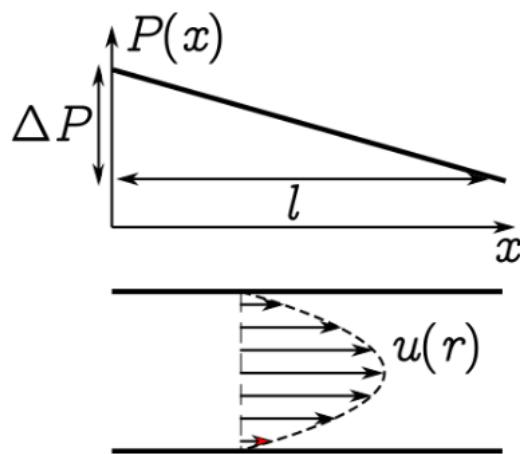


Рисунок 2. Распределение давления и скорости течения Пуазейля в трубе

Длина установления

Пусть на вход трубы поступает течение, распределение скоростей которого не является пуазейлевским (например, распределение скоростей равномерное, как на Рис. 3). Ясно, что профиль течения (6) не может установиться сразу, а реализуется лишь на некотором расстоянии $lL_{уст}$ от начала трубы. Оценим эту длину по порядку величины.

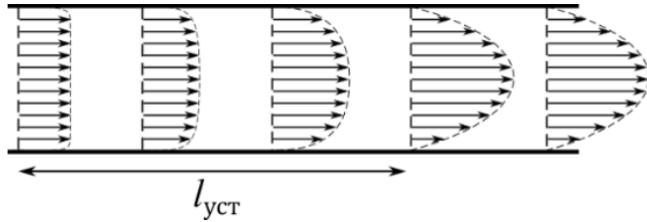


Рисунок 3. Формирование установившегося течения (в ламинарном режиме)

Рассмотрим слой жидкости толщиной dx в поперечном сечении трубы. Кинетическая энергия, запасённая в нём, составляет $K \sim \frac{1}{2} \rho u^2 \pi R^2 dx$.

Работу, которую совершают вязкие силы трения по перемещению этого слоя на расстояние ll , можно оценить как

$$A_{\text{тр}} \sim \eta \cdot \frac{du}{dr} \cdot 2\pi R dx \cdot l$$

Для перепада скоростей воспользуемся оценкой $\frac{du}{dr} \sim \frac{\Delta u}{R} \sim \frac{u}{R}$. Примем, что

работа сил трения, необходимая для распределения скоростей по порядку величины равна кинетической энергии. Тогда получим грубую оценку для длины установления(с точностью до коэффициента порядка 1):

$$l_{\text{уст}} \sim \frac{\rho u R^2}{\eta} = R \cdot Re$$

Точный численный коэффициент здесь аналитически установить затруднительно (к тому же, он зависит от вида начального распределения $\rho\rho(rr)$). Как показывает опыт, этот коэффициент можно с удовлетворительной точностью принять равным 0,2:

$$l_{\text{уст}} \approx 0,2R \cdot Re \quad (8)$$

Заметим, что если длина трубы мала по сравнению с $l_{\text{уст}}$, то работой сил трения в ней можно пренебречь и течение в ней будет описываться не формулой Пуазейля, а уравнением Бернулли (при условии, что течение останется ламинарным).

Экспериментально длину установления можно определить, измеряя распределение давления вдоль трубы $P(x)$. На неустановившемся участке будет наблюдаться отклонение от линейного закона (4), и при том же расходе Q градиент

давления $\Delta P/l$ будет больше (в силу различия скоростей на данном участке), чем следует из формулы Пуазейля.

Вязкость газов

Рассмотрим механизм возникновения вязкости в газах. Молекулы газа участвуют как в *направленном* движении со средней скоростью потока u , так и в *хаотическом* тепловом движении, характеризующимся средней *тепловой* скоростью $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ (m — масса молекулы). Молекулы могут свободно перемещаться между слоями и обмениваться друг с другом импульсами при столкновениях. Если в двух соседних слоях потоковые скорости различны, то такой обмен импульсом и приводит к эффективному возникновению силы трения между слоями.

Исходя из приведенных соображений можно получить следующую оценку для коэффициента вязкости идеального газа:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \lambda \quad (9)$$

где λ — *длина свободного пробега* молекул газа относительно столкновений друг с другом. Как известно из молекулярно-кинетической теории, длина пробега определяется эффективным («газокинетическим») диаметром молекул d как $\lambda \sim 1/(n \pi d^2)$, где n — объёмная концентрация газа. Видно, что λ обратно пропорциональна плотности газа, поэтому, как следует из (9), вязкость газа **не зависит от его плотности** и определяется только температурой T . Данный вывод может показаться парадоксальным, поскольку в более плотном газе большее число молекул должно участвовать в передаче импульса между слоями, однако это компенсируется тем, что импульс передается на меньшее расстояние. Заметим также, что закон Ньютона (1) и формула (9) для газов применимы, только когда скорость потока мала по сравнению с тепловой $\rho \ll \bar{v}$, а характерные размеры системы значительно превышают длину свободного пробега молекул (т.е. система не находится в состоянии высокого вакуума).

Турбулентность

Ламинарная картина течения наблюдается при относительно малых числах Рейнольдса, когда вязкие силы достаточны для того, чтобы погасить любые случайно возникшие возмущения потока. При превышении некоторого критического числа Рейнольдса $Re > Re_{кр}$ течение Пуазеля становится неустойчивым. В потоке начинают рождаться вихри, которые затем сносятся вниз по трубе (при докритических числах Рейнольдса такие вихри быстро затухают за счёт вязкости). С дальнейшим увеличением Re количество вихрей возрастает и, взаимодействуя между собой, они порождают вихри всё меньшего размера, создавая таким образом сложную многомасштабную картину течения. Эта картина радикально отличается от ламинарной: в ней отсутствуют непрерывные линии тока, а слои жидкости постоянно перемешиваются. Течение становится практически непредсказуемым, а скорость и давление испытывают значительные случайные флуктуации.

