Puțină istorie...

La sf. sec. XIX mulți matematicieni se ocupau de așa numitul ***calcul simbolic***, care avea la bază simbolul $\boldsymbol{p = \frac{d}{dt}}$. De exemplu, exponentul natural n al simbolului p înseamnă derivata de ordinul n . Simbolic $p = \frac{d}{dt}$, $p^2 = \frac{d^2}{(dt)^2}$, $p^3 = \frac{d^3}{(dt)^3}$,...iar $p^n x(t) = \frac{d^n x(t)}{(dt)^n}$.

Exponentul negativ -1 al lui p semnifică integrala, adică $\frac{1}{p} \cdot x(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$.

Pentru $x(\tau) \equiv 1, \frac{1}{p} \cdot 1 = \int_0^t 1 d\tau = t$,

$$\frac{1}{p^2} \cdot 1 = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{p} \cdot 1\right) = \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2}$$

$$\frac{1}{p^3} \cdot 1 = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{p^2} \cdot 1\right) = \int_0^t \frac{\tau^2}{2} d\tau = \frac{t^3}{3!}, \dots$$

$$\frac{1}{p^n} \cdot 1 = \frac{t^n}{n!}.$$

Cu popularizarea calculului simbolic s-a ocupat fizicianul englez Heviside (1850-1925), aplicând acest calcul la rezolvarea unor probleme de electrotehnică, care fiind modelate matematic, se reduceau la integrarea unor ecuații diferențiale.

De exemplu, ecuația diferențială $x'(t) - x(t) = 1$ cu condiția $x(0) = 0$, este identificată cu ecuația

$p \cdot x(t) - x(t) = 1 \Leftrightarrow x(t) = \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \cdot \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^n} + \dots\right)$, în condiția $\left|\frac{1}{p}\right| < 1 \Leftrightarrow |p| > 1$. Adică

$$x(t) = \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{p^2} \cdot 1 + \dots + \frac{1}{p^n} \cdot 1 + \dots = t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots = e^t - 1.$$

Astfel, soluția ecuației diferențiale este $x(t) = e^t - 1$.

Cu aparatul ecuațiilor diferențiale, avem că

$x' - x = 1 \Leftrightarrow x' = x + 1 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = x + 1 \Leftrightarrow \frac{dx}{x+1} = dt \Leftrightarrow ln|x + 1| = t + C.$

Din condiția inițială $x(0) = 0$ rezultă că $C = 0$ și $x + 1 = e^t \Leftrightarrow x = e^t - 1$ - soluția ecuației diferențiale.

În anii 20 ai sec. XX calculul simbolic este numit calcul operațional. În prezent metodele calculului operațional se utilizează în fizică, mecanică, electrotehnică, automatică, teoria informației, teoria semnalelor și a circuitelor electrice.

FUNCȚIA ORIGINAL. FUNCȚIA IMAGINE. PROPRIETĂȚI

Fie funcția complexă de variabilă reală $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Definiție. Funcția $f(t)$ se numește **funcție original Laplace** sau simplu **original**, dacă

a) $f(t) = 0$, pentru orice $t < 0$,
b) f este continuă pe porțiuni pe orice subinterval finit al semidreptei reale pozitive (are cel mult un număr finit de discontinuități de speța I,
c) f are o creștere exponențială, adică există numere reale $M > 0,\ \alpha \geq 0$, astefl încât $\boldsymbol{|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \forall t \geq 0}$ $\quad (\mathbf{1})$.

Este evident, că dacă relația $(\mathbf{1})$ este verificată pentru un careva $\alpha \geq 0$, atunci ea este verificată și pentru $\forall\ s \geq \alpha \geq 0$, deoarece $e^{\alpha t} \leq e^{st}$.

Definiție. Numărul α_0 se numește **indice de creștere** a funcției f dacă inegalitatea $(\mathbf{1})$ este verificată pentru $\forall\ \alpha \geq \alpha_0$ și nu este verificată pentru $s < \alpha_0$.

