Лабораторная работа 2.1.2.

Тема: «Определение $\dfrac{C_p}{C_v}$ методом изобарического расширения»

Артамонов Кирилл, Б01-005
artamonov.ks@phystech.edu
10 марта 2021 г.

Введение

Цель работы: определение соотношения $\frac{C_p}{C_v}$ для углекислого газа по изменению давления в стеклянном сосуде .

В работе используются: стеклянный сосуд, U-образный жидкостный манометр, баллон и газгольдер с углекислым газом.

Экспериментальная установка

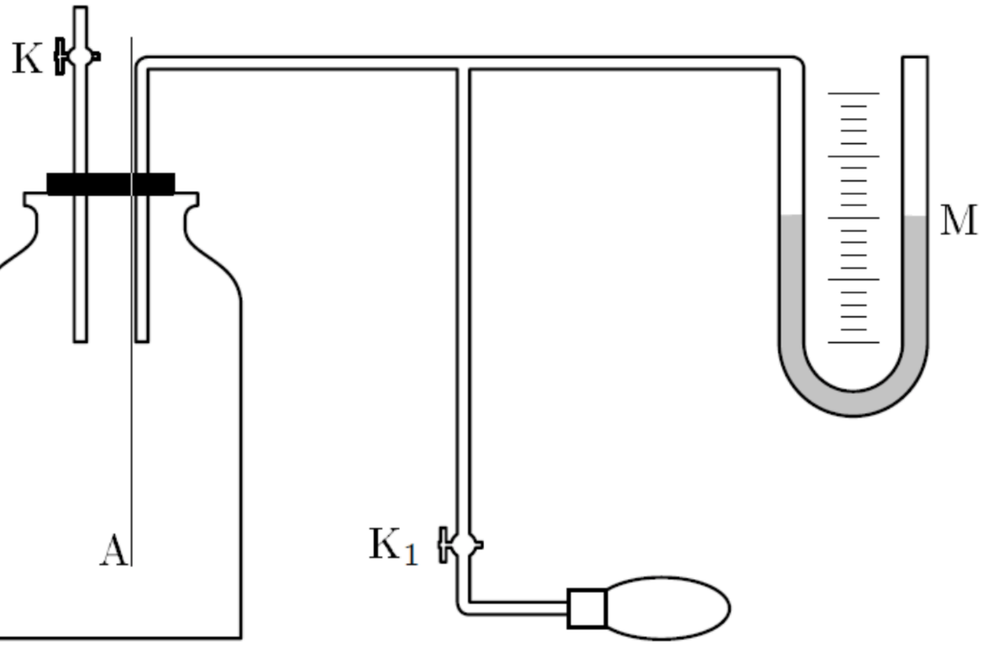

Рисунок 1. Схема экспериментальной установки

A- стеклянный сосуд

M- манометр

K- кран(в атмосферу)

K_1-кран(к газгольдеру)

