Tema1:<u>Retele de transport.Algoritmul Ford-Fulkersson de determinare a fluxului maxim</u>

<u>Definitie.</u>Un graf orientat **G=<X,U>,** unde X este multimea virfurilor, iar U – multimea arcelor se numeste **retea de transport** daca sunt satisfacute urmatoarele conditii:

1)exista un unic virf **a** din **X** in care nu intra nici un arc, dar din care pleaca arce, adica semigradul sau interior $d_+a=0$, iar cel exterior $d_-a>0$.Acest virf **a** se numeste sursa sau intrare;

2) exista un unic virf **b** din **X** in care intra arce, dar din care nu pleaca arce, adica semigradul sau interior $d_+b>0$, iar cel exterior $d_{-b}=0$. Acest virf **b** se numeste iesire sau destinatie;

3) graful **G** este conex si exista drumuri de la **a** la **b** in **G;**

4)pentru orice arc din U se defineste o functie $C:U\rightarrow R$, astfel incit $C(u)>0$ si C(u) se numeste functie de **capacitate** a arcului, sau capacitatea lui riziduala.

Reteua de transport se noteaza **G=<X,U,C>,** unde **C** multimea capacitatilor.

<u>Definitie.</u> Numim flux in reteaua de transport **G=<X,U,C>** o functie $f:U\rightarrow R$, astfel incit $f(u)\geq 0$ pentru orice arc u din U si care satisface urmatoarele 2 conditii:

1)<u>Conditia de conservare a fluxului</u>, adica pentru orice virf al grafului (difert de sursa si destinatie) suma fluxurilor care intra-n virful dat este egala cu suma fluxurilor care pleaca din el;

2)<u>Conditia de marginire a fluxului</u>. Pentru orice arc u din U are loc inegalitatea: $f(u)\leq C(u)$.

Daca f(u)=C(u), atunci arcul se numeste saturat. Drumul in reteaua de transport se numeste saturat, daca contine cel putin un arc saturat.

Fluxul, toate drumurile caruia sunt saturate se numeste flux complet. Cel mai mare din fluxurile complete se numeste flux maximal.

Pentru orice submultime A de virfuri din X definim o taietura (sectiune): $W_-(A)=\{(x,y)\mid x\in A, y\in X\setminus A\}$, adica multimea tuturor arcelor care „pleaca” din multimea A si „intra” in multimea X\A .

Analogic definim taietura:
$W_+(A)=\{(x,y) \mid$ unde y apartine lui A, iar x apartine multimii X\A}, adica multimea tuturor arcelor care „pleaca” din multimea X\A si „intra” in multimea A .

Este demonstrata urmatoarea **afirmatie** :

Suma fluxurilor pentru arcele care apartin $W_+(A)$ este egala cu suma fluxurilor pentru arcele care apartin $W_-(A)$. Aceasta valoare comuna se noteaza cu $\mathbf{f_b}$.

Are loc **teorema Ford-Fulkersson:**
Pentru orice retea de transport **G=<X,U,C>** cu intrarea **a** si destinatia **b** valoarea maxima a fluxului la iesire $\mathbf{f_b}$ este egala cucapacitatea minima a unei taieturi, adica:

$$\max \mathbf{f_b} = \min C(W_-(A)).$$

In baza teoremei Ford-Fulkersson a fost elaborat **algoritmul Ford-Fulkersson** de determinare a fluxului maxim la iesirea **b** a unei retele de transport **G=<X,U,C>,** unde capacitatile **c(u)** primesc numai valori intregi.

Pasul I.Se defineste fluxul initial avund componentele nule pe fiecare arc al retelei, adica f(u)=0 pentru fiecare arc $u \in U$ (inclusive si fluxul f_b la iesire).

Pasul II. Se determina drumurile nesaturate (toate arcele drumului satisfac conditia f(u)<C(u)) de la sursa a la virful destinatie b pe care fluxul poate fi marit prin urmatorul procedeu de etichetare (marcaj):

1) Se marcheaza sursa **a** prin [+];
2) Se marcheaza cu(+a) orice virf $x_i \in X$, daca exista arcul (a, x_i) nesaturat (adica $f(a, x_i)<C(a, x_i)$) si nu se marcheaza daca arcul (a, x_i) este saturat (adica $f(a, x_i)=C(a, x_i)$);
3) Virful x_k fiind marcat marcam cu:
   3.1) (+k) orice virf x_j, daca exista arcul nesaturat (x_k, x_j) (pentru care $f(x_k, x_j)<C(x_k, x_j)$) si nu se marcheaza, daca arcul (x_k, x_j) este saturat (pentru care $f(x_k, x_j)=C(x_k, x_j)$);
   3.2) (-k) orice virf x_j, daca exista arcul (x_j, x_k) pentru care $f(x_j, x_k) >0$ si nu se marcheaza daca $f(x_j, x_k) =0$.