Adică $\boldsymbol{\alpha_0 = inf\{\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, |f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \forall t \geq 0\}}$, care verifică $(\mathbf{1})$.

Definiție. Funcția $\boldsymbol{\sigma(t)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \boldsymbol{t} < 0, \\ \mathbf{1}, & \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0} \end{cases}$ se numește **funcția unitate Heviside**

Exemplu. Funcția $\boldsymbol{\sigma}$ este funcție original cu indicele de creștere $\alpha_0 = 0$ și M=1.

Notă. Dacă $f(t)$ este definită pe $(-\infty;\ +\infty)$ și $f(t) \neq 0$ pentru $t < 0$, atunci $f(t)\sigma(t)$ verifică condiția a) a definitei funcției origina, iar $\boldsymbol{f(t)\sigma(t)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \boldsymbol{t} < 0, \\ \boldsymbol{f(t)}, & \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0} \end{cases}$. Deseori în locul funcției $f(t)\sigma(t)$ vom scrie simplu $f(t)$.

Exemple de funcții original: $\boldsymbol{sint}$; $\boldsymbol{cost}$; $\boldsymbol{cht}$; $\boldsymbol{sht}$; $\boldsymbol{e^{\lambda t}}$; $\boldsymbol{t^n; t^z, Rez = \alpha \geq 0}$ cu $\alpha_0 = 0$.

Teoremă: Produsul cu o constantă a unei funcții original, suma și produsul a două funcții original sunt de asemenea funcții original.

Definiție. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un original Laplace. Funcția complexă de variabilă complexă

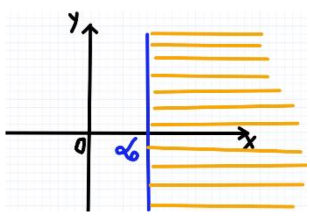
$F: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ D = \{p \in \mathbb{C} |\ Re\, p > \alpha_0\}$,

$$\boldsymbol{F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt}$$

se numește **transformată Laplace** sau **imagine Laplace** a funcției $f(t)$.

Se notează cu $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)}$, sau $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = F(p)}$ sau $\boldsymbol{f(t) \leftrightarrow F(p)}$.

Teoremă: Integrala Laplace $\int_0^{+\infty} \boldsymbol{f(t)e^{-pt}dt}$ a funcției original $f(t)$ cu indicele de creștere α_0 este absolut convergentă în semiplanul complex $Re\, p = s > \alpha_0$, iar în semiplanul complex $Re\, p = s \geq s_1$, unde $s_1 > \alpha_0$, este absolut și uniform convergent.



Demonstrație:

Teoremă: Dacă $f(t)$ este funcție original cu indicele de creștere α_0, atunci $F(p)$ este olomorfă pe semiplanul complex $Re\, p = s > \alpha_0$.

Teoremă (despre unicitatea originalului): Dacă două funcții original $f_1(t)$ și $f_2(t)$ au aceeași transformată Laplace $F(p)$ este funcție original cu indicele de creștere α_0, atunci $F(p)$ este olomorfă pe semiplanul complex $Re\, p = s > \alpha_0$.

Teoremă (liniaritate): Fie $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ două funcții original Laplace cu indicii de creștere α_1 și α_2, iar $f_1(t) \leftrightarrow F_1(p)$, $Re\, p > \alpha_1$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(p)$, $Re\, p > \alpha_2$. Atunci pentru orice $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ funcția $C_1 f_1 + C_2 f_2$ este original Laplace și

$$\boldsymbol{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \leftrightarrow C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p),\ Re p > max\{\alpha_1, \alpha_2\}.}$$

Demonstrație:

Exerciții propuse pentru rezolvare:

Determinați imaginea Laplace a funcției original, utilizând definiția

1) $f(t) = e^{5t}$,
2) $f(t) = t^2$;
3) $f(t) = \cos(3t)$
4) $f(t) = te^t$.