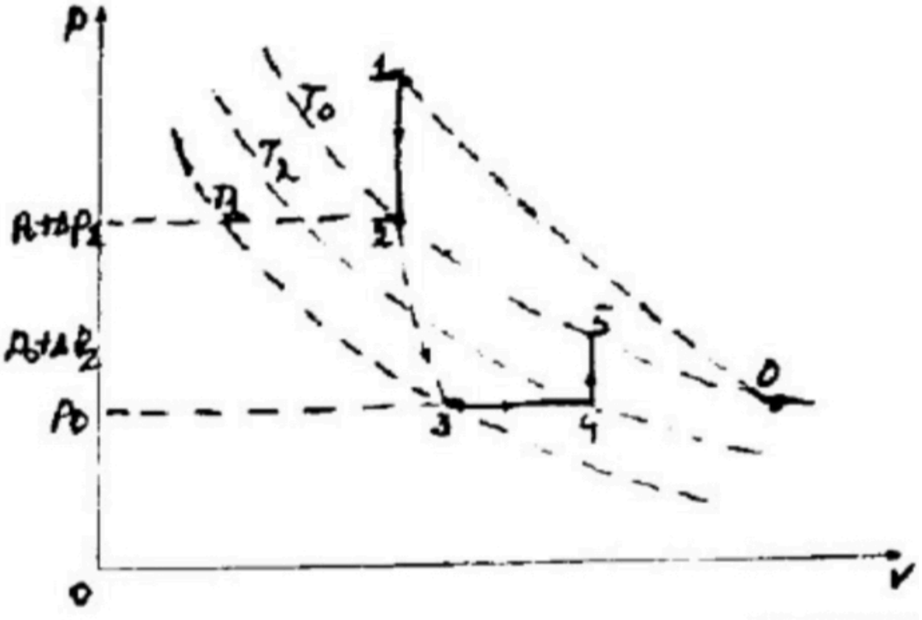

Рисунок 2. График процесса в координатах $p(V)$

С помощью газгольдера, соединенного трубкой с краном K_1 в сосуде создается избыточное давление p_1 газа. При этом газ оказывается перегретым.

Мысленно выделим в сосуде некоторый объем ΔV газа. Будем следить за изменением его состояния. Вследствие теплообмена со стенками сосуда через некоторое время газ остынет до комнатной температуры T_0 (изохорическое охлаждение процесс 1-2 на рисунке 2). При этом давление газа понизится до $p_0 + \Delta p_1$, где

$$\Delta p_1 = \rho g \Delta h_1 \tag{1}$$

Откроем кран K_2. За время Δt порядка $0{,}5$ с произойдет адиабатическое расширение газа (2-3), и его температура окажется ниже комнатной. Далее газ будет изобарических нагреваться (3-4). Зададим время τ, в течение которого кран K_2 открыт, таким, чтобы можно было пренебречь временем Δt адиабатического расширения углекислого газа. После закрытия крана K_2 газ станет изохорически нагреваться до комнатной температуры(4-5), а давление внутри сосуда возрастет до $p_0 + \rho g h_2$, где

$$\Delta p_2 = \rho g \Delta h_2 \qquad (2)$$

Наибольший интерес представляет исследование зависимости отношения перепадов давления $\dfrac{\Delta p_1}{\Delta p_2}$ от времени τ.

Углекислый газ в газгольдере можно считать идеальным газом с хорошей точностью. Рассмотрим изобарическое расширение газа. Запишем уравнение теплового баланса для изменяющейся со временем массы газа $m = \dfrac{P_0 V_0}{RT} \cdot \mu$

$$c_p m dT = -\alpha (T - T_0) dt, \text{ где}$$

c_p – удельная теплоемкость углекислого газа при постоянном давлении, α – положительный постоянный коэффициент(характеризует теплообмен), V_0 – объем газгольдера.

$$c_p \frac{P_0 V_0}{RT} \cdot \mu dT = -\alpha (T - T_0) dt \quad \text{или} \quad \frac{dT}{T(T - T_0)} = -\frac{\alpha dt}{c_p \frac{P_0 V_0}{RT} \cdot \mu}$$

Заметим, что

$$\frac{1}{T(T - T_0)} = -\frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T - T_0}\right)$$

Тогда,

$$\frac{1}{T_0}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T - T_0}\right) dT = \frac{\alpha dt}{c_p m_0 T_0}$$

Сократим на T_0 и проинтегрируем, получим:

$$\ln\left(\frac{T_3}{T_1}\right) - \ln\left(\frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}\right) = \frac{\alpha}{c_p m_0}\tau \quad \text{или} \quad \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right) = \frac{\alpha}{c_p m_0}\tau$$

Отсюда, $\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{\Delta T_2}{T_2}\exp(\frac{\alpha}{c_p m_0}\tau)$ (3)

Для адиабатического расширения (2-3) справедлива формула

$$T^{\gamma} = const \cdot p^{\gamma - 1}\,(\gamma = \frac{C_p}{C_v}).$$

После взятия логарифмических производных получим:

$$\gamma\frac{dT}{T} = (\gamma - 1)\frac{dp}{p} \quad \text{или} \quad \frac{dT}{T} = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma}\frac{dp}{p}$$