Daca prin acest procedeu de marcaj se eticheteaza iesirea **b** ,atunci fluxul $\mathbf{f_b}$ obtinut la pasul curent nu este maxim. Se considera un drum format din virfurile etichetate (ale caror etichete au semnele „+” sau „-”), care uneste sursa **a** cu destinatia **b** si care poate fi usor determinat urmind etichetele sale de la **b** catre **a**. Daca notam acest drum prin **ν**,atunci prin $\boldsymbol{\nu}_+$ notam multimea arcelor (x,y),unde marcajul lui y are semnul „+”, deci orientate in sensul de la a la b, iar cu $\mathbf{v}_-$ **-** multimea arcelor (y,x), unde marcajul lui y are semnul „-” adica de la b la a.

Determinam cantitatile:

$e_1=\min\{C(u)-f(u) \mid u \in \mathbf{v}_+ \}$,

$e_1=\min\{ f(u) \mid u \in \mathbf{v}_- \}$,

$e =\min\{ e_1, e_2\}$.

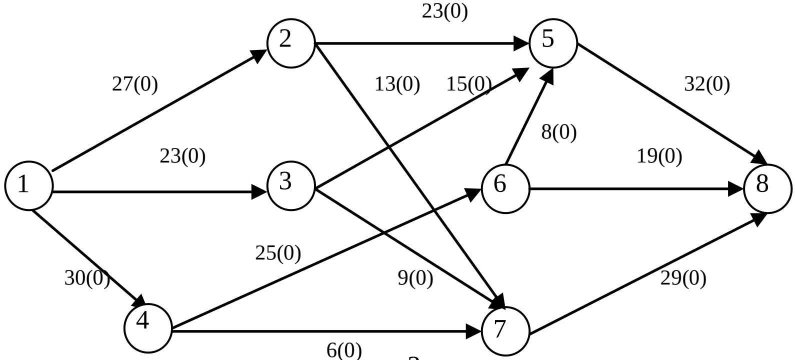
Din modul de etichetare ⇒ ca e>0 (In caz contrar –toate arcurile-s saturate si n-am pute marca iesirea).

Marim cu e fluxul pe fiecare arc $u \in \mathbf{v}_+$ si il micsoram cu e pe orice arc $u \in \mathbf{v}_-$, obtinind la iesire un flux egal cu $\mathbf{f_b + e}$.

<u>Pasul III.</u> Repetam pasul II cu fluxul nou obtinut. Daca prin acest procedeu de etichetare startind din sursa nu exista posibilitati de-a eticheta iesirea , atunci fluxul $\mathbf{f_b}$ are valoare maxima la iesire, iar multimea A a tuturor virfurilor, care au putut fi marcate la ultima tentativa constituie o taietura de capacitate minima. Suma capacitatilor tuturor arcelor care au extremitate initiala in A, iar cea finala in X\A constituie valoarea fluxului maxim in reteaua data de transport. Se afiseaza $\mathbf{f_b}$.

<u>EXEMPLU</u>. De determinat valoarea fluxului maximal in reteaua de trasport **G=<X,U,C> ,** unde X={x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8} multimea virfurilor;

U={(1,2), (1,3) , (1,4), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7), (4,6), (4,7), (5,8), (6,5), (6,8), (7,8) } – multimea arcelor, iar C – capacitatile arcelor: $C(x_1 ,x_2) = c_{12}= 27$, $c_{13}=23$, $c_{14}=30$, $c_{25}=23$, $c_{27}= 13$, $c_{35}=15$, $c_{37}=9$, $c_{46}=25$, $c_{47}= 6$, $c_{58}= 32$, $c_{65}= 6$, $c_{68}= 19$, $c_{78}= 29$. Reprezentam graful



Etapa I. Declaram fluxul initial pe fiecare arc nul. Deci pe fiecare arc din retea linga capacitate in paranteze rotunde s-a inscris zero.

