Este o variantă DRAFT a lucrării. Astfel rog să nu fie răspândit până la finalizarea lucrării.

§ 1. Vectori liberi. Operații liniare cu vectori

1. Mărimi scalare și vectoriale

La studierea diferitor ramuri ale fizicii, mecanicii și științelor tehnice se întâlnesc mărimi, care sunt caracterizate în totalitate de un număr, obținut în urma măsurării acestor mărimi. Astfel de mărimi se numesc *mărimi scalare*. Mărimi scalare sunt, de exemplu: *lungimea, aria, volumul, timpul, masa, temperatura, densitatea, lucrul, capacitatea electrică* etc. Deoarece o mărime scalară este determinată de un număr, ea poate fi reprezentată de un punct pe axa de coordonate corespunzătoare (de exemplu, axa timpului, axa temperaturii, axa distanței parcurse).

În diverse probleme, însă, se întâlnesc mărimi, pentru caracterizarea cărora, pe lângă valoarea numerică, este necesară cunoașterea și a direcției ei în spațiu. Astfel de mărimi se numesc *mărimi vectoriale*. Exemple de mărimi vectoriale sunt: *viteza și accelerația unui punct material, forța care acționează asupra unui punct material, greutatea, intensitatea unui câmp electric sau magnetic* etc.

Considerăm un exemplu simplu de mărime vectorială. Dacă spunem că vântul suflă cu o viteză de 15 m/s, atunci considerăm valoarea numerică a vitezei vântului, dar dacă spunem că vântul suflă **din nord** cu o viteză de 15 m/s, atunci viteza vântului este deja o mărime vectorială.

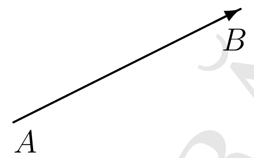
2. Segmente orientate. Vectori liberi

Pentru *reprezentarea geometrică* a mărimilor vectoriale se folosesc așa-numitele *segmente orientate* - segmentele care au o direcție bine determinată în spațiu. În acest caz, valoarea numerică a mărimii vectoriale este egală cu lungimea segmentului orientat, iar direcția mărimii vectoriale coincide cu direcția segmentului orientat.

Mai general, mărimile vectoriale sunt reprezentate de *vectori*. Trebuie de menționat, că noțiunea de vector este "diferită", în dependență de context. În cel mai simplu caz, un *vector* este un *segment orientat*. În alte cazuri, un *vector* reprezintă *o mulțime de segmente orientate* cu anumite proprietăți (adică reprezintă o clasă de echivalență definită printr-o relație de echivalență specifică). Relația de echivalență determină tipul vectorului. În cadrul unei clase de echivalență, toate segmentele orientate sunt considerate "egale" și fiecare segment orientat reprezentă în mod egal întreaga clasă de echivalență. Menționăm aici trei tipuri de vectori, întâlnite la rezolvarea problemelor de mecanică, și anume: *vectori liberi, vectori legați, vectori glisanți (alunecători).* Interesul nostru va fi în mare parte pentru “vectori liberi” și urmează suportul teoretic al acestei noțiuni.

Definiţie. Fie S mulţimea punctelor din spaţiul tridimensional. Numim *segment orientat* o pereche ordonată de puncte $(A,\, B) \in S \times S$. Notăm segmentul orientat cu $\overrightarrow{AB}$. Punctul A se numeşte *origine* sau *punct de aplicație*, iar punctul B - *extremitate* a segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$.

Mai jos avem reprezentarea geometrică a unui segment orientat.



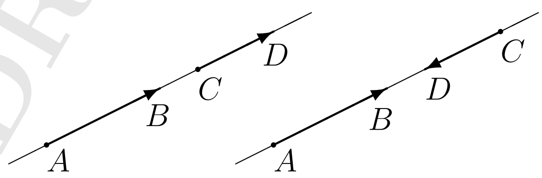
Notă. Un segment orientat $\overrightarrow{AB}$ $(A \neq B)$ determină pe dreapta AB în mod unic un *sens de parcurgere de la A către B*.

Dacă $A = B$, atunci segmentul orientat $\overrightarrow{AA}$ (adică (A, A)) este numit *segment orientat nul* și se notează cu $\overrightarrow{0}$.

În cazul $A \neq B$ dreapta AB se numeşte *dreaptă suport* a segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$. Este evident că orice segment orientat nenul are o singură dreaptă suport. Orice segment orientat (A, A) “posedă” o infinitate de drepte suport - toate dreptele, ce trec prin punctul A.

Definiţie. Spunem că două segmente orientate nenule *au aceeaşi direcţie*, dacă dreptele suport ale lor sunt paralele sau coincid.

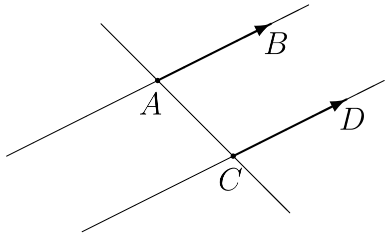
Notă. Dacă segmentele orientate nenule $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ au aceeaşi dreaptă suport, atunci *sensurile* de parcurgere ale lor *coincid* sau *sunt opuse.*



Definiţie.

1. Două segmente orientate nenule cu aceeaşi dreaptă suport *au acelaşi sens*, dacă sensurile de parcurgere determinate de ele coincid.

2. Două segmente orientate nenule cu aceeaşi direcţie, dar cu drepte suport diferite *au acelaşi sens*, dacă extremităţile lor sunt situate în acelaşi semiplan, determinat de originile segmentelor orientate.



Se notează $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

3. Dacă două segmente orientate au aceeaşi direcţie, dar nu au acelaşi sens, atunci se spune că ele au *sens opus*. Se notează $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

Definiţie. Se numeşte *lungime* (*modul* sau *normă*) a segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$ distanţa dintre punctele A şi B. Se notează cu $|\overrightarrow{AB}|$.

Este evident că $|\overrightarrow{0}| = 0$.

Definiţie. Două segmente orientate se numesc *echipolente*, dacă au aceeași direcţie, acelaşi sens şi aceeaşi lungime. Se notează: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Definiţie. Se numeşte *vector liber* mulţimea tuturor segmentelor orientate, echipolente cu un segment orientat dat.

Vectorii liberi se notează cu $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ... Mulţimea tuturor vectorilor liberi din spaţiu este notată cu V_3.

Notă. Nu trebuie să ne fie frică de faptul că am numit un vector liber o mulțime infinită de segmente orientate! După cum vom vedea, operațiile cu un vector liber $\bar{a}$ se reduc la operații cu un segment orientat $\overrightarrow{AB} \in \bar{a}$ luat aleator!

Notă. Vectorul liber, care conţine segmentul orientat $\overrightarrow{AB}$, se notează cu $\overline{AB}$.

Noţiunile de *direcţie, sens* şi *lungime*, introduse pentru segmentele orientate, se extind şi asupra vectorilor liberi, reprezentând *direcţia, sensul* şi *lungimea* segmentelor orientate, care determină vectorul liber.

– *Lungimea vectorului liber* $\bar{a}$ se notează cu $|\bar{a}|$.

Este evident că $|\overline{AB}| = |\overrightarrow{AB}|$.

– Un vector de lungime 1 se numeşte *vector unitar* sau *versor*.

– Vectorul liber de lungime 0 se numeşte *vector nul* şi se notează cu $\bar{0}$.

– Vectorii liberi nenuli cu aceeaşi direcţie se numesc *coliniari*. Se notează cu $\bar{a} \parallel \bar{b}$. Admitem că un vector nul este coliniar cu orice vector liber.

– Vectorii liberi, cu reprezentanţi paraleli aceluiaşi plan, se numesc *coplanari*.

– Vectorii liberi $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se numesc *egali*, dacă au reprezentanţi echipolenţi. Se notează: $\bar{a} = \bar{b}$.

La începutul acestui paragraf am vorbit despre diverse clase de vectori: *liberi*, *legați* și *glisanți*. Mai sus am definit *vectorul liber* ca o mulțime de segmente orientate echipolente.

Numim *vector legat* un segment orientat. Astfel un vector legat reprezintă o mulțime formată dintr-un singur segment orientat.

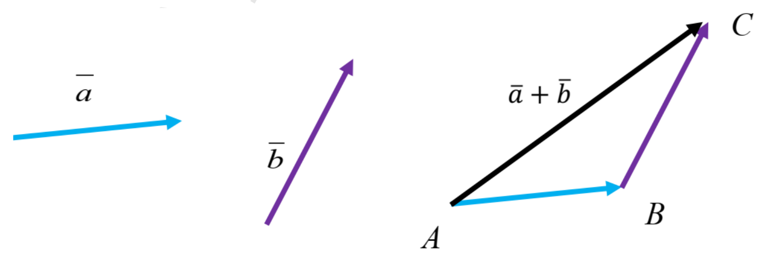
Numim *vector glisant (alunecător)* mulțimea segmentelor orientate, cu aceeași dreaptă suport, același sens și lungime egală cu lungimea unui segment orientat dat.

Din cursul de fizică este bine cunoscut faptul că o forță poate fi reprezentată printr-un segment orientat, dar nu poate fi reprezentată de un vector liber, deoarece forțele reprezentate de segmente orientate echipolente produc, în general, acțiuni diferite. Dacă o forță acționează asupra unui corp elastic, atunci segmentul orientat care o reprezintă, nu poate fi translat nici măcar de-a lungul dreptei suport al acestui segment. În acest caz este vorba despre un *vector legat*. Iar forța care acționează asupra unui corp rigid este reprezentată de un *vector glisant*, cunoscând că două forțe care sunt egale și situate pe aceeași dreaptă, au același efect mecanic asupra unui corp rigid.

În cele ce urmează vom lucra cu vectori liberi.

3. Operaţii liniare cu vectori

Definiţie. Fie $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ doi vectori liberi cu reprezentanţii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ respectiv. Numim *sumă a vectorilor* $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ vectorul liber, notat cu $\bar{a} + \bar{b}$, care are drept reprezentant segmentul orientat $\overrightarrow{AC}$.



Suma vectorilor nu depinde de reprezentanţii aleşi.

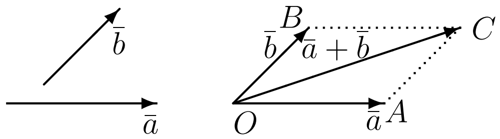
Are loc aşa numită *relație Chasles* - $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Regula menționată de adunare a vectorilor se numeşte *regula triunghiului*.

Notă. Pentru $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V_3$ are loc inegalitatea $|\bar{a} + \bar{b}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}|$, iar egalitatea se realizează doar pentru $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$.

Adunarea vectorilor poate fi efectuată utilizând și *regula paralelogramului*.

Fie $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ doi reprezentanţi ai vectorilor liberi $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ respectiv. Construim paralelogramul cu laturile OA şi OB.



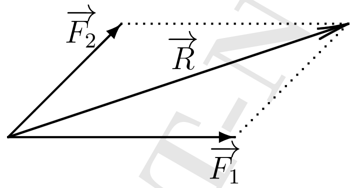
Atunci vectorul $\bar{a}+\bar{b}$ are drept reprezentant segmentul orientat $\overrightarrow{OC}$ – o diagonală a paralelogramului.

Notă. Putem defini şi suma a doi vectori legaţi:

1) în cazul în care originea vectorului al doilea coincide cu extremitatea primului vector, considerăm $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$;

2) în cazul în care originile vectorilor legaţi coincid, se aplică regula paralelogramului.

Se ştie, că acţiunea a două forţe $\overrightarrow{F_1}$ şi $\overrightarrow{F_2}$ asupra unui punct material M poate fi substituită cu o singură forţă $\overrightarrow{R}$, numită *rezultanta forţelor* $\overrightarrow{F_1}$ şi $\overrightarrow{F_2}$, determinată după regula paralelogramului.



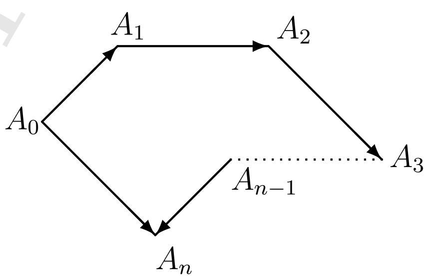
Regula poligonului. Adunarea vectorilor liberi se extinde şi asupra unui număr finit de vectori.

Suma $\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3+\ldots+\bar{a}_{n-1}+\bar{a}_n$ a vectorilor liberi $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$, $\ldots$, $\bar{a}_n$ se determină inductiv:

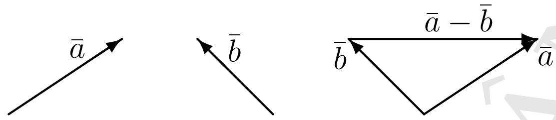
$$\bar{a}_1+\bar{a}_2+\bar{a}_3+\ldots+\bar{a}_{n-1}+\bar{a}_n=(\ldots((\bar{a}_1+\bar{a}_2)+\bar{a}_3)+\ldots+\bar{a}_{n-1})+\bar{a}_n.$$

Pentru linia poligonală $A_0A_1A_2\ldots A_n$ are loc egalitatea

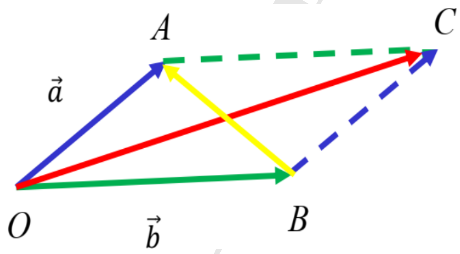
$$\overline{A_0A_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\ldots+\overline{A_{n-1}A_n}=\overline{A_0A_n}.$$



Definiţie. Numim *diferenţă dintre vectorii liberi* $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, vectorul $\bar{d}$ notat cu $\bar{a} - \bar{b}$, astfel încât $\bar{a} = \bar{b} + \bar{d}$.



Notă. Fie vectorii nenuli $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ cu reprezentanţii $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ respectiv. Atunci diagonala $\overrightarrow{OC}$ a paralelogramului, construită pe $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$, este reprezentant al vectorului sumă $\bar{a} + \bar{b}$, iar diagonala $\overrightarrow{BA}$ este reprezentant al vectorului diferenţă $\bar{a} - \bar{b}$.



Proprietăţi ale adunării vectorilor:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ - comutativitate;

2. $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ - asociativitate;

3. $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$, $\forall \bar{a} \in V_3$. Astfel, vectorul nul $\bar{0}$ este element neutru faţă de adunarea vectorilor.

4. Pentru orice vector liber $\bar{a}$ există un vector, care adunat cu $\bar{a}$ are ca sumă vectorul $\bar{0}$. Acest vector este notat cu $-\bar{a}$ şi este numit *opusul* lui $\bar{a}$. Astfel, $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$. Evident, opusul lui $\overline{AB}$ este vectorul $\overline{BA}$, adică $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

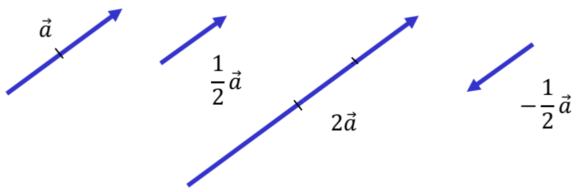
Definiţie. Se numeşte *produs al vectorului* $\bar{a} \in V_3$ *cu scalarul* $\alpha \in \mathbb{R}$ vectorul liber, notat cu $\alpha\,\bar{a}$, care posedă următoarele proprietăţi:

1. $|\alpha\bar{a}| = |\alpha| \cdot |\bar{a}|$;

2. $\alpha\bar{a} = \bar{0}$, dacă $\alpha = 0$ sau $\bar{a} = \bar{0}$;

3. $\alpha\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{a}$ pentru $\alpha > 0$; $\alpha\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{a}$, pentru $\alpha < 0$.

În figura alăturată prezentăm o vizualizare a produsului vectorului $\bar{a}$ cu un scalar.



Proprietăţi ale înmulţirii vectorului cu un scalar:
1. $\alpha(\bar{a}+\bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b},\ \forall\alpha \in \mathbb{R},\ \bar{a}, \bar{b} \in V_3$;
2. $(\alpha+\beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a},\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \bar{a} \in V_3$;
3. $\alpha(\beta\bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a},\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \bar{a} \in V_3$;
4. $1 \cdot \bar{a} = \bar{a},\ \forall\bar{a} \in V_3$.

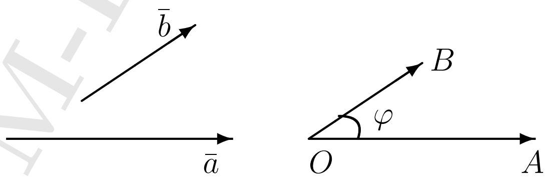
Notă. Pentru orice vector $\bar{a}$ vectorul $(-1) \cdot \bar{a}$ este opusul lui $\bar{a}$, adică $-1 \cdot \bar{a} = -\bar{a}$.

Teoremă. Vectorii nenuli $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$ sunt coliniari dacă şi numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}^*$, astfel încât $\bar{b} = \alpha\bar{a}$. Este evident că

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}, & \text{dacă } \bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}, \\ -\dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}, & \text{dacă } \bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}. \end{cases}$$

Versorul unui vector liber. După cum a fost menţionat anterior, versorul este un vector de lungime 1. Dacă $\bar{a}$ este un vector liber nenul, atunci vectorul $\bar{a}_0 = \dfrac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a}$ are lungimea egală cu 1 și este numit *versor al vectorului* $\bar{a}$.

Unghiul dintre doi vectori. Prin unghi dintre doi vectori liberi nenuli $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ vom înţelege unghiul φ $(0 \le \varphi \le \pi$ sau $0° \le \varphi \le 180°)$ dintre reprezentanţii lor $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$ respectiv.

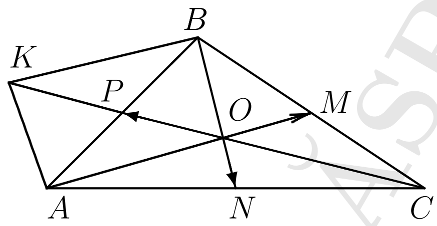


Vectorii nenului $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ se numesc *ortogonali* (*perpendiculari*), dacă unghiul dintre ei este egal cu $\dfrac{\pi}{2}$. Convenim că vectorul $\bar{0}$ este ortogonal oricărui vector.

Exemplul 1. Fie O centrul de greutate al triunghiului ABC. Să se arate că $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{0}$.

Centrul de greutate al unui triunghi este punctul de intersecţie a medianelor acestui triunghi.

Metoda 1 (algebrică). Fie $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ şi $\overrightarrow{CP}$ medianele triunghiului dat. Atunci



$$\overline{OA} = \frac{2}{3}\,\overline{MA} = \frac{2}{3}\left(\overline{MC} + \overline{CA}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\,\overline{BC} + \overline{CA}\right);$$

$$\overline{OB} = \frac{2}{3}\,\overline{NB} = \frac{2}{3}\left(\overline{NA} + \overline{AB}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\,\overline{CA} + \overline{AB}\right);$$

$$\overline{OC} = \frac{2}{3}\,\overline{PC} = \frac{2}{3}\left(\overline{PB} + \overline{BC}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\,\overline{AB} + \overline{BC}\right).$$

În continuare, obţinem

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\,\overline{BC} + \overline{CA} + \frac{1}{2}\,\overline{CA} + \overline{AB} + \frac{1}{2}\,\overline{AB} + \overline{BC}\right] =$$

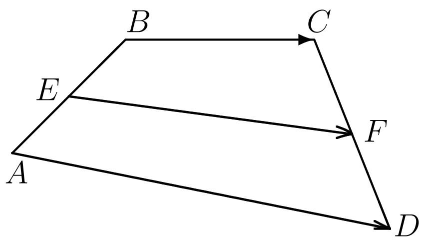
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\left(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}\right) = \overline{AA} = \overline{0} \text{ c.t.d.}$$

Metoda 2 (geometrică). Fie $OAKB$ paralelogramul construit pe $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$. Atunci $\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OK}$, unde $\overline{OK}$ este diagonală a acestui paralelogram. Cum $\overline{OK} = 2 \cdot \overline{OP}$, iar $\overline{OC} = -2 \cdot \overline{OP}$, rezultă că $\overline{OK} + \overline{OC} = \overline{0}$, adică $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{0}$ c.t.d.

Exemplul 2. Punctele E şi F sunt mijlocurile laturilor AB şi CD ale patrulaterului $ABCD$. Să se demonstreze că $\overline{EF} = \frac{1}{2}\left(\overline{BC} + \overline{AD}\right)$.

Folosind relația lui Chasles, avem:

$$\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EF} + \overline{FC}, \quad \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FD}.$$



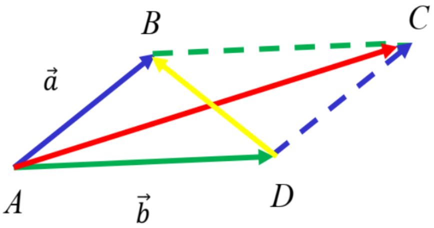
Adunând aceste două egalităţi parte cu parte, obţinem $\overline{BC} + \overline{AD} = \overline{BE} + \overline{AE} + 2\overline{EF} + \overline{FC} + \overline{FD}$. Dar $\overline{BE} \uparrow\downarrow \overline{AE}$, $\overline{FC} \uparrow\downarrow \overline{FD}$ şi $|\overline{BE}| = |\overline{AE}|$, $|\overline{FC}| = |\overline{FD}|$. Rezultă că $\overline{BE} + \overline{AE} = \overline{0}$, $\overline{FC} + \overline{FD} = \overline{0}$ şi $\overline{BC} + \overline{AD} = 2\overline{EF}$, de unde $\frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD}) = \overline{EF}$.

Exemplul 3. Unghiul dintre vectorii liberi $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este de $60°$, iar $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 5$. Să se calculeze $|\bar{a} + \bar{b}|$ și $|\bar{a} - \bar{b}|$.

Construim paralelogramul $ABCD$ pe vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Atunci

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \qquad \bar{a} - \bar{b} = \overline{DB}$$

.



Atunci $|\bar{a} + \bar{b}| = |\overline{AC}|$, $\quad |\bar{a} - \bar{b}| = |\overline{DB}|$. Avem că $m(\measuredangle DAB) = 60°$ și $m(\measuredangle ABC) = 120°$. Utilizând teorema cosinusurilor, obținem:

$$|\overline{AC}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2 \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| cos 120° = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 49 \implies$$

$|\overline{AC}| = 7$.

În mod similar obținem

$$|\overline{DB}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - 2 \cdot |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| cos 60° = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 19 \implies$$

$|\overline{DB}| = \sqrt{19}$.

Astfel, $|\bar{a} + \bar{b}| = 7$, $|\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{19}$.

Exerciții propuse pentru rezolvare

1. Fie vectorii liberi $\bar{a}$ și $\bar{b}$ încât $|\bar{a}| = 13$, $|\bar{b}| = 19$, $|\bar{a} + \bar{b}| = 24$. Să se determine valoarea lui $|\bar{a} - \bar{b}|$.

R-s: 22

2. Vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt ortogonali și $|\bar{a}| = 5$, $|\bar{b}| = 12$. Să se calculeze $|\bar{a} - \bar{b}|$.

R-s: 13

3. În triunghiul ABC sunt duse medianele $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$. Să se găsească suma $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP}$.

R-s: $\bar{0}$

4. În planul triunghiului ABC să se determine un astfel de punct M, încât

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \bar{0}.$$

5. În planul patrulaterului $ABCD$ să se determine un astfel de punct M, încât

$$\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} + \overline{MD} = \bar{0}.$$

6. Pe latura AD a paralelogramului $ABCD$ este considerat vectorul $\overline{AK} = \frac{1}{5}\overline{AD}$, iar pe diagonala $\overline{AC}$ - vectorul $\overline{AL} = \frac{1}{6}\overline{AC}$. Să se demonstreze că vectorii $\overline{KL}$ și $\overline{LB}$ sunt coliniari.

7. Punctului M se aplică trei vectori nenuli $\bar{a}$, $\bar{b}$ și $\bar{c}$ a căror sumă este $\bar{0}$. Să se determine raportul modulelor acestor vectori $|\bar{a}| : |\bar{b}| : |\bar{c}|$, dacă unghiurile dintre vectorii $\bar{b}$ și $\bar{c}$,$\bar{c}$ și $\bar{a}$, $\bar{a}$ și $\bar{b}$, sunt egale respectiv cu α, β, γ.

R-s: $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

§ 2. Sistemul rectangular de coordonate în spaţiu. Coordonatele vectorului. Operaţii cu vectori în coordonate

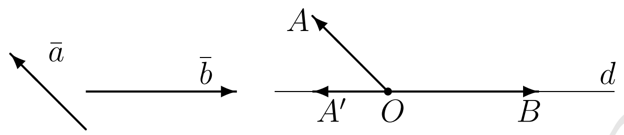
Proiecţia ortogonală a unui vector pe alt vector

Fie $\overrightarrow{AB}$ un segment orientat, iar d o dreaptă în spaţiu. Dacă A_1 şi B_1 sunt proiecţiile ortogonale ale punctelor A și B respectiv pe dreapta d, atunci segmentul orientat $\overrightarrow{A_1B_1}$ se numeşte *proiecţie ortogonală a segmentului orientat* $\overrightarrow{AB}$ pe dreapta d.

Notă. Proiecţiile ortogonale a doi vectori echipolenți sunt vectori echipolenți.

Proiecţia ortogonală a unui vector liber $\bar{a}$ pe o dreaptă d este vectorul liber, ce are drept reprezentant proiecţia ortogonală pe dreapta d a unui reprezentant al vectorului $\bar{a}$.

Fie vectorii liberi nenuli $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ cu reprezentanţii respectivi $\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OB}$, iar d o dreaptă suport a segmentului orientat $\overrightarrow{OB}$. Proiecţia $\overrightarrow{OA'}$ a segmentului orientat $\overrightarrow{OA}$ pe dreapta d este reprezentant al vectorului liber, numit *proiecţie ortogonală a vectorului $\bar{a}$ pe vectorul $\bar{b}$.*



Definiţie. Fie $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ vectori liberi nenuli, iar φ unghiul dintre ei. Numărul egal cu $|\bar{a}|\cos\varphi$, notat cu $pr_{\bar{b}}\bar{a}$, se numeşte *mărimea algebrică a proiecţiei ortogonale a vectorului $\bar{a}$ pe vectorul $\bar{b}$.*

Astfel

$$\mathbf{pr_{\bar{b}}\bar{a}} = |\mathbf{\bar{a}}|\cos\varphi.$$

Dacă $\bar{a} = \bar{0}$ şi $\bar{b} \neq 0$, vom considera $pr_{\bar{b}}\bar{a} = 0$.