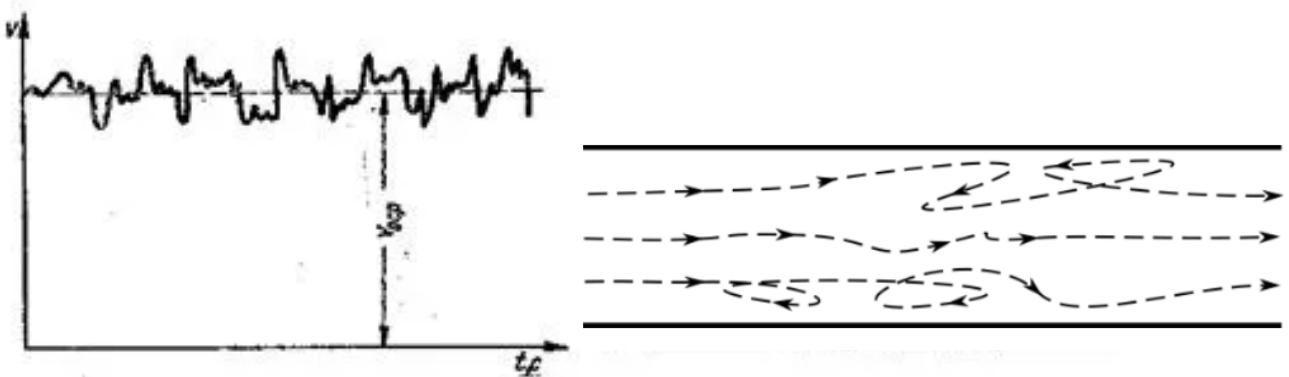


Рисунок 4. Флуктуаций скорости(слева). Характер линий тока (справа).

Несмотря на существенный прогресс за последнее столетие как в теории, так и в вычислительной технике, проблема теоретического описания и численного моделирования развитой гидродинамической турбулентности до сих пор остаётся открытой. Тем не менее, применительно к конкретным системам могут быть построены полуэмпирические модели, дающие на практике приемлемые результаты.

В качестве примера воспользуемся аналогией с молекулярно-кинетической теорией и рассмотрим следующую упрощенную модель турбулентного течения. Примем, что флуктуации скорости в развитом турбулентном течении по порядку величины совпадают со средней скоростью потока $\Delta u \sim \bar{u}$. При этом элементы жидкости практически равномерно перемешиваются по сечению трубы, так что в качестве «длины пробега» жидкой частицы можно взять поперечный размер системы R . Тогда по аналогии с формулой (9) определим «турбулентную вязкость» как:

$$\eta_{\text{турб}} \sim \rho \bar{u} R \quad (10)$$

Далее по аналогии с выводом формулы Пуазейля запишем баланс сил в потоке, откуда получим оценку для средней скорости течения:

$$\eta_{\text{турб}} \frac{\bar{u}}{R} \cdot 2\pi r l \sim \pi R^2 \Delta P \rightarrow \bar{u} \sim \frac{R^2 \Delta P}{\eta_{\text{турб}} l}.$$

Подставляя сюда (10) находим скорость $\bar{u} \sim \frac{R^2 \Delta P}{\eta_{\text{турб}} \cdot l}$ и расход:

$$Q = \pi R^2 \bar{u} \sim R^{5/2} \sqrt{\frac{\Delta P}{\rho l}},$$

Эта теоретическая модель довольно груба, так как не учитывает сложную структуру турбулентного течения (например, не учитывается зависимость скорости потока u от расстояния r до оси трубы). Кроме того, модель предполагает установившийся характер течения на исследуемом участке, что в реальной установке, имеющей конечную длину, может легко нарушаться при достаточно больших Re (см. формулу (8)). Теоретические критерии применимости данной модели установить затруднительно, так что проверить её можно лишь непосредственно в условиях конкретного опыта.

Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки изображена на Рисунке 5. Поток воздуха под давлением, немного превышающим атмосферное, поступает через газовый счётчик в тонкие металлические трубы. Воздух нагнетается компрессором, интенсивность его подачи регулируется краном К. Трубы снабжены съёмными заглушками на концах и рядом миллиметровых отверстий, к которым можно подключать микроманометр. В рабочем состоянии открыта заглушка на одной (рабочей) трубке, микроманометр подключён к двум её выводам, а все остальные отверстия плотно закрыты пробками.

Перед входом в газовый счётчик установлен водяной U-образный манометр. Он служит для измерения давления газа на входе, а также предохраняет счётчик от выхода из строя.

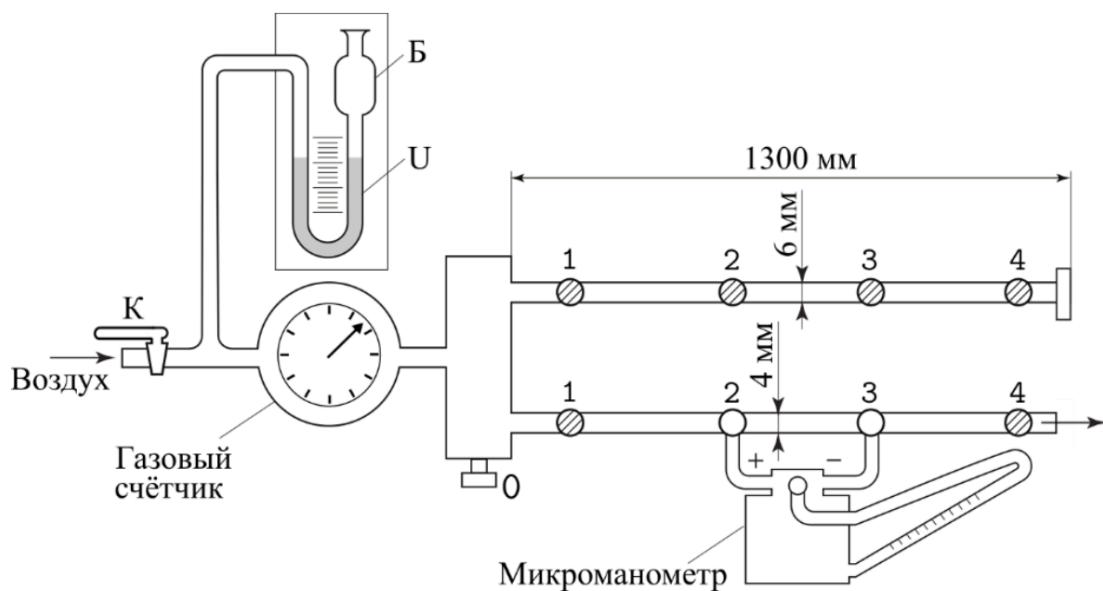


Рисунок 5. Схема экспериментальной установки

Газовый счётчик

В работе используется газовый счётчик барабанного типа, позволяющий измерять объём газа ΔV , прошедшего через систему. Измеряя время Δt при помощи секундомера, можно вычислить средний объём-ный расход газа $Q = \Delta V/\Delta t$ (для

получения массового расхода [кг/с] результат необходимо домножить на плотность газа ρ).