Etapa II. Marcam sursa 1 cu [+]. Marcam 2 cu (+1) asa cum exista arcul (1,2) nesaturat .

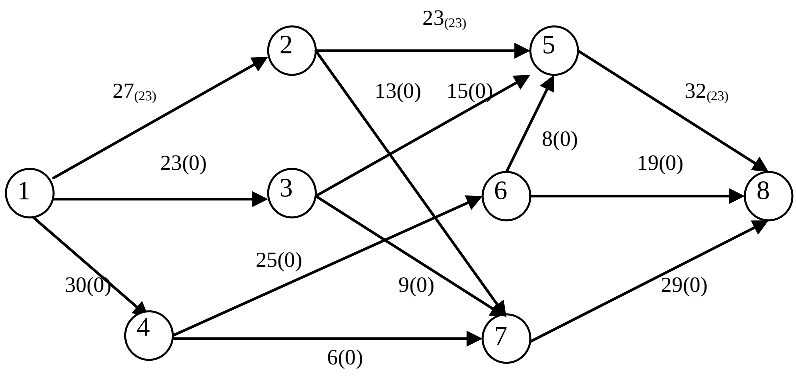
Marcam virful 5 cu (+2) asa cum exista arcul (2,5) nesaturat .

Marcam virful 8(iesirea) cu (+5) asa cum exista arcul (5,8) nesaturat .

Deci, la **etapa II.1** am creat drumul: (1^{+}, 2^{+1}, 5^{+2}, 8^{+5}). Asa cum avem numai marcaj pozitiv $\Rightarrow$ $e=e_1=\min\{C(u)-f(u)\}$ pentru arcele care formeza drumul $e=e_1=\min\{27-0, 23-0, 32-0\}=23$.

Pe toate arcele care formeaza drumul adaugam 23 la flux.

Arcul (2,5) devine saturat. Adaugam la iesire **f_b+23.** Deci, **f_b=23.**

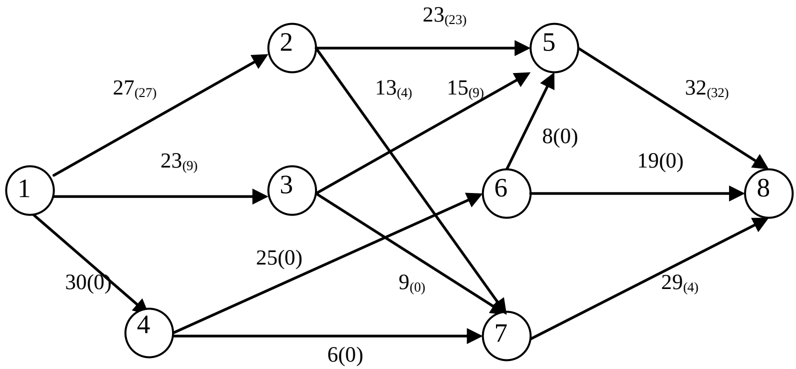


Prin analogie la **etapa II.2** formam drumul: (1^{+}, 2^{+1}, 7^{+2}, 8^{+7}), fiindca arcul(2,5) este saturat. Asa cum avem numai marcaj pozitiv $\Rightarrow$ $e=e_1=\min\{C(u)-f(u)\}$ pentru arcele care formeza drumul

$e=e_1=\min\{27-23, 13-0, 29-0\}=4$.

Pe toate arcele care formeaza drumul adaugam 4 unitati la flux.

Arcul (1,2) devine saturat. Adaugam la iesire $\mathbf{f_b=23+4.}$



EtapaII.3. Trecem la un nou marcaj. Asa cum arcul (1,2) este saturat, dupa marcarea sursei 1 cu [+] marcam virful 3 cu (+1). Din 3 putem merge in 5 cu(+3), iar din 5 – in 8 cu (+5) obtinind drumul : $(1^{+}, 3^{+1}, 5^{+3}, 8^{+5})$.

Asa cum avem numai marcaj pozitiv $\Rightarrow$ $e=e_1=\min\{C(u)-f(u)\}$ pentru arcele care formeza drumul $e=e_1=\min\{23-0, 15-0, 32-23\}=9$.

Pe toate arcele care formeaza drumul adaugam 9 unitati la flux.