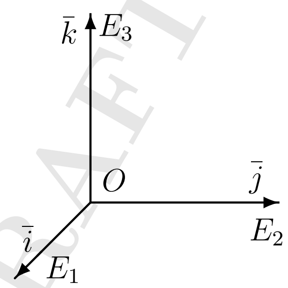
Dintre proprietăţile proiecţiei remarcăm două:

1. $pr_{\bar{b}}(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = pr_{\bar{b}}\bar{a}_1 + pr_{\bar{b}}\bar{a}_2$;

2. $pr_{\bar{b}}(\alpha\bar{a}) = \alpha \cdot pr_{\bar{b}}\bar{a}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

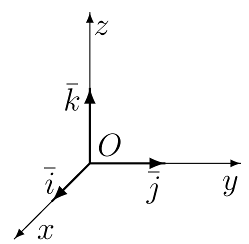
Sistemul rectangular de coordonate

Fie $\bar{i}, \bar{j}$ și $\bar{k}$ trei versori ortogonali doi câte doi cu reprezentanții respectivi $\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2}$ și $\overrightarrow{OE_3}$, orientați după regula burghiului.

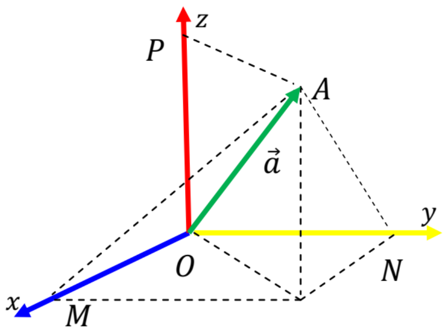


Mulţimea $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ se numeşte *reper cartezian ortonormat.*

Punctul O şi segmentele orientate $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$ şi $\overrightarrow{OE_3}$ definesc trei axe, notate cu Ox, Oy şi Oz, respectiv, numite *axe de coordonate*: Ox - *axa absciselor*, Oy- *axa ordonatelor* şi Oz - *axa cotelor* (*axa aplicatelor*).



Fie $\bar{a}$ un vector liber nenul, iar $\overrightarrow{OA}$ un reprezentant a lui $\bar{a}$. Fie $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ şi $\overrightarrow{OP}$ proiecţiile ortogonale ale lui $\overrightarrow{OA}$ pe axele Ox, Oy şi Oz respectiv.



Atunci $\overline{OA} = \overline{OM} + \overline{ON} + \overline{OP}$. Pe de altă parte, $\overline{OM} \parallel \bar{i}$, $\overline{ON} \parallel \bar{j}$, $\overline{OP} \parallel \bar{k}$. Prin urmare, există scalarii x, y, z astfel, încât $\overline{OM} = x\bar{i}$, $\overline{ON} = y\bar{j}$, $\overline{OP} = z\bar{k}$, de unde $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, numită *expresie analitică* a vectorului $\bar{a}$.

Definiţie. Scalarii x, y şi z se numesc *coordonate* sau *componente ale vectorului* $\bar{a}$ în raport cu reperul $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Dacă $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, se va mai nota cu $\bar{a} = (x, y, z)$.

Notă.
a) Scalarii x, y, z din expresia analitică a vectorului $\bar{a}$ sunt unici.
b) Vectori egali au coordonate egale.
c) Deoarece

$$\begin{aligned} \bar{i} &= 1\bar{i} + 0\bar{j} + 0\bar{k} \\ \bar{j} &= 0\bar{i} + 1\bar{j} + 0\bar{k} \\ \bar{k} &= 0\bar{i} + 0\bar{j} + 1\bar{k} \end{aligned}$$

coordonatele vectorilor $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ sunt

$$\bar{i} = (1, 0, 0), \quad \bar{j} = (0, 1, 0), \quad \bar{k} = (0, 0, 1).$$

d) Segmentul orientat $\overrightarrow{OA}$ se numeşte *rază-vectoare* a punctului A. Dacă $\overline{OA} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, prin definiţie *punctul* A *are coordonatele* x, y şi z. Se scrie $A(x, y, z)$.

Modulul vectorului. Utilizând teorema lui Pitagora în spațiu, se determină lungimea segmentului orientat $\overrightarrow{OA}$, egală cu $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Dacă $\overrightarrow{OA}$ este reprezentant al vectorului liber $\bar{a}$, atunci

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Operaţiile liniare cu vectori în coordonate
Fie vectorii

$$\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k} \quad \text{şi} \quad \bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}.$$

Utilizând proprietăţile înmulţirii vectorului cu un scalar, obţinem:

$$\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j} + (z_1 + z_2)\bar{k} \quad \text{sau}$$
$$\bar{a} + \bar{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2).$$

Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, atunci obţinem

$$\alpha\bar{a} = (\alpha x)\bar{i} + (\alpha y)\bar{j} + (\alpha z)\bar{k} \quad \text{sau} \quad \alpha\bar{a} = (\alpha x,\ \alpha y,\ \alpha z).$$

Astfel, **la adunarea vectorilor coordonatele respective se adună**, iar **la înmultirea unui vector cu un scalar coordonatele vectorului se înmulţesc cu acest scalar**.

Fie vectorul $\bar{a}$ cu reprezentantul $\overrightarrow{AB}$, unde $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$. Ne punem problema determinării coordonatelor vectorului $\bar{a}$.
Deoarece $\overline{OA} = x_A\bar{i} + y_A\bar{j} + z_A\bar{k}$, $\overline{OB} = x_B\bar{i} + y_B\bar{j} + z_B\bar{k}$ și
$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ rezultă că

$$\overline{AB} = (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A).$$

Este evident, că vectorul nul $\bar{0}$ are toate coordonatele nule: $\bar{0} = (0,\ 0,\ 0)$.

Condiţia de coliniaritate a vectorilor
Vectorii $\bar{a} = (x_1, y_1, z_1)$ şi $\bar{b} = (x_2, y_2, z_2)$ sunt coliniari, dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\bar{a} = \alpha\bar{b}$, adică $(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_2, \alpha y_2, \alpha z_2)$. Obţinem:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Astfel, **doi vectori sunt coliniari doar dacă ei au coordonate direct proporţionale**.

Împărţirea unui segment într-un raport dat
Fie dat segmentul AB cu $A(x_A, y_A, z_A)$ şi $B(x_B, y_B, z_B)$.
Să se determine coordonatele punctului $C \in AB$, care împarte segmentul AB în raportul $\lambda \neq -1$ (are loc egalitatea $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{CB}$).

Pentru $\lambda > 0$ punctul $C \in (AB)$, iar pentru $\lambda < 0$ punctul C este în exteriorul segmentului AB. La determinarea coordonatelor lui C folosim metoda vectorială.

Fie că $C(x_C, y_C, z_C)$. Atunci obținem că $\overline{AC} = (x_C - x_A,\ y_C - y_A,\ z_C - z_A)$ şi $\overline{CB} = (x_B - x_C,\ y_B - y_C,\ z_B - z_C)$. De unde

$$\begin{cases} x_C - x_A = \lambda(x_B - x_C), \\ y_C - y_A = \lambda(y_B - y_C), \\ z_C - z_A = \lambda(z_B - z_C)\,. \end{cases}$$

Deoarece $\lambda \neq -1$, coordonatele lui C sunt

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}\,; \\ y_C = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}\,; \\ z_C = \dfrac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}\,. \end{cases}$$

Pentru $\lambda = 1$ punctul C este **mijlocul segmentului** AB şi

$$C\left(\frac{x_A + x_B}{2},\ \frac{y_A + y_B}{2},\ \frac{z_A + z_C}{2}\right).$$

Vom prezenta câteva exemple în contextul celor relatate mai sus.

Exemplul 1. Dacă $\bar{x} = (1,\ -3,\ 2)$, atunci $3\bar{x} = (3,\ -9,\ 6)$.

Exemplul 2. Dacă $\bar{x} = (0,\ -2,\ 3)$ şi $\bar{y} = (1,\ 4,\ -1)$, atunci $\bar{x} + \bar{y} = (1,\ 2,\ 2)$.

Exemplul 3. Fiind date punctele $A(1, -1, 3)$, $B(2, 3, -1)$ şi $C(0, 2, 5)$, să se determine coordonatele vectorului $3\overline{AB} + 2\overline{CB}$.

Inițial determinăm coordonatele vectorilor $\overline{AB}$ şi $\overline{CB}$:

$$\overline{AB} = (2-1,\ 3-(-1),\ -1-3) = (1, 4, -4);$$
$$\overline{CB} = (2-0,\ 3-2,\ -1-5) = (2,\ 1,\ -6).$$

Prin urmare, $3\overline{AB} = (3,\ 12,\ -12)$, $2\overline{CB} = (4,\ 2,\ -12)$. Obținem că

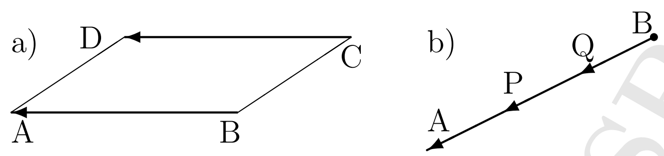
$$3\overline{AB} + 2\overline{CB} = (3,\ 12,\ -12) + (4,\ 2,\ -12) = (7,\ 14,\ -24).$$

Exemplul 4. Trei vârfuri consecutive ale paralelogramului $ABCD$ sunt: $A(1,\ 3,\ -2)$, $B(-1,\ 0,\ 4)$ şi $C(0,\ 2,\ 1)$. Să se determine coordonatele vârfului D.

Fie că $D(x,\ y,\ z)$. În paralelogramul $ABCD$ are loc $\overline{CD} = \overline{BA}$ (vezi fig.a)). Dar $\overline{CD} = (x-0,\ y-2,\ z-1) = (x, y-2, z-1)$; $\overline{BA} = (1 - (-1), 3-0, -2-4) = (2,\ 3,\ -6)$. Egalând coordonatele respective, obţinem sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x = 2, \\ y - 2 = 3, \\ z - 1 = -6 \end{cases} \quad \text{cu soluţia} \begin{cases} x = 2, \\ y = 5, \\ z = -5. \end{cases}$$

Astfel, al patrulea vârf al paralelogramului este $D(2,\ 5,\ -5)$.



Exemplul 5. Punctele $P(1, -1, 2)$ şi $Q(0, 1, -1)$ împart segmentul AB (de la A spre B) în trei părţi egale (vezi fig.b)). Să se determine coordonatele punctelor A și B.

Fie $A(x,\ y,\ z)$. Vectorii $\overline{PA} = (x-1,\ y+1,\ z-2)$ şi $\overline{QP} = (1, -2, 3)$ sunt egali. Prin urmare,

$$\begin{cases} x - 1 = 1, \\ y + 1 = -2, \\ z - 2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -3, \\ z = 5. \end{cases} \text{Astfel, } A(2,\ -3,\ 5).$$

Fie că $B(x,\ y,\ z)$. Vectorii $\overline{BQ} = (0-x,\ 1-y,\ -1-z)$ şi $\overline{QP} = (1,\ -2,\ 3)$ sunt egali, deci

$$\begin{cases} -x = 1, \\ 1 - y = -2, \\ -1 - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 3, \\ z = -4. \end{cases} \quad \text{Astfel, } B(-1,\ 3,\ -4).$$

Extremităţile segmentului AB sunt punctele $A(2,\ -3,\ 5)$ şi $B(-1,\ 3,\ -4)$.

Exemplul 6. Punctele $A(-2, 3, 0)$, $B(2, 5, -1)$ și $C(-4, 1, 1)$ sunt vârfuri ale triunghiului ABC. Să se determine coordonatele centrului de coordonate al triunghiului.

Prima metodă. Fie $O(x, y, z)$ centrul de greutate al triunghiului. A fost demonstrat că $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \bar{0}$ (Exemplul 1, § 1). Determinăm coordonatele vectorilor $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ și $\overline{OC}$: $\overline{OA} = (-2 - x, 3 - y, -z)$, $\overline{OB} = (2 - x, 5 - y, -1 - z)$, $\overline{OC} = (-4 - x, 1 - y, 1 - z)$. Obținem

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = (-4 - 3x, 9 - 3y, -3z) = (0, 0, 0).$$

Astfel $x = -\frac{4}{3}, y = 3, z = 0$ și $O\left(-\frac{4}{3}, 3, 0\right)$.

Metoda a doua. Fie AM mediană a triunghiului ABC. Punctul M este mijlocul lui BC și are coordonatele $(-1, 3, 0)$. Centrul O de greutate al triunghiului împarte mediana AM în raportul 2 : 1 de la vârf: $AO = 2 \cdot OM$. Utilizând formulele de împărțire a unui segment într-un raport dat, obținem cu $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{-2 + 2 \cdot (-1)}{1+2} = -\dfrac{4}{3}\,; \\ y_C = \dfrac{3 + 2 \cdot 3}{1+2} = 3\,; \\ z_C = \dfrac{0 + 2 \cdot 0}{1+2} = 0\,. \end{cases}$$

Notă: Fie triunghiul ABC cu vârfurile $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ și $C(x_3, y_3, z_3)$. Utilizând raționamentele din problema precedentă se deduc **coordonatele centrului de coordonate** al triunghiului:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right).$$

Exerciții propuse pentru rezolvare

1. Fie vectorii $\bar{a} = (3, -2, 6)$ şi $\bar{b} = (0, -9, 15)$. Să se determine coordonatele vectorilor: i) $\bar{a} + \bar{b}$, ii) $\bar{a} - \bar{b}$, iii) $2\bar{a} + 3\bar{b}$, iv) $-\bar{a} + \frac{2}{3}\bar{b}$.

R-s: i) $(3, -11, 21)$, ii) $(3, 7, -9)$, iii) $(6, -31, 57)$, iv) $(-3, -4, 4)$

2. Să se cerceteze coliniaritatea vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, dacă:

a) $\bar{a} = (2, -1, 3)$ și $\bar{b} = (-6, 3, -9)$,

b) $\bar{a} = (-1, 0, 3)$ și $\bar{b} = (5, 3, 15)$,

c) $\bar{a} = (-6, 0, 4)$ și $\bar{b} = (-9, 0, 6)$.

În cazul când vectorii sunt coliniari, determinați care din vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ are lungime mai mare şi de câte ori. Cum sunt orientaţi aceşti vectori?

R-s:

a) vectorii sunt coliniari; $\bar{b}$ are lungimea de 3 ori mai mare decât lungimea lui $\bar{a}$; vectorii au sens opus;

b) nu sunt coliniari;

c) vectorii sunt coliniari; $\bar{b}$ are lungimea de 3/2 ori mai mare decât lungimea lui $\bar{a}$; vectorii au același sens.

3. Să se determine valorile reale ale lui x şi y , pentru care vectorii $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + x\bar{k}$ şi $\bar{b} = y\bar{i} + 6\bar{j} + 2\bar{k}$ sunt coliniari.

R-s: $x = 1$, $y = -4$.

4. Să se determine modulul sumei şi modulul diferenţei vectorilor $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{k}$ şi $\bar{b} = -\bar{i} + 6\bar{j} + 2\bar{k}$.

R-s: $|\bar{a} + \bar{b}| = 2\sqrt{11}$, $|\bar{a} - \bar{b}| = 2\sqrt{22}$.

5. În triunghiul ABC, $\overline{AB} = (2, 6, -4)$ și $\overline{AC} = (4, 2, -2)$. Să se determine coordonatele vectorilor - mediane $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$.

R-s: $\overline{AM} = (3, 4, -3)$, $\overline{BN} = (0, -5, 3)$, $\overline{CP} = (-3, 1, 0)$.

6. Să se verifice dacă punctele $A(3, -4, 7)$, $B(-5, 3, -2)$, $C(-1, 1, 2)$, $D(7, -6, 11)$ sunt vârfuri ale unui paralelogram.

R-s: Punctele date sunt vârfuri ale paralelogramului $ABCD$.

7. Să se cerceteze dacă punctele $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$, $D(3, -5, 3)$ în ordinea dată sunt vârfuri ale unui trapez.

R-s: Punctele date sunt vârfuri ale unui trapez.

8. Fie daţi vectorii $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}$ şi $\bar{b} = -\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$. Să se determine coordonatele versorului $\bar{c}$, orientat în direcţia bisectoarei unghiului format de vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

R-s: $\bar{c} = \left(-\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}\right)$.

§ 3. Produse ale vectorilor

Anterior au fost examinate operaţii liniare cu vectori: adunarea vectorilor şi înmulţirea vectorului cu un scalar. În cele ce urmează, vom examina alte tipuri de operații cu vectori:

1. produsul scalar a doi vectori;
2. produsul vectorial a doi vectori;
3. produsul mixt a trei vectori.

3.1. Produsul scalar a doi vectori

1. Definiţii, proprietăţi.

Se numește *produs scalar al vectorilor* $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ numărul real, notat cu $\bar{a} \cdot \bar{b}$ și egal cu $|\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi$, unde φ este unghiul dintre vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$.

Astfel,

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi.} \tag{1.3.1}$$

Deoarece $|\bar{b}| \cdot \cos\varphi$ este proiecția vectorului $\bar{b}$ pe vectorul $\bar{a}$, obținem că:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot \mathrm{pr}_{\bar{a}} \bar{b}.$$

În mod similar, $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \mathrm{pr}_{\bar{b}} \bar{a}$.

Proprietăţi ale produsului scalar:

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;

2. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$;

3. $\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b}) = (\lambda\bar{a})\cdot\bar{b} = \bar{a}\cdot\big(\lambda\bar{b}\big),\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$;

4. $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0 \ \Leftrightarrow\ \bar{a}\perp\bar{b}$.

Într-adevăr, dacă $\bar{a}\neq 0$ şi $\bar{b}\neq 0$, atunci afirmația rezultă din definiția produsului scalar.

Dacă măcar unul dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este nul (deci are modulul 0), atunci $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$. Deoarece convenisem că vectorul $\bar{0}$ este ortogonal cu orice vector, afirmația $\bar{a}\cdot\bar{b}=0 \ \Leftrightarrow\ \bar{a}\perp\bar{b}$ este adevărată și în cazul unui factor nul al produsului scalar.

În particular, pentru versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ se obţine $\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{j}\cdot\bar{k}=\bar{i}\cdot\bar{k}=0$.

5. Convenim să notăm $\bar{a}\cdot\bar{a}=\bar{a}^2$. În acest caz obținem

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot\cos 0 = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cdot 1 = |\bar{a}|^2.$$

Astfel $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$, de unde

$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}.$$

În particular, $\bar{i}^2=\bar{j}^2=\bar{k}^2=1$.

Exemplul 1. Unghiul dintre vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ este egal cu $\dfrac{\pi}{3}$, iar $|\bar{a}|=2$, $|\bar{b}|=3$. Să se calculeze:

1. $\bar{a}\cdot\bar{b}$,

2. $(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(3\bar{a}+\bar{b})$,

3. $|2\bar{a}-\bar{b}|$,

4. $\cos(\widehat{\bar{a}-\bar{b},\ \bar{a}+\bar{b}})$.

Rezolvare:

1. $\bar{a}\cdot\bar{b} = 2\cdot 3\cdot\cos\dfrac{\pi}{3} = 2\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2} = 3$.

2. $(\bar{a}-2\bar{b})\cdot(3\bar{a}+\bar{b}) = 3\bar{a}^2+\bar{a}\cdot\bar{b}-6\cdot\bar{b}\cdot\bar{a}-2\bar{b}^2 = 3\cdot|\bar{a}|^2-5\bar{a}\cdot\bar{b}-2|\bar{b}|^2 = 3\cdot 4-5\cdot 3-2\cdot 9=-21$.

3. $|2\bar{a}-\bar{b}| = \sqrt{(2\bar{a}-\bar{b})^2} = \sqrt{4\bar{a}^2-4\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2} = \sqrt{4\cdot 4-4\cdot 3+9} = \sqrt{13}$.

4. Din definiţia produsului scalar

$$\cos(\widehat{\bar{a}-\bar{b},\ \bar{a}+\bar{b}}) = \frac{(\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b})}{|\bar{a}-\bar{b}|\cdot|\bar{a}+\bar{b}||}\,.$$

Determinăm:

$(\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b}) = \bar{a}^2-\bar{b}^2 = |\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2 = 4-9=-5$,

$|\bar{a}-\bar{b}| = \sqrt{(\bar{a}-\bar{b})^2} = \sqrt{\bar{a}^2-2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2} = \sqrt{4-6+9} = \sqrt{7}$,

$|\bar{a}+\bar{b}| = \sqrt{(\bar{a}+\bar{b})^2} = \sqrt{\bar{a}^2+2\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}^2} = \sqrt{4+6+9} = \sqrt{19}$.

Prin urmare, $\cos(\widehat{\bar{a}-\bar{b},\ \bar{a}+\bar{b}}) = \dfrac{-5}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{19}} = -\dfrac{5}{\sqrt{133}}\,.$

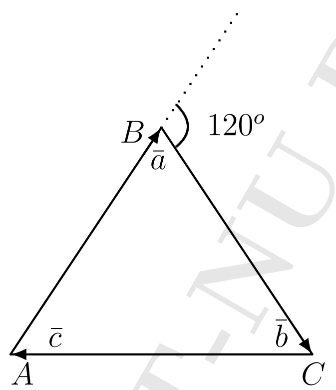
Exemplul 2. Fie $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ vectori unitari încât $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$. Să se determine valoarea expresiei $E=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a}$.

Metoda 1 - algebrică. Ridicând la pătrat ambele părţi ale egalităţii $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$, obţinem: $(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})^2=\bar{0}^2$, de unde

$$\bar{a}^2+\bar{b}^2+\bar{c}^2+2(\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{c}+\bar{c}\cdot\bar{a})=0$$

sau $|\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+2\cdot E=0 \iff 1+1+1+2\cdot E=0$. De unde obținem $E=-\dfrac{3}{2}$.

Metoda 2 - geometrică. Dacă $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{CA}$ sunt reprezentanți ai vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$ respectiv, are loc $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{AA}=\bar{0}$. Punctele A, B şi C sunt vârfuri ale unui triunghi echilateral cu laturile de lungime 1.



Calculăm $\bar{a}\cdot\bar{b}=\overline{AB}\cdot\overline{BC}=|\overline{AB}|\cdot|\overline{BC}|\cdot\cos(\widehat{\overline{AB},\,\overline{BC}})=1\cdot1\cdot\cos 120^O=-\dfrac{1}{2}$.
În mod analog, $\bar{b}\cdot\bar{c}=\bar{c}\cdot\bar{a}=-\dfrac{1}{2}$. Astfel, $E=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$.

2. Produsul scalar în coordonate rectangulare

Fie vectorii $\bar{a}=a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k}$ și $\bar{b}=b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k}$. Folosind proprietăţile produsului scalar, obţinem:

$\bar{a}\cdot\bar{b}=(a_1\bar{i}+a_2\bar{j}+a_3\bar{k})\cdot(b_1\bar{i}+b_2\bar{j}+b_3\bar{k})=a_1b_1\bar{i}^2+a_1b_2\bar{i}\cdot\bar{j}+a_1b_3\bar{i}\cdot\bar{k}+$
$+a_2b_1\bar{j}\cdot\bar{i}+a_2b_2\bar{j}^2+a_2b_3\bar{j}\cdot\bar{k}+a_3b_1\bar{k}\cdot\bar{i}+a_3b_2\bar{k}\cdot\bar{j}+a_3b_3\bar{k}^2=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Obținem

$$\boxed{\bar{a}\cdot\bar{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.} \tag{1.3.2}$$

Astfel, **produsul scalar a doi vectori este egal cu suma produselor coordonatelor corespunzătoare ale vectorilor**.

Exemplul 3. Dacă $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}$ și $\bar{b}=\bar{i}-3\bar{j}-3\bar{k}$, atunci $\bar{a}\cdot\bar{b}=2\cdot1+(-1)\cdot(-3)+3\cdot(-3)=-4$.

Observație. Deoarece produsul scalar al vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este negativ, concluzionăm că unghiul format de ei este negativ.

Modulul vectorului. În paragraful precedent am determinat formula de calcul a modulului vectorului, în cazul când îi sunt cunoscute coordonatele rectangulare. Această formulă poate fi determinată și cu ajutorul produsului scalar. Fie vectorul $\bar{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3)$. Atunci

$$\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2 = a_1a_1 + a_2a_2 + a_3a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2.$$

De unde

$$\boxed{|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.} \tag{1.3.3}$$

Modulul vectorului $\bar{a} = (3, -1, 2)$ este $|\bar{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$.

Distanţa dintre două puncte. Fie punctele $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$. Distanţa dintre A și B este egală cu modulul vectorului $\overline{AB}$. Deoarece vectorul $\overline{AB}$ are coordonatele $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, distanța dintre punctele A și B este

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1.3.4}$$

Unghiul dintre doi vectori. Fie vectorii nenuli $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ şi $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Din definiția produsului scalar a vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$, $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$, unde φ este unghiul dintre vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$. De aici rezultă că

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}\,. \tag{1.3.5}$$

Exemplul 3. Unghiul φ dintre vectorii $\bar{a} = (2, -1, -3)$ şi $\bar{b} = (1, -3, 4)$ se determină din egalitatea

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) + (-3)\cdot 4}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{-7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{19}} = -\frac{7}{\sqrt{266}}\,.$$

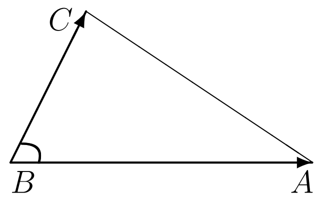
Este evident că unghiul φ este obtuz și

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{7}{\sqrt{266}}\right) = \pi - \arccos\frac{7}{\sqrt{266}} \approx \pi - \arccos 0,4292,$$

iar măsura aproximativă în grade a unghilui φ este $180^\circ - 64^\circ 25' = 125^\circ 35'$.

Exemplul 4. Să se determine măsura unghiului interior B al triunghiului ABC, dacă $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ și $C(3, -2, 1)$.

Rezolvare. Unghiul interior B este unghiul dintre vectorii $\overline{BA}$ şi $\overline{BC}$. Determinăm coordonatele acestor vectori: $\overline{BA} = (3, 0, 4)$ şi $\overline{BC} = (7, 0, 1)$. Atunci:



$$\cos\angle B = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|} = \frac{3\cdot 7+0\cdot 0+4\cdot 1}{\sqrt{9+0+16}\cdot\sqrt{49+0+1}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Astfel, $m(\angle B) = \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$, sau în grade măsura unghiului B este de $45°$.

Inegalitatea Cauchy-Buneakovski-Schwartz

Fie vectorii nenuli $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ şi $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Din (1.3.5) și deoarece $|\cos\varphi| \leq 1$, avem

$$\frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} \leq 1$$

sau

$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2, \tag{1.3.6}$$

numită **inegalitatea Cauchy-Buneakovski-Schwartz**.