Exemple de determinare a imaginilor Laplace

1. Funcția Heviside $\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ este original Laplace cu indicele de creștere $\alpha_0 = 0$.

$$F(p) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}, \qquad Re\, p > 0.$$

Vom scrie $\sigma(t) \leftrightarrow \frac{1}{p}$ sau $\boldsymbol{1 \leftrightarrow \frac{1}{p}}$, $\boldsymbol{Re\, p > 0}$, sau $\boldsymbol{\mathcal{L}\{1\}(p) = \frac{1}{p}}$.

2. Funcția $f(t) = e^{\lambda t}\sigma(t), \lambda \in \mathbb{C}$, sau simplu $f(t) = e^{\lambda t}$, este funcție original cu indice de creștere $\alpha_0 = Re\, \lambda$. Imaginea Laplace este

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{(\lambda - p)t} dt = \frac{1}{\lambda - p} e^{(\lambda-p)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p - \lambda}, \qquad Rep > Re\, \lambda.$$

Vom scrie $\boldsymbol{e^{\lambda t} \leftrightarrow \frac{1}{p-\lambda}}$, $\boldsymbol{Re\, p > Re\, \lambda}$, sau $\boldsymbol{\mathcal{L}\{e^{\lambda t}\} = \frac{1}{p-\lambda}}$

3. Funcția $f(t) = cos(\lambda t)\sigma(t), \lambda \in \mathbb{C}$, sau simplu $f(t) = cos(\lambda t)$, este funcție original. Deoarece $cos(\lambda t) = \frac{e^{\lambda i t} + e^{-\lambda i t}}{2}$, utilizând proprietatea de liniaritate, obținem

$$\frac{e^{\lambda i t} + e^{-\lambda i t}}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - \lambda i} + \frac{1}{p + \lambda i}\right) = \frac{p}{p^2 + \lambda^2} \text{ cu } \begin{cases} Re\, p > Re\,(\lambda i) = Im(-\lambda) \\ Re\, p > Re\,(-\lambda i) = Im(\lambda) \end{cases} \Leftrightarrow Re\, p > |Im(\lambda)|.$$

Vom scrie $\boldsymbol{cos(\lambda t) \leftrightarrow \frac{p}{p^2+\lambda^2}}$, $\boldsymbol{Re\, p > |Im(\lambda)|}$, sau $\boldsymbol{\mathcal{L}\{cos(\lambda t)\} = \frac{p}{p^2+\lambda^2}}$

4. Pentru funcția $f(t) = sin(\lambda t)\sigma(t), \lambda \in \mathbb{C}$, sau simplu $f(t) = cos(\lambda t)$, este funcție original. Deoarece $sin(\lambda t) = \frac{e^{\lambda i t} - e^{-\lambda i t}}{2i}$, utilizând proprietatea de liniaritate, obținem

$\frac{e^{\lambda it}-e^{-\lambda it}}{2i} \leftrightarrow \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-\lambda i}-\frac{1}{p+\lambda i}\right)=\frac{\lambda}{p^2+\lambda^2}$ cu $Re\,p > |Im(\lambda)|$.

Vom scrie $\boldsymbol{sin(\lambda t) \leftrightarrow \frac{\lambda}{p^2+\lambda^2}}$, $\boldsymbol{Re\,p > |Im(\lambda)|}$, sau $\boldsymbol{\mathcal{L}\{sin(\lambda t)\} = \frac{\lambda}{p^2+\lambda^2}}$

5. În mod similar se obține

   $\boldsymbol{ch(\lambda t) = cos(\lambda it) \leftrightarrow \frac{p}{p^2-\lambda^2}}$, $\boldsymbol{Re\,p > |Re(\lambda)|}$, sau $\boldsymbol{\mathcal{L}\{ch(\lambda t)\} = \frac{p}{p^2-\lambda^2}}$

   $\boldsymbol{sh(\lambda t) = -isin(\lambda it) \leftrightarrow \frac{\lambda}{p^2-\lambda^2}}$, $\boldsymbol{Re\,p > |Re(\lambda)|}$, sau $\boldsymbol{\mathcal{L}\{sh(\lambda t)\} = \frac{\lambda}{p^2-\lambda^2}}$

6. Funcția $f(t) = t^n\sigma(t)$, $n \in \mathbb{N}$, sau simplu $f(t) = t^n$, este funcție original cu indice de creștere $\alpha_0 = 0$.