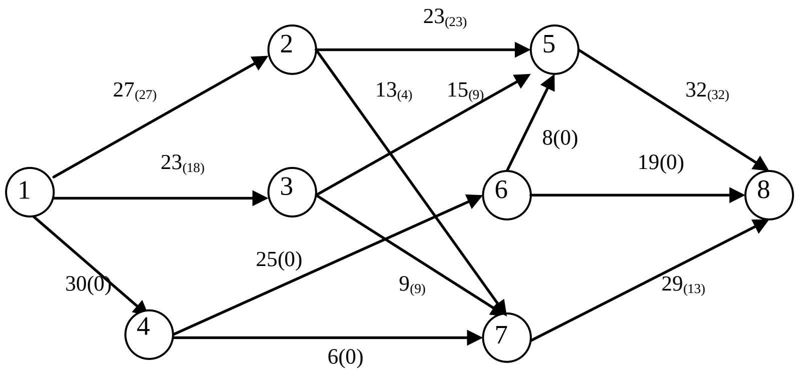
Arcul (5,8) devine saturat. Adaugam la iesire $\mathbf{f_b=23+4+9.}$

Etapa II.4. Marcam sursa 1 cu [+],apoi 3 cu (+1), dupa care 7 cu (+3) si iesirea 8 cu (+7) , obtinind drumul : $(1^{+}, 3^{+1}, 7^{+3}, 8^{+7})$.

Asa cum avem numai marcaj pozitiv $\Rightarrow$ $e=e_1=\min\{C(u)-f(u)\}$ pentru arcele care formeza drumul $e=e_1=\min\{23-9, 9-0, 29-4\}=9$.

Pe toate arcele care formeaza drumul adaugam 9 unitati la flux.

Arcul (3,7) devine saturat. Adaugam 9 unitati la iesire $\mathbf{f_b=23+4+9+9.}$



Etapa II.5. Marcam sursa 1 cu [+],apoi 3 cu (+1), dupa care 5 cu (+3) si asa cum arcul (5,8) este saturat, iar fluxul pe arcul (2,5) este pozitiv marcam virful 2 cu (-5). Din 2 este acces la 7, asa cum(2,7) nu este saturat, apoi din 7 marcam iesirea 8 cu (+7) , obtinind drumul :

$(1^{+}, 3^{+1}, 5^{+3}, 2^{-5}, 7^{+2}, 8^{+7})$.

Determinam pentru arcele marcate cu (+)

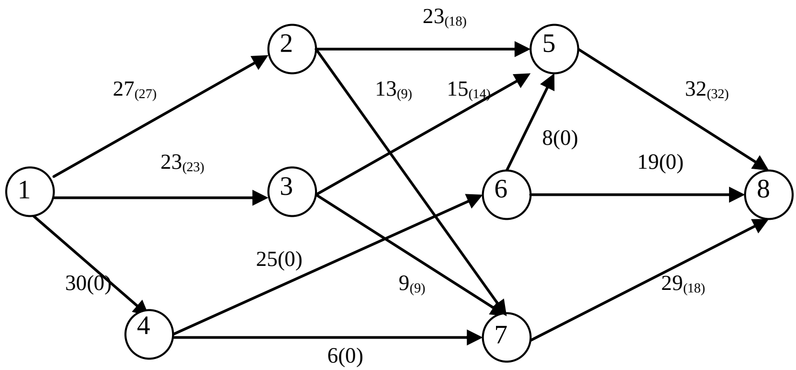
e_1=min{23-18,15-9,13-4, 29-13}=5.

Pentru arcele marcate cu (-) determinam e_2=min{fluxurile pozitive pe arcele marcate cu (-)}= min{23}=23.

Marimea e=min{ e_1, e_2}=min{5,23}=5.

Pe arcele, care formeaza drumul si sunt marcate cu (+) adaugam 5 unitati la flux, iar pe cele marcate cu (-) scadem 5 unitati din flux, adica pe arcul (2,5).