Cosinusuri directoare ale vectorului

Fie α, β și γ unghiurile formate de vectorul nenul $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ cu axele de coordonate Ox, Oy şi Oz, respectiv. Atunci

$$\cos\alpha = \cos\angle(\bar{a}, \bar{i}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{i}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{i}|} = \frac{a_1}{|\bar{a}|},$$

$$\cos\beta = \cos\angle(\bar{a}, \bar{j}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{j}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{j}|} = \frac{a_2}{|\bar{a}|},$$

$$\cos\gamma = \cos\angle(\bar{a}, \bar{k}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{k}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{k}|} = \frac{a_3}{|\bar{a}|},$$

iar numerele $\cos\alpha$, $\cos\beta$ și $\cos\gamma$ se numesc *cosinusuri directoare* ale vectorului $\bar{a}$ și are loc egalitatea

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{1.3.7}$$

Într-adevăr,

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \left(\frac{a_1}{|\bar{a}|}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{|\bar{a}|}\right)^2 + \left(\frac{a_3}{|\bar{a}|}\right)^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\bar{a}|^2} = 1.$$

Vectorul $\bar{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3)$ poate fi scris sub forma: $\bar{a} = |\bar{a}|\cdot(\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma)$, iar **versorul vectorului** $\bar{a}$ este $\bar{a}_0 = (\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma)$.

Exemplul 5. Să se determine versorul vectorului $\bar{a} = (12, -3, 4)$.

Rezolvare. Modulul vectorului $\bar{a}$ este egal cu $|\bar{a}| = \sqrt{12^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{169} = 13$. Atunci

$$\cos\alpha = \frac{12}{13},\ \cos\beta = -\frac{3}{13},\ \cos\gamma = \frac{4}{13} \implies \bar{a}_0 = \left(\frac{12}{13}, -\frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right).$$

Exemplul 6. Să se determine proiecţia vectorului $\bar{a} = \sqrt{2}\,\bar{i} - 3\bar{j} - 5\bar{k}$ pe axa l, care formează cu axele de coordonate Ox şi Oz unghiurile $\alpha = 45^o$ şi $\gamma = 60^\circ$ respectiv, iar cu axa Oy - un unghi ascuţit.

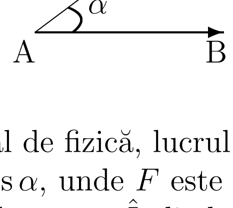
Rezolvare. Fie $\bar{l}_0$ versorul axei l. Atunci $\bar{l}_0 = (\cos\alpha,\, \cos\beta,\, \cos\gamma)$, unde $\cos\alpha = \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma = \cos 60^o = \frac{1}{2}$. Atunci $\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Deoarece unghiul β este ascuţit, $\cos\beta = \frac{1}{2}$. Astfel, $\bar{l}_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Proiecția vectorului $\bar{a}$ pe axa l poate fi determinată, utilizând formula $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{b}|\cdot \mathrm{pr}_{\,\bar{b}}\,\bar{a}$, considerând $\bar{b} = \bar{l}_0$ Atunci

$$\mathrm{pr}_l\,\bar{a} = \mathrm{pr}_{\,\bar{l}_0}\,\bar{a} = \frac{\bar{a}\cdot\bar{l}_0}{|\bar{l}_0|} = \bar{a}\cdot\bar{l}_0 = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\cdot\frac{1}{2} - 5\cdot\frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -3.$$

Sensul fizic al produsului scalar

Fie $\overline{F}$ o forță constantă care deplasează rectiliniu un punct material din poziţia A în poziţia B, iar α este unghiul dintre vectorul forță și direcția deplasării punctului.



Din cursul liceal de fizică, lucrul mecanic L efectuat de forța F este egal cu $L = F\cdot AB\cdot\cos\alpha$, unde F este mărimea scalară a forței F, iar AB este distanța parcursă de punct. În limbajul vectorilor $L = |\overline{F}|\cdot|\overline{AB}|\cdot\cos\alpha$, adică $L = \overline{F}\cdot\overline{AB}$.

Această egalitate exprimă *sensul mecanic al produsului scalar*: lucrul unei forţe constante aplicate la deplasarea rectilinie a unui punct material este egal cu produsul scalar dintre vectorul forţei și vectorul deplasării.

Exemplul 7. Fie că un corp material se deplasează rectiliniu din punctul $A(-2,3,1)$ în punctul $B(0,1,-2)$ sub acţiunea forţei $\overline{F} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$. Atunci lucrul mecanic $L = \overline{F} \cdot \overline{AB}$. Atunci $\overline{AB} = 2\overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}$ și

$$L = (2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) \cdot (2\overline{i} - 2\overline{j} - 3\overline{k}) = 4 + 2 - 3 = 3J.$$

Exerciții propuse pentru rezolvare

1. Vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ sunt ortogonali și $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$. Să se calculeze produsul scalar $(5\bar{a} + 3\bar{b}) \cdot (2\bar{a} - \bar{b})$.
R-s: 13.

2. Vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ formează unghiul $\alpha = 120°$. Ştiind că $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 8$, să se determine: **a)** $\bar{a} \cdot \bar{b}$; **b)** $(3\bar{a} - 2\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2\bar{b})$, **c)** $|\bar{a} - 3\bar{b}|$, **d)** $\cos(\widehat{\bar{a} - 3\bar{b},\ 2\bar{a}} + \bar{b})$, **e)** $\mathrm{pr}_{\,2\bar{b}}\,(\bar{a} - 3\bar{b})$.
R-s: a) -12; b) -277; c) $3\sqrt{73}$; d) $-\frac{19}{\sqrt{949}}$; e) $-\frac{51}{2}$.

3. Fie vectorii $\bar{a} = (3,\ -1,\ 2)$, $\bar{b} = (2,\ -4,\ 0)$. Să a se determine: **a)** $\bar{a} \cdot \bar{b}$; **b)** $|\bar{a}|$, $|\bar{b}|$; **c)** $(3\bar{a} - 2\bar{b}) \cdot (\bar{a} + 2\bar{b})$, **d)** $\cos(\widehat{\bar{a} - 3\bar{b},\ 2\bar{a}})$, **e)** $\mathrm{pr}_{\,2\bar{b}}\,(\bar{a} - 3\bar{b})$.
R-s: a) 10 ; b) $\sqrt{14}$, $\quad 2\sqrt{5}$; c) 2; d) $\sqrt{134}$; e) $-\frac{16}{\sqrt{5}}$.

4. Punctele $A(2,\ -3,\ 3)$, $B(-2,\ 1,\ 1)$, $C(1,\ -1,\ 5)$ sunt vârfuri ale unui triunghi. Să se determine măsura unghiului interior A al triunghiului ABC.
R-s: $\arccos\frac{4}{9} \approx \arccos 0,4444$ sau $\approx 63°37'$.

5. Să se determine valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\bar{a} = (m,\ 1,\ 0)$ şi $\bar{b} = (3,\ -3,\ 4)$ sunt ortogonali.
R-s: $m = 1$.

6. Se cunosc vârfurile $A(1,-2,2)$, $B(1,4,0)$, $C(-4,1,1)$, $D(-5,-5,3)$ ale patrulaterului $ABCD$. Să se determine măsurile unghiurilor formate de diagonalele lui.
R-s: $90°$.

7. Să se determine vectorul $\bar{b}$, coliniar cu vectorul $\bar{a} = (2;1;-3)$, astfel încăt $\bar{a} \cdot \bar{b} = 28$.
R-s: $\bar{a} = (4;2;-6)$

8. Să se determine vectorul $\bar{b}$, coliniar cu vectorul $\bar{a} = (6;-8;-7,5)$, care formează cu axa Oz un unghi ascuțit și $|\bar{b}| = 50$.
R-s: $\bar{b} = (-24,\ 32,\ 30)$.

9. Să se determine vectorul $\bar{c}$, perpendicular vectorilor $\bar{a} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ și $\bar{b} = 18\bar{i} - 22\bar{j} - 5\bar{k}$, și care formează cu axa Oy un unghi obtuz, știind că $|\bar{c}| = 14$.

R-s: $\bar{b} = -4\bar{i} - 6\bar{j} + 12\bar{k}$.

10. Să se determine vectorul $\bar{b}$, perpendicular axei Oz și vectorului $\bar{a} = 8\bar{i} - 15\bar{j} + 3\bar{k}$, și care formează cu axa Ox un unghi ascuțit, știind, că $|\bar{b}| = 51$.

R-s: $\bar{b} = 45\bar{i} + 24\bar{j}$.

11. Trei forţe $\overline{F_1} = (3, -4, 2)$, $\overline{F_2} = (2, 3, -5)$ şi $\overline{F_3} = (-3, -2, 4)$ se aplică unui punct. Să se afle lucrul, efectuat de rezultanta acestor forțe, dacă punctul se deplasează rectiliniu din punctul $A(5, 3, -7)$ în punctul $B(4, -1, -4)$.

R-s: 13.

3.2. Produsul vectorial a doi vectori

1. Definiţii, sensul geometric, proprietăţi

Fie $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ doi vectori nenuli arbitrari cu unghiul φ dintre ei.

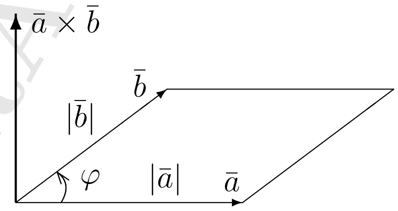
Se numește *produs vectorial* dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$ vectorul $\bar{c}$, notat cu $\bar{a} \times \bar{b}$, care verifică condiţiile:

1. $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

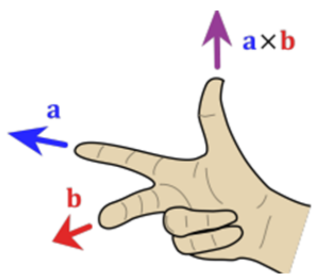
2. tripletul de vectori $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ este orientat după regula burghiului (este de dreapta);

3. $|\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$.

Din prima condiție a definiției, vectorul $\bar{a} \times \bar{b}$ este perpendicular planului, determinat de vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$:



sau reprezentat cu ajutorul mânii drepte:



Proprietăţi ale produsului vectorial:
1. $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ - anticomutativitate,
2. $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$ - distributivitate,
3. $\alpha(\bar{a} \times \bar{b}) = \alpha\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \alpha\bar{b}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$,
4. $\bar{a} \neq \bar{0}$ şi $\bar{b} \neq \bar{0}$, atunci $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \;\Leftrightarrow\; \bar{a} \parallel \bar{b}$.

2. Produsul vectorial în coordonate

Din definiţia produsului vectorial pentru versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ au loc a următoarele:
1. $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$,
2. $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k},\ \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i},\ \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$,
$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k},\ \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i},\ \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$.
3. Fie daţi vectorii $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$ şi $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$.

Folosind proprietăţile produsului vectorial şi produsele versorilor $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$, se obţine:

$$\bar{a} \times \bar{b} = (a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}) \times (b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}) =$$

$$= a_1b_1\bar{i} \times \bar{i} + a_1b_2\bar{i} \times \bar{j} + a_1b_3\bar{i} \times \bar{k} + a_2b_1\bar{j} \times \bar{i} + a_2b_2\bar{j} \times \bar{j} + a_2b_3\bar{j} \times \bar{k}$$

$$+a_3b_1\bar{k} \times \bar{i} + a_3b_2\bar{k} \times \bar{j} + a_3b_3\bar{k} \times \bar{k} =$$

$$= a_1b_1 \cdot \bar{0} + a_1b_2 \cdot \bar{k} - a_1b_3\bar{j} - a_2b_1\bar{k} + a_2b_2 \cdot \bar{0} + a_2b_3\bar{i} + a_3b_1\bar{j} - a_3b_2\bar{i} + a_3b_3 \cdot \bar{0} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\bar{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k},$$

sau

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{1.3.8}$$

Exemplul 8. Pentru vectorii $\bar{a} = (1, 3, -2)$ şi $\bar{b} = (-2, 1, 4)$ produsul vectorial este

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12\bar{i} + 4\bar{j} + \bar{k} + 6\bar{k} - 4\bar{j} + 2\bar{i} = 14\bar{i} + 0\bar{j} + 7\bar{k}.$$

Astfel, $\bar{a} \times \bar{b} = (14, 0, 7)$.

Exemplul 9. Să se determine vectorul $\bar{x}$, perpendicular vectorilor $\bar{a} = (4, -2, -3)$ şi $\bar{b} = (0,\ 1,\ 3)$, de modul 26 şi care formează cu axa Oy un unghi obtuz.

Rezolvare. Deoarece produsul vectorial $\bar{a} \times \bar{b}$ este perpendicular vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, rezultă că $\bar{x}$ este coliniar vectorului $\bar{a} \times \bar{b}$ şi deci $\bar{x} = \alpha \cdot (\bar{a} \times \bar{b})$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinăm

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ 4 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\bar{i} - 12\bar{j} + 4\bar{k}.$$

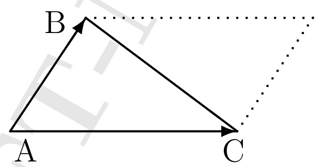
Atunci $|\bar{x}| = |\alpha| \cdot |\bar{a} \times \bar{b}|$, de unde $26 = |\alpha| \cdot \sqrt{9 + 144 + 16}$, adică $26 = |\alpha| \cdot 13$. Astfel, $\alpha = 2$ sau $\alpha = -2$. Deoarece vectorul $\bar{x}$ formează cu axa Oy un unghi obtuz, ordonata lui $\bar{x}$ este negativă. Din egalitatea $\bar{x} = \alpha(-3\bar{i} - 12\bar{j} + 4\bar{k}) = -3\alpha\bar{i} - 12\alpha\bar{j} + 4\alpha\bar{k}$ rezultă că $\alpha > 0$. Astfel, $\alpha = 2$ şi $\bar{x} = (-6, -24, 8)$.

3. Aplicaţii ale produsului vectorial

1. Aria paralelogramului. Din condiția a 3-a a definiției produsului vectorial rezultă că modulul produsului vectorial este egal cu aria paralelogramului construit pe acești vectori:

$$A_{par.} = |\bar{a} \times \bar{b}|. \tag{1.3.9}$$

2. Aria triunghiului. Aria unui triunghi este egală cu jumătate din aria unui paralelogram construit pe oricare două laturi ale triunghiului.



Astfel,

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|.$$

Exemplul 10. Fie triunghiul cu vârfurile în punctele $A(-1, 3, 2)$, $B(3, 0, -4)$ şi $C(2, -1, -2)$. Să se determine aria triunghiului.

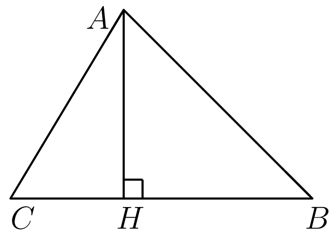
Determinăm coordonatele vectorilor $\overline{AB}$ și $\overline{AC}$: $\overline{AB} = (4, -3, -6)$, $\overline{AC} = (3, -4, -4)$ și produsul vectorial al acestor vectori:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ 4 & -3 & -6 \\ 3 & -4 & -4 \end{vmatrix} = -12\bar{i} - 2\bar{j} - 7\bar{k}.$$

Aria triunghiului este:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (-2)^2 + (-7)^2} = 0,5\sqrt{197}.$$

Exemplul 11. Punctele $A(-1,\ 2,\ 3)$, $B(1,\ 2,\ -1)$ şi $C(0,\ 1,\ 2)$ sunt vârfuri ale unui triunghi. Să se determine lungimea înălţimii triunghiului, corespunzătoare laturii BC.



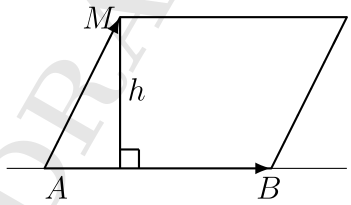
Rezolvare. Deoarece $A_\triangle = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$, obținem $h_a = \dfrac{2 \cdot A_\triangle}{a}$. Determinăm $\overline{AB} = (2, 0, -4)$, $\overline{AC} = (1, -1 - 1)$ şi

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4i - 2j - 2k.$$

De unde $\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{6}$, iar $A_{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} = \sqrt{6}$.

Obţinem că $AH = \dfrac{2 \cdot \sqrt{6}}{BC}$. Deoarece $\overline{BC} = (-1, -1, 3)$, rezultă că $BC = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$, iar $AH = \dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{11}} = \dfrac{2\sqrt{66}}{11}$.

Exemplul 12. Să se determine distanţa de la punctul $M(-1,\ 2,\ 3)$ la dreapta, ce trece prin punctele $A(0,\ 1, -1)$ şi $B(3,\ 1,\ 0)$.



Rezolvare. Fie h distanţa de la punctul M la dreapta AB. Atunci h este lungimea înălţimii corespunzătoare laturii AB a paralelogramului, construit pe vectorii $\overline{AM}$ şi $\overline{AB}$. Evident, $h = \dfrac{A_{par.}}{AB}$. Determinăm aria paralelogramului: $\overline{AM} = (-1,\ 1,\ 4)$, $\overline{AB} = (3,\ 0,\ 1)$,

$$\overline{AM} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} + 13\bar{j} - 3\bar{k}.$$

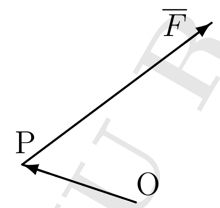
Prin urmare, $A_{par.} = \left|\overline{AM} \times \overline{AB}\right| = \sqrt{1+169+9} = \sqrt{179}$. În continuare, $AB = \sqrt{9+0+1} = \sqrt{10}$. Astfel, $h = \dfrac{\sqrt{179}}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{1790}}{10}$.

4. Momentul forţei. Ideea produsului vectorial apare deseori în fizică.

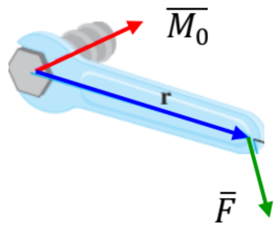
Definiție. Fie că o forță $\overline{F}$ acționează asupra unui punct P. Se numește *moment al forţei* $\overline{F}$, în raport cu un punct fix O, produsul vectorial dintre vectorul $\overline{OP}$ și forța $\overline{F}$. Vom nota momentul forței cu $\overline{M}_O$.

Momentul forței este o mărime fizică vectorială care caracterizează acțiunea unei forțe asupra unui obiect mecanic, care poate provoca mișcarea de rotație a acestuia. Deci,

$$\overline{M}_O = \overline{OP} \times \overline{F}. \tag{1.3.10}$$



Fie că strângem un șurub prin aplicarea unei forțe $\bar{F}$ la o cheie (vezi figura de mai jos). În rezultat producem un efect de rotație, iar momentul forței este $\bar{M} = \bar{r} \times \bar{F}$.



Exemplul 13. Forţa $\overline{F} = (-2, 4, -5)$ acţionează asupra punctului $P(0, 2, 1)$. Să se determine momentul ei în raport cu punctul $O(-1, 2, 3)$.

Vectorul $\overline{OP}$ are coordonatele $(1, 0, -2)$. Astfel, momentul forţei,

$$\overline{M_O} = \overline{QP} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{i}} & \bar{\mathbf{j}} & \bar{\mathbf{k}} \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 8\bar{i} + 9\bar{j} + 4\bar{k}.$$

Mărimea momentului forţei este $|\overline{M_O}| = \sqrt{8^2 + 9^2 + 4^2} = \sqrt{161}$.

Exerciții propuse pentru rezolvare

1. Vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ formează unghiul $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Ştiind că $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, să se determine $|\bar{a} \times \bar{b}|$.

R-s: 6.

2. Vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ verifică condițiile: $|\bar{a}| = 10$, $|\bar{b}| = 2$ și $\bar{a} \cdot \bar{b} = 12$. Să se determine valoarea lui $|\bar{a} \times \bar{b}|$.

R-s: 16.

3. Vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ formează unghiul $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Ştiind că $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 2$, să se determine: $\left(\bar{a} \times \bar{b}\right)^2$, $\left((2\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - 3\bar{b})\right)^2$.

R-s: 3

4. Sunt daţi vectorii $\bar{a} = (2,\ 1, -1)$ şi $\bar{b} = (-1,\ 3, -2)$. Să se determine: *i)* $\bar{a} \times \bar{b}$, *ii)* $(2\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - 3\bar{b})$.

R-s: *i)* $(1, 5, 7)$, *ii)* $(-7,\ -35, -49)$.

5. Sunt date punctele $A(3, -1,\ 0)$, $B(0,\ -2,\ 1)$ şi $C(-3,\ 2,\ 5)$. Să se determine: *i)* $\overline{AB} \times \overline{BC}$, *ii)* $\left(\overline{BC} - 2\overline{AC}\right) \times \left(2\overline{CA} - 3\overline{BC}\right)$.

R-s: *i)* $(-8,\ 9, -15)$, *ii)* $(-7,\ -35, -49)$.

6. Să se calculeze aria paralelogramului, construit pe vectorii $\bar{a} = (2,\ 0,\ 3)$ şi $\bar{b} = (2,\ 2,\ -2)$.

R-s: $2\sqrt{38}$.

7. Punctele $A(3, -1,\ 1)$, $B(-1,\ 2,\ 1)$ şi $C(-6,\ 2,\ 5)$ sunt vârfuri ale triunghiului ABC. Să se determinee lungimea înălţimii, corespunzătoare laturii AB. *R-s*: 5.

8. Forţa $\overline{F} = (3,\ 2, -4)$ se aplică punctului $A(2, -1,\ 1)$. Să se afle momentul forţei $\overline{F}$ în raport cu originea de coordonate.

R-s: $(2,\ 11,\ 7)$.

9. Forţa $\overline{F} = (2, -4,\ 5)$ se aplică punctului $M(4, -2,\ 3)$. Să se afle momentul acestei forţe în raport cu punctul $A(3,\ 2, -1)$.

R-s: $(-4,\ 3,\ 4)$.

10. Aria triunghiului ABC este egală cu 14. Sunt cunoscute vârfurile $A(2,\ 0, -3)$ şi $B(4,\ 2,\ 6)$. Să se determine al treilea vârf C, ştiind că el aparține axei Oy.

R-s: $C(0, 2, 0)$ sau $C\left(0,\ -\frac{78}{85},\ 0\right)$.

11. Să se determine vectorul $\bar{b}$ de modul 51, perpendicular axei Oz şi vectorului $\bar{a} = (8,\ -15,\ 3)$, si care formează cu axa Ox un unghi ascuțit.

R-s: $(45, 24, 0)$.

12. Să se determine măsura unghiului format de vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, dacă $\bar{a} \cdot \bar{b} = -3\sqrt{3}$, $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{\imath} - 2\bar{\jmath} + 2\bar{\jmath}$.

R-s: 150°.

3.3. Produsul mixt a trei vectori

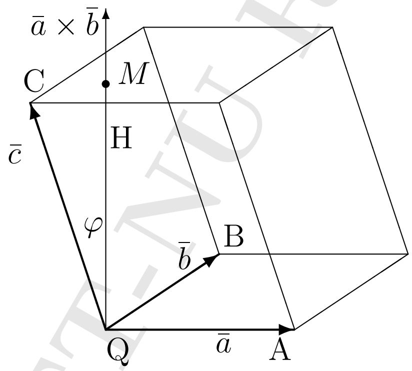
1. Definiţie, sensul geometric, proprietăți

Se numește *produs mixt* al vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (în această ordine) numărul real, notat cu $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ și egal cu produsul scalar al vectorilor $\bar{a} \times \bar{b}$ şi $\bar{c}$. Astfel

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}.$$

Teoremă. Fie vectorii necoplanari $\bar{a}$, $\bar{b}$ și $\bar{c}$. Modulul produsului mixt $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ este egal cu volumul paralelipipedului construit pe acești vectori.

Demonstrație. Vom considera că vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$ și $\bar{c}$ sunt orientați după regula burghiului.



Folosind definiţia produsului scalar, obţinem

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = |\bar{a} \times \bar{b}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\varphi,$$

unde φ este unghiul dintre vectorii $\bar{a} \times \bar{b}$ şi $\bar{c}$.

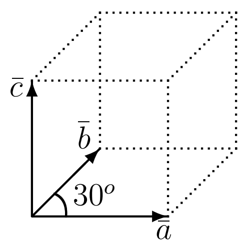
Valoarea factorului $|\bar{a} \times \bar{b}|$ reprezintă aria bazei acestui paralelipiped, iar valoarea produsului $|\bar{c}| \cdot |\cos\varphi$ este egală cu lungimea înălţimii QM a paralelipipedului. Deci, valoarea produsului mixt $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ este exact volumul paralelipipedului, construit pe vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Mai general, $V_{paralel.} = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$ - *sensul geometric* al produsului mixt.

Notă. Volumul piramidei triunghiulare $QABC$ este egal cu

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\overline{QA}, \overline{QB}, \overline{QC})|. \qquad (1.3.11)$$

Exemplul 14. Vectorul $\bar{c}$ este perpendicular vectorilor $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, iar vectorii $\bar{a}$ şi $\bar{b}$ formează un unghi de 30^o. Să se determine produsul mixt al vectorilor $\bar{a}, \bar{b}$ și $\bar{c}$, dacă se ştie că $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{c}| = 5$.



Rezolvare. Valoarea $|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})|$ reprezintă volumul V al paralelipipedului, construit pe vectorii $\bar{a},\bar{b}$ și $\bar{c}$. Pe de altă parte $V = A_b \cdot h$. Calculăm aria bazei paralelipipedului: $A_b = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin 30^o = 4\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2} = 6$, iar înălțimea este $h = |\bar{c}| = 5$. Prin urmare, $V = 6\cdot 5 = 30$. Astfel $|(\bar{a},\bar{b},\bar{c})| = 30$, de unde obținem că $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 30$ sau $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = -30$.

Dacă vectorii $\bar{a},\bar{b}$ și $\bar{c}$ sunt aranjați după regula burghiului, atunci $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 30$, în caz contrar $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = -30$.

Proprietăţi ale produsului mixt:

1. Produsul mixt este invariant la permutări circulare și schimbă semnul în opus la schimbarea cu locurile a doi factori vecini:

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (\bar{b},\bar{c},\bar{a}) = (\bar{c},\bar{a},\bar{b});\quad (\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = -(\bar{b},\bar{a},\bar{c}).$$

2. Vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă $(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = 0$.

Produsul mixt în coordonate

Fie vectorii

$\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$ şi $\bar{c} = c_1\bar{i} + c_2\bar{j} + c_3\bar{k}$.

Produsul vectorial al vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\bar{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\bar{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\bar{k},$$

adică $\bar{a}\times\bar{b} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1)$.

Produsul mixt este egal cu

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3,$$

expresie care reprezintă dezvoltarea după linia a 3-a a determinantului $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$. Astfel,

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplul 15. Să se determine volumul piramidei cu vârfurile în punctele $A(0,0,1)$, $B(3,7,2)$, $C(2,3,5)$, $D(6,2,6)$.