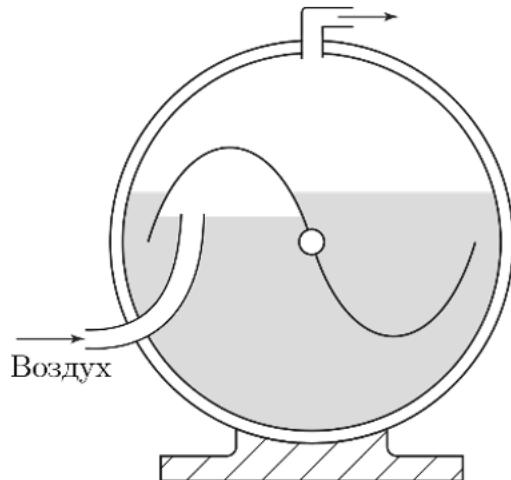


Рисунок 6. Газовый счетчик

Работа счётчика основана на принципе вытеснения: на цилиндрической ёмкости жёстко укреплены лёгкие чаши (см. Рис. 6, где для упрощения изображены только две чаши), в которые поочередно поступает воздух из входной трубы расходомера. Когда чаша наполняется, она всплывает и её место занимает следующая и т.д. Вращение оси предаётся на счётносуммирующее устройство.

Для корректной работы счётчика он должен быть заполнен водой и установлен горизонтально по уровню (подробнее см. техническое описание установки).

Микроманометр

В работе используется жидкостный манометр с наклонной трубкой. Разность давлений на входах манометра измеряется по высоте подъёма рабочей жидкости (как правило, этиловый спирт). Регулировка наклона позволяет измерять давление в различных диапазонах.

На крышке прибора установлен трехходовой кран, имеющий два рабочих положения — (0) и (+). В положении (0) производится установка мениска жидкости на ноль, что необходимо сделать перед началом работы (в процессе работы также

рекомендуется периодически проверять положение нуля). В положении (+) производятся измерения.

При работе с жидкостным манометром важно не допустить его «зашкаливания» — перелива рабочей жидкости в подводящие трубы (в этом случае работу придется приостановить для просушки трубок, долива спирта и т.д.). Все манипуляции по перестановке измерительных трубок следует проводить, когда манометр находится в положении (0). Подачу газа в систему, наоборот, следует осуществлять в положении (+), чтобы контролировать величину давления и иметь возможность вовремя перекрыть поток.

Перед началом работы с микроманометром необходимо убедиться, что в нём залито достаточное количество спирта, а сам манометр установлен строго горизонтально по уровням. Подводящие трубы, заполненные спиртом, не должны содержать пузырьков воздуха, а в трубках, заполненных воздухом, не должно быть капель спирта.

Выполнение работы

1. Ознакомимся с установкой и запишем характеристики приборов:

Газовый счетчик ГСБ-400:

Характеристика	Значение
цена деления	0,02 л
предел измерений стрелочного механизма	5 л
Максимально допустимый перепад давления	600 мм вод. ст. (5885 Па)
Границы допустимой относительной погрешности при измерении объёма газа	±1%

Микроманометр ММН-2400

Характеристика	Значение
K , угловой коэффициент	0,2
C , поправочный множитель	1
$\gamma_{\text{сп. залит}}$	0,8095 г/см ³
$\gamma_{\text{сп. пр}}$	0,8081 г/см ³
цена деления	1,96 Па
предел измерений	588 Па
Инструментальная погрешность	0,0005 ус. ед. = $9 \cdot 10^{-4}$ Па

Время реакции человека будем считать равным ≈ 300 мс

2. Также зафиксируем параметры окружающей среды с помощью приборов, установленных в лаборатории:

$$t = 23,5^{\circ}\text{C}$$

$$\varphi = 74\%$$

$$p_{\text{атм}} = 99,6 \text{ кПа}$$

Также запишем диаметры трубок, на которых мы будем производить измерения:

$$d_1 = (3,95 \pm 0,05) \text{ мм}$$

$$d_2 = (3,00 \pm 0,10) \text{ мм}$$

$$d_3 = (5,05 \pm 0,05) \text{ мм}$$

3. Выполним измерения для трубки d_1 (радиуса R_1). Проведем предварительные расчёты (используя данные пункта 2), вычислив значение расхода, при котором число Рейнольдса достигнет значения $Re_{\text{кр}} \approx 10^3$ (приняв вязкость $\eta_{\text{воздух}} \approx 2 \cdot 10^{-5}$ Па с, длину трубки $l = 50$ см, а Плотность воздуха вычислим из

уравнения идеального газа: $\rho_{\text{воздух}} = \frac{P\mu}{RT} \approx 1,17 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$)

$$a) Отсюда, Q_{kp} = \frac{Re_{kp}\eta\pi R_1}{\rho} \approx 0,1 \frac{l}{c}$$

б) Также вычислим соответствующий перепад давления на выбранном нами участке:

$$\Delta P_{kp} = \frac{Q_{kp} \cdot 8\eta l}{\pi R_1^4} \approx 167,4 \text{ Па}$$

$$(\text{в ценах деления манометра } h_{kp} = \frac{P \cdot \gamma_{\text{сп. пр}}}{9,81 \cdot K \cdot \gamma_{\text{сп. залит}} \cdot C} \approx 85 \text{ ус. ед.})$$

в) Оценим и длину $l_{\text{уст}}$ на которой течение можно считать установившимся ($Re \approx Re_{kp}$): $l_{\text{уст}} \approx 0,2 \cdot re \cdot R_1 \approx 39,5 \text{ см}$

4. Визуально оценим (по пульсациям значения давлений) границу перехода ΔP_{kp} от ламинарного течения к турбулентному. Получим

$$\Delta h'_{kp} \approx 80 \text{ ус. ед.}$$

Погрешность относительно оценки в пункте 3:

$$\varepsilon \approx 6\%$$

5. Оценим погрешность измерения объема расходомером $\sigma_V = \varepsilon_T \cdot V$ (где $\varepsilon_T = 0,01$ из пункта 1)