Arcul (1,3) devine saturat. Adaugam 5 unitati la iesire **f_b=23+4+9+9+5.**

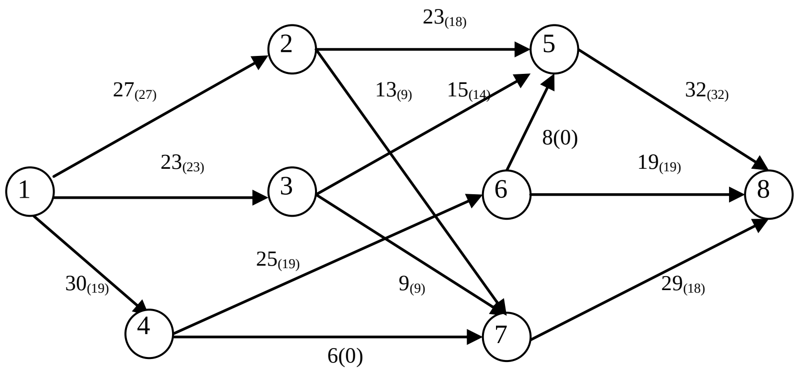


Etapa II.6. Marcam sursa 1 cu [+],apoi 4 cu (+1), dupa care 6 cu (+4) si iesirea 8 cu (+6) , obtinind drumul : $(1^{+}, 4^{+1}, 6^{+4}, 8^{+6})$.

Asa cum avem numai marcaj pozitiv $\Rightarrow$ $e=e_1=\min\{C(u)-f(u)\}$ pentru arcele care formeza drumul $e=e_1=\min\{30-0, 25-0, 19-0\}=19$.

Pe toate arcele care formeaza drumul adaugam 19 unitati la flux.

Arcul (6,8) devine saturat. Adaugam 19 unitati la iesire $\mathbf{f_b=23+4+9+9+5+19.}$

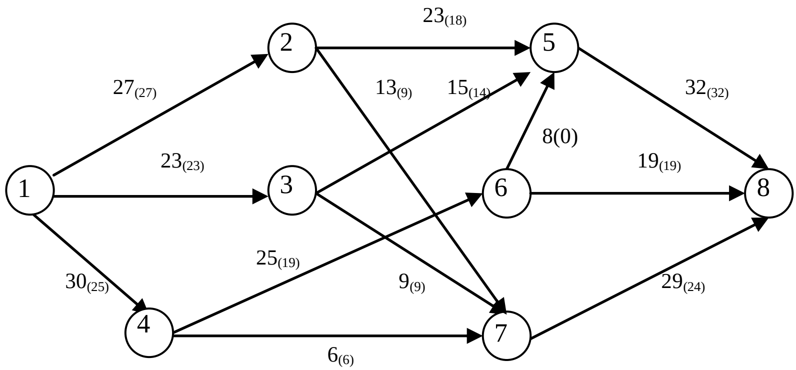


Etapa II.7. Marcam sursa 1 cu [+],apoi 4 cu (+1), dupa care 7 cu (+4) si iesirea 8 cu (+7) , obtinind drumul : (1^{+}, 4^{+1}, 7^{+4}, 8^{+7}).

Asa cum avem numai marcaj pozitiv $\Rightarrow$ $e=e_1=\min\{C(u)-f(u)\}$ pentru arcele care formeza drumul $e=e_1=\min\{30-19, 6-0, 29-18\}=6$.

Pe toate arcele care formeaza drumul adaugam 6 unitati la flux.

Arcul (4,7) devine saturat. Adaugam 6 unitati la iesire **f_b+23+4+9+9+5+19+6.**



Etapa II.8. Marcam sursa 1 cu [+],apoi 4 cu (+1), dupa care 6 cu (+4), apoi 5 cu (+6) si asa cum arcul (5,8) este saturat, iar fluxul pe arcul (2,5) este pozitiv marcam virful 2 cu (-5). Din 2 este acces la 7, asa cum(2,7) nu este saturat, apoi din 7 marcam iesirea 8 cu (+7) , obtinind drumul :

(1^{+}, 4^{+1}, 6^{+4}, 5^{+6}, 2^{-5}, 7^{+2}, 8^{+7}).

Determinam pentru arcele marcate cu (+)

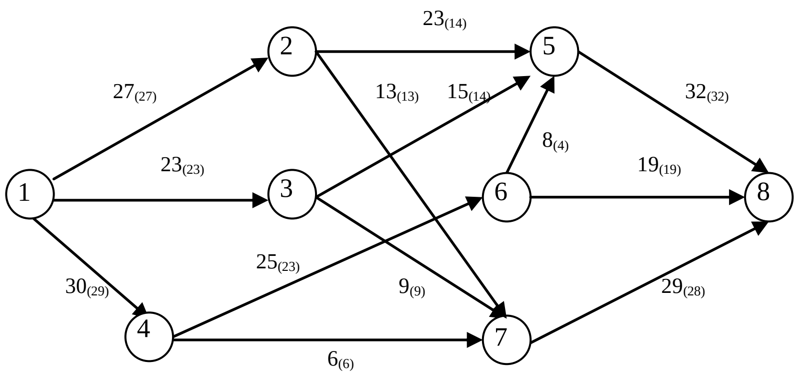
$e_1=\min\{30-25,25-19,13-9, 29-24\}=4$.