Rezolvare. Volumul piramidei $ABCD$ este egal cu $V = \dfrac{1}{6} \cdot |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|$. Determinăm coordonatele vectorilor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ și $\overline{AD}$:

$$\overline{AB} = (3,7,1),\ \overline{AC} = (2,3,4),\ \overline{AD} = (6,2,5).$$

Calculăm produsul mixt:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 45 + 4 + 168 - 18 - 24 - 70 = 105.$$

Astfel, $V = \dfrac{1}{6} \cdot |105| = \dfrac{35}{2} = 17,5$.

Exemplul 16. Punctele $A(-4,\ 8, -5)$, $B(1, -2,\ 4)$, $C(3,\ 7,\ 0)$ şi $D(3,\ 1,\ 2)$ sunt vârfuri ale unei piramide. Să se determine lungimea înălţimii, corespunzătoare feței BCD.

Rezolvare. Înălţimea este dusă din vârful A la baza BCD. Determinăm lungimea înălțimii respective din formula $V = \dfrac{1}{6} \cdot A_b \cdot H$.

Calculăm aria bazei BCD. Determinăm vectorii $\overline{DB} = (-2, -3,\ 2)$ şi $\overline{DC} = (0, 6,\ -2)$ și

$$\overline{DB} \times \overline{DC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = -6\bar{i} - 4\bar{j} - 12\bar{k},$$

iar $A_{BCD} = \dfrac{1}{2} \cdot |\overline{DB} \times \overline{DC}| = \dfrac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-4)^2 + (-12)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{196} = \dfrac{1}{2} \cdot 14 = 7$.

Pentru a calcula volumul piramidei, determinăm vectorii:

$$\overline{DA} = (-2, -3,\ 2),\ \overline{DB} = (0,\ 6, -2) \text{ şi } \overline{DC} = (-7,\ 7, -7).$$

Atunci $(\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}) = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -2 \\ -7 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 98$. Obținem $H = \dfrac{3V}{A_{BCD}} = \dfrac{3 \cdot \frac{98}{6}}{7} = 7$. Astfel, înălţimea cerută are lungimea egală cu 7.

Exemplul 17. Să se cerceteze coplanaritatea punctelorlor $A(1,-1,1)$, $B(0,2,3)$, $C(2,1,6)$ şi $D(-2,1,1)$.

Rezolvare. Determinăm vectorii $\overline{DA} = (3, -2, 0)$, $\overline{DB} = (2, 1, 2)$, $\overline{DC} = (4, 0, 5)$.

Produsul lor mixt este egal cu $(\overline{DA}, \overline{DB}, \overline{DC}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 16 + 20 = 19$. Cum produsul mixt al vectorilor este nenul, vectorii sunt necoplanari, iar punctele A, B,C și D sunt necoplanare.

Exerciții propuse pentru rezolvare

1. Să se afle produsul mixt al vectorilor $\bar{a} = (-1,\ 3,\ 2)$, $\bar{b} = (3,\ 1, -1)$ şi $\bar{c} = (1, -1,\ 5)$.
R-s: -60.

2. Să se cerceteze coplanaritatea vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$ şi $\bar{c}$:

$$\text{a) } \bar{a} = (-4,\ 0,\ 3), \quad \bar{b} = (1,\ 3, -2), \quad \bar{c} = (10,\ 6,\ 1);$$

$$\text{b) } \bar{a} = (1,\ 1,\ 3), \quad \bar{b} = (2, -1,\ 4), \quad \bar{c} = (-1,\ 5,\ 1).$$

R-s: a) necoplanari; b) coplanari.

3. Să se arate că punctele $A(2,\ 1, -3)$, $B(4,\ 0,\ 5)$, $C(1, -1,\ 3)$ şi $D(7,\ 1,\ 7)$ se află în acelaşi plan.

4. Să se afle volumul piramidei triunghiulare cu vârfurile $S(-1,\ 2,\ 3)$, $A(1,\ 5,\ 3)$, $B(2,\ 2,\ 7)$ şi $C(-1,\ 6,\ 8)$.
R-s: $\frac{13}{6}$.

5. Sunt date vârfurile piramidei triunghiulare: $S(-1,\ 1, -2)$, $A(1,\ 4,\ 2)$, $B(5,\ 3,\ 0)$ şi $C(2,\ 8, -1)$. Să se afle lungimea înălţimii piramidei, trasate la faţa ABC.
R-s: $\frac{8\sqrt{510}}{17}$.

6. Volumul unei piramide triunghiulare este egal cu 20, iar trei vârfuri sunt $A(-3,\ 0, -1)$, $B(-1,\ 3,\ 3)$ şi $C(3,\ 2,\ 1)$. Să se determine al patrulea vârf S, ştiind că aparține axei Oy.
R-s: $S_1(0, -5,\ 0)$, $S_2(0,\ 7,\ 0)$.

§ 4. Dreapta în plan

Vectori în plan.

În acest paragraf vom considera segmente orientate din planul Oxy - planul determinat de axele de coordonate Ox și Oy. Fie V_2 mulțimea vectorilor liberi cu reprezentanți din acest plan. Mulțimea $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ este reper cartezian ortonormat, iar expresia analitică a unui vector liber $\bar{a}$ este $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j}$ sau $\bar{a} = (a_1, a_2)$. În mod similar, fiecare punct A din planul Oxy este determinat de o pereche de numere – coordonatele punctului - $A(x; y)$.

Sunt valabile operațiile liniare cu vectori în coordonate, produsul scalar și proprietățile acestora, condițiile de coliniaritate a vectorilor, împărțirea unui segment într-un raport dat etc.

Dreapta în plan.

O dreaptă în planul Oxy este bine determinată în cazurile când sunt date:

– *un punct ce aparține dreptei și direcția dreptei*;

– *două puncte distincte ce aparțin dreptei*;

– *un punct ce aparține dreptei și unghiul de înclinare a dreptei față de direcția pozitivă a axei Ox*;

– *un punct ce aparține dreptei și o direcție perpendiculară dreptei date.*

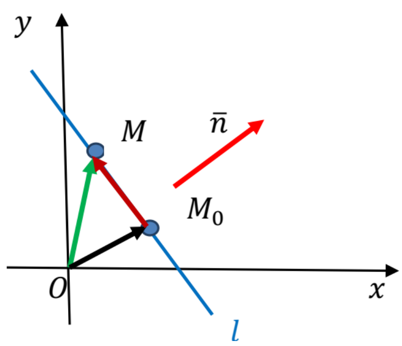
Fiecărei drepte din plan i se atribuie o ecuație – o expresie analitică - în dependență de datele inițiale menționate mai sus.

Ecuația dreptei, ce trece printr-un punct dat, perpendicular unei direcții (unui vector) date. Ecuația generală a dreptei

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct și $\bar{n} = (a, b)$ un vector nenul. Există o singură dreaptă l ce conține punctul M_0, perpendiculară vectorului $\bar{n}$.

Vectorul $\bar{n}$ este numit *vector normal al dreptei l.*

Un punct M aparține dreptei l dacă și numai dacă $\overline{M_0M} \perp \bar{n}$, de unde $\overline{M_0M} \cdot \bar{n} = 0$.



Dacă $\bar{r}_0$ este vectorul de poziție al punctului M_0 ($\bar{r}_0 = \overline{OM_0}$), iar $\bar{r}$ - vectorul de poziție al punctului M ($\bar{r} = \overline{OM}$), atunci $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$. Obținem

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \bar{n} = 0, \tag{1.4.1}$$

numită *ecuație vectorială a dreptei, determinată de punct și vector normal.*

Notă. O dreaptă are o infinitate de vectori normali și ei sunt coliniari între ei.

Pe de altă parte, $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, iar (1.4.1) primește forma

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \tag{1.4.2}$$

numită *ecuație a dreptei ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ cu vectorul normal $\bar{n}$.*

Astfel, coordonatele oricărui punct al dreptei l verifică ecuația (1.4.2). Este adevărată și afirmația inversă: dacă coordonatele unui punct verifică ecuația (1.4.2), atunci acest punct aparține dreptei l.

Ultima ecuație poate fi scrisă sub forma

$$ax + by + c = 0, \tag{1.4.3}$$

unde $c = -ax_0 - by_0$. Ecuația (1.4.3) se numește *ecuație generală a dreptei.*

Ecuația (1.4.3) este o ecuație de gradul I în raport cu necunoscutele x si y. Din această cauză dreptele mai sunt numite și *linii de ordinul* I.

Ecuații incomplete ale dreptei:

1. Pentru $c = 0$ ecuația $ax + by = 0$ determină o dreaptă, care trece prin originea sistemului de coordonate.

2. Pentru $b = 0$ ecuația $ax + c = 0$, sau $x = -\dfrac{c}{a}$, determină o dreaptă paralelă axei Oy (vectorul normal $\bar{n} = (a, 0)$ al acestei drepte este perpendicular axei Oy).

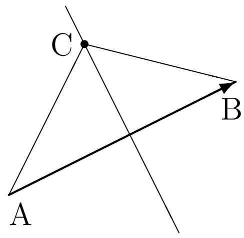
3. Pentru $a = 0$ ecuația $by + c = 0$, sau $y = -\dfrac{c}{b}$, determină o dreaptă paralelă axei Ox (vectorul normal $\bar{n} = (0, b)$) este perpendicular axei Ox).

4. Pentru $b = c = 0$ ecuația $ax = 0$ sau $x = 0$, determină axa Oy.

5. Pentru $a = c = 0$ ecuația $by = 0$ sau $y = 0$, determină axa Ox.

Exemplul 1. Punctele $A(-2, 0)$, $B(1, 2)$, $C(3, -4)$ sunt vârfuri ale unui triunghi. Să se scrie ecuaţia dreptei suport a înălţimiui triunghiului, corespunzătoare laturii AB.

Rezolvare. Dreapta căutată trece prin punctul C și este perpendiculară dreptei AB.



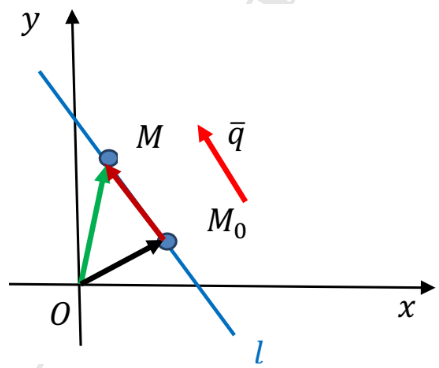
Astfel dreapta este perpendiculară vectorului $\overline{AB} = (3, 2) = \bar{n}$.

Obținem ecuația $3(x-3)+2(y+4) = 0$, sau $3x+2y-1 = 0$.

Ecuația dreptei, ce trece printr-un punct cu direcție dată (paralel unui vector)

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct și $\bar{q} = (m, n)$ un vector nenul.

Există o singură dreaptă, ce trece prin punctul M_0 și este paralelă vectorului $\bar{q}$.



Să determinăm ecuația acestei drepte. Dacă $M(x, y)$ este un punct arbitrar al dreptei date, atunci vectorii $\bar{q}$ şi $\overline{M_0M}$ sunt coliniari.

Fie $\bar{r}_0$ vectorul de poziție a punctului M_0 ($\bar{r}_0 = \overline{OM_0}$), iar $\bar{r}$ - vectorul de poziție al punctului M ($\bar{r} = \overline{OM}$). Atunci $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$. Obținem

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{q} \quad sau \quad \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{q},\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.4.4}$$

numită *ecuație vectorială a dreptei determinată de punct și vector director.* Fiecare valoare a parametrului t determină un punct de pe dreaptă.

Vectorul $\bar{q}$ este numit *vector director* al dreptei.

Notă. O dreaptă are o infinitate de vectori directori și ei sunt coliniari între ei.

Deoarece $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$, din (1.4.4) obținem

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.4.5}$$

numite *ecuații parametrice ale dreptei.*

Fiecărei valori a parametrului $t \in \mathbb{R}$ îi corespunde un punct binedeterminat $M(x, y)$. Când t parcurge mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$, punctul $M(x, y)$ "parcurge" toată dreapta d. În particular, pentru $t = 0$ se obţin coordonatele punctului M_0.

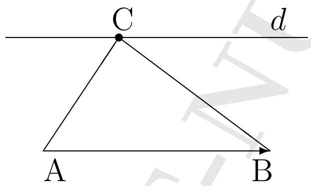
Excluzând parametrul t din sistemul (1.4.5), obținem

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \tag{1.4.6}$$

numită *ecuaţie canonică* a dreptei.

Exemplul 2. Punctele $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ şi $C(0, 4)$ sunt vârfuri ale triunghiului ABC. Să se scrie ecuația dreptei d ce trece prin vârful C, paralel laturii AB.

Dreapta d este paralelă vectorului $\overline{AB} = (4, -3)$, adică $\overline{AB}$ este vector director al dreptei d. Utilizând formula de mai sus, obţinem $\dfrac{x - 0}{4} = \dfrac{y - 4}{-3}$ sau $3x + 4y - 16 = 0$ - ecuația dreptei cerute d.



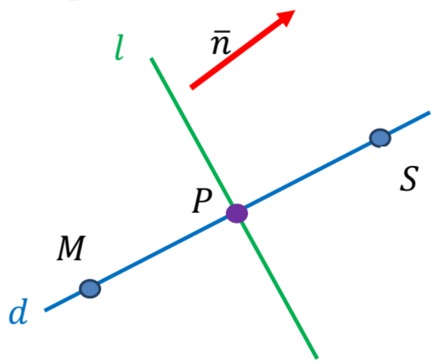
Exemplul 3. Să se determine:

a) proiecția punctului $M(-1, 2)$ pe dreapta $l : x - y + 1 = 0$;

b) simetricul punctului $M(-1, 2)$ față de dreapta $l : x - y + 1 = 0$.

Rezolvare.

a) Fie P proiecția lui M pe dreapta l. Atunci $\{P\} = l \cap d$, unde d este dreapta ce trece prin M perpendicular dreptei l.



Vectorul $\bar{n} = (1, -1)$ este vector normal al dreptei l, dar este paralel dreptei d, deci este vector director al dreptei d. Atunci ecuația dreptei d este

$$\frac{x-(-1)}{1} = \frac{y-2}{-1}$$

sau $x + y - 1 = 0$. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0, \end{cases}$$

obținem coordonatele punctului P. Deci, soluția $(0, 1)$ a sistemului sunt coordonate ale punctului P.

b) Fie S simetricul lui M față de dreapta l. Atunci P este mijlocul segmentului MS și

$$\begin{cases} x_P = \dfrac{x_M + x_S}{2} \\ y_P = \dfrac{y_M + y_S}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = \dfrac{-1 + x_S}{2} \\ 1 = \dfrac{2 + y_S}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_S = 1 \\ y_S = 0. \end{cases}$$

Deci, $S(1, 0)$.

Ecuația dreptei, ce trece prin două puncte date

Fie punctele distincte $M_1(x_1, y_1)$ şi $M_2(x_2, y_2)$.

Vectorul $\bar{q} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ este vector director al dreptei M_1M_2. Folosind formula (1.4.6), obţinem:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} - \tag{1.4.7}$$

ecuaţia dreptei ce trece prin două puncte.

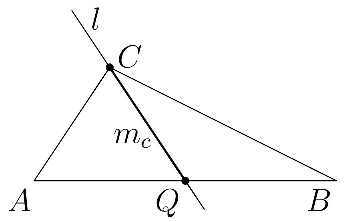
Ecuația (1.4.7) mai poate fi scrisă sub forma:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0 \quad sau \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.4.8}$$

Notă. Punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ și $M_3(x_3, y_3)$ sunt coliniare dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplul 4. Un triunghi are vârfurile $A(2,1)$, $B(0,-3)$ şi $C(-1,2)$. Să se scrie ecuaţia dreptei suport a medianei triunghiului, corespunzătoare laturii AB.



Mediana corespunzătoare laturii AB este segmentul, ce uneşte vârful C cu mijlocul Q al laturii AB. Coordonatele punctului Q sunt semisuma coordonatelor respective ale vârfurilor A şi B: $x = \dfrac{2+0}{2} = 1$, $y = \dfrac{1-3}{2} = -1$. Astfel, $Q(1,-1)$.

Dreapta CQ este dreaptă suport a medianei CQ. Ecuația dreptei CQ, conform (1.4.6), este $\dfrac{x+1}{1+1} = \dfrac{y-2}{-1-2}$, de unde se obţine $3x + 2y - 1 = 0$.

Ecuația dreptei, ce trece printr-un punct dat și cu unghiul de înclinare a dreptei față de axa Ox cunoscut (pantă dată)

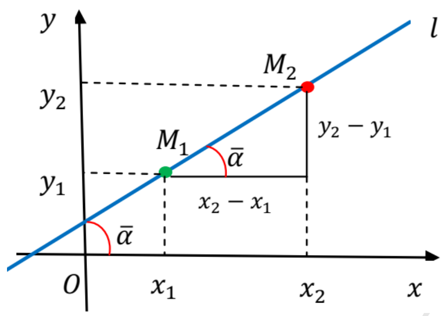
Fie dată o dreaptă l. Notăm cu $\alpha \in [0°, 180°)$ (sau $\alpha \in [0, \pi)$) unghiul format de dreapta l cu direcţia pozitivă a axei Ox. Unghiul α se numeşte *unghi de înclinare* a dreptei l faţă de Ox. Dacă $\alpha = 0°$, dreapta se numește *orizontală*; dacă $\alpha = 90°$, dreapta se numește *verticală*. În celelalte cazuri, dreapta se numeşte *oblică*.

Pentru orice dreaptă neverticală se definește numărul $m = tg\alpha$, numit *pantă* (*coeficient unghiular*) a dreptei.

Dreapta verticală nu are pantă!

Fie dreapta neverticală M_1M_2 cu $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$, $x_1 \neq x_2$. Evident, panta dreptei este egală cu

$$m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{1.4.8}$$



Ecuaţia (1.4.6) poate fi scrisă sub forma:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

sau

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Astfel, când sunt cunoscute panta m a dreptei şi un punct $M_0(x_0, y_0)$, ce aparţine dreptei, obținem

$$y - y_0 = m(x - x_0) - \tag{1.4.9}$$

ecuaţia dreptei determinată de punct și pantă.

Din ecuația de mai sus rezultă

$$y = mx + n, \tag{1.4.10}$$

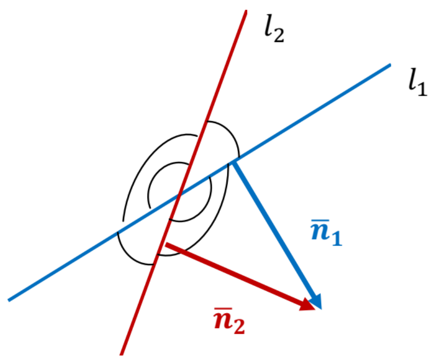
unde $n = y_0 - mx_0$.

Panta dreptei dată de ecuația $ax + by + c = 0$, $b \neq 0$, este egală cu $m = -\frac{a}{b}$.

Unghiul dintre drepte. Paralelism şi perpendicularitate

Vom determina unghiul dintre drepte, fiind date diferite ecuaţii ale dreptei.

Fie date dreptele $l_1 : ax_1 + by_1 + c_1 = 0$ şi $l_2 : ax_2 + by_2 + c_2 = 0$. Aceste drepte formează două perechi de unghiuri congruente.



Vectorii normali respectivi $\bar{n}_1 = (a_1, b_1)$ și $\bar{n}_2 = (a_2, b_2)$ formează un unghi, congruent cu unul dintre perechile de unghiuri formate de l_1 și l_2, care se determină din formula

$$cos\angle(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Astfel, măsura unghiului ascuțit dintre dreptele l_1 și l_2 se determină din relația

$$cos\angle(l_1, l_2) = |cos\angle(\bar{n}_1, \bar{n}_2)|.$$

Este evident că $l_1 \perp l_2 \iff \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \iff \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0$, iar $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ reprezintă *condiţia de perpendicularitate a dreptelor* l_1 *și* l_2.

Iar $l_1 || l_2 \iff \bar{n}_1 || \bar{n}_2$ și $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ reprezintă *condiţia de paralelism a dreptelor* l_1 *și* l_2.

Exemplul 5. Măsura unghiului ascuţit φ dintre dreptele de ecuații $2x + y - 5 = 0$ şi $3x - 4y + 1 = 0$ se determină din egalitatea

$$\cos\varphi = \frac{|2 \cdot 3 + 1 \cdot (-4)|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}.$$

Astfel $\varphi = \arccos \dfrac{2\sqrt{5}}{25}$ sau $\varphi \approx 79°42'$.

Exemplul 6. Să se determine valorile reale ale parametrului α, pentru care dreptele $2x + (\alpha + 5)y - 3 = 0$ şi $\alpha x + 3y + 2 = 0$ sunt paralele.

Rezolvare: Pentru ca dreptele să fie paralele, vectorii normali ale acestor drepte trebuie să fie coliniari. Astfel, coordonatele vectorilor normali $\bar{n}_1 = (2,\, \alpha + 5)$ şi $\bar{n}_2 = (\alpha,\, 3)$ trebuie să fie direct proporţionale: $\dfrac{2}{\alpha} = \dfrac{\alpha + 5}{3}$. Obținem $\alpha^2 + 5\alpha - 6 = 0$, de unde $\alpha = -6$ sau $\alpha = 1$.

Exemplul 7. Să se determine valorile reale ale parametrului a, pentru care dreptele $ax + (a + 12)y + 5 = 0$ şi $(a + 2)x - y - 4 = 0$ sunt reciproc perpendiculare.

Rezolvare: Pentru ca dreptele să fie perpendiculare, vectorii normali ale acestor drepte trebuie să fie ortogonali, adică produsul scalar al vectorilor normali $\bar{n}_1 = (a,\, a + 12)$ şi $\bar{n}_2 = (a + 2,\, -1)$ trebuie să fie nul: $a(a + 2) + (a + 12) \cdot (-1) = 0 \iff a^2 + a - 12 = 0$ de unde $a = -4$ sau $a = 3$.

Fie că dreptele l_1 şi l_2 au ecuaţiile canonice:

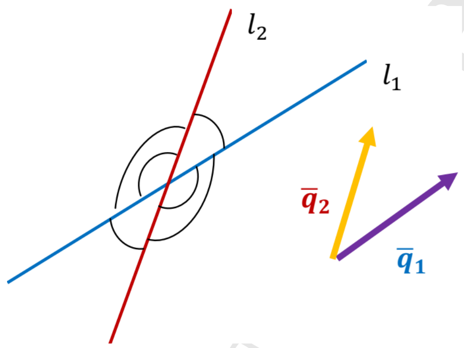
$$l_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}, \qquad l_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}.$$

În mod similar, unghiul dintre drepte este determinat de unghiul dintre vectorii directori $\bar{q}_1=(m_1,n_1)$ și $\bar{q}_2=(m_2,n_2)$, care se află din relația

$$cos\angle(l_1,l_2)=|cos\angle(\bar{q}_1,\bar{q}_2)|,$$

unde

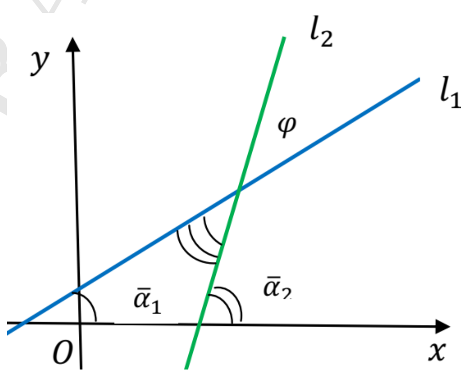
$$cos\angle(\bar{q}_1,\bar{q}_2)=\frac{\bar{q}_1\cdot\bar{q}_2}{|\bar{q}_1|\cdot|\bar{q}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}.$$



Condiţia de perpendicularitate a dreptelor l_1 și l_2 rezultă din: $l_1\perp l_2 \iff \bar{q}_1\perp\bar{q}_2 \iff \bar{q}_1\cdot\bar{q}_2=0$, de unde $m_1m_2+n_1n_2=0$.

Avem că $l_1||l_2 \iff \bar{q}_1||\bar{q}_2$ și $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$ reprezintă *condiţia de paralelism a dreptelor* l_1 și l_2.

Fie că dreptele l_1 și l_2 sunt definite de ecuații cu pantă, adică $l_1: y=m_1x+n_1$, $l_2: y=m_2x+n_2$. Să determinăm măsura unghiului φ format de aceste drepte. Din reprezentarea de mai jos avem $\alpha_2=\varphi+\alpha_1$. De unde $\varphi=\alpha_2-\alpha_1$.



Obținem că $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\dfrac{tg\alpha_2-tg\alpha_1}{1+tg\alpha_1\cdot tg\alpha_2}$. Deoarece $tg\alpha_1=m_1$ și $tg\alpha_2=m_2$, atunci $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2}$.

În general,

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|.$$

Este evident că $l_1 \perp l_2 \iff \varphi = \frac{\pi}{2}$. Deoarece $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ nu există, cerem ca $1 + m_1 \cdot m_2 = 0$ sau $m_1 \cdot m_2 = -1$ - condiţia de *perpendicularitate a dreptelor.*

Dreptele l_1 şi l_2 sunt *paralele*, dacă şi numai dacă $\alpha_1 = \alpha_2 \iff m_1 = m_2$.

Exemplul 8. Să se determine unghiul ascuţit φ format de dreptele $y = \dfrac{2}{3}x + 5$ şi $y = 2x - 1$.

Rezolvare: Pantele dreptelor sunt $m_1 = \dfrac{2}{3}$ şi $m_2 = 2$. Atunci

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{2 - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3} \cdot 2}\right| = \frac{4}{7} \;\Rightarrow\; \varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{7} \quad \textit{sau} \quad \varphi \approx 29^\circ 45'.$$

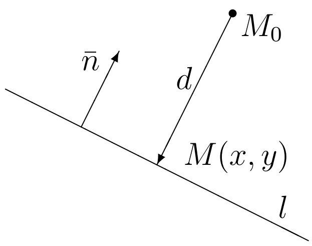
Exemplul 9. Să se scrie ecuaţia dreptei, ce trece prin punctul $A(-1, 3)$, perpendicular dreptei $y = \dfrac{2}{5}x - 3$.

Rezolvare: Panta dreptei date este $m_1 = \dfrac{2}{5}$. Fie m_2 panta dreptei cerute. Atunci $m_1 m_2 = -1$, de unde $m_2 = -\dfrac{1}{m_1} = -\dfrac{5}{2}$. Vom scrie ecuaţia dreptei, ce trece prin punctul $A(-1, 3)$ cu panta $m_2 = \dfrac{5}{2}$. Conform formulei (1.4.9), $y - 3 = -\dfrac{5}{2}(x + 1)$, sau $y = -\dfrac{5}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Exemplul 10. Să se scrie ecuația dreptei, care trece prin punctul $A(2, 5)$ și formează cu direcția pozitivă a axei Ox un unghi de 135°.