Погрешность изменения времени (согласно пункту 1) возьмем $\sigma_t = 0,3c$ (систематическая погрешность (создаваемая инструментальной погрешностью секундомера на смартфоне) пренебрежимо равна относительно случайной погрешности).

$$\text{Отсюда, погрешность измерения объёмного расхода } \frac{\sigma_Q}{Q} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2}$$

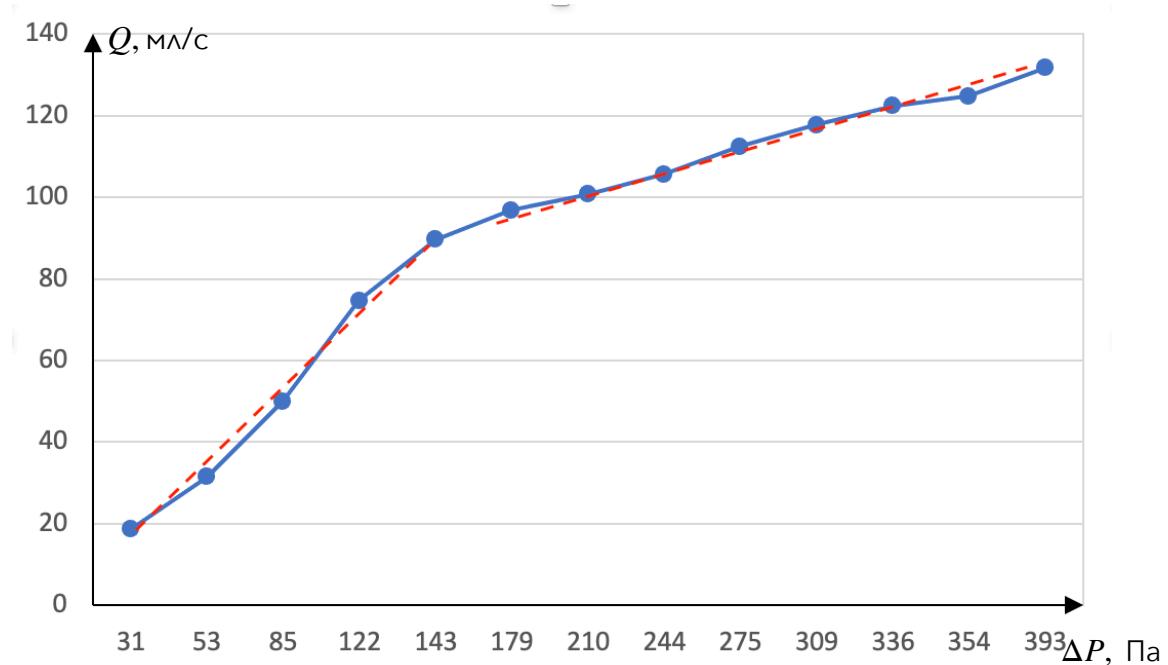
Отсюда, будем подбирать значения так, чтобы $\frac{\sigma_Q}{Q} \cdot 100 \% < 1\%$

6. Проведем измерение зависимости перепада давления ΔP на выбранном участке трубы от расхода газа Q . Результаты внесем в таблицу 1.

Таблица 1. Результаты измерения $Q(\Delta P)$

Nº	h, мс. ед.	ΔP, Па	t, с	V, Λ	Q, мл/с	$\frac{\sigma_Q}{Q}$
1	16	31	53,5	1	18,7	0,01
2	27	53	31,7	1	31,5	0,01
3	43	85	40	2	50,0	0,01
4	62	122	26,8	2	74,6	0,02
5	73	143	22,3	2	89,7	0,02
6	91	179	31	3	96,8	0,01
7	107	210	29,8	3	100,7	0,01
8	124	244	28,4	3	105,6	0,01
9	140	275	35,6	4	112,4	0,01
10	157	309	34	4	117,6	0,01
11	171	336	32,7	4	122,3	0,01
12	180	354	40,1	5	124,7	0,01
13	200	393	38	5	131,6	0,01
14	223	438	36	5	138,9	0,01

Теперь построим график зависимости $Q(\Delta P)$:



Как мы видим, зависимость для первых точек линейная, а течение ламинарное.

С помощью МНК найдем угол наклона по этим точкам:

$y = a + bx$, где $y = Q$, $x = \Delta P$. Тогда:

$$k = b = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0,63 \text{ мл/(с Па)}$$

$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - b^2} \approx 0,03 \text{ мл/(с Па)}$$

Тогда из формулы (7) имеем:

$$\eta = \frac{\pi R^4}{8kl} \approx 1,90 \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$$

Также вычислим погрешность (погрешности в измерении радиуса и длины трубыки пренебрежимо мало)

$$\frac{\sigma_\eta}{\eta} \approx \frac{\sigma_k}{k}$$

Отсюда,

$$\sigma_\eta = \eta \cdot \frac{\sigma_k}{k} \approx 0,09 \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$$

То есть вязкость воздуха равна:

$$\eta_{\text{воздух}} = (1,90 \pm 0,09) \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$$

Сравним ее с табличным значением при данной температуре $\eta_0 = 1,81 \text{ Па с}$

Погрешность относительно табличного значения: $\varepsilon_0 \approx 4,9\%$

Погрешность табличного значения относительно измеренного: $\varepsilon \approx 4,7\%$

Как мы видим эксперимент довольно точно позволяет определить вязкость воздуха.

Аналогично ламинарному течению вычислим $\frac{dQ}{dP}$ при турбулентном течении

методом МНК:

$$k' = \frac{dQ}{dP} \approx 0,17 \text{ мл/с}$$

$$\sigma_{k'} \approx 0,08 \cdot 10^{-1} \text{ мл/с}$$

7. Измерим распределение газа вдоль трубы $P(x)$ при фиксированном потоке. Будем подключать микроманометр ко всем парам выводов трубы d_1 . Результаты измерений внесем в таблицу 2.