Pentru arcele marcate cu (-) determinam e_2=min{fluxurile pozitive pe arcele marcate cu (-)}= min{18}=18.

Marimea e=min{ e_1, e_2}=min{4,18}=4.

Pe arcele, care formeaza drumul si sunt marcate cu (+) adaugam 4 unitati la flux, iar pe cele marcate cu (-) scadem 4 unitati din flux, adica pe arcul (2,5).

Arcul (2,7) devine saturat. Adaugam 4 unitati la iesire **f_b=23+4+9+9+5+19+6+4=79.**



Etapa II.9. Marcam sursa 1 cu [+],apoi 4 cu (+1), dupa care 6 cu (+4), apoi 5 cu (+6) si asa cum arcul (5,8) este saturat, iar fluxul pe arcul (2,5) este pozitiv marcam virful 2 cu (-5). Din 2 nu este acces la 7, asa cum (2,7) este saturat.Asa cum fluxul pe arcul (3,5) este pozitiv marcam virful 3 cu (-5). Din 3 nu este acces la 7, asa cum (3,7) este saturat. Am ajuns la situatia, cind startind din sursa nu avem nici o posiblitate de a marca iesirea. Procesul stopeaza si la ultima tentativa de marcaj a fost etichetata multimea de virfuri A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, iar multimeaX\A={7,8}.

Taietura de capacitate minima $W_-(A)$={(2,7), (3,7), (4,7), (5,8), (6,8)}.

Suma capacitatilor acestor arcuri constituie conform teoremei Ford-Fulkersson valoarea fluxului maximal:

$\mathbf{f_b=13+9+6+32+19=79.}$

Rezultatul se confirma de cel obtinut prin sumare pe etape.

Problema este rezolvata.

Probleme pentru rezolvare individuala:

Problema1. De determinat valoarea fluxului maximal in reteaua de trasport **G=<X,U,C> ,** unde X={x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8} multimea virfurilor;

U={(1,2), (1,3) , (1,4), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7), (4,6), (4,7), (5,8), (6,5), (6,8), (7,8) } – multimea arcelor, iar C – capacitatile arcelor: $C(x_1 ,x_2) = c_{12}=30$, $c_{13}=18$, $c_{14}=24$, $c_{25}=31$, $c_{27}= 9$, $c_{35}=23$, $c_{37}=4$, $c_{46}=26$, $c_{47}= 2$, $c_{58}= 42$, $c_{65}= 8$, $c_{68}= 14$, $c_{78}= 25$.

Raspuns: $\mathbf{f_b=71}$

Problema2. De determinat valoarea fluxului maximal in reteaua de trasport **G=<X,U,C> ,** unde X={x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8} multimea virfurilor;

U={(1,2), (1,3) , (1,4), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7), (4,6), (4,7), (5,8), (6,5), (6,8), (7,8) } – multimea arcelor, iar C – capacitatile arcelor: $C(x_1 ,x_2) = c_{12}= 29$, $c_{13}=21$, $c_{14}=31$, $c_{25}=31$, $c_{27}= 20$, $c_{35}=15$, $c_{37}=7$, $c_{46}=28$, $c_{47}= 4$, $c_{58}= 30$, $c_{65}= 7$, $c_{68}= 18$, $c_{78}= 26$.

Raspuns: $\mathbf{f_b=79}$

<u>Problema3.</u>De determinat valoarea fluxului maximal in reteaua de trasport **G=<X,U,C> ,** unde X={x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8} multimea virfurilor;

U={(1,2), (1,3) , (1,4), (2,5), (2,7), (3,5), (3,7), (4,6), (4,7), (5,8), (6,5), (6,8), (7,8) } – multimea arcelor, iar C – capacitatile arcelor: C(x_1 ,x_2) = c_{12}= 23, c_{13}=25, c_{14}=30, c_{25}=27, c_{27}= 13, c_{35}=19, c_{37}=9, c_{46}=23, c_{47}= 7, c_{58}= 31, c_{65}= 2, c_{68}= 20, c_{78}= 26.

Raspuns: $\mathbf{f_b=77}$**.**