Rezolvare: Panta dreptei este $m = \operatorname{tg} 135^\circ = -1$, de unde obținem ecuația $y - 5 = -1(x - 2)$ sau $y = -x + 7$.

Distanţa de la un punct la o dreaptă. Considerăm o dreaptă l de ecuaţie $ax + by + c = 0$ şi un punct $M_0(x_0, y_0)$. Distanţa d de la punctul M_0 la dreapta l este lungimea perpendicularei M_0M, trasate din M_0 la dreapta l, unde $M(x, y)$ aparţine acestei drepte (figura de mai jos).



Vectorul normal al dreptei $\bar{n} = (a, b)$ şi vectorul $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ sunt coliniari. Atunci $d = |\overline{M_0M}|$.

Unghiul φ dintre vectorii coliniari $\bar{n}$ şi $\overline{M_0M}$ este 0 sau π. Deoarece $\cos\varphi = \pm 1$, produsul scalar $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = |\bar{n}| \cdot |\overline{M_0M}| \cdot \cos\varphi = \pm|\bar{n}| \cdot d$.

Obținem $|\bar{n} \cdot \overline{M_0M}| = |\bar{n}| \cdot d$, de unde $d = \dfrac{|\bar{n} \cdot \overline{M_0M}|}{|\bar{n}|}$.

Pe de altă parte

$$\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = a(x - x_0) + b(y - y_0) = ax - ax_0 + by - by_0 =$$
$$(ax + by + c) - (ax_0 + by_0 + c) = 0 - (ax_0 + by_0 + c) = -(ax_0 + by_0 + c).$$

Tinând cont de faptul că $|\bar{n}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, se obţine:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{1.4.11}$$

Exemplul 11. Să se calculeze distanţa de la punctul $M_0(-2, 3)$ la dreapta $3x - 4y - 7 = 0$.

Conform (1.4.11) se obţine

$$d = \frac{|3 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 - 7|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-6 - 12 - 7|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-25|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5.$$

Astfel, distanţa de la M_0 la dreapta dată este egală cu 5.

Exemplul 12. Punctele $A(-1, 2)$, $B(3, -3)$ şi $C(0, 4)$ sunt vârfuri ale triunghiului ABC. Să se afle înălţimea triunghiului, corespunzătoare laturii AB.

Rezolvare: Înălţimea triunghiului, corespunzătoare laturii AB, este exact distanţa de la punctul C la dreapta suport a laturii AB. Scriem ecuaţia dreptei, care trece prin punctele $A(-1, 2)$ şi $B(3, -3)$:

$$\frac{x + 1}{3 + 1} = \frac{y - 2}{-3 - 2} \iff \frac{x + 1}{4} = \frac{y - 2}{-5} \iff$$
$$\iff 4(y - 2) = -5(x + 1) \iff 5x + 4y - 3 - 0.$$

Distanţa de la punctul $C(0, 4)$ la dreapta $5x + 4y - 3 = 0$ este egală cu

$$\frac{|5 \cdot 0 + 4 \cdot 4 - 3|}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = \frac{13}{\sqrt{41}} = \frac{13\sqrt{41}}{41},$$

deci lungimea înălţimii triunghiului, corespunzătoare laturii AB, este egală cu $\dfrac{13\sqrt{41}}{41}$.

Aria triunghiului. Una dintre aplicațiile produsului vectorial este calcularea ariei unui triunghi ABC în spațiu:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB} \times \overline{AC}|.$$

Fie că vârfurile triunghiului aparțin planului Oxy și au coordonatele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.

Considerăm sistemul de coordonate $Oxyz$ cu reperul $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$. Atunci putem considera că punctele A, B și C au a treia coordonată nulă, adică $A(x_1, y_1, 0)$, $B(x_2, y_2, 0)$, $C(x_3, y_3, 0)$.

Obținem $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, 0)$, $\overline{AC} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$. Determinăm produsul vectorial

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \bar{k}.$$

De unde

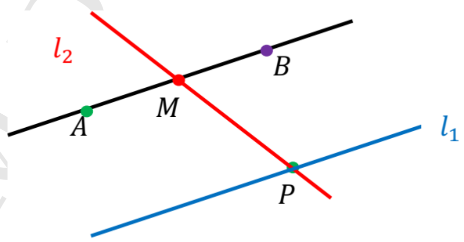
$$|\overline{AB} \times \overline{AC}| = mod \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

iar

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} mod \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \quad sau \quad A_{ABC} = \frac{1}{2} mod \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Exemplul 13. Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin punctul $P(3, 5)$ la distanțe egale de punctele $A(-7, 3)$ și $B(11, -5)$.

Rezolvare. Sunt două astfel de drepte. Prima dreaptă l_1 trece prin punctul P paralel dreptei AB. Să scriem ecuația acestei drepte. Vectorul $\overline{AB} = (18, -8)$ este vector director al dreptei l_1. Astfel, ecuația dreptei l_1 este $\frac{x-3}{18} = \frac{y-5}{-8}$ sau $4x + 9y - 32 = 0$.



A doua dreaptă l_2 trece prin punctul P și prin mijlocul M al segmentului AB. Punctul M are coordonatele $(\frac{-7+11}{2}, \frac{3-5}{2})$ sau $(2, -1)$. Ecuația dreptei PM este $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-5}{-6}$ sau $y = 6x - 13$.

Exemplul 14. Aria unui triunghi este egală cu 8, iar $A(1,-2)$ și $B(2,3)$ sunt două vârfuri. Al treilea vârf C aparține dreptei $2x+y-2=0$. Să se determine coordonatele lui C.

Rezolvare. Fie că punctul C are coordonatle (m,n). Evident că numerele m și n verifică relația $2m+n-2=0$.

Pe de altă parte, aria triunghiului ABC este egală cu

$$A_{ABC}=\frac{1}{2}mod\begin{vmatrix} m & n & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}|-5m+n+7|=8.$$

Astfel, $-5m+n+7=16$ sau $-5m+n+7=-16$.

Obținem totalitatea sistemelor de ecuații

$$\begin{cases} -5m+n+7=16\\ 2m+n-2=0, \end{cases}\qquad \begin{cases} -5m+n+7=-16\\ 2m+n-2=0 \end{cases}$$

cu soluțiile $(-1,4)$ și $(\frac{25}{7},-\frac{36}{7})$. Deci, $C(-1,4)$ sau $C(\frac{25}{7},-\frac{36}{7})$.

Exemplul 15. Fie dreptele $l_1: 3x-4y-12=0$ și $l_2: 4x-3y-16=0$. Să se scrie ecuațiile bisectoarelor unghiurilor formate de dreptele l_1 și l_2 .

Rezolvare. Fie M un punct arbitrar al bisectoarei unui unghi format de drepte. Atunci punctul M este egal depărtat de dreptele l_1 și l_2, adică $d(M,l_1)=d(M,l_2)$.

Deoarece

$$d(M,l_1)=\frac{|3x-4y-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

și

$$d(M,l_2)=\frac{|4x-3y-16|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}},$$

obținem $|3x-4y-12|=|4x-3y-16|$. Deci, $3x-4y-12=4x-3y-16$ sau $3x-4y-12=-(4x-3y-16)$, de unde $x+y-4=0$ sau $x-y-4=0$.

Astfel, ecuațiile bisectoarelor sunt $x+y-4=0$ și $x-y-4=0$.

Exerciții propuse pentru rezolvare

1. Să se determine punctele de intersecție ale dreptei $2x-3y-12=0$ cu axele de coordonate și să se construiască această dreaptă.

R-s: $(6,0),(0,-4)$.

2. Să se determine punctul de intersecție a dreptelor $3x-4y-29=0$ și $2x+5y+19=0$.

R-s: $(3, -5)$.

3. Laturile unui triunghi au drept suport dreptele: $x + 5y - 7 = 0$, $3x - 2y - 4 = 0$, $7x + y + 19 = 0$. Să se calculeze aria triunghiului.

R-s: 17.

4. Să se arate că punctele $A(1, 8)$, $B(3, 6)$, $C(-4, 13)$ sunt coliniare.

5. Fie dată dreapta $2x + 3y + 4 = 0$. Să se scrie ecuația dreptei, ce trece prin punctul $M_0(2, 1)$:

1) paralel dreptei date;

2) perpendicular dreptei date.

R-s: 1) $2x + 3y - 7 = 0$, 2) $-3x + 2y + 4 = 0$.

6. Să se determine măsura unghiului $\varphi \in [0°, 90°]$ dintre dreptele:

a) $3x + 2y - 1 = 0$ şi $5x - y + 3 = 0$,

b) $2x - 3y + 4 = 0$ şi $6x + 4y - 5 = 0$,

c) $2x + 5y + 3 = 0$ şi $4x + 5y - 1 = 0$,

d) $3x + 4y + 3 = 0$ şi $2x - 4y - 5 = 0$.

R-s: a) $\varphi = 45°$; b) $\varphi = 90°$; c) $\varphi = \arccos \frac{33\sqrt{1189}}{1189}$, sau $\varphi \approx 88°24'$; d) $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$, sau $\varphi \approx 63°27'$.

7. Să se determine:

a) proiecția punctului $P(-6, 4)$ pe dreapta $4x - 5y + 3 = 0$;

b) simetricul punctului $P(-6, 4)$ față de dreapta $4x - 5y + 3 = 0$.

R-s: a) $(-2, -1)$, b) $(2, -6)$.

8. Fie date vârfurile unui triunghi $M_1(2, 1)$, $M_2(-1, -1)$, $M_3(3, 2)$. Să se găsească ecuațiile suport ale înălțimilor triunghiului.

R-s: $4x + 3y - 11 = 0$, $x + y + 2 = 0$, $3x + 2y - 13 = 0$.

9. Sunt date dreptele suport a două laturi ale unui paralelogram: $8x + 3sy + 1 = 0$, $2x + y - 1 = 0$ și a unei diagonale $3x + 2y + 3 = 0$. Să se determine coordonatele vârfurilor acestui paralelogram.

R-s: $(1, -3)$, $(-2, 5)$, $(5, -9)$, $(8, -17)$.

10. Fie dreapta $2x + 3y + 4 = 0$. Să se scrie ecuația unei drepte, ce trece prin punctul $M(2, 1)$ și care formează un unghi de $45°$ cu dreapta dată.

R-s: $x - 5y + 3 = 0$ sau $5x + y - 11 = 0$.

11. Sunt date două vârfuri $M_1(-10, 2)$ și $M_2(6, 4)$ ale unui triunghi, iar $H(5, 2)$ este ortocentrul triunghiului (punctul de intersecție a înălțimilor). Să se găsească coordonatele vârfului al treilea M_3.

R-s: $M_3(6, -6)$

12. Să se scrie ecuațiile dreptelor suport ale laturilor triunghiului ABC, dacă $A(1,3)$ și dreptele suport a două mediane au ecuațiile $x-2y+1=0$ și $y-1=0$.

R-s: $x+2y-7=0$, $x-4y-1=0$, $x-y+2=0$.

13. Să se scrie ecuația dreptei, care trece prin punctul $B(5,-5)$ și taie pe axele de coordonate un triunghi cu aria 50.

R-s: $(\sqrt{2}+1)x+(\sqrt{2}-1)y-10=0$, $(\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}+1)y+10=0$, $x-y-10=0$.

14. Fie dreptele $AB: 2x-y-3=0$, $AC: x-2y+3=0$, $BC: 2x+3y+1=0$. Să se determine:

a) ecuația înălțimii duse din A;

b) ecuația medianei duse din C;

c) ecuația bisectoarei unghilui BAC;

d) ecuația mediatoarei laturii AB;

e) coordonatele centrului de greutate al triunghiului.

15. Pe axa absciselor să se determine un astfel de punct P, încât suma distanțelor până la punctele $M(1,2)$ și $N(3,4)$ să fie minimă.

R-s: $P(\frac{5}{3},0)$

16. Pe axa ordonatelor să se determine un astfel de punct P, încât diferența distanțelor de la P la punctele $M(-3,2)$ și $N(2,5)$ să fie maximă.

R-s: $P(0,11)$

17. Temperatura se măsoară în grade *Celsius* (C) sau *Fahrenheit* (F). În scara F apa îngheaţă la 32^o şi fierbe la 212^o. Dependenţa dintre mărimile C şi F este liniară.

a) Să se exprime F prin C şi invers.

b) Să se traseze graficul dependenţei dintre C şi F, luând axa orizontală pentru C, iar cea verticală pentru F.

c) Să se determine temperatura la care mărimile C şi F coincid.

R-s: a) $F=\frac{9}{5}C+32$, b)$C=\frac{5}{9}(F-32)$, c) $-40°$.

18. Sunt date vârfurile triunghiului ABC: $A(-2,\ 6)$, $B(7,\ -6)$, $C(5,\ 5)$. Să se determine:

a) lungimea laturii AB;

b) ecuaţia dreptei suport a laturii AB;

c) lungimea medianei, duse din vârful C;

d) ecuaţia dreptei suport a medianei, duse din vârful C;

e) centrul de greutate al triunghiului (punctul de intersecţie a medianelor);

f) măsura unghiului interior A a triunghiului;

g) ecuaţia dreptei suport a liniei mijlocii, paralelă laturii AB;

h) ecuaţia dreptei, ce trece prin vârful C, paralel laturii AB;
i) ecuaţia dreptei suport a înălţimii triunghiuluii, dusă din vârful C;
j) piciorul înălţimii triunghiului, coborâte la latura AB;
k) aria triunghiului ABC;
l) lungimea înălţimii, duse din vârful C;
m) punctul C', simetric punctului C în raport cu latura AB.

§ 5. Planul

“Descrierea analitică” a unei drepte în plan este posibilă în situații cu diverse date inițiale:

– *un punct ce aparține dreptei și direcția dreptei*;

– *două puncte distincte ce aparțin dreptei*;

– *un punct ce aparține dreptei și unghiul de înclinare a dreptei față de direcția pozitivă a axei* Ox;

– *un punct ce aparține dreptei și o direcție perpendiculară dreptei date.*

”Descrierea analitică” a unui plan în spațiu este posibilă în mai puține situații. Un singur vector nenul paralel unui plan nu este suficient pentru a reda „direcția” planului, iar un vector nenul perpendicular planului caracterizează complet „direcția” acestuia.

Astfel, un plan este bine determinat în cazurile când sunt date:

– *un punct ce aparține planului și o direcție perpendiculară planului dat*;

– *trei puncte necoliniare ce aparțin planului*;

– *un punct ce-i aparține și două direcții paralele planului (doi vectori necoliniari paraleli planului).*

Fiecărui plan în spațiu i se atribuie o ecuație – o *expresie analitică* - în dependență de datele inițiale menționate mai sus.

Ecuația planului, ce trece printr-un punct dat, perpendicular unei direcții (vector) date. Ecuația generală a planului

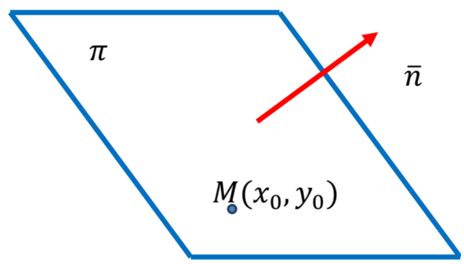
Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct și $\bar{n} = (a, b, c)$ un vector nenul. Există un singur plan π ce conține punctul M_0 și este perpendicular vectorului $\bar{n}$.

Vectorul $\bar{n}$ este numit *vector normal al planului* π.

Un punct $M(x, y, z)$ aparține planului π dacă și numai dacă $\overline{M_0M} \perp \bar{n}$, de unde $\overline{M_0M} \cdot \bar{n} = 0$. Fie $\bar{r}_0$ vectorul de poziție al punctului M_0 ($\bar{r}_0 = \overline{OM_0}$), iar $\bar{r}$ - vectorul de poziție al punctului M ($\bar{r} = \overline{OM}$). Atunci $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$. Obținem

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \bar{n} = 0, \tag{1.5.1}$$

numită *ecuație vectorială a panului determinată de punct și vector normal.*



Notă. Un plan are o infinitate de vectori normali și ei sunt coliniari între ei.

Deoarece $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, ecuația (1.5.1) capătă forma

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0, \qquad (1.5.2)$$

numită *ecuație a planului ce trece prin punctul* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *cu vectorul normal* $\bar{n}$.

Astfel, coordonatele oricărui punct al planului verifică ecuația (1.5.2). Este adevărată și afirmația inversă: dacă coordonatele unui punct verifică ecuația (1.5.2), atunci acest punct aparține planului π.

Ecuaţia (1.5.2) poate fi scrisă sub forma

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad (1.5.3),$$

unde $d = -ax_0 - by_0 - cy_0$. Ecuația (1.5.3) se numește *ecuație generală a planului.*

Exemplul 1. Să se scrie ecuaţia planului, ce conține punctul $M_0(2, -1, 3)$, perpendicular dreptei AB, dacă $A(1, 1, -3)$ şi $B(-2, 0, 1)$.

Rezolvare: Deoarece dreapta AB este perpendiculară planului, vectorul $\overline{AB}$ este vector normal al planului. Astfel $\bar{n} = \overline{AB} = (-3, -1, 4)$. Utilizând (1.5.2), obținem $-3 \cdot (x-2) - 1 \cdot (y+1) + 4 \cdot (z-3) = 0$ sau $-3x - y + 4z - 7 = 0$.

Ecuații incomplete ale planului:

1. pentru $c = 0$ obținem ecuaţia $ax + by + cz = 0$ care determină un plan ce trece prin originea sistemului de coordonate,

2. pentru $a = 0$ obținem ecuaţia $by + cz + d = 0$ care determină un plan paralel axei Ox (vectorul normal $\bar{n} = (0, b, c)$ al acestui plan este perpendicular axei Ox),

3. pentru $b = 0$ obținem ecuaţia $ax + cz + d = 0$ care determină un plan paralel axei Oy,

4. pentru $c = 0$ obținem ecuaţia $ax + by + d = 0$ care determină un plan paralel axei Oz,

5. pentru $a = d = 0$ obținem ecuaţia $by + cz = 0$ care determină un plan ce conține Ox,

6. pentru $b = d = 0$ obținem ecuaţia $ax + cz = 0$ care determină un plan ce conține Oy,

7. pentru $c = d = 0$ obținem ecuaţia $ax + by = 0$ care determină un plan ce conține Oz,

8. pentru $a = b = 0$ obținem ecuaţia $cz + d = 0$ care determină un plan paralel planului Oxy,

9. pentru $b = c = 0$ obținem ecuaţia $ax + d = 0$ care determină un plan paralel planului Ozy,

10. pentru $a = c = 0$ obținem ecuaţia $by + d = 0$ care determină un plan paralel planului Oxz,

11. pentru $a = b = d = 0$ obținem ecuaţia $cz = 0$ sau $z = 0$ care reprezintă ecuaţia planului Oxy,

12. pentru $a = c = d = 0$ obținem ecuaţia $by = 0$ sau $y = 0$ care reprezintă ecuaţia planului Oxz,

13. pentru $b = c = d = 0$ obținem ecuaţia $ax = 0$ sau $x = 0$ care reprezintă ecuaţia planului Oyz.

Exemplul 2. Să se scrie ecuația planului, ce trece prin punctul $M(0, 1, 2)$ paralel planului Oxz.

Rezolvare. Prima metodă. Dacă vom utiliza observațiile de mai sus, ecuația planului are forma $by + d = 0$. Coordonatele punctului M verifică ecuația planului, adică $b \cdot 1 + d = 0$. De unde $d = -b$. Astfel obținem ecuația $by - b = 0, b \neq 0$, sau $y - 1 = 0$.

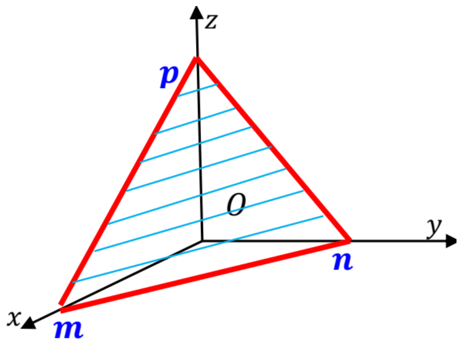
A doua metodă. Vectorul $\bar{j}$ este perpendicular planului Oxz, deci, este vector normal pentru planul căutat. Deoarece $\bar{j} = (0, 1, 0)$, utilizând formula (1.5.2), obținem ecuația $0(x - 0) + 1(y - 1) + 0(z - 2) = 0$, adică $y - 1 = 0$.

A treia metodă. Să determinăm vectorul normal $\bar{n} = (a, b, c)$ al planului. Deoarece planul este perpendicular axei Ox și axei Oz, vectorul $\bar{n}$ este perpendicular vectorilor $\bar{i}$ și $\bar{j}$. Deci $\bar{n} \cdot \bar{i} = 0$ și $\bar{n} \cdot \bar{k} = 0$, de unde $a = c = 0$. Astfel $\bar{n} = (0, b, 0), b \neq 0$. Obținem $0 \cdot (x - 0) + b \cdot (y - 1) + 0 \cdot (z - 2) = 0$, adică $y - 1 = 0$.

Dacă în ecuația (1.5.3) toți coeficienții sunt nenuli, ecuația se numește *completă*. Atunci ea poate fi scrisă sub forma: $\dfrac{x}{-d/a} + \dfrac{y}{-d/b} + \dfrac{z}{-d/c} = 1$, sau

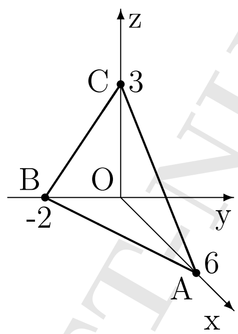
$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1. \tag{1.5.4}$$

numită *ecuaţia planului „în segmente”*. Numerele m, n și p reprezintă valorile segmentelor tăiate de plan pe axele Ox, Oy și Oz respectiv.



Exemplul 3. Să se determine volumul piramidei, formate de planul $x - 3y + 2z - 6 = 0$ şi planele de coordonate.

Rezolvare: Ecuaţia planului devine $\frac{x}{6} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{3} = 1$. Atunci $m = 6, n = -2$, $p = 3$ și planul intersectează axele de coordonate în punctele $A(6, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$ şi $C(0, 0, 3)$, iar $ABCO$ este piramida menționată.



Considerând triunghiul dreptunghic AOB bază a piramidei, se determină aria acestei baze: $A_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot |-2| = 6$. Înălţimea piramidei este $H = OC = 3$. Volumul piramidei, $V_{ABCO} = \frac{1}{3} \cdot A_{AOB} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 3 = 6(u.c.)$.

Notă. Volumul piramidei poate fi determinat utilizând și produsul mixt:

$$V_{ABCO} = \frac{1}{6}|(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})| = \frac{1}{6} mod \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 36 = 6.$$

Ecuaţia planului ce trece prin trei puncte necoliniare

Fie punctele necoliniare $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Există un singur plan ce trece prin aceste puncte. Să determinăm ecuația acestui plan.

Dacă $M(x, y, z)$ este un punct arbitrar al planului, atunci vectorii

$$\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1),$$
$$\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

sunt coplanari. Condiția de coplanaritate a acestor vectori este ca produsul lor mixt să fie egal cu zero, adică

$$(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0- \tag{1.5.5}$$

ecuația planului ce trece prin trei puncte.

Exemplul 4. Să se scrie ecuația planului, care trece prin punctul $M(1, 1, -2)$ și conține axa Ox.

Rezolvare. Prima metodă. Vom folosi ecuația incompletă a planului $by + cz = 0$. Coordonatele punctului M verifică ecuația planului, adică $b \cdot 1 + c \cdot (-2) = 0$. De unde $b = 2c$. Astfel obținem ecuația $2cy + cz = 0$ sau $2y + z = 0$.

A doua metodă. Deoarece planul conține axa Ox, el conține și oricare două puncte ce aparțin axei, inclusiv $O(0, 0, 0)$ și $A(1, 0, 0)$. Astfel, folosim formula (1.5.5):

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 1 - 0 & 0 - 0 & 0 - 0 \\ 1 - 0 & 1 - 0 & -2 - 0 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff 2y + z = 0.$$

Ecuația planului, ce trece printr-un punct dat și fiind dați doi vectori necoliniari paraleli planului

Se cere de scris ecuația unui plan ce trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$, paralel la doi vectori necoliniari $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar al planului. Atunci vectorii $\overline{M_0M}, \bar{a}$ și $\bar{b}$ sunt coplanari, iar produsul mixt al acestor vectori este nul: $(\overline{M_0M}, \bar{a}, \bar{b}) = 0$. De unde

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.5.6}$$

Exemplul 5. Să se scrie ecuația planului, care trece prin punctul $M(3,1,-2)$ paralel vectorilor $\bar{a}=(1,-1,2)$ si $\bar{b}=(2,0,-3)$.

Rezolvare. Prima metodă. Putem utiliza formula de mai sus:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z+2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \iff 3x+7y+2z-12=0.$$

A doua metodă. Să determinăm vectorul normal $\bar{n}=(a,b,c)$ al planului. Deoarece planul este paralel vectorlor $\bar{a}$ și $\bar{b}$, vectorul $\bar{n}$ este perpendicular vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$. Pe de altă parte vectorul $\bar{a}\times\bar{b}$ este perpendicar vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$, atunci putem lua

$$\bar{n}=\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3\bar{i}+7\bar{j}+2\bar{k}.$$

Obținem $3(x-3)+7(y-1)+2(z+2)=0 \iff 3x+7y+2z-12=0$.

Distanţa de la un punct la un plan.

Formula de calcul a distanţei d de la punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ la planul π de ecuaţie $ax+by+cz+d=0$ este similară cu cea a distanţei de la punct la dreaptă în plan:

$$d(M_0,\pi)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \tag{1.5.6}$$

și se demonstrează în mod analog.

Exemplul 6. Să se calculeze distanţa de la punctul $M_0(2,-1,3)$ la planul de ecuaţie $2x+3y-6z+3=0$.

Rezolvare. Aplicând (1.5.6), obținem

$$d=\frac{|2\cdot 2+3\cdot(-1)-6\cdot 3+3|}{\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}}=\frac{|4-3-18+3|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{|-14|}{\sqrt{49}}=\frac{14}{7}=2.$$

Exemplul 7. Punctele $V(1,-3,2)$, $A(2,1,0)$, $B(0,3,-2)$ şi $C(1,-1,1)$ sunt vârfuri ale unei piramide. Să se determine lungimea înălţimii, corespunzătoare feței ABC.