Таблица 2. Результаты измерений $P(x)$

Nº	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta P, \text{ Па}$	14	20	33	37	47	59	67	73	79	102
$l, \text{ см}$	11,5	30	40	41,5	50	70	81,5	90	120	131,5

По данным таблицы 2 построим график:

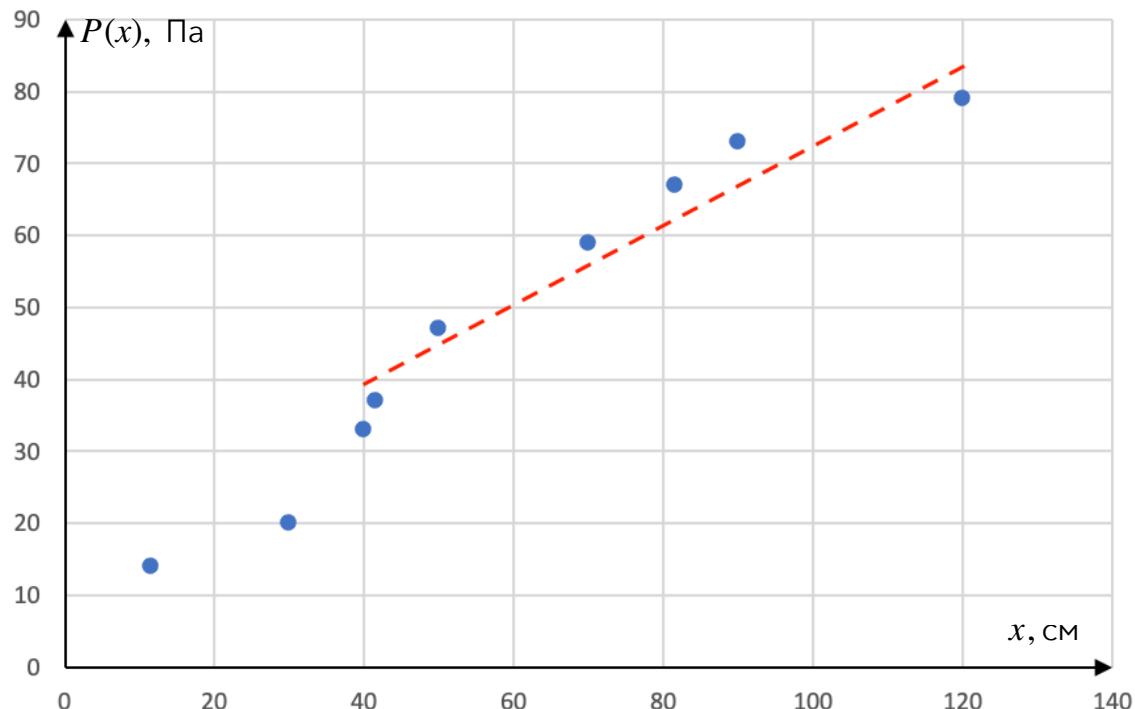


График 1. Зависимость $P(x)$

Используя график мы убеждаемся в том, что ламинарный поток устанавливается на длине в пределах $l_{\text{уст}} \approx 40 \text{ см}$ (вычисленной теоретически в пункте 3В).

8. Проведем измерения, проведенные в пункте 6, для трубок различных диаметров:

Для трубы $d_2 = (3,00 \pm 0,10)\text{мм}$:

$$Q_{\text{кр}} \approx 0,08 \text{ л/с}$$

$$\Delta P_{\text{кр}} \approx 161 \text{ Па}$$

$$h_{\text{кр}} \approx 82 \text{ усл. ед.}$$

Таблица 2. Результаты измерения $Q(\Delta P)$ – для 2-ой трубы

№	$h, \text{ усл. ед.}$	$\Delta P, \text{ Па}$	$t, \text{ с}$	$V, \text{ л}$	$Q, \text{ мл/с}$	$\frac{\sigma_Q}{Q}$
1	10	20	45,2	2	44,2	0,01
2	20	39	24,6	2	81,3	0,02
3	30	59	29	3	103,4	0,01
4	40	79	31,5	4	127,0	0,01
5	49	96	33,4	5	149,7	0,01
6	60	118	29,6	5	168,9	0,01
7	69	136	27	5	185,2	0,01
8	86	169	29,5	6	203,4	0,01
9	100	197	27,1	6	221,4	0,01
10	115	226	25,3	6	237,2	0,02
11	129	254	28,5	7	245,6	0,01
12	145	285	27	7	259,3	0,01
13	161	316	26	7	269,2	0,02

Построим график $Q(\Delta P)$ и с помощью МНК определим угловой коэффициент и погрешности измерения:

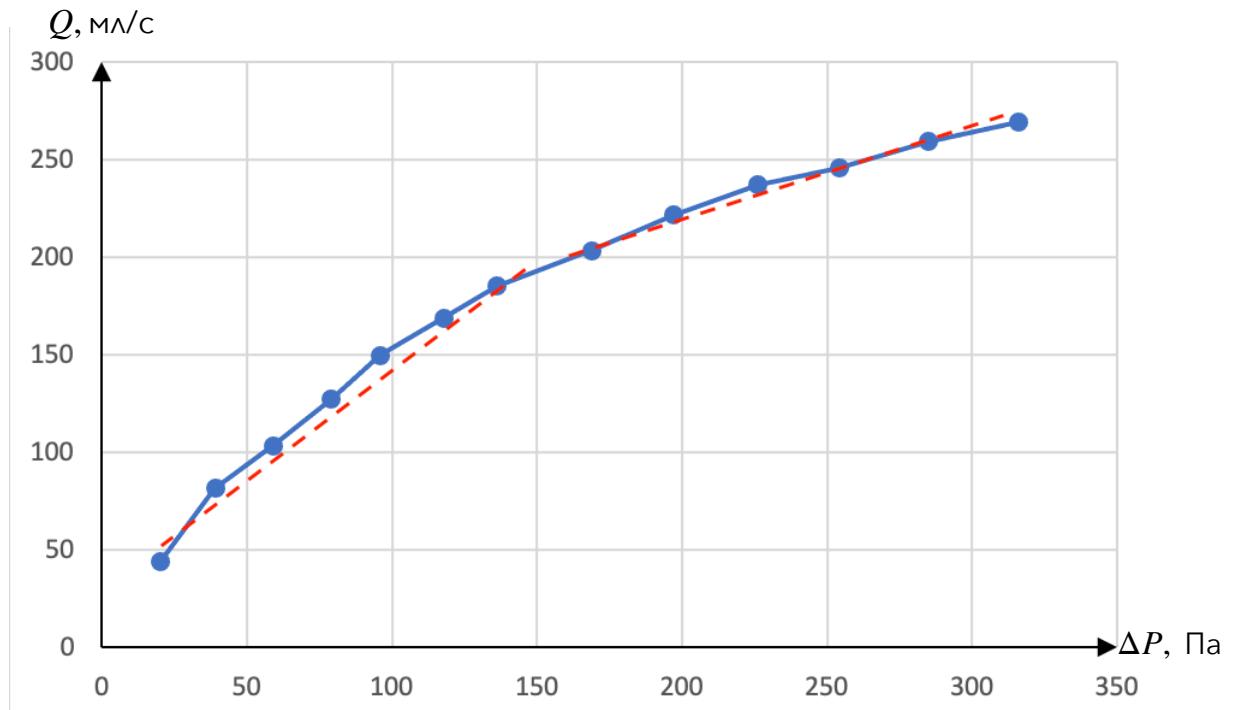


График 2. Зависимость $Q(\Delta P)$ для трубы d_2

Как мы видим, зависимость для первых 7 точек линейная, а течение ламинарное. С помощью МНК найдем угол наклона по этим точкам:

$y = a + bx$, где $y = Q$, $x = \Delta P$. Тогда:

$$k = b = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 1,19 \text{ мл/(с Па)}$$

$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - b^2} \approx 0,06 \text{ мл/(с Па)}$$

Тогда из формулы (7) имеем:

$$\eta = \frac{\pi R^4}{8kl} \approx 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$$

Также вычислим погрешность (погрешности в измерении радиуса и длины трубыки пренебрежимо мало)

$$\frac{\sigma_\eta}{\eta} \approx \frac{\sigma_k}{k}$$

Отсюда,

$$\sigma_\eta = \eta \cdot \frac{\sigma_k}{k} \approx 0,08 \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$$

То есть вязкость воздуха равна:

$$\eta_{\text{воздух}} = (1,67 \pm 0,08) \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$$

Сравним ее с табличным значением при данной температуре $\eta_0 = 1,81 \text{ Па с}$

Погрешность относительно табличного значения: $\varepsilon_0 \approx 7,7\%$

Погрешность табличного значения относительно измеренного: $\varepsilon \approx 8,3\%$

Как мы видим эксперимент довольно точно позволяет определить вязкость воздуха.

Аналогично ламинарному течению вычислим $\frac{dQ}{dP}$ для оставшихся точек методом МНК:

$$k' = \frac{dQ}{dP} \approx 0,44 \text{ мл/с}$$

$$\sigma_{k'} \approx 0,02 \text{ мл/с}$$

9. Аналогичные измерения проведем для трубки $d_3 = (5,05 \pm 0,05)\text{мм}$

$$Q_{\text{кр}} \approx 0,14 \text{ л/с}$$

$$\Delta P_{\text{кр}} \approx 85 \text{ Па}$$

$$h_{\text{кр}} \approx 43 \text{ усл. ед.}$$

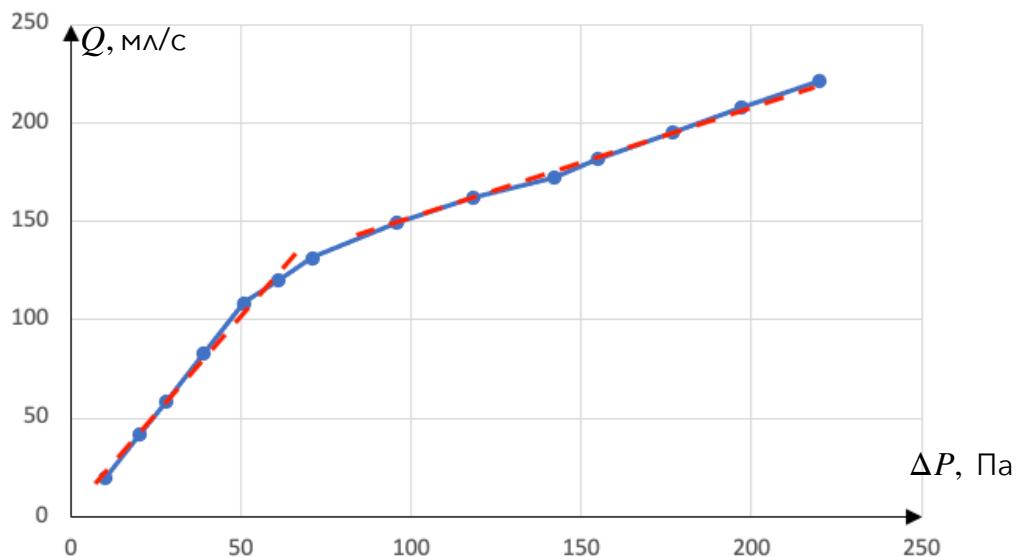
Результаты измерений внесем в таблицу 3:

Таблица 2. Результаты измерения $Q(\Delta P)$ – для 3-ей трубки

Nº	$h, \text{ усл. ед.}$	$\Delta P, \text{ Па}$	$t, \text{ с}$	$V, \text{ л}$	$Q, \text{ мл/с}$	$\frac{\sigma_Q}{Q}$
1	5	10	25	0,5	20,0	0,02
2	10	20	48	2	41,7	0,01
3	14	28	34	2	58,8	0,01
4	20	39	36	3	83,3	0,01
5	26	51	55,2	6	108,7	0,01
6	31	61	50	6	120,0	0,01

Nº	$h, \text{мс. ед.}$	$\Delta P, \text{Па}$	$t, \text{с}$	$V, \text{л}$	$Q, \text{мл/с}$	$\frac{\sigma_Q}{Q}$
7	36	71	45,6	6	131,6	0,01
8	49	96	53,6	8	149,3	0,01
9	60	118	49,4	8	161,9	0,01
10	72	142	29	5	172,4	0,01
11	79	155	55	10	181,8	0,01
12	90	177	51,2	10	195,3	0,01
13	100	197	48,2	10	207,5	0,01
14	112	220	45,2	10	221,2	0,01

Построим график $Q(\Delta P)$ и с помощью МНК определим угловой коэффициент и погрешности измерения:



Как мы видим, зависимость для первых 7 точек линейная, а течение ламинарное. С помощью МНК найдем угол наклона по этим точкам:

$y = a + bx$, где $y = Q$, $x = \Delta P$. Тогда:

$$k = b = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 1,88 \text{ мл/(с Па)}$$

$$\sigma_b = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - b^2} \approx 0,09 \text{ мл/(с Па)}$$