   Pentru n=1 imaginea Laplace este

   $$F(p) = \int_0^{+\infty} te^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\,te^{-pt}|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = 0 + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}, \qquad Rep > 0.$$

   Deci, $\boldsymbol{t \leftrightarrow \frac{1}{p^2}}$, $\boldsymbol{Re\,p > 0}$.

   Pentru n=2 imaginea Laplace este

   $$F(p) = \int_0^{+\infty} t^2e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\,t^2e^{-pt}|_0^{+\infty} + \frac{2}{p}\int_0^{+\infty} te^{-pt}dt = 0 + \frac{2}{p}\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^3}, Rep > 0.$$

   Deci, $\boldsymbol{t^2 \leftrightarrow \frac{2}{p^3}}$, $\boldsymbol{Re\,p > 0}$.

   Prin inducție, $\boldsymbol{t^n \leftrightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}}$, $\boldsymbol{Re\,p > 0}$, sau $\boldsymbol{\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}}$.

7. Funcția $f(t) = t^\alpha\sigma(t)$, $\alpha > -1$, sau $f(t) = t^\alpha$, este funcție original cu indice de creștere $\alpha_0 = 0$.

   Atunci $\boldsymbol{t^\alpha \leftrightarrow \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-pt}dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}}$, $\boldsymbol{Re\,p > 0}$, unde $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}e^{-u}du$ este funcția Gamma

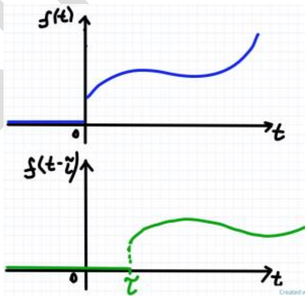
TEOREMELE DE BAZĂ ALE CALCULULUI OPERAȚIONAL

Teorema omotetiei (asemănării): Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este un original Laplace și $\boldsymbol{f(t) \leftrightarrow F(p)}$, $Re\, p > \alpha_0$, atunci pentru $\forall a > 0$, $\boldsymbol{f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)}$, $Re\, p > a \cdot \alpha_0$, sau $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)}$.

Demonstrație: $\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{+\infty} f(at) e^{-pt} dt = \left| \begin{matrix} z = at, \\ t = \frac{z}{a} \\ dt = \frac{1}{a} dz \end{matrix} \right| = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(z) e^{-\frac{p}{a} z} dz = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Definim funcția $\boldsymbol{\sigma(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ 1, & t \geq \tau \end{cases}}$.

Teorema întârzierii: Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este un original Laplace și $\boldsymbol{f(t) \leftrightarrow F(p)}$, $Re\, p > \alpha_0$, atunci pentru $\forall \tau > 0$, $\boldsymbol{f(t - \tau)\sigma(t - \tau) \leftrightarrow e^{-p\tau} F(p)}$, sau $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f(t - \tau)\sigma(t - \tau)\} = e^{-p\tau} F(p)}$, $Re\, p > \alpha_0$



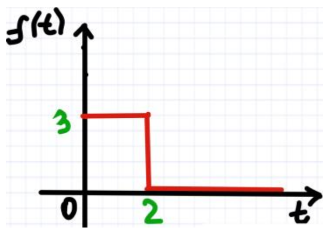
Demonstrație.

Notă. Funcția $f(t - \tau)$ definește același proces descris de funcția $f(t)$, dar care începe cu întărzierea τ. Graicul funcției $f(t - \tau)$ reprezintă o translare de-a lungul axei *ot* cu τ unități a funcției $f(t)$.