Rezolvare. Înălţimea piramidei este egală cu distanţa de la vârful V la planul bazei ABC. Vom scrie ecuaţia planului ABC, utilizând ecuaţia unui plan, ce trece prin trei puncte date:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ 0-2 & 3-1 & -2-0 \\ 1-2 & -1-1 & 1-0 \end{vmatrix} = 0 \iff \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$-x + 2y + 3z = 0.$$

Conform (1.56), se află înălţimea piramidei:

$$H = \frac{|-1 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}.$$

Notă. Problema poate fi rezovată şi altfel. Se calculează aria bazei A_{ABC}, aplicând produsul vectorial, şi volumul V piramidei, aplicând produsul mixt. Din formula $V = \dfrac{1}{3}A_b \cdot H$ deducem $H = \dfrac{3V}{A_b}$.

Unghiul dintre plane. Condiţiile de paralelism şi perpendicularitate.

Fie date planele $\pi_1 :\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ și $\pi_2 :\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$.

Dacă planele nu sunt paralele si nu coincid, atunci ele formează două perechi de unghiuri diedre, măsura unuia dintre ele fiind egală cu măsura unghiului format de vectorii normali $\bar{n}_1 = (a_1, b_1, c_1), \bar{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ai acestor plane. Atunci $\cos\angle(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \dfrac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$. Astfel, măsura unghiului ascuțit dintre planele π_1 şi π_2 se determină din relația

$$\cos\angle(\pi_1, \pi_2) = |\cos\angle(\bar{n}_1, \bar{n}_2)| = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \tag{1.5.7}$$

.

Exemplul 8. Să se determine măsura unghiului ascuţit φ dintre planele $2x - 3y + 6z - 4 = 0$ şi $3x + 4y - 12z + 5 = 0$.

Conform (1.5.7),

$$\cos\varphi = \frac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot 4 + 6 \cdot (-12)|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2}} = \frac{|-78|}{\sqrt{49}\sqrt{169}} = \frac{78}{7 \cdot 13} = \frac{6}{7}.$$

Prin urmare, $\varphi = \arccos\dfrac{6}{7}$ sau $\varphi \approx 31°$.

Condiţia de paralelism a planelor π_1 şi π_2 este echivalentă condiţiei de coliniaritate a vectorilor $\bar{n}_1$ şi $\bar{n}_2$, adică $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.

Condiţia de perpendicularitate a planelor π_1 şi π_2 este echivalentă condiţiei de ortogonalitate a vectorilor $\bar{n}_1$ şi $\bar{n}_2$, adică $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

Exerciții propuse pentru rezolvare

1. Să se scrie ecuaţia planului, ce trece prin punctul $M_0(-1,\ 3,\ 2)$, perpendicular vectorului $\bar{n} = (3,\ 6,\ -2)$.

R-s: $3x + 6y - 2z - 11 = 0$.

2. Punctul $P(2, -1, -1)$ servește drept picior al perpendicularei coborâte din originea sistemului de coordonate pe un plan. Să se scrie ecuația acestui plan.

R-s: $2x - y - z - 6 = 0$.

3. Să se scrie ecuaţia planului, ce trece prin punctul $A(3,\ 2,\ 0)$, perpendicular dreptei, ce trece prin punctele $M_1(1, 1, 0)$ şi $M_2(3, 2, 4)$.

R-s: $2x + y + 4z - 8 = 0$.

4. Să se determine ecuaţia planului, ce trece prin punctul $A_0(-2, 3, 2)$, paralel vectorilor $\bar{a} = (3, 1, 1)$ şi $\bar{b} = (-2,\ 1,\ 2)$.

R-s: $x - 8y + 5z + 16 = 0$.

5. Să se determine ecuaţia planului, ce trece prin trei puncte date: $M_1(0, 3, 5)$, $M_2(-2, 1, -1)$ şi $M_3(1, 1, 2)$.

R-s: $x + 2y - z - 1 = 0$.

6. Să se scrie ecuația planului ce trece prin punctul $M(3, -2, -7)$, paralel planului $2x - 3z + 5 = 0$.

R-s: $2x - 3z - 27 = 0$.

7. Să se scrie ecuația planului ce trece prin originea sistemului de coordonate, perpendicular planelor $2x - y + 3z - 1 = 0$ și $x + 2y + z = 0$.

R-s: $7x - y - 5z = 0$.

8. Să se scrie ecuația planului ce trece prin punctele $M_1(1, -1, -2)$ și $M_2(3, 1, 1)$, perpendicular planului $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

R-s: $4x - y - 2z - 9 = 0$.

9. Să se cerceteze, dacă planele $x - 2y + z - 7 = 0$, $2x + y - z + 2 = 0$ și $x - 3y + 2z - 11 = 0$ au puncte comune.

R-s: Punctul comun este $(1, -2, 2)$.

10. Să se calculezee volumul piramidei, mărginite de planul $2x - 3y + 4z - 12 = 0$ şi planele de coordonate.

R-s: 12.

11. Să se determine volumul cubului, două feţe ale căruia se află în planele $x - 2y + 2z + 7 = 0$ şi $x - 2y + 2z - 5 = 0$.

R-s: 64.

12. Să se scrie ecuația planului, care trece prin:

a) punctul $M_1(2, -3, 3)$, paralel planului Oxy;
b) punctul $M_2(1, -2, 4)$, paralel planului Oxz;
c) axa Ox și punctul $M_3(4, -1, 2)$;
d) axa Oy și punctul $M_4(1, 4, -3)$.
R-s: a) $z - 3 = 0$, b) $y + 2 = 0$, c) $2y + z = 0$, d) $3x + z = 0$.

13. Pe axa Oy să se afle punctele, situate la o distanţă egală cu 4 de la planul $2x - y + 2z + 3 = 0$.
R-s: $(0, -9, 0)$ şi $(0, 15, 0)$.

14. Să se scrie ecuația planului, care trece:
a) prin punctele $M_1(7, 2, -3)$ și $M_2(5, 6, -4)$, paralel axei Ox;
b) prin punctele $P_1(2, -1, 1)$ și $P_2(3, 1, 2)$, paralel axei Oy.
R-s: a) $y + 4z + 10 = 0$, b) $x - z - 1 = 0$.

15. Să se afle măsura în grade a unghiului ascuţit dintre planele:
a) $x - 2y + 2z + 1 = 0$ şi $2x + y + z - 3 = 0$;
b) $2x + 2y + z - 2 = 0$ şi $12x - 15y + 16z + 4 = 0$.
c) $3x - 4y + 5z + 2 = 0$ şi $2x + y - 2z + 5 = 0$;
d) $3x + 4z - 2 = 0$ şi $7x + z + 1 = 0$.
R-s: a) $\approx 74°12'$; b) $\approx 82°20'$; c) $\approx 67°51'$; d) $45°$.

16. Să se determine, care dintre perechile de plane sunt paralele şi care sunt perpendiculare:
a) $2x - y + 3z - 3 = 0$ şi $4x - 2y + 6z + 1 = 0$;
b) $x - 2y + 3z + 5 = 0$ şi $2x - 4y + 6z + 10 = 0$;
c) $6x + 3y - 2z + 1 = 0$ şi $x + 2y + 6z - 1 = 0$;
d) $3x + 4z - 2 = 0$ şi $7x + z + 1 = 0$.
R-s: a) paralele; b) coincid; c) perpendiculare.

17. Determinați valorile lui α, $\beta \in \mathbb{R}$, pentru care planele $\alpha x + 3y - 2z + 2 = 0$ şi $2x - 5y - \beta z = 0$ sunt paralele.
R-s: $\alpha = -1,2$; $\beta = -\frac{10}{3}$.

18. Determinați valorile lui $m \in \mathbb{R}$, pentru care planele $(m - 4)x + my - z + 3 = 0$ şi $mx - y + 6z - 2 = 0$ sunt reciproc perpendiculare.
R-s: $m \in \{-1, 6\}$.

§ 6. Dreapta în spațiu

O dreaptă în spațiu este binedeterminată când sunt date:

– *un punct ce aparține dreptei și direcția dreptei (un vector paralel dreptei);*

– *două puncte distincte ce aparțin dreptei.*

Ecuația dreptei, ce trece printr-un punct cu direcție dată (paralel unui vector)

Există o singură dreaptă, ce trece printr-un punct dat $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și paralelă unui vector nenul $\bar{q} = (m, n, p)$.

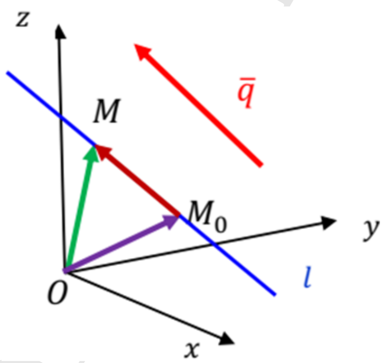
Vectorul $\bar{q}$ este numit *vector director* al dreptei.

Să determinăm ecuația acestei drepte. Se procedează în mod similar cazului dreptei în plan.

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct arbitrar al dreptei date, atunci vectorii $\bar{q}$ şi $\overline{M_0M}$ sunt coliniari. Fie $\bar{r}_0$ vectorul de poziție a punctului M_0 ($\bar{r}_0 = \overline{OM_0}$), iar $\bar{r}$ - vectorul de poziție a punctului M ($\bar{r} = \overline{OM}$). Atunci $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$. Obținem

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{q} \quad sau \quad \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{q},\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.6.1}$$

numită *ecuație vectorială a dreptei determinată de punct și vector director*. Fiecare valoare a parametrului t determină un punct de pe dreaptă.



Deoarece $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, din (1.6.1) obținem

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \quad t \in \mathbb{R} \quad - \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \tag{1.6.2}$$

ecuații parametrice ale dreptei.

Exemplul 1. Să se scrie ecuația vectorială și ecuațiile parametrice ale dreptei ce trece prin punctul $A(-1, 2, 3)$, paralel vectorului nenul $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$. Să se determine două puncte care aparțin dreptei, diferite de punctul A.

Rezolvare. Vectorul de poziție a punctului A este $\bar{r}_0 = -1 \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k}$. Atunci ecuația vectorială a dreptei este $\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{q} = -1 \cdot \bar{i} + 2 \cdot \bar{j} + 3 \cdot \bar{k} + t(\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k})$ sau $\bar{r} = (-1+t)\bar{i} + (2+t)\bar{j} + (3-2t)\bar{k}, \quad t \in \mathbb{R}$.

Ecuațiile parametrice ale dreptei sunt

$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3 - 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pentru diverse valori ale parametrului t obținem diverse puncte care aparțin dreptei. De exemplu, pentru $t = 1$ obținem punctul cu coordonatele $(0, 3, 1)$, iar pentru $t = -2$ obținem punctul cu coordonatele $(-3, 0, 7)$.

Excluzând parametrul t din sistemul (1.6.2), obținem

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{n}, \tag{1.6.3}$$

numită *ecuaţii canonice* ale dreptei.

Exemplul 2. Să se determine punctul de intersecţie al dreptei $\frac{x+3}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{3}$ cu planul $2x - y + 3z - 5 = 0$.

Rezolvare. Ecuațiile parametrice ale dreptei sunt: $\begin{cases} x = -3 + 3t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = -1 + 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

Rezolvând sistemul $\begin{cases} x = -3 + 3t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = -1 + 3t, \\ 2x - y + 3z - 5 = 0, \end{cases}$ obținem $\begin{cases} t = 1, \\ x = 0, \\ y = 1, \\ z = 2. \end{cases}$

Astfel, $(0, 1, 2)$ este punctul de intersecţie al dreptei cu planul, date în enunţ.

Ecuația dreptei ce trece prin două puncte date.

Fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$ puncte distincte. Ecuaţia ce trece prin punctele M_1 şi M_2 rezultă din (1.6.3), având drept vector director vectorul $\bar{q} = \overline{M_1M_2}$, adică

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} - \tag{1.6.4}$$

- *ecuaţia dreptei ce trece prin două puncte.*

Exemplul 3. Punctele $A(2, 1, 3)$, $B(0, -3, 5)$ şi $C(-1, 2, 3)$ sunt vârfuri ale unui triunghi. Să se scrie ecuaţiile canonice ale dreptei suport a medianei triunghiului, corespunzătoare laturii AB.

Rezolvare. Fie C_1 mijlocul segmentului AB. Să determinăm ecuația dreptei suport a segmentului CC_1.

Aflăm coordonatele punctului C_1: $x = \frac{2+0}{2} = 1, y = \frac{1-3}{2} = -1, z = \frac{3+5}{2} = 4$. Astfel, $C_1(1, -1, 4)$. Utilizăm (1.6.4) pentru a scrie ecuațiile dreptei suport a medianei CC_1:

$$\frac{x+1}{1+1} = \frac{y-2}{-1-2} = \frac{z-3}{4-3}, \quad \text{adică} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1}.$$

Exemplul 4. Să se arate că dreptele

$$l_1: \quad \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2} \quad \text{și} \quad l_2: \quad \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$$

sunt necoplanare (nu sunt paralele și nu se intersectează).

Rezolvare. *Prima metodă.* Vectorii directori $\bar{q}_1 = (1, -1, 2)$ și $\bar{q}_2 = (-2, 3, 1)$ ai dreptelor date nu sunt coliniari (coordonatele lor nu sunt direct proporționale). Astfel dreptele nu sunt paralele.

Să arătăm că dreptele l_1 și l_2 nu au puncte comune. Scriem ecuațiile parametrice ale dreptelor:

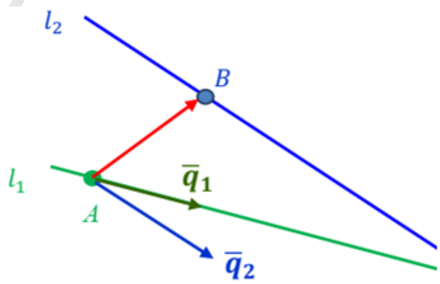
$$\begin{cases} x = t, \\ y = 2 - t, \\ z = -3 + 2t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = -1 - 2s, \\ y = 3s, \\ z = 3 + s, \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Coordonatele punctului comun al dreptelor l_1 și l_2 rezultă din sistemul

$$\begin{cases} t = -1 - 2s, \\ 2 - t = 3s, \\ -3 + 2t = 3 + s. \end{cases}$$

Din primele două ecuații obținem $\begin{cases} s = 3, \\ t = -7, \end{cases}$ care nu verifică a treia relație a sistemului. Astfel, dreptele l_1 și l_2 nu se intersectează.

A doua metodă. Punctele $A(0, 2, -3)$ și $B(-1, 0, 3)$ aparțin dreptelor l_1 și l_2, respectiv. Cercetăm coplanaritatea vectorilor $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$ și $\overline{AB}$, utilizând produsul mixt al acestor vectori.



Determinăm coordonatele vectorului $\overline{AB} = (-1, -2, 6)$.

Produsul mixt $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \overline{AB}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 23 \neq 0$, deci vectorii $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$ și $\overline{AB}$ sunt necoplanari. Prin urmare, dreptele l_1 și l_2 sunt necoplanare.

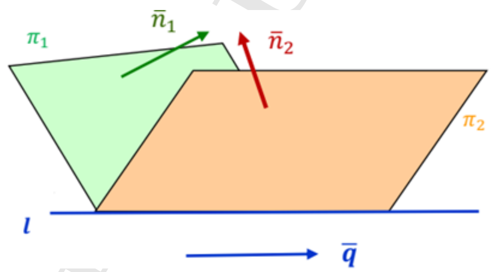
Ecuația dreptei ca intersecție a două plane.

Intersecţia a două plane neparalele π_1 şi π_2 reprezintă o dreaptă în spaţiu. Sistemul

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \tag{1.6.5}$$

este numit *ecuaţie generală a dreptei.*

Dreapta cu ecuație generală dată nu este „comodă” pentru „lucru”. Mai comode sunt ecuaţiile canonice (1.6.3). Pentru a scrie ecuațiile canonice ale dreptei, trebuie să determinăm un vector director și un punct al dreptei. În calitate de vector director al dreptei (1.6.5) putem considera vectorul $\bar{q} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$.



Într-adevăr, vectorii $\bar{n}_1$ şi $\bar{n}_2$ sunt perpendiculari dreptei. De unde rezultă că vectorul $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ este paralel dreptei date. Un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$, ce aparţine dreptei, este o careva soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului (1.6.5).

Unghiul dintre două drepte.

Analog, cazului dreptei în plan cu ecuaţia canonică, putem determina unghiul dintre drepte în spaţiu.

Fie date dreptele

$$l_1 : \ \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad \text{și} \quad l_2 : \ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Unghiul dintre drepte este determinat de unghiul dintre vectorii directori respectivi.

Deoarece $\bar{q}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\bar{q}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ și $\cos\angle(\bar{q}_1, \bar{q}_2) = \frac{\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2}{|\bar{q}_1| \cdot |\bar{q}_2|}$, atunci $\cos\angle(l_1, l_2) = |\cos\angle(\bar{q}_1, \bar{q}_2)|$ și

$$\cos\angle(l_1, l_2) = \frac{|\bar{q}_1 \cdot \bar{q}_2|}{|\bar{q}_1| \cdot |\bar{q}_2|} = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \qquad (1.6.6)$$

Exemplul 5. Punctele $A(2, 3, -1)$, $B(-3, 5, 0)$, $C(1, 3, 2)$ şi $D(3, -2, 4)$ sunt vârfuri ale piramidei $ABCD$. Să se determine măsura unghiului ascuţit dintre dreptele suport ale muchiilor AB şi CD.

Rezolvare. Dreptele suport ale muchiilor AB şi CD sunt necoplanare. Determinăm vectorii directori ale lor: $\bar{q}_1 = \overline{AB} = (-5, 2, 1)$ şi $\bar{q}_2 = \overline{CD} = (2, -5, 2)$. Conform (1.6.6)

$$\cos\angle(\overline{AB}, \overline{CD}) = \frac{|-5 \cdot 2 + 2 \cdot (-5) + 1 \cdot 2|}{\sqrt{(-5)^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 2^2}} = \frac{|-18|}{\sqrt{990}} = \frac{6}{\sqrt{110}}.$$

Astfel, $m\angle(\overline{AB}, \overline{CD}) = \arccos\frac{3\sqrt{110}}{55}$. Măsura în grade a acestui unghi este $\approx 55°6'$.

Dreptele l_1 şi l_2 sunt *perpendiculare* în cazul când vectorii $\bar{q}_1$ și $\bar{q}_2$ sunt ortogonali, adică $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

Dreptele l_1 şi l_2 sunt *paralele* dacă vectorii $\bar{q}_1$ și $\bar{q}_2$ sunt coliniari, adică

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

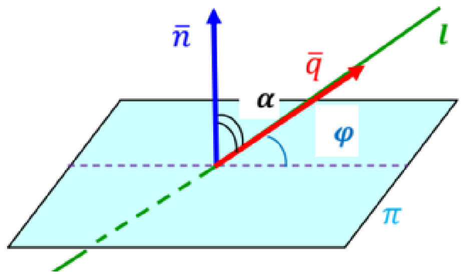
Exemplul 6. Să se demonstreze perpendicularitatea dreptelor:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3} \quad \text{și} \quad \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Prima dreaptă are drept vector director vectorul $\bar{q}_1 = (1, -2, 3)$, iar a doua dreaptă are ca vector director vectorul $\bar{q} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 7\bar{i} + 14\bar{j} + 7\bar{k}$, sau $\bar{q} = (7, 14, 7)$. Produsul scalar al vectorilor $\bar{q}_1$ și $\bar{q}_2$ este egal cu $1 \cdot 7 - 2 \cdot 14 + 3 \cdot 7 = 0$, deci dreptele date sunt perpendiculare.

Unghiul dintre dreaptă şi plan

Fie planul $\pi : ax + by + cz + d = 0$ și dreapta $l : \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$. Unghiul ascuțit φ dintre dreapta l şi planul π este unghiul dintre dreaptă și proiecția ei pe acest plan. Fie α unghiul dintre vectorul director $\bar{q} = (m, n, p)$ al dreptei şi vectorul normal $\bar{n} = (a, b, c)$ al planului. Unghiurile φ și α verifică una dintre relațiile: $\varphi + \alpha = \frac{\pi}{2}$ sau $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}$.



Astfel,

$$\sin\varphi = |\cos\alpha| = \frac{|\bar{q}\cdot\bar{n}|}{|\bar{q}|\cdot|\bar{n}|} = \frac{|ma+nb+pc|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\,. \tag{1.6.7}$$

Exemplul 7. Punctele $V(3,-2,4)$, $A(2,3,-1)$, $B(-3,5,0)$, $C(1,3,2)$ sunt vârfuri ale piramidei. Să se determine măsura unghiului ascuţit dintre dreapta suport a muchiei laterale VA şi planul bazei ABC.

Rezolvare. Vectorul director al dreptei AV este $\bar{q} = \overline{AV} = (1,-5,5)$. Un vector, perpendicular bazei, este $\bar{n} = \overline{CA}\times\overline{CB}$. Determinăm coordonatele vectorilor factori: $\overline{CA} = (1,0,-3)$, $\overline{CB} = (-4,2,-2)$. Deci,

$$\bar{n} = \overline{CA}\times\overline{CB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 6\bar{i} + 14\bar{j} + 2\bar{k} \text{ sau } \bar{n} = (6,14,2).$$

Unghiul ascuţit φ cerut se determină conform (1.6.7),

$$\sin\varphi = \frac{|1\cdot 6 + (-5)\cdot 14 + 5\cdot 2|}{\sqrt{1^2+(-5)^2+5^2}\cdot\sqrt{6^2+14^2+2^2}} = \frac{|-54|}{\sqrt{51}\cdot\sqrt{236}} = \frac{9\sqrt{3009}}{1003}\,.$$

Astfel, $\varphi = \arcsin\frac{9\sqrt{3009}}{1003}$ sau $\varphi \approx 29°30'$.

Notă:

1. Dreapta l este **perpendiculară** planului π, dacă şi numai dacă

$$\bar{q}\parallel\ \bar{n} \iff \frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{p}{c}$$

.

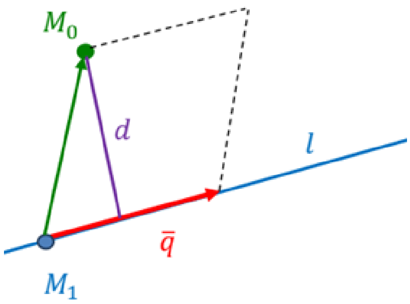
2. Dreapta l este **paralelă** planului π, dacă şi numai dacă $\bar{q}\perp\ \bar{n}\ \Leftrightarrow$ $ma+nb+pc = 0$.

În particular, dreapta se include în plan dacă $aA+bB+cC = 0$ și un punct arbitrar al dreptei, de exemplu $M_0(x_0,y_0,z_0)$ din ecuația canonică, trebuie să aparțină planului (coordonatele lui trebuie să verifice ecuația planului).

Distanţa de la punct la dreaptă în spațiu

Fie dată dreapta $l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ și punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Distanţa d de la M_0 la dreapta l este egală cu lungimea înălțimii paralelogramului construit pe vectorii $\bar{q} = (m, n, p)$ și $\overline{M_0M_1}$, unde $M_1(x_1, y_1, z_1)$ este un punct al dreptei l.



Astfel,

$$d(M_0, l) = \frac{A_{paralel.}}{|\bar{q}|} = \frac{|\bar{q} \times \overline{M_0M_1}|}{|\bar{q}|}.$$

Exemplul 8. Să se determine distanța de la punctul $A(0, -1, 2)$ la dreapta $l: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-4}{1}$.

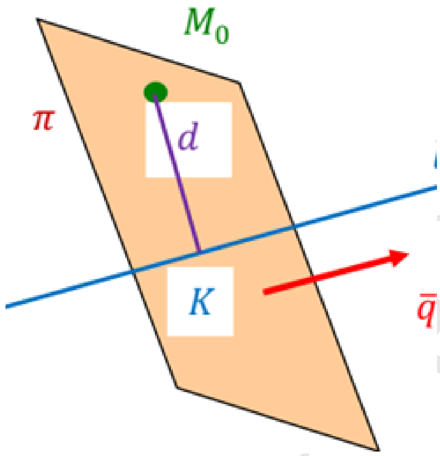
Rezolvare. Prima metodă. Utilizăm formula de mai sus. Avem $\bar{q} = (0, 2, 1)$ și $M_1(1, -3, 4)$, iar $M_0 = A$. Determinăm coordonatele vectorului $\overline{AM_1} = (1, -2, 2)$. Atunci

$$\bar{q} \times \overline{AM_1} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}, \quad |\bar{q} \times \overline{AM_1}| = \sqrt{36+1+4} = \sqrt{41},$$

$$\bar{q} = \sqrt{0+4+1} = \sqrt{5}.$$

De unde $d(M_0, l) = \dfrac{\sqrt{41}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{205}}{5}$.

A doua metodă. Vom determina proiecția punctului A pe dreapta l. Vom nota acest punct cu K. Fie π planul ce trece prin A perpendicular pe dreapta l. Vectorul director al dreptei servește drept vector normal al planului π, deci $\bar{n} = (0, 2, 1)$.



Atunci ecuația planului π este $0(x-0)+2(y+1)+1(z-2)=0$ sau $2y+z=0$. Scriem ecuațiile parametrice ale dreptei $l: \begin{cases} x=1, \\ y-3+2t, \quad t\in\mathbb{R}. \\ z=4+t, \end{cases}$

Determinam coordonatele punctului K din sistemul

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-3+2t, \\ z=4+t, \\ 2y+z=0, \end{cases} \iff \begin{cases} x=1, \\ y=-3+2t, \\ z=4+t, \\ -6+4t+4+t=0, \end{cases} \iff \begin{cases} x=1, \\ y=-\frac{11}{5}, \\ z=\frac{22}{5}, \\ t=\frac{2}{5}, \end{cases}$$

adică $K(1,-\frac{11}{5},\frac{22}{5})$.

Distanța de la punctul A la dreapta l este egală cu lungimea segmentului AK, iar

$$AK=\sqrt{(1-0)^2+\left(-\frac{11}{5}+1\right)^2+\left(\frac{22}{5}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{205}{25}}=\frac{\sqrt{205}}{5}.$$

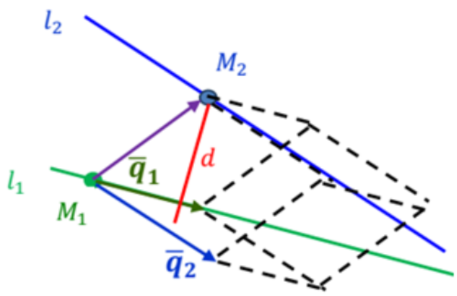
Distanţa minimă dintre două drepte necoplanare.

Fie dreptele necoplanare:

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{și} \quad l_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.$$

Distanță minimă dintre două drepte se numește lungimea segmentului de perpendiculară comună cu extremitățile situate pe aceste drepte. Vectorii directori ai dreptelor sunt $\bar{q}_1=(m_1,n_1,p_1)$, $\bar{q}_2=(m_2,n_2,p_2)$ și punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ aparţin dreptelor l_1 şi l_2, respectiv.