Тогда из формулы (7) имеем:

$$\eta = \frac{\pi R^4}{8kl} \approx 1,70 \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$$

Также вычислим погрешность (погрешности в измерении радиуса и длины трубыки пренебрежимо мало)

$$\frac{\sigma_\eta}{\eta} \approx \frac{\sigma_k}{k}$$

Отсюда, $\sigma_\eta = \eta \cdot \frac{\sigma_k}{k} \approx 0,08 \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$

То есть вязкость воздуха равна:

$$\eta_{\text{воздух}} = (1,70 \pm 0,08) \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$$

Сравним ее с табличным значением при данной температуре $\eta_0 = 1,81 \text{ Па с}$

Погрешность относительно табличного значения: $\varepsilon_0 \approx 6\%$

Погрешность табличного значения относительно измеренного: $\varepsilon \approx 6,5\%$

Как мы видим эксперимент довольно точно позволяет определить вязкость воздуха.

Аналогично ламинарному течению вычислим $\frac{dQ}{dP}$ для оставшихся точек методом МНК:

$$k' = \frac{dQ}{dP} \approx 0,56 \text{ мл/с}$$

$$\sigma_{k'} \approx 0,03 \text{ мл/с}$$

10. Теперь мы можем оценить среднее значение вязкости воздуха по всем экспериментам, найти погрешность и сравнить с табличным значением:

$$\eta_1 = (1,90 \pm 0,09) \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$$

$$\eta_2 = (1,67 \pm 0,08) \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$$

$$\eta_3 = (1,70 \pm 0,08) \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$$

$$\langle \eta \rangle = 1,76 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$$

$$\sigma_{\eta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^3 (\eta_i - \langle \eta \rangle)^2} = 0,07 \cdot 10^{-5}$$

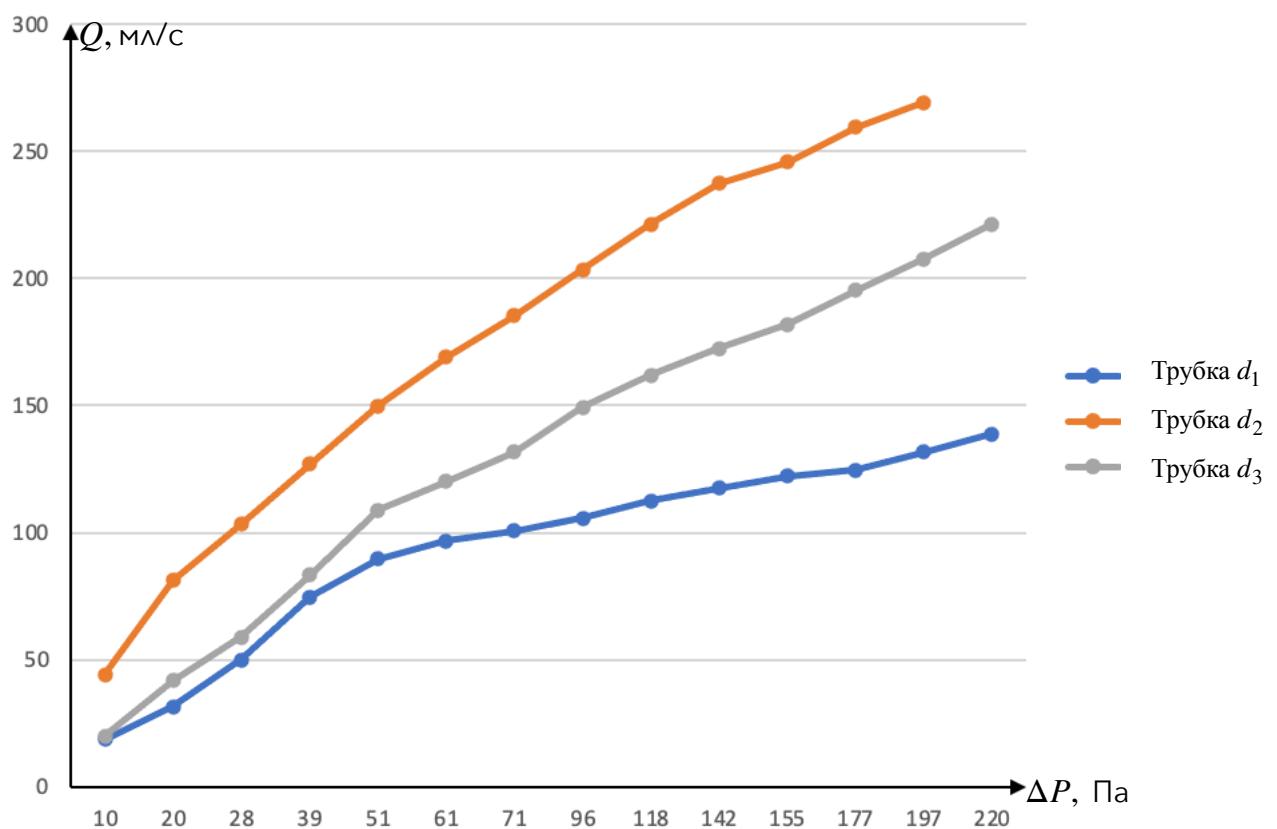
Отсюда $\eta = (1,76 \pm 0,07) \cdot 10^{-5}$ Па с

Заметим, что наше значение совпадает с табличным $\eta_0 = 1,81$ Па с в пределах погрешности, что достижимо благодаря достаточному количеству измерений.