Exemplu: De determinat imaginea originalului $h(t) = (t - 1)^2 \sigma(t - 1)$. În acest caz funcția $h(t)$ este funcția $f(t) = t^2$ cu întârzierea $\tau = 1$. Deoarece $\boldsymbol{t^2 \leftrightarrow \frac{2}{p^3}}$, utilizând teorema întârzierii, obținem $(t - 1)^2 \sigma(t - 1) \leftrightarrow \frac{2}{p^3} e^{-p}$.

Observație. Dacă evităm a scrie factorul $\sigma(t - 1)$, atunci

$(t - 1)^2 = t^2 - 2t + 1 \leftrightarrow \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}$.

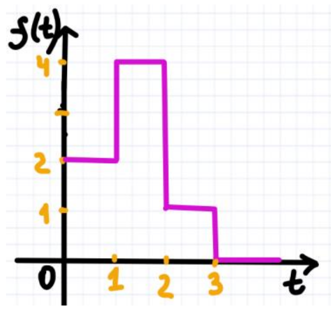


Exemplu: De determinat imaginea originalului, reprezentat grafic.

Acesta este un impuls de mărimea 3, care "se activează" în momentul de timp $t = 0$ și "se stinge" în momentul de timp $t = 2$.

Atunci $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 3, & 0 \leq t < 2, \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$ și $f(t) = 3\sigma(t) - 3\sigma(t - 2)$ și $f(t) \leftrightarrow 3 \cdot \frac{1}{p} - 3 \cdot \frac{1}{p} e^{-2p}$.

Exemplu: De determinat imaginea originalului, reprezentat grafic.



$f(t) = 2\sigma(t) + 2\sigma(t - 1) - 3\sigma(t - 2) - 1\sigma(t - 3)$ și

$f(t) \leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{p} + 2 \cdot \frac{1}{p} e^{-p} - 3 \cdot \frac{1}{p} e^{-2p} - 1 \cdot \frac{1}{p} e^{-3p}$.

Teorema deplasării: Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este un original Laplace și $\boldsymbol{f(t)} \leftrightarrow \boldsymbol{F(p)}$, $Re\, p > \alpha_0$, atunci pentru $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\boldsymbol{e^{\lambda t} f(t) \leftrightarrow F(p-\lambda)}$, sau $\boldsymbol{\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\} = F(p-\lambda)},\ Re\, p > \alpha_0 + Re\lambda$.

Demonstrație.

Exemplu: De determinat imaginea originalului:

1. $f(t) = e^{2t} sint$.

Deoarece $sint \leftrightarrow \frac{1}{p^2+1}$, $Re\, p > 0$ și $\lambda = 2$, obținem că $e^{2t} sint \leftrightarrow \frac{1}{(p-2)^2+1}$, $Re\, p > 2$.

2. $f(t) = e^{-3t} cos2t$.

Deoarece $cos2t \leftrightarrow \frac{p}{p^2+4}$, $Re\, p > 0$ și $\lambda = -3$, obținem $e^{-3t} cos2t \leftrightarrow \frac{p+3}{(p+3)^2+4}$, $Re\, p > -3$.

3. $f(t) = te^{-t}$.

Deoarece $t \leftrightarrow \frac{1}{p^2}$, $Re\, p > 0$ și $\lambda = -1$, obținem că $te^{-t} \leftrightarrow \frac{1}{(p+1)^2}$, $Re\, p > -1$.