Переходя к конечным приращениям, найдем:

$$\frac{\Delta T_1}{T_1} = \frac{(\gamma - 1)}{\gamma}\frac{\Delta p_1}{p_0} \tag{4}$$

При изохоричеком нагревании верно соотношение: $\frac{p}{T} = const.$

Возьмем логарифмическую производную и получим:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T}$$

В конечных приращениях

$$\frac{\Delta p_2}{p_0} = \frac{\Delta T_2}{T_2} \tag{5}$$

Подставим (4) и (5) в уравнение (3) и получим:

$$\frac{(\gamma - 1)}{\gamma}\frac{\Delta p_1}{p_0} = \frac{\Delta p_2}{p_0}\exp(\frac{\alpha}{c_p m_0}\tau) \tag{6}$$

Подставим (6) в уравнения (1) и (2) и получим:

$$\frac{(\gamma - 1)}{\gamma}\Delta h_1 = \Delta h_2\exp(\frac{\alpha}{c_p m_0}\tau) \ \text{ или } \ \frac{\Delta h_1}{\Delta h_2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\cdot\exp(\frac{\alpha}{c_p m_0}\tau)$$

Отсюда,

$$\ln(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}) = \ln\frac{\gamma}{\gamma - 1} + (\frac{\alpha}{c_p m_0})\tau$$

Затем определим γ из графика зависимости $\ln(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2})(\tau)$.

Выполнение работы

1. Проверим исправность установки.

2. Закроем кран K_2 и убедимся, что уровни жидкости в начальный момент в обоих столбцах одинаковы.

3. Откроем кран K_1, наполняя сосуд газом так, чтобы разность уровней жидкости в манометре каждый раз составляла 20 сантиметров.

Закроем кран K_1 и подождем, пока давление в сосуде перестанет изменяться. Далее измерим разность уровней жидкости в манометре Δh_1 и откроем кран K_2 на время $\tau = 5$с. После того, как давление перестанет изменяться определим разность уровней жидкости Δh_2.

4. Повторим пункт 3 выполнения работы еще 6 раз для разных значений τ. Между экспериментами будем выжидать по $3-4$ минуты. Результаты измерения внесем в таблицу 1.