Pe vectorii $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$ şi $\overline{M_1M_2}$ construim un paralelipiped. Distanţa minimă dintre dreptele l_1 şi l_2 este egală cu distanța dintre planele feţelor paralele ale paralelipipedului, care conţin dreptele l_1 şi l_2, adică este egală cu înălțimea respectivă a acestui paralelipiped.



Astfel, $d(l_1, l_2) = \dfrac{V_{paralel.}}{A_{bazei}}$. Volumul paralelipipedului se calculează cu ajutorul produsului mixt: $V_{paralel.} = |(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \overline{M_1M_2})|$, iar aria bazei - cu ajutorul produsului vectorial: $A_{bazei} = |\bar{q}_1 \times \bar{q}_2|$. Atunci distanţa minimă dintre drepte este

$$d(l_1, l_2) = \frac{|(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \overline{M_1M_2})|}{|\bar{q}_1 \times \bar{q}_2|}.$$

Exemplul 9. În exemplul de mai sus am arătat că dreptele

$$l_1 : \quad \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+3}{2} \quad \text{și} \quad l_2 : \quad \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{1}$$

sunt necoplanare. Să se determine distanța dintre ele.

Rezolvare. Vectorii directori ai dreptelor sunt $\bar{q}_1 = (1, -1, 2)$, $\bar{q}_2 = (-2, 3, 1)$, iar punctele $M_1(0, 2, -3)$ şi $M_2(-1, 0, 3)$ aparţin dreptelor l_1 şi l_2, respectiv.

Determinăm: $\overline{M_1M_2} = (-1, -2, 6)$, $(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \overline{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} =$ 23, $\bar{q}_1 \times \bar{q}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7\bar{i} - 5\bar{j} + \bar{k}$, $|\bar{q}_1 \times \bar{q}_2| = \sqrt{49 + 25 + 1} = 5\sqrt{3}$.

Atunci distanța dintre aceste două drepte este $d(l_1, l_2) = \dfrac{23}{5\sqrt{3}}$.

Exerciții propuse pentru rezolvare

1. Să se scrie ecuațiile canonice și parametrice ale dreptei, care trece prin punctul $M(2, 0, -3)$, paralel:

a) vectorului $\bar{a} = (2, -3, 5)$,

b) dreptei $l : \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$,

c) axei Ox,

d) axei Oy,

e) axei Oz,

f) dreptei $x = 3t - 1; y = -2t + 3; z = 5t + 2, t \in \mathbb{R}$.

R-s: a) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z+3}{5}$,

b) $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$,

c) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{0}$,

d) $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+3}{0}$,

e) $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+3}{1}$,

f) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+3}{5}$.

2. Prin punctele $M_1(-6, 6, -5)$ și $M_2(12, -6, 1)$ este dusă o dreaptă. Să se găsească punctele de intersecție ale dreptei cu planele de coordonate.

R-s: $(9, -4, 0), (3, 0, -2), (0, 2, -3)$.

3. Să se scrie ecuațiile canonice ale dreptei, ce trece prin punctul $M(2, 3, -5)$, paralel dreptei $\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

R-s: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z+5}{-5}$.

4. Fie dreapta $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$ Să se scrie ecuaţiile ei canonice.

R-s: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$.

5. Să se alcătuiască ecuaţiile canonice ale dreptei, ce trece prin punctul $Q(2,\ 3, -5)$, paralel dreptei

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0, \\ x + 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

R-s: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-3}{-4} = \dfrac{z+5}{-5}$.

6. Să se demonsteze paralelismul dreptelor: $l_1 : \dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$ și $l_2 : \begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z + 8 = 0. \end{cases}$

7. Să se demonsteze perpendicularitatea dreptelor:

a) $l_1 : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{3}$ și $l_2 : \begin{cases} 3x + y - 5z + 1 = 0, \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0. \end{cases}$

b) $l_1 : \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -6t + 1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$ și $l_2 : \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0. \end{cases}$

8. Să se determine măsura unghiului ascuțit dintre dreptele:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}} \text{ și } \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

R-s: $60°$.

9. Să se scrie ecuația dreptei, ce trece prin punctul $M(-1, 2, -3)$ perpendicular vectorului $\bar{a} = (6, -2, -3)$ și intersectează dreapta de ecuații $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-5}$.

R-s: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{6}$.

10. Să se demonstreze, că dreapta de ecuație $\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -4t + 1, \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = 4t - 5, \end{cases}$ este paralelă planului de ecuație $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

11. Să se demonstreze, că dreapta $l : \begin{cases} 5x - 4y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0, \end{cases}$ se conține în planul de ecuație $4x - 3y + 7z - 7 = 0$.

12. Să se determine punctul de intersecție a dreptei de ecuații

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$$

și a planului de ecuațe $2x + 3y + z - 1 = 0$.

R-s: $(2, -3, 6)$.

13. Să se scrie ecuația planului, ce trece prin punctul $M_0(1, -2, 1)$, perpendicular dreptei $l : \begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0, \\ x + y - z + 2 = 0. \end{cases}$

R-s: $x + 2y + 3z = 0$.

14. Să se afle proiecţia punctului $P(5,\ 2, -1)$ pe planul de ecuație $2x - y + 3z + 23 = 0$.

R-s: $(1,\ 4, -7)$.

15. Să se afle proiecţia punctului $P(2, -1, 3)$ pe dreapta

$$\frac{x}{3} = \frac{y+7}{5} = \frac{z-2}{2}$$

R-s: $(3, -2, 4)$.

16. Să se determine punctul P', simetric punctului $P(1, 3, -4)$ în raport cu planul de ecuație $3x + y - 2z = 0$.

R-s: $P'(-5, 1, 0)$.

17. Să se determine punctul P', simetric punctului $P(2, -5, 7)$ în raport cu dreapta de ecuații $x=t+5,\ y=3t+4,\ z=2t+6$.

R-s: $(4, 1, -3)$.

18. Să se determine proiecția punctului $P(2, -1, 3)$ pe dreapta de ecuații $\begin{cases} x = 3t, \\ y = 5t-7, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 2t+2, \end{cases}$

R-s: $(3, -2, 4)$.

19. Să se găsească simetricul punctului $P(4, 1, 6)$ față de dreapta de ecuații $\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

R-s: $(2, -3, 2)$.

20. Fie dreptele de ecuații

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \quad \text{şi} \quad \frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}.$$

Determinați valorile reale ale lui l pentru care dreptele se intersectează.

R-s: $l = 3$.

21. Pe planul Oxy, să se determine un punct P, astfel încât suma distanțelor de la el la punctele $A(-1, 2, 5)$ și $B(11, -16, 10)$ este minimă.

R-s: $P(3, , -4, 0)$.

22. Pe planul Oxz, să se determine un punct P, astfel încât diferența distanțelor de la el până la punctele $A(3, 2, -5)$ și $B(8, -4, -13)$ este maximă.

R-s: $P(-2, 0, 3)$.

23. Să se găsească distanța de la punctul $P(1, -1, -2)$ la dreapta de ecuații $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

R-s: 7.

24. Să se scrie ecuația planului, ce trece prin punctul $M(1, 2, -3)$, paralel dreptelor de ecuații

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-7}{3} \quad \text{şi} \quad l_2 : \frac{x+5}{3} =] \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{-1}\,.$$

R-s: $9x + 11y + 5z - 16 = 0$.

25. Să se scrie ecuația planului, ce conține dreapta de ecuații

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2},$$

perpendicular planului de ecuație $3x + 2y - z - 5 = 0$.
R-s: $x - 8y - 13z + 9 - 0$.

26. Să se calculeze distanța minimă dintre dreptele de ecuații

$$l_1 : \frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2} \text{ și } l_2 : \begin{cases} x = 6t + 9, \\ y = -2t, \\ z = -t + 2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

R-s: 7.

§7. Conice

O conică este o curbă, care se obţine la intersecţia unei suprafeţe conice circular drepte cu un plan. În cazul când această curbă este închisă, linia de intersecţie este o elipsă. În partilular, dacă planul este perpendicular axei conului, linia de intersecție este un cerc. În cazul când linia de intersecţie nu este o curbă închisă, vom obţine: o hiperbolă, dacă planul nu este paralel cu o careva generatoare a conului, sau o parabolă, dacă planul este paralel cu o generatoare a conului. Vom studia acestor patru linii şi vom deduce ecuaţiile lor. Considerăm în plan un sistem rectangular de coordonate Oxy.

1. Cercul.

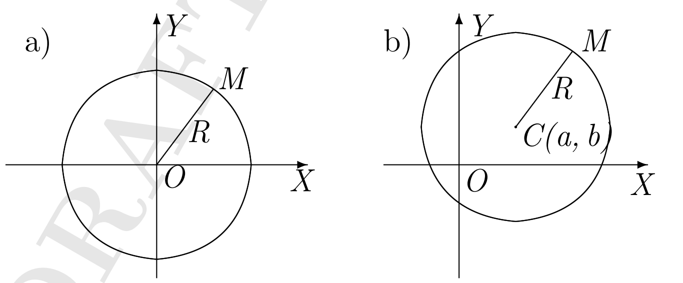
Definiţie. Se numeşte *cerc* locul geometric de puncte, egal depărtate de un punct fix, numit *centru.*

Cercul este determinat, dacă se cunosc centrul şi raza lui.

Vom examina întâi cazul când centrul cercului de rază R coincide cu originea sistemului de coordonate. Fie $M(x,\, y)$ un punct arbitrar ce aparține cercului. Atunci $|OM| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$. Obţinem

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{7.1}$$

numită *ecuaţie canonică* a cercului. Un punct aparține cercului dacă şi numai dacă coordonatele lui verifică ecuaţia (7. 1).



Fie punctul $C(a,\, b)$ centrul cercului de rază R. Dacă $M(x,\, y)$ este un punct arbitrar ce aparține cercului, atunci $R = |CM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Obţinem

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{7.2}$$

Ecuaţia (7.2) reprezintă *ecuaţia generală* a cercului. Pentru $a = b = 0$ se obţine ecuaţia canonică (7.1).

Exemplu. Să se determine lungimea liniei date de ecuaţia $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$.

Transformăm ecuaţia, separând pătratul perfect: $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 20$; $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 20 + 4 + 1$; $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$, adică

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2.$$

Ecuaţia reprezintă un cerc cu centrul $C(2, -1)$ şi raza $R = 5$. Lungimea cercului este $L = 2\pi R$ sau $L = 10\pi$

Remarcă. Cercul cu ecuaţia canonică (7.1) mai admite şi *ecuaţiile parametrice*

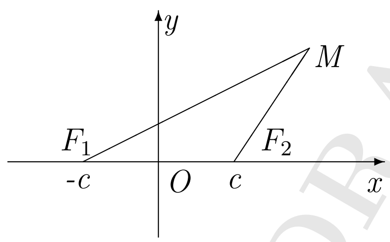
$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases} \tag{7.3}$$

Când parametrul real t parcurge valorile de la 0 la 2π, punctul cu coordonatele x şi y, calculate conform formulelor (3), parcurge tot cercul în sens pozitiv, începând cu punctul $A(R, 0)$.

2^0. Elipsa: definiţia, deducrea ecuaţiei canonice

Definiţie. Se numeşte *elipsă* locul geometric de puncte, suma distanţelor cărora până la două puncte fixe, numite *focare*, este o mărime constantă, mai mare ca distanţa dintre focare.

Notăm cu F_1 şi F_2 focarele. Fie $2c$ distanţa dintre focare, iar $2a$ suma distanţelor de la oricare punct al elipsei până la focare. Conform condiţiei, $2a > 2c$, adică $a > c$. De remarcat, că în definiţie nici nu figurează sistemul de coordonate. Introducem un asemenea sistem astfel, ca ecuaţia definitivă a elipsei să aibă o formă cât mai simplă.



În calitate de axa Ox se ia dreapta, ce trece prin focare. Axa OY va fi mediatoarea segmentului F_1F_2. Cum $|F_1F_2| = 2c$, rezultă $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Fie $M(x, y)$ - un punct arbitrar pe elipsă.

Conform definiţiei, $|F_1M| + |F_2M| = 2a$. Dar

$$|F_1M| = \sqrt{(x-(-c))^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

$$|F_2M| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Astfel se obţine $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$. Vom aduce-o la o formă mai simplă.

Avem consecutiv:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \implies$$
$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2 \implies$$
$$x^2+2xc+c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 \implies$$
$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4xc \implies$$
$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - xc \implies$$
$$a^2[(x-c)^2+y^2] = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \implies$$
$$a^2(x^2-2xc+c^2+y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \implies$$
$$a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \implies$$
$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2).$$

Cum $a > c > 0$, rezultă $a^2 - c^2 > 0$. Acest lucru ne permite să efectuăm o substituţie:

$$a^2 - c^2 = b^2,$$

unde $b > 0$. În continuare avem: $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$. Împărţind ambii membri ai acestei egalităţi la a^2b^2, avem definitiv:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7.4}$$

Astfel, dacă un punct se află pe elipsă, coordonatele lui satisfac ecuaţia (7.4). Este adevărată şi afirmaţia inversă: dacă numerele x şi y satisfac ecuaţia (7.4), atunci punctul $M(x,\, y)$ se află pe elipsă.

Ecuaţia (7.4) se numeşte *ecuaţia canonică* a elipsei. Numărul a se numeşte *semiaxa mare* a elipsei, iar numărul b se numeşte *semiaxa mică* a ei.

Exemplu. Să se determine ce linie reprezintă ecuaţia $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$. Transformând ecuaţia, obţinem: $4x^2 + 9y^2 = 36$; $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Ecuaţia reprezintă o elipsă cu semiaxele $a = 3$ şi $b = 2$.

3^0. Proprietăţile elipsei, reprezentarea grafică. Vom stabili unele proprietăţi ale elipsei, reieşind din ecuaţia ei canonică (7.4).

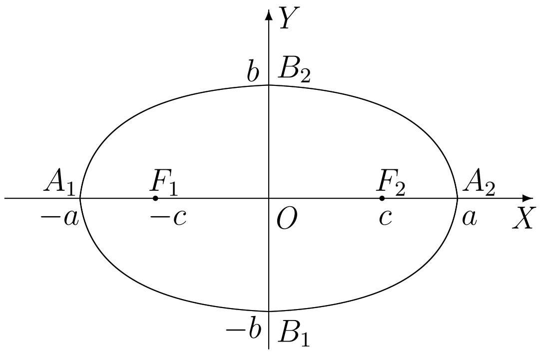
1. Dacă punctul $M(x,\, y)$ aparţine elipsei, atunci și punctele $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$ şi $M_3(-x, -y)$ aparţin elipsei. Punctele M şi M_1 sunt simetrice în raport cu axa OY; punctele M şi M_2 sunt simetrice în raport cu axa OX; punctele M şi M_3 sunt simetrice în raport cu originea de coordonate. Astfel, elipsa are *două axe de simetrie* (axele OX şi OY) şi *un centru de simetrie* (originea de coordonate O).

2. Din (7.4) obținem $\dfrac{x^2}{a^2} = 1 - \dfrac{y^2}{b^2}$, adică $\dfrac{x^2}{a^2} \leqslant 1$. De aici $x^2 \leqslant a^2 \iff x \in [-a, a]$. Analog se stabileşte că $y \in [-b, b]$. Prin urmare, elipsa se conține într-un dreptunghi cu laturile $2a$, $2b$ şi cu centrul în origine.

3. Punctele de intersecţie ale elipsei cu axa OX sunt $A_1(-a, 0)$ şi $A_2(a, 0)$, iar cu axa OY - $B_1(0, -b)$ şi $B_2(0, b)$.

Punctele A_1, A_2, B_1, B_2 se numesc *vârfuri* ale elipsei.

4. Segmentul A_1A_2 se numeşte *axa mare* a elipsei, iar B_1B_2 – *axa mică*. Numerele a şi b se mai numesc *semiaxele* elipsei.



5. Numărul $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ se numeşte *excentricitatea* elipsei. Cum $c < a$, rezultă $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Acest număr reprezintă gradul de comprimare a elipsei spre axa OX. Pentru cerc $\varepsilon = 0$.

6. Elipsa cu ecuaţia canonică (7.1) are *ecuaţiile parametrice*

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases} \tag{$*$}$$

Când parametrul t parcurge valorile segmentului $[0, 2\pi]$, punctul M cu coordonatele x, y, calculate conform $(*)$, parcurge toată elipsa.

7. Linii în formă de elipsă se întâlnesc adeseori. Invocăm doar un exemplu. Traiectoria mişcării Pământului în jurul Soarelui este o elipsă. Într-un focar al ei se află Soarele. În celălalt focar nu se află vre-un astru ceresc. Această traiectorie este apropiată de cerc; excentricitatea ei, $\varepsilon \approx 0,0167$.

4^0. Ecuaţia tangentei la elipsă. Ca şi în cazul cercului, tangenta la elipsă este dreapta, ce are cu elipsa un singur punct comun. Dacă punctul $M_0(x_0, y_0)$ se află pe elipsa de ecuaţie

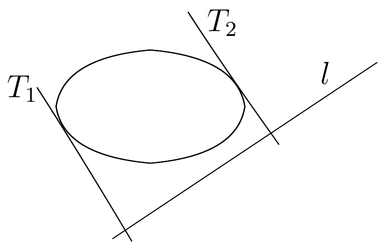
$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

atunci ecuaţia tangentei, trasate la elipsă prin punctul M_0, are forma

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{7.5}$$

Această ecuaţie se mai numeşte *dedublata ecuaţiei* elipsei. Nu deducem ecuaţia (7.5) - ea se stabilește uşor cu aplicarea derivatei funcţiei.

Exemplu. Să se scrie ecuaţiile tangentelor la elipsa $x^2 + 4y^2 - 20 = 0$, perpendiculare dreptei $2x - 2y + 9 = 0$.



Punctele de tangenţă nu sunt cunoscute. Vom utiliza faptul că tangenta are *un singur punct comun* cu elipsa.

Ecuaţia dreptei l, date în enunţ, se scrie astfel: $y = x + \frac{9}{2}$. Panta acestei drepte, $m = 1$. Din condiţia de perpendicularitate a tangentelor cu dreapta l rezultă că panta oricărei tangente va fi -1. Căutăm ecuaţia tangenetelor T_1 şi T_2 sub forma $y = -x + b$, cu $b \in \mathbb{R}$. Punctele de tangenţă urmează a fi aflate ca soluţia sistemului

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 20 = 0, \\ y = -x + b. \end{cases}$$

Din sistem rezultă $x^2 + 4(-x + b)^2 - 20 = 0$. După transformări simple se află $5x^2 - 8bx + (4b^2 - 20) = 0$. Punctul de tangenţă fiind unic, această ecuaţie trebuie să aibă *o singură soluţie*. Prin urmare, discriminantul ei trebuie să fie nul:

$$\triangle = 64b^2 - 20(4b^2 - 20) = 0 \;\Rightarrow\; b = \pm 5.$$

Dar atunci tangentele vor avea ecuaţiile $y = -x - 5$ şi $y = -x + 5$. De remarcat, că punctele de tangenţă nici n-au fost aflate.

5^0. Hiperbola: definiţia, deducerea ecuaţiei canonice

Definiţie. Se numeşte *hiperbolă* locul geometric de puncte, modulul diferenţei distanţelor cărora până la două puncte fixe, numite *focare*, este o mărime constantă, mai mică decât distanţa dintre focare.

Fie F_1, F_2 - focarele, $|F_1F_2| = 2c$, iar $2a$ - modulul diferenţei distanţelor de la oricare punct al hiperbolei până la focare. Conform definiţiei, $2a < 2c$, adică $a < c$ (în cazul elipsei era exact invers: $a > c$).

Sistemul de coordonate se introduce ca şi în cazul elipsei: axa OX – dreapta, ce trece prin focare, axa OY – mediatoarea segmentului F_1F_2. Atunci $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$.

Fie $M(x;\, y)$ – un punct arbitrar al hiperbolei.

Conform definiţiei, $|\,|F_2M| - |F_1M|\,| = 2a$. Dar

$$|F_1M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2};\ |F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

prin urmare,

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Această ecuaţie reprezintă ecuaţia hiperbolei. S-o aducem la o formă mai simplă. Din ecuaţie rezultă

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Separând câte un radical, prin ridicări la pătrat vom avea consecutiv:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm 2a \implies$$

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2 \implies$$

$$x^2 - 2xc + c^2 = x^2 + 2xc + c^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \implies$$

$$\pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4xc + 4a^2 \implies$$

$$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = xc + a^2 \implies$$

$$a^2[(x+c)^2 + y^2] = x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 \implies$$

$$a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2) = x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 \implies$$

$$a^2x^2 + 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = x^2c^2 + 2xca^2 + a^4 \implies$$

$$a^2c^2 - a^4 = (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 \implies (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Cum $c > a > 0$, rezultă $c^2 > a^2$, $c^2 - a^2 > 0$. Prin urmare, putem efectua substituţia $c^2 - a^2 = b^2$, unde $b > 0$. Ecuaţia se scrie acum astfel: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Împărţind ambii membri ai acestei ecuaţii la a^2b^2, obţinem definitiv:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7.6}$$

Astfel, dacă un punct $M(x, y)$ aparţine hiperbolei, atunci coordonatele lui verifică ecuaţia (7,6). Este adevărată şi afirmaţia inversă: dacă numerele x şi y satisfac ecuaţia (7.6), atunci punctul $M(x, y)$ aparţine hiperbolei. Ecuaţia (7.6) se numeşte *ecuaţia canonică* a hiperbolei.

Exemplu. Cum ecuaţia $4x^2 - 5y^2 = 80$ se aduce la forma $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{16} = 1$, ea reprezintă o hiperbolă.

6^0. Proprietăţile hiperbolei, reprezentarea grafică. Vom stabili unele proprietăţi ale hiperbolei, reieşind din ecuaţia ei canonică (7.6).

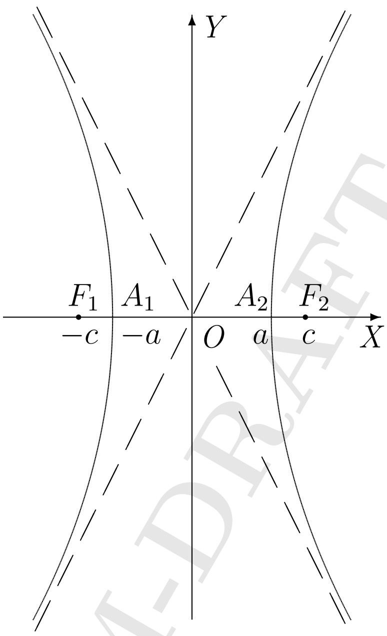
1. Ca şi în cazul elipsei, se stabileşte, că hiperbola are două axe de simetrie (axele OX şi OY) şi un centru de simetrie (originea de coordonate O).

2. Din (7.6) rezultă $\dfrac{x^2}{a^2} = 1 + \dfrac{y^2}{b^2} > 1 \implies x^2 > a^2$. Astfel, x se află *în afara* intervalului $(-a; a)$. De remarcat, că y poate lua orice valori reale.

3. Să aflăm punctele de intersecţie ale hiperbolei cu axele de coordonate. Cum x este în afara intervalului $(-a, a)$, $x \neq 0$ şi deci hiperbola *nu intersectează axa OY*. Pentru axa OX avem $y = 0$, dar atunci din (7.6) rezultă $\dfrac{x^2}{a^2} = 1$; $x = \pm a$. Hiperbola intersectează axa OX în punctele $A_1(-a, 0)$ şi $A_2(a, 0)$, numite *vârfurile* hiperbolei.

4. Hiperbola are două asimptote cu ecuaţiile $y = \pm\dfrac{b}{a}x$. De remarcat, că hiperbola este unuca linie de ordinul 2, care posedă asimptote.

5. Forma hiperbolei este



Remarcă.

1. Dacă în ecuaţia hiperbolei $a = b$, hiperbola se numeşte *echilaterală*.

2. Numărul $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ se numeţe *excentricitatea* hiperbolei. Cum $c > a$, rezultă $\varepsilon > 1$.

3. Linia $y = \dfrac{1}{x}$ de asemenea este o hiperbolă. Această ecuaţie însă nu este cea canonică. Asimptotele acestei hiperbole sunt reciproc perpendiculare şi coincid chiar cu axele de coordonate.

4. Hiperbola poate fi determinată şi de ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} t, \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t. \end{cases}$$

Funcţiile $\operatorname{sh} t$ şi $\operatorname{ch} t$ se numesc respectiv *sinus hiperbolic* şi *cosinus hiperbolic*; ele se definesc astfel:

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}; \ \ \operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

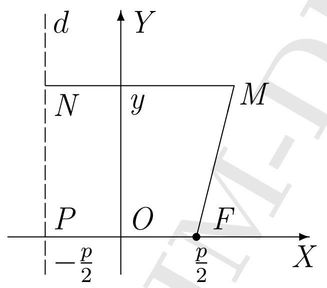
5. Ecuaţia $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ de asemenea reprezintă o hiperbolă, *conjugată* hiperbolei cu ecuaţia canonică (7.6)

7^0. Parabola: definiţia, deducerea ecuaţiei canonice

Definiţie. Se numeţe *parabolă* locul geometric de puncte, egal depărtate de un punct fix, numit *focar*, şi de o dreaptă fixă, numită *directoare*.

Fie F focarul, iar d directoarea parabolei. Introducem sistemul de coordonate astfel. Axa OX va fi dreapta, ce trece prin focar, perpendicular directoarei. Fie P - punctul de intersecţie a directoarei cu axa OX şi fie $|PF| = p$. Axa OY va fi mediatoarea segmentului PF. În acest sistem $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, iar $P\left(-\dfrac{p}{2}, 0\right)$. Ecuaţia directoarei este $x = -\dfrac{p}{2}$.

Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar al parabolei şi N – piciorul perpendicularei, coborâte din M la directoare. Atunci $N\left(-\dfrac{p}{2}, y\right)$. Conform definiţiei, $|FM| = |NM|$.



Dar

$$|FM| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2};$$

$$|NM| = \sqrt{\left(x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Prin urmare,

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Această ecuaţie reprezintă ecuaţia parabolei. S-o aducem la o formă mai simplă. Prin ridicare la pătrat avem:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left|x + \frac{p}{2}\right|^2; \;\; x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Astfel,

$$y^2 = 2px. \tag{7.7}$$

Punctul se va afla pe parabolă dacă şi numai dacă coordonatele lui vor satisface această ecuaţie. Ecuaţia (7) se numeşte *ecuaţia canonică* a parabolei. Numărul pozitiv p se numeşte *parametrul* parabolei.