Mai general,

$$\boldsymbol{e^{\lambda t} cos(\omega t) \leftrightarrow \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}},\quad \boldsymbol{Re\, p > |Im(\omega)| + Re\, \lambda}$$

$$\boldsymbol{e^{\lambda t} sin(\omega t) \leftrightarrow \frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}},\quad \boldsymbol{Re\, p > |Im(\omega)| + Re\, \lambda}$$

$$\boldsymbol{t^n e^{\lambda t} \leftrightarrow \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}},\quad \boldsymbol{Re\, p} > Re\, \boldsymbol{\lambda, n} \in \mathbb{N}.$$

Exemplu. Utilizând formulele obținute, de determinat originalul $f(t)$ imaginii Laplace $F(p)$:

1. $F(p) = \frac{3}{p+2}$
2. $F(p) = \frac{3p-2}{p^2+4}$
3. $F(p) = \frac{1}{(p+2)^3}$
4. $F(p) = \frac{3p-1}{p^2+2p+5}$

Teoremă (imaginea unei funcții periodice): Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este un original Laplace, este funcție periodică cu perioada principală T, atunci

$$\boldsymbol{f(t) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt},\quad \boldsymbol{Re\, p} > 0.$$

Demonstrație.

Exemplu. De determinat imaginea Laplace pentru originalul $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(t) = |sint|\sigma(t)$.

Funcția f este periodică cu $T = \pi$. Atunci $f(t) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-p\pi}} \int_0^\pi e^{-pt} sintdt$.

Deoarece $\int_0^\pi e^{-pt} sintdt = \frac{1+e^{-p\pi}}{1+p^2}$, obținem $f(t) \leftrightarrow \frac{1}{1-e^{-p\pi}} \frac{1+e^{-p\pi}}{1+p^2} = \frac{1}{1+p^2} cth\left(\frac{p\pi}{2}\right)$.

DERIVAREA ȘI INTEGRAREA ORIGINALELOR ȘI IMAGINILOR

Teoremă (derivarea originalului): Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcție continuă pe $[0; +\infty)$ care este un original Laplace cu indicele de creștere α_0. Fie că f este derivabilă pe $(0; +\infty)$ și fie că f' este original Laplace cu cu indicele de creștere α_1. Dacă $\boldsymbol{f(t) \leftrightarrow F(p)}$, atunci
$\boldsymbol{f'(t) \leftrightarrow pF(p) - f(0), Re\, p > max\{\alpha_1, \alpha_2\}}$, adică $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f'(t)\} = p\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)}$.

Mai general,
Teoremă: Dacă funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ împreună cu derivatele sale până la ordinul n sunt originale Laplace, $\boldsymbol{f(t) \leftrightarrow F(p)}$, $Re\, p > \alpha_0$, iar f împreună cu derivatele sale până la ordinul n-1 sunt continui pe $(0; +\infty)$, atunci
$\boldsymbol{f^{(n)}(t) \leftrightarrow p^n F(p) - \left[p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \cdots + p f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)\right]}$,
unde $\boldsymbol{f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to 0+} f^{(k)}(t)}$, $\boldsymbol{k = \overline{0, n-1}}$, adică
$\boldsymbol{\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \left[p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \cdots + p f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)\right]}$.

Exemplu: Să se determine imaginea Laplace a expresiei $f''(t) + 3f'(t) + 2f(t) + 1$, cu condițiile inițiale $f(0) = -1, f'(0) = -2$, în condițiile teoremei de mai sus.

Teoremă (derivarea imaginii): Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcție original Laplace și $\boldsymbol{f(t) \leftrightarrow F(p)}$, $Re\, p > \alpha_0$, atunci funcția F este olomorfă în semiplanul $Re\, p > \alpha_0$ și are loc relația:
$\boldsymbol{tf(t) \leftrightarrow -F'(p)}$, $Re\, p > \alpha_0$, adică $\boldsymbol{\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\mathcal{L}'\{f(t)\}}$, $Re\, p > \alpha_0$.
Mai general,

$$\boldsymbol{t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n F^{(n)}(p)}.$$

Exemplu: De determinat imaginea originalului:
1. $f(t) = t^3 e^{2t}$.
2. $f(t) = t^n e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}$.
3. $f(t) = t^2 cos3t$.
4. $f(t) = tsh4t$.