Погрешность относительно табличного: $\varepsilon_1 = 2,7\%$

Погрешность относительно измеренного: $\varepsilon_2 = 2,8\%$

Также построим все графики $Q(\Delta P)$ для различных трубок на одном графике:

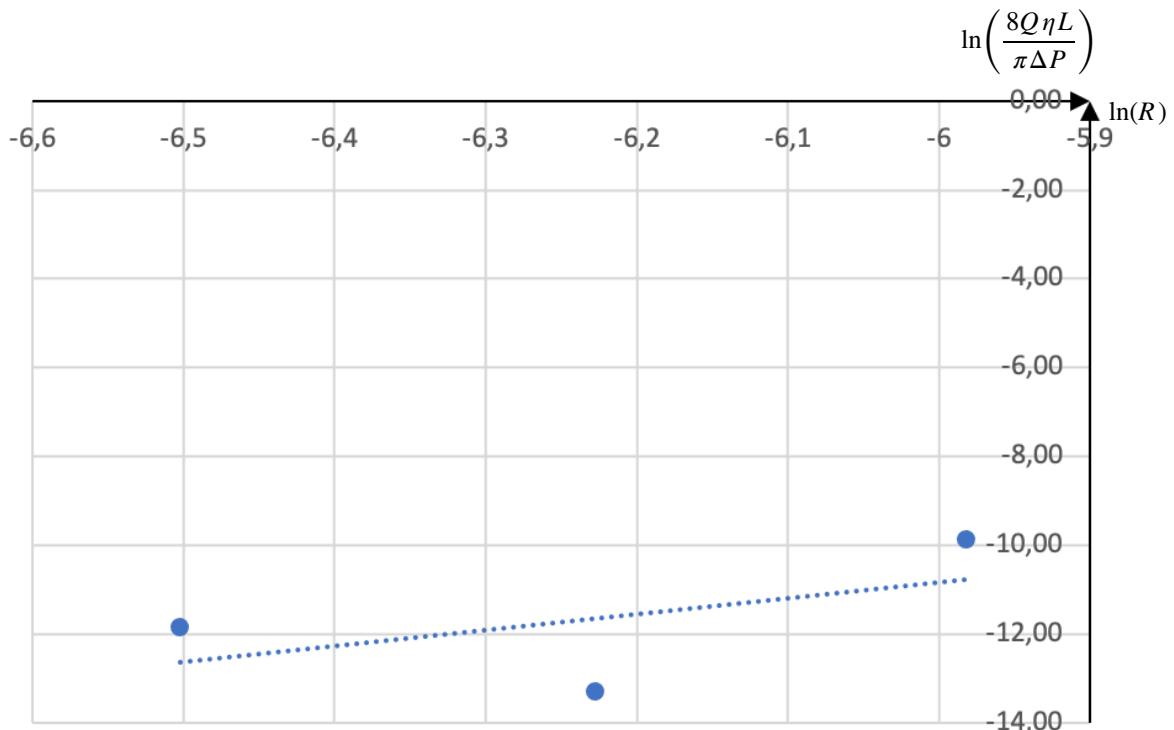


11. Зададим определенный градиент давления $\frac{\Delta P}{l} = 1,18$ Па / см

Проведем измерения на разных трубках, результаты внесем в таблицу:

Nº		$l, \text{ см}$	$h, \text{ усл. ед}$	$\Delta P, \text{ Па}$	$t, \text{ с}$	$V, \text{ л}$	$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$\ln\left(\frac{8Q\eta L}{\pi\Delta P}\right)$	$(\ln R)$
1	$d_1 = (3,95 \pm 0,05)\text{мм}$	50	30	59,0	43,5	2	46	-6,2271	-13,31
2	$d_2 = (3,00 \pm 0,10)\text{мм}$	20	12	23,6	90,9	1	11	-6,5022	-11,85
3	$d_3 = (5,05 \pm 0,05)\text{мм}$	50	30	59,0	24,2	3	124	-5,9815	-9,83

Проверим пропорциональность расхода при ламинарном четвертой степени радиуса трубы. Для этого построим график $\ln\left(\frac{8Q\eta L}{\pi\Delta P}\right)(\ln R)$. Наклон полученной прямой будет соответствовать степени β зависимости $Q \sim R^\beta$:



Вычислим β — наклон прямой методом МНК:

$$\beta = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 3,69$$

$$\sigma_\beta = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - b^2} \approx 0,41$$

Получили, что $\beta = (3,69 \pm 0,41)$, что в пределах погрешности совпадает с теоретическим значением ($Q \sim R^4$).

Для турбулентного течения проверить зависимость для всех трубок ($Q \sim R^{2,5}$) не удалось, поскольку при минимальном (при критическом) значении градиента превышается предел измерения манометра (на трубке d_2 : $\frac{\Delta P_{\text{кр}}}{l} = 8,05 \text{ Па/с}$) При таком значении на других трубках превышается предел измерения манометра.

Поэтому оценим этот коэффициент для трубок d_1 и d_3 :

Nº		$l, \text{ см}$	$h, \text{ усл. ед.}$	$\Delta P, \text{ Па}$	$t, \text{ с}$	$V, \text{ л}$	$Q, \text{ мл/с}$
1	$d_1 = (3,95 \pm 0,05) \text{ мм}$	50	127	250	28	3	107,1
3	$d_3 = (5,05 \pm 0,05) \text{ мм}$	50	127	250	25,8	6	227

$$\frac{Q_3}{Q_1} \approx 2,11$$

$$\left(\frac{R_3}{R_1}\right)^{2,5} \approx 1,85$$

Рассчитаем погрешность относительно отношения $\frac{Q_3}{Q_1}$: $\varepsilon_1 \approx 12\%$

Погрешность относительно $\left(\frac{R_3}{R_1}\right)^{2,5}$: $\varepsilon_2 \approx 14\%$

С приемлемой точностью теоретическая зависимость подтверждается, погрешность связана с малым количеством проведенных измерений.

Вывод

Выполнив данную лабораторную работу, мы экспериментально исследовали свойства течения газов по тонким трубкам:

Изучили зависимость объемного расхода от перепада давления $Q(\Delta P)$ для трубок различного диаметра. На основе полученных данных оценили вязкость воздуха η и получили

$$\eta = (1,76 \pm 0,07) \cdot 10^{-5} \text{ Па с}$$

Получили, что наше значение совпадает с табличным $\eta_0 = 1,81 \text{ Па с}$ в пределах погрешности и вычислили относительные погрешности. Такой точности мы добились за счет количества экспериментов.

Погрешность относительно табличного: $\varepsilon_1 = 2,7\%$

Погрешность относительно измеренного: $\varepsilon_2 = 2,8\%$

Кроме того мы изучили распределение давления газа вдоль трубы $P(x)$ и экспериментально подтвердили, что профиль течения устанавливается на длине $l_{уст} \approx 40 \text{ см}$, которую мы вычислили теоретически.

Также, проведя измерения, мы убедились в том, что при ламинарном потоке $Q \sim R^4$ (получив значение степени радиуса $\beta = (3,69 \pm 0,41)$, что с учетом погрешности совпадает с теоретическим законом). Убедились и, что при турбулентном потоке $Q \sim R^{2,5}$.