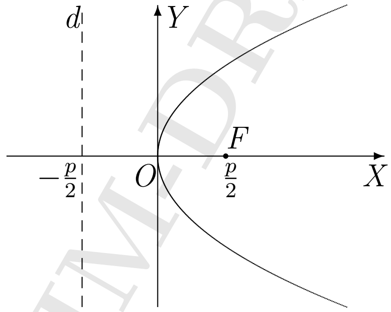
8^0. Proprietăţi ale parabolei, reprezentarea grafică.

1. Dacă $M(x, y)$ este un punct al parabolei, atunci şi $M_1(x, -y)$ de asemenea este punct al parabolei. Astfel, parabola are axă de simetrie - axa OX.

2. Cum $y^2 \geqslant 0$, rezultă $x \geqslant 0$. Punctul $O(0, 0)$ se află pe parabolă: el se numeşte *vârful* parabolei.

3. Pentru cadranul 1, ($x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$) se află $y = \sqrt{2px}$. Când x creşte de la 0 spre $+\infty$, y de asemenea creşte de la 0 spre $+\infty$.

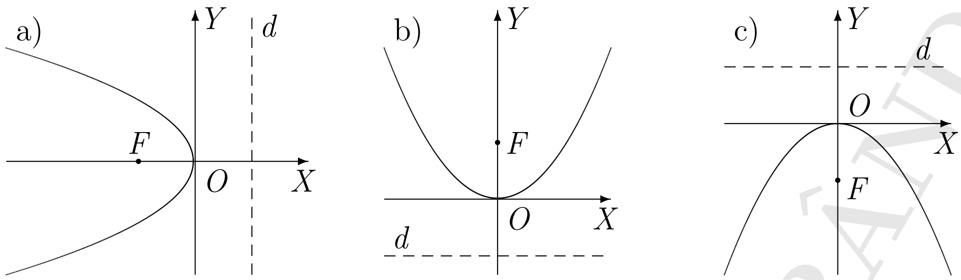
Putem trasa parabola, iniţial în cadranul 1, apoi şi în cadranul 4 .



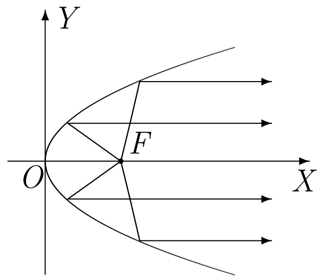
Remarcă.

1. Graficul funcţiei $y = x^2$, bine cunoscut tuturor, de asemenea este o parabolă, deşi nu are ecuaţia canonică.

2. Parabole vor fi şi liniile de ecuaţii $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$.



3. Parabola posedă o proprietate interesantă. Rotită în jurul axei OX, ea determină suprafaţa unui *paraboloid de rotaţie*. Dacă în focar se află o sursă de lumină, după reflecţia de la această suprafaţă, razele formează un fascicul de drepte paralele. În baza acestui principiu funcţionează projectoarele. În sens invers funcţionează antena parabolică. Undele electromagnetice, emise din satelit, după reflectarea de la suprafaţa antenei, se concentrează în focar, unde sunt captate, amplificate etc. Rezultatul - sute de canale TV.



Exerciţii

Cercul

1. Să se determine lungimea liniei $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 4 = 0$. *R-s*: 10π.

2. Să se arate, că ecuaţia $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$ determină un cerc. Să se afle centrul şi raza lui; să se efectueze desenul.

Indicaţie. Ecuaţia se aduce la forma $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$.

3. Să se determine poziţia fiecătuia dintre punctele $A(1, -4)$, $B(-3, 5)$, şi $C(-3, -4)$ faţă de cercul $x^2+y^2 = 25$. *R-s*: A – în interior; B – în exterior; C – pe cerc.

4. Să se alcătuiască ecuaţia cercului, dacă punctele $A(3, 6)$ şi $B(-1, -2)$ sunt extremităţile unui diametru al lui. *R-s*: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20$.

5. Se consideră cerucrile $x^2 + y^2 + 10x + 4y + 19 = 0$ şi $x^2 + y^2 - 14x - 6y + 50 = 0$. Să se afle: a) distanţa dintre centrele lor; b) ecuaţia dreptei, ce conţine aceste centre. *R-s*: a) 13; b) $5x - 12y + 1 = 0$.

6. Dreapta $2x + y - 5 = 0$ e tangentă cercului cu centrul în originea de coordonate. Să se alcătuiască: a) ecuaţia canonică a cercului; b) ecuaţiile parametrice ale cercului.

R-s: a) $x^2 + y^2 = 5$; b) $x = \sqrt{5}\cos t,\ y = \sqrt{5}\sin t$.

7. Să se determine, ce linie reprezintă fiecare dintre ecuaţiile date şi să se deseneze aceste linii în planul de coordonate XOY:

$$\textbf{a)}\ y = \sqrt{4 - x^2};\ \ \textbf{b)}\ x = -\sqrt{9 - y^2};\ \ \textbf{c)}\ x = -5 + \sqrt{40 - 6y - y^2}.$$

R-s: a) jumătatea de sus a cercului $x^2+y^2 = 4$; b) jumătatea stângă a cercului $x^2 + y^2 = 9$; c) jumătattea dreaptă a cercului $(x + 5)^2 + (y + 3)^2 = 49$.

Elipsa

8. Să se determine, ce linie reprezintă ecuaţia $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$. Să se deseneze această linie în sistemul de coordonate XOY. *Indicaţie.* Ecuaţia se aduce la forma canonică $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

9. Să se deseneze liniile $9x^2+25y^2-225 = 0$ şi $x^2+y^2 = 9$. Să se haşureze figura, mărginită de ele.

10. Să se afle aria patrulaterului, vârfurile căruia coincid cu vârfurile elipsei $16x^2 + 25y^2 = 400$. *R-s*: 40.

11. Să se afle lungimea coardei elipsei $9x^2+16y^2 = 144$, care trece printr-un focar, paralel axei OY. Această coardă se numeşte **latus rectum** - *latura dreaptă* (lat.). *R-s*: 4,5.

12. Să se afle lungimea diametrului elipsei $3x^2 + 8y^2 = 22$, situat pe bisectoarea cadranelor I – III. Diametrul elipsei este coarda, ce trece prin centrul ei. *R-s*: 4.

13. Să se verifice, că punctul $M(3, 2)$ aparţine elipsei $x^2 + 4y^2 = 25$ şi să se alcătuiască ecuaţia tangentei la elipsă în acest punct. *R-s*: $3x+8y-25 = 0$.

14. Să se determine, ce linie reprezintă fiecare dintre ecuaţiile date şi să se deseneze aceste linii în planul de coordonate XOY:

$$\text{a) } y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2};\quad \text{b) } x = \frac{5}{3}\sqrt{9 - y^2};\quad \text{c) } y = -\frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}.$$

R-s: a) jumătatea de sus a elipsei $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$; b) jumătatea dreaptă a elipsei $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; c) jumătatea de jos a elipsei $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$, care nu are ecuaţia canonică ($a < b$); focarele sunt situate pe axa OY. Elipsa se numeşte *conjugata* elipsei $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

15. Pentru care $m \in \mathbb{R}$ dreapta $y = -x+m$ e tangentă elipsei $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{5} = 1$? *R-s*: $m = \pm 5$.

16. Să se alcătuiască ecuaţiile tangentelor la elipsa $\dfrac{x^2}{30} + \dfrac{y^2}{24} = 1$, paralele dreptei $4x-2y+17=0$. *R-s*: $2x-y-12=0$, $2x-y+12=0$.

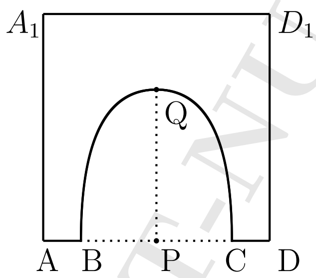
17. Să se alcătuiască ecuaţiile tangentelor la elipsa $x^2+4y^2=20$, perpendiculare dreptei $2x-2y-9=0$. *R-s*: $x+y-5=0$, $x+y+5=0$.

18. Din punctul $M_0\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ sunt trasate tangente la elipsa $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$. Să se alcătuiască ecuaţiile lor. *R-s*: $x+y-5=0$, $x+4y-10=0$.

19. Orbita Lunii este o elipsă cu Pământul în unul din focare. Lungimea axei mari este egală cu 765 000 km, iar excentricitatea ei, $\varepsilon=0,0549$. Să se afle distanţele cea mai mică şi cea mai mare de la Pământ la Lună.

R-s: 381 900 km.

20. În desenul de mai jos este reprezentat (în secţiune) portalul de la intrarea în campusul U.T.M. Linia curbă BQC este o semielipsă. Să se afle volumul portalului, ştiind că grosimea lui e de $3\,m$, iar $AB=CD=1,5\,m$, $PQ=5,4\,m$, $AA_1=7,5\,m$, $A_1D_1=9\,m$. Aria elipsei cu semiaxele a şi b este egală cu πab.



R-s: $V=27(7,5-0,9\pi)\approx 126,16\,\mathrm{m}^3$.

Hiperbola

21. Să se determine, ce linie reprezintă ecuaţia $16x^2-9y^2-144=0$. Să se reprezinte această linie în planul XOY, indicând elementele de reper necesare (focare, vârfuri, asimptote etc.).

Indicaţie. Ecuaţia se aduce la forma canonică $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}$.

22. Să se afle punctele hiperbolei $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, abscisa cărora este egală cu 5. *R-s*: $\left(5, -\frac{9}{4}\right)$ şi $\left(5, \frac{9}{4}\right)$.

23. Să se afle punctele de intersecţie ale hiperbolei $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$ cu dreapta $2x-y-10=0$. *R-s*: $(6, 2)$ şi $\left(\frac{14}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

24. Dreapta trece prin focarul drept al hiperbolei $25x^2-144y^2-3600=0$, paralel axei ordonatelor. Să se afle punctele de intersecţie ale acestei drepte cu hiperbola. *R-s*: $\left(13, -\frac{25}{12}\right)$ şi $\left(13, \frac{25}{12}\right)$.

25. Pentru care $m \in \mathbb{R}$ dreapta $y = \dfrac{5}{2}x + m$ e tangentă hiperbolei $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$? *R-s*: $m = \pm 4,5$.

26. Să se determine, ce linie reprezintă fiecare dintre ecuaţiile date şi să se reprezinte aceste linii în planul de coordonate XOY:

$$\textbf{a)}\ x = \frac{4}{3}\sqrt{y^2+9}\,; \quad \textbf{b)}\ y = \frac{2}{5}\sqrt{x^2-25}\,; \quad \textbf{c)}\ y = -3\sqrt{x^2-1}\,.$$

R-s: a) ramura dreaptă a hiperbolei $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; b) jumătăţile de ramuri ale hiperbolei $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$, situate în cadranele I–II; c) jumătăţile de ramuri ale hiperbolei $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1$, situate în cadranele III–IV.

Parabola

27. E dată parabola $y^2 = 6x$. Să se afle focarul şi directoarea ei. Să se efectueze desenul. *R-s*: $F\left(\frac{3}{2},\, 0\right)$; d: $x = -\frac{3}{2}$.

28. Să se afle focarul şi directoarea parabolei $x^2 - 6y = 0$. Să se reprezinte această parabolă în planul de coordonate XOY.

29. Să se determine, ce linie reprezintă fiecare dintre ecuaţiile date şi să se deseneze aceste linii, indicând elementele de reper (vârf, focar, directoare):

$$\textbf{a)}\ y = 2\sqrt{x}\,; \quad \textbf{b)}\ x = \sqrt{5y}\,; \quad \textbf{c)}\ y = -3\sqrt{2x}\,; \quad \textbf{d)}\ y = -2\sqrt{-3x}\,.$$

R-s: a) jumătatea parabolei $y^2 = 2x$, situată în cadranul I; b) jumătatea parabolei $y = \frac{1}{5}x^2$, situată în caadranul I; c) jumătatea parabolei $y^2 = 18x$, situată în cadranul IV; d) jumătatea parabolei $y^2 = -12x$, situată în cadranul III.

30. Să se afle punctele de intersecţie ale parabolei $x^2 = 4y$ cu dreapta $x + y - 3 = 0$. *R-s*: $(-6,\, 9)$ şi $(2,\, 1)$.

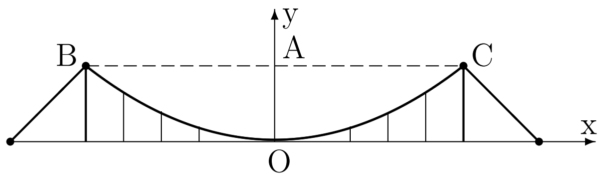
31. Să se determine poziţia dreptei faţă de parabolă în fiecare din cazurile:

$$\textbf{a)}\ 8x + 3y - 15 = 0,\ x^2 = -3y; \quad \textbf{b)}\ 5x - y - 15 = 0,\ y^2 = -5x; \quad \textbf{c)}\ x - y + 2 = 0,\ y^2 = 8x.$$

R-s: a) dreapta şi parabola au două puncte comune; b) dreapta şi parabola nu se intersectează; c) dreapta e tangentă parabolei.

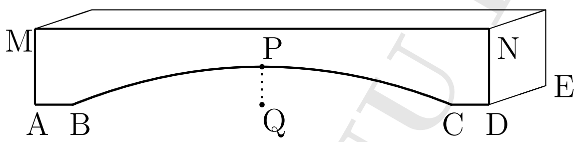
32. Pentru care $m \in \mathbb{R}$ dreapta $y = mx + 2$ e tangentă parabolei $y^2 = 4x$? *R-s*: $m = \frac{1}{2}$.

33. Odgonul unui pod suspendat are forma unei parabole (figura de mai jos). Să se alcătuiască ecuaţia ei în raport cu sistemul XOY, dacă $OA = a$, $BC = 2b$. *R-s*: $y = \frac{a}{b^2} \cdot x^2$.



34. Antena parabolică ("TV-farfuria") are diametrul egal cu 96 cm, adâncimea de 18 cm şi e obţinută prin rotirea unei parabole în jurul axei ei de simetrie. La ce distanţă de "fundul farfuriei" trebuie instalat receptorul, dacă el trebuie să se afle în focar? *R-s*: 32 cm.

35. Grinda de beton are forma, reprezentată mai jos. Linia BPC este un arc de parabolă cu vârful în P. Dimensiunile grinzii: $MN = 7\,\text{m}$, $AM = 0,8\,m$, $DE = 0,5\,m$, $BQ = QC = 3\,m$, $QP = 0,4\,m$. Ştiind că $1\,m^3$ al acestui beton cântăreşte 2,35 t, să se afle greutatea grinzii.



R-s: 9,4 t.

§8. Cuadrice (suprafeţe de ordinul doi)

Planul este suprafaţa, determinată de o ecuaţie de gradul întâi, de aceea el este numit şi suprafaţă de ordinul întâi. În spaţiu însă există şi multe alte suprafeţe. Printre ele se evidenţiază *cuadricele*, sau suprafeţele de ordinul 2, care sunt determinate de ecuaţiile de gradul doi cu cel mult 3 necunoscute.

1^o. Elipsoidul. Aceasta este suprafaţa, care într-un careva sistem de coordonate este determinată de ecuaţia

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,} \tag{1}$$

unde a, b, $c>0$. Pentru a clarifica ce reprezintă o suprafaţă de ordinul 2, se studiază ecuaţia ei apoi se aplică metoda secţiunilor (intersecţia cu plane, paralele axelor de coordonate).

a) Din (1) se obţine consecutiv:

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\leqslant 1;\ x^2\leqslant a^2;\ x^2-a^2\leqslant 0;\ (x-a)(x+a)\leqslant 0.$$

Pentru ultima inegalitate se aplică metoda intervalelor.

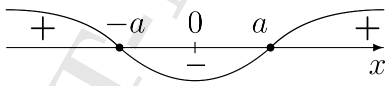


Fig. 53

Se obţine $-a\leqslant x\leqslant a$. Absolut analog, se obţin şi inegalităţile $-b\leqslant y\leqslant b$, $-c\leqslant z\leqslant c$. Astfel, tot elipsoidul se află în interiorul unui paralelipiped cu muchiile $2a$, $2b$, $2c$, feţele căruia sunt paralele planelor de coordonate.

b) În ecuaţia (1) fiecare din necunoscutele x, y, z figurează la pătrat. Dacă tripletul (x,y,z) satisface această ecuaţie, atunci şi tripletele $(-x,y,z)$, $(x,-y,z)$, $(x,y,-z)$ de asemenea satisfac ecuaţia (1). Prin urmare, planele de coordonate sunt plane de simetrie ale elipsoidului.

c) Acum vom studia intersecţia elipsoidului cu plane, paralele planelor de coordonate, ceea ce constituie *metoda secţiunilor.* considerăm un plan, paralel planului XOY; fie $z=h$ ecuaţia lui, $-c<h<c$. Pentru $z=h$ din (1) se obţine consecutiv:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1;\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2};\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^2-h^2}{c^2}.$$

Împărţind ultima egalitate la $\dfrac{c^2-h^2}{c^2}$, se obţine

$$\frac{x^2}{a^2 \cdot \frac{c^2-h^2}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2 \cdot \frac{c^2-h^2}{c^2}} = 1,$$

care este o elipsă cu semiaxele $a_1 = \dfrac{a}{c}\sqrt{c^2 - h^2}$ şi $b_1 = \dfrac{b}{c}\sqrt{c^2 - h^2}$. Pentru $h = \pm c$ din ecuaţia (1) se obţine $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$, care are doar soluţia $x = y = 0$.

Aşadar, intersecţia elipsoidului cu un plan, paralel planului XOY este o elipsă. Pentru $z = \pm c$ elipsa degenerează într-un punct (punctul de tangenţă). Pentru $z = 0$ elipsa este cea mai mare şi aparţine planului XOY. Intersecţiile cu planele XOZ şi YOZ şi cu plane, paralele lor, de asemenea sunt elipse.

Folosind datele obţinute, putem reprezenta grafic elipsoidul .

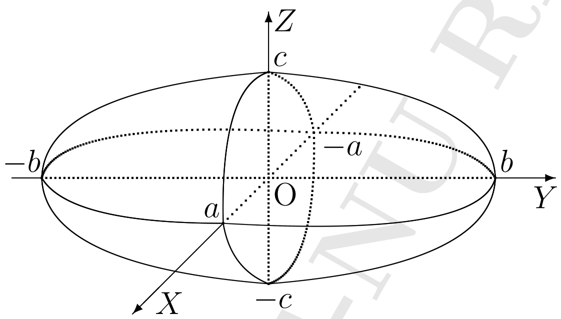


Fig. 54

2^o. Alte cuadrice. În cele ce urmează, vom trece în revistă toate cuadricele, indicând doar ecuaţia ce defineşte cuadrica şi reprezentând grafic suprafaţa respectivă. Procesul de studiere rămâne acelaşi, ca şi în cazul elipsoidului.

Hiperboloizii. Există două tipuri de hiperboloizi: hiperboloidul cu o pânză, determinat de ecuaţia

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

şi hiperboloidul cu două pânze, determinat de ecuaţia

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.}$$

Suprafeţele respective sunt prezentate în Fig. 55, a), respectiv, b).

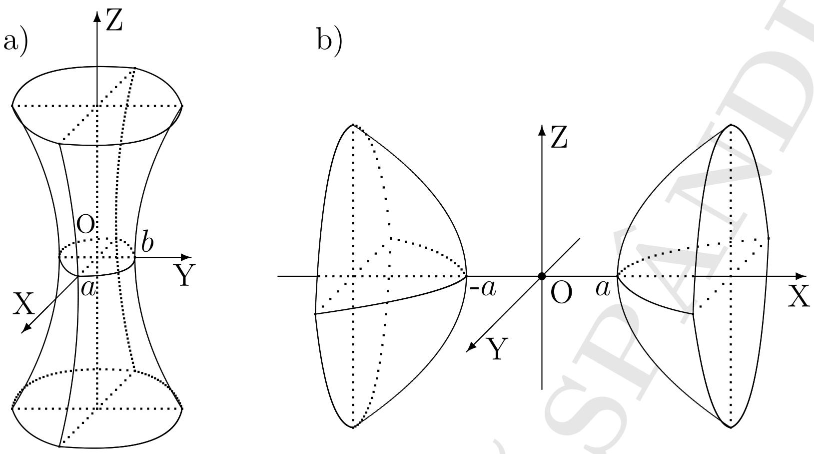


Fig. 55

Suprafaţa conică (conul eliptic), determinată de ecuaţia

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0}$$

şi care este reprezentă în Fig. 56.

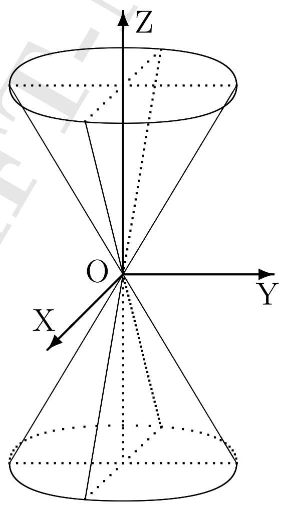


Fig. 56

Paraboloizii. Există două tipuri de paraboloizi: paraboloidul eliptic, determinat de ecuaţia

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz}$$

şi paraboloidul hiperbolic, determinat de ecuaţia

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz.}$$

Suprafeţele respective sunt prezentate în Fig, 57, a), respectiv, b).

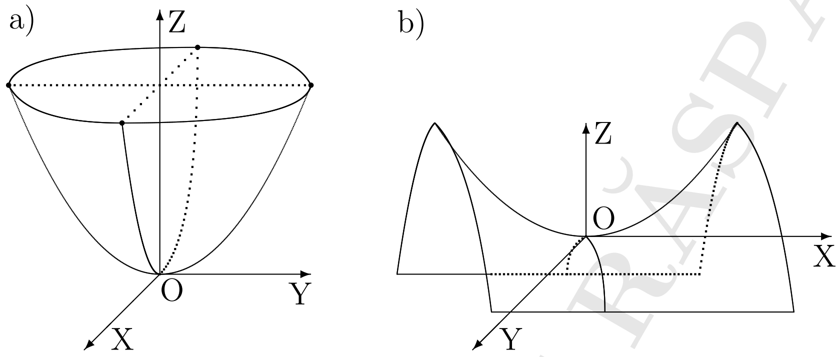


Fig. 57

Suprafeţe cilindrice. În cazul general, o suprafaţă cilindrică se defineşte în felul următor. Fie L o linie arbitrară din planul de coordonate XOY. Prin fiecare punct al acestei linii trece câte o dreaptă, perpendiculară planului, adică paralelă axei OZ. Mulţimea tuturor acestor drepte formează o *suprafaţă cilindrică*, generată de linia L. Dacă linia L este o linie de ordinul 2, suprafaţa este un cilindru de ordinul 2.

Cilindrul eliptic este determinat de ecuaţia

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z \in \mathbb{R}.}$$

Cilindrul hiperbolic este determinat de ecuaţia

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z \in \mathbb{R}.}$$

Cilindrul parabolic este determinat de ecuaţia

$$\boxed{y^2 = 2px, \quad z \in \mathbb{R}.}$$

Aceste cuadrice sunt prezentate în Fig. 58, respectiv a), b), c).

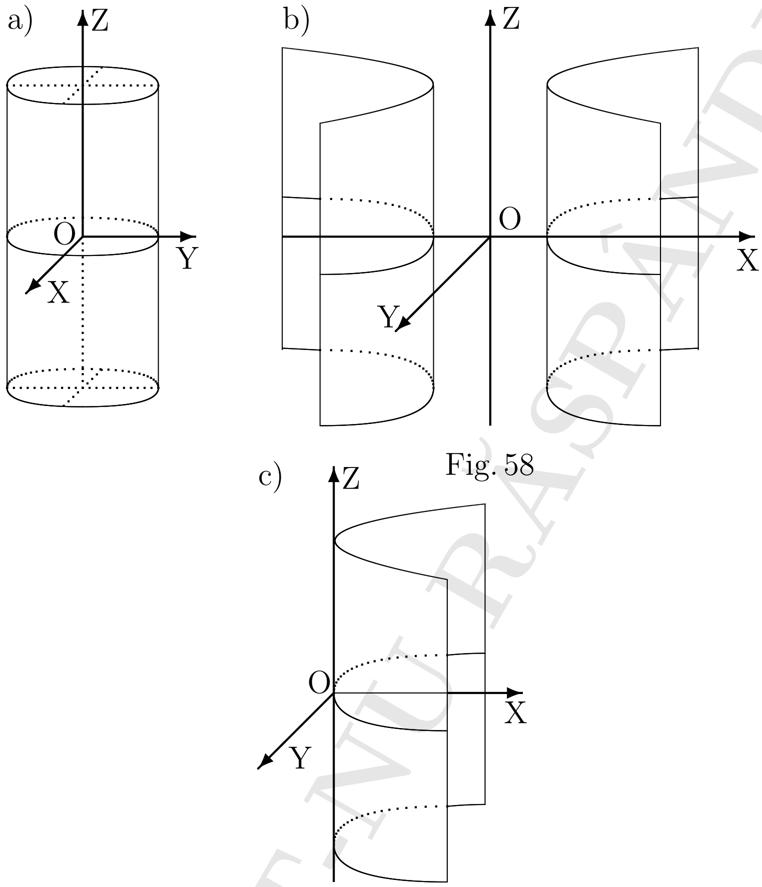


Fig. 58

Remarcă.
1) Pentru $a = b$ cilindrul eliptic devine un cilindru circular drept.
2) Pe suprafaţa hiperboloidului cu o pânză (H1) a există două clase de drepte L_1 şi L_2, astfel încât: a) dreptele dintr-o clasă nu se intersectează şi b) prin oricare punct al suprafeţei H1 trece câte o dreaptă din fiecare clasă. Asemenea suprafeţe se numesc *suprafeţe riglate*, chiar dublu riglate. Paraboloidul hiperbolic de asemenea este o suprafaţă dublu riglată. Asemenea suprafeţe se folosesc pe larg, de exemplu, în construcţii (faruri portuare, turnuri pentru televiziune, coşuri pentru staţii termoelectrice, acoperişuri etc.).

Exerciţii

Fiind dată ecuaţia unei cuadrice, să se determine (aducând ecuaţia la forma canonică sau folosind metoda intervalelor) ce reprezintă această cuadrică şi să se schiţeze desenul ei în sistemul de coordonate carteziene $OXYZ$.

a) $3x^2 - 4y^2 + 112z^2 = 12$. **b**) $3x^2 + 9y^2 + z^2 - 9 = 0$. **c**)$9y^2 + 16z^2 = 144$.
d) $y = 4 - x^2 - z^2$. **e**) $z^2 - 4z + y^2 = 0$. **f**) $y = 2z^2 + 1$.
g) $y^2 = 4z^2 - x^2$. **h**) $y^2 + z^2 - 4z = 5$. **i**) $z^2 - 2z + x^2 = 0$.