Teoremă (integrarea originalului): Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcție original Laplace și
$\boldsymbol{f(t) \leftrightarrow F(p)}$, $Re\, p > \alpha_0$, atunci

$$\boldsymbol{\int_0^t f(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{p} F(p)},$$

adică

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{p}\mathcal{L}\{f(t)\}}.$$

Exemplu. De determinat originalul $f(t)$ imaginii Laplace $F(p)$:
1. $F(p) = \frac{3}{p(p+2)}$

2. $F(p) = \frac{1}{p(p^2-4)}$
3. $F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)}$
4. $F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+4)}$

Exemplu: De determinat imaginea originalului:

1. $\int_0^t (u - cos2u)du,$
2. $\int_0^t e^{-u}u^3 du,$

Teoremă (integrarea imaginii): Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcție original Laplace și $\boldsymbol{f(t) \leftrightarrow F(p)}$, $Re\, p > \alpha_0$, atunci funcția și funcția $\frac{\boldsymbol{f(t)}}{\boldsymbol{t}}$ este original și

$$\frac{\boldsymbol{f(t)}}{\boldsymbol{t}} \leftrightarrow \int_{\boldsymbol{p}}^{\infty} \boldsymbol{F(w)dw},$$

adică

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_{p}^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(w)dw.}$$

Exemplu: De determinat imaginea originalului:

1. $f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t},$
2. $f(t) = \frac{cosat - cosbt}{t},$
3. $f(t) = \frac{sint}{t}$
4. $Sit = \int_0^t \frac{sinu}{u} du$

Avem că

$$\frac{sint}{t} \leftrightarrow \int_p^{\infty} \frac{1}{w^2+1} dw = arctgw\Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - arctg\, p = F(p)$$

Iar

$$\int_0^t \frac{sinu}{u} du \leftrightarrow \frac{1}{p} F(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\, p\right).$$

Definiție. Se numește **convoluție** a funcțiilor complexe $f_1(t)$ și $f_2(t)$, definite pe $[0; +\infty)$ funcția $f_1 * f_2: [0; +\infty) \to \mathbb{C}$, definită prin

$$\boldsymbol{(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du.}$$

Notă: Are loc $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$.

Teorema Borel (imaginea produsului prin convoluție). Dacă $f_1, f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ două funcții original Laplace cu indicii de creștere α_1 și α_2, iar $f_1(t) \leftrightarrow F_1(p)$, $Re\, p > \alpha_1$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(p)$, $Re\, p > \alpha_2$. Atunci

$\boldsymbol{f_1 * f_2 \leftrightarrow F_1(p)\cdot F_2(p),\ Re p > max\{\alpha_1, \alpha_2\}}$, sau $\boldsymbol{\mathcal{L}\{f_1 * f_2\}(p) = \mathcal{L}\{f_1\}(p)\cdot\mathcal{L}\{f_2\}(p)}$.

Demonstrație:

Exemplu. De determinat originalul $f(t)$ a imaginii Laplace $F(p)$:

1. $F(p) = \frac{p}{(p^2+25)^2}$.

Putem scrie $F(p) = \frac{1}{p^2+25}\cdot\frac{p}{p^2+25}$. Deoarece $\frac{1}{5}sin(5t) \leftrightarrow \frac{1}{p^2+25}$, $cos(5t) \leftrightarrow \frac{p}{p^2+25}$, obținem

$$= \frac{1}{10}\int_0^t (sin(5t) + sin(10u - 5t))du =$$

$$= \frac{1}{10}\left(sin(5t)u|_0^t - \frac{1}{10}cos(10u - 5t)|_0^t\right) = \frac{1}{10}tsin(5t).$$

2. $F(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p-2)}$.