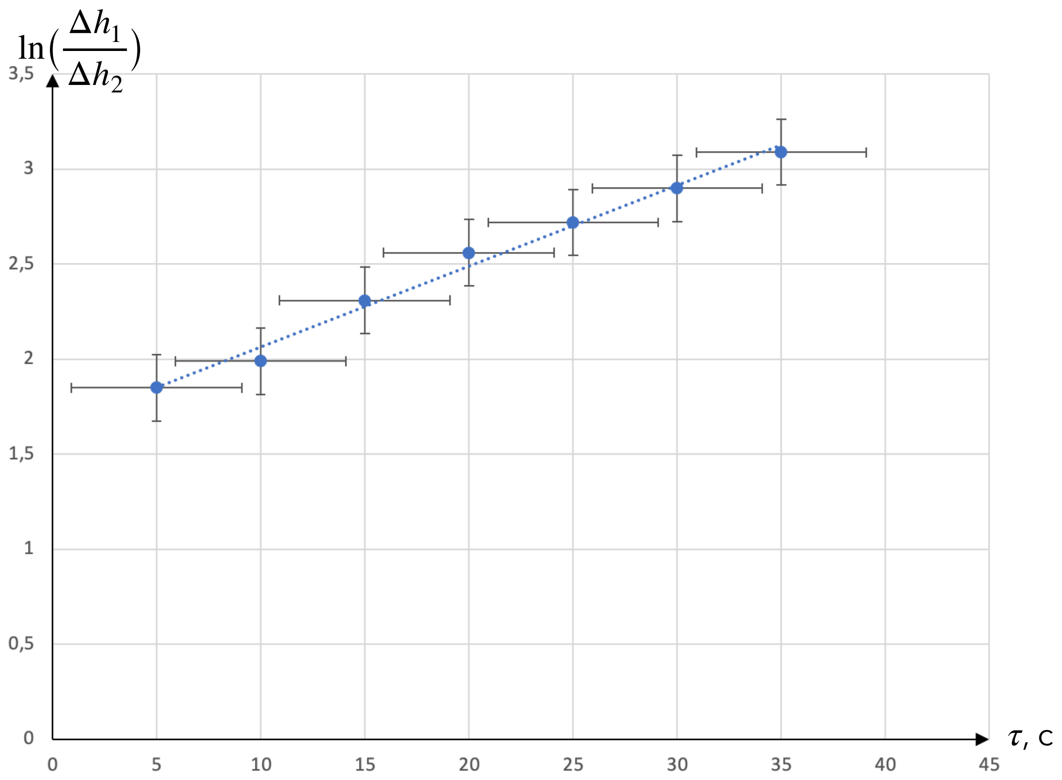

Таблица 1. Результаты измерения Δh_1 и Δh_2 при разных значениях τ

№	Δh_1, **мм**	Δh_2, **мм**	τ, **с**	$\ln(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2})$
1	102	16	5	1,85
2	88	12	10	1,99
3	91	9	15	2,31
4	91	7	20	2,56
5	91	6	25	2,72
6	91	5	30	2,90
7	88	4	35	3,09

5. По данным таблицы 1 в приложении Microsoft Excel построим график зависимости $\ln(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2})$ от τ.

График 1. Зависимость $\ln(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2})(\tau)$

6. С помощью метода наименьших квадратов в приложении Microsoft Excel вычислим значение $\ln\frac{\gamma}{\gamma-1}$ и $(\frac{\alpha}{c_p m_0})$, а также погрешности измерений:

$$(\frac{\alpha}{c_p m_0}) = \frac{<\ln(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2})\tau> - <\ln(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2})>}{<\tau^2> - <\tau>^2} = 42{,}5 \cdot 10^{-3}\ c^{-1}$$

$$\ln\frac{\gamma}{\gamma-1} = \ln(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}) - (\frac{\alpha}{c_p m_0}) \cdot \tau\ = 1{,}64 = \beta \qquad (*)$$

Погрешности измерений:

$$\sigma_{(\frac{\alpha}{c_p m_0})} = \frac{1}{\sqrt{7}} \cdot \sqrt{\frac{< \left(\ln\left(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}\right)\right)^2 > - < \ln\left(\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}\right) >^2}{< \tau^2 > - < \tau >^2} - (\frac{\alpha}{c_p m_0})^2} = 2 \cdot 10^{-3}\ c^{-1}$$

$$\sigma_{\ln \frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \sigma_{(\frac{\alpha}{c_p m_0})} \cdot \sqrt{< \tau^2 > - < \tau >^2} = 0{,}02 = \sigma_\beta$$

7. Определим погрешность измерения γ:

Из формулы (*)

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} = \exp(\beta)$$

Решив уравнение получим: $\gamma \approx 1{,}24$

$$\gamma = \frac{\exp(\beta)}{\exp(\beta) - 1} = 1 + \frac{1}{\exp(\beta) - 1}$$

Погрешность $\sigma_{e^\beta} = e^\beta \cdot \sigma_\beta$

$$\sigma_\gamma = \gamma \cdot \frac{\sigma_{e^\beta}}{e^\beta} = \gamma \cdot \sigma_\beta = 1{,}24 \cdot 0{,}02 \approx 0{,}02$$

Вывод

Выполнив данную лабораторную работу мы вычислили показатель адиабаты для углекислого и получили: $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v} = (1{,}24 \pm 0{,}02)$.

При данных условиях табличное значение показателя адиабаты для данного газа равно $\gamma_0 = 1{,}30$.

Разница между полученным экспериментально и теоретическим значениями равна $\varepsilon = (1 - \dfrac{\gamma}{\gamma_0}) \cdot 100\% \approx 4{,}6\%$

Получили, что данный опыт не способен дать точную оценку значению γ, однако способен дать оценку с точностью до нескольких (в данном эксперименте у нас получилось $4{,}6\%$) процентов.