Deoarece $\frac{1}{(p+1)^2} \leftrightarrow te^{-t}$ și $\frac{1}{p-2} \leftrightarrow e^{2t}$, atunci

$$F(p) \leftrightarrow \int_0^t ue^{-u}e^{2(t-u)}du = \int_0^t ue^{2t-3u}du = u\cdot\frac{1}{-3}e^{2t-3u}|_0^t + \frac{1}{3}\int_0^t e^{2t-3u}du =$$

$$= -\frac{1}{3}te^{-t} - \frac{1}{9}e^{2t-3u}|_0^t = -\frac{1}{3}te^{-t} - \frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}e^{2t}.$$

Notă:

$$\boldsymbol{\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} \leftrightarrow \int_0^\infty \mathcal{L}\{f(t)\}(p)dp}$$

Exemplu: Să se calculeze integrala

$$\int_0^\infty \frac{sinx}{x}dx.$$

Avem că

$$\int_0^\infty \frac{sinx}{x}dx = \int_0^\infty \mathcal{L}\{sint\}(p)dp = \int_0^\infty \frac{1}{p^2+1}dp = arctgp|_0^\infty = \frac{\pi}{2}$$

DETERMINAREA ORIGINALULUI

Vom menționa două metode de determinare a originalului, fiind cunoscută imaginea Laplace.

Teorema Mellin-Fourier: Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ o funcție original netedă pe porțiuni și $\boldsymbol{f(t)} \leftrightarrow \boldsymbol{F(p)}$, $Re\, p > \alpha_0$, atunci are loc formula de inversare Mellin-Fourier

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi i}\lim_{b\to\infty}\int_{a-ib\infty}^{a+ib} F(p)e^{pt}dp.}$$

Pentru orice punct $t>0$ de continuitate și $a>\alpha_0$. Dacă t este punct de discontinuitate pentru funcția f are loc

$$\boldsymbol{\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt}dp.}$$

Dacă presupunem că $F(p)$ are un număr finit de puncte singulare izolate: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ și $F(p)\to 0$ dacă $p\to\infty$, atunci $f(t)$ se calculează după formula

$$\boldsymbol{f(t) = \sum_{k=1}^{n} \underset{p=p_k}{\mathrm{Rez}}\left(F(p)e^{pt}\right).}$$

Teoremă (prima teoremă a dezvoltării): Dacă $F(p)$ este olomorfă în exteriorul unui disc cu centrul în origine, inclusiv în infinit, și fie

$$\boldsymbol{F(p) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}} = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \cdots + \frac{a_n}{p^{n+1}} + \cdots,\quad |p| > r,}$$

atunci $F(p)$ este imaginea originalului

$$\boldsymbol{f(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}t^n = a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{a_n}{n!}t^n + \cdots}$$

Exemplu. De determinat originalul $f(t)$ a imaginii Laplace $F(p) = ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$.

Avem $ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots,\quad |z|<1$. Atunci

$$F(p) = ln\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{p^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{1}{p^n} + \cdots, \left|\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{p}}\right| < 1, adică\ |\boldsymbol{p}| > \mathbf{1}.$$

Obținem

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2}\frac{t}{1!} + \frac{1}{3}\frac{t^2}{2!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{n!} + \cdots = \frac{1}{t}\left(t - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n!} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{t}\left(1 - \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} - \cdots + (-1)^n\frac{t^n}{n!} + \cdots\right)\right) = \frac{1}{t}(1-e^{-t}),\qquad t\geq 0.$$

Exemplu. Utilizând prima teoremă de dezvoltare, să se afle originalul $f(t)$ a imaginii Laplace $F(p)$:

1. $F(p) = \frac{1}{p} sin\left(\frac{1}{p}\right)$,
2. $F(p) = \frac{1}{p} e^{\frac{1}{p}}$,
3. $F(p) = \frac{6p^3+4p+1}{p^4+p^2}$

Teoremă (a doua teoremă a dezvoltării): Fie $F(p) = \frac{Q_m(p)}{R_n(p)}, m < n,$ o funcție rațională regulată ireductibilă și $p_1, p_2, \ldots, p_s$ rădăcinile polinomului $R_n(p)$ de multiplicitatea $m_1, m_2, \ldots, m_n$, unde $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n$. Dacă dezvoltarea în funcții raționale simple are forma

$$F(p) = \frac{A_{11}}{p-p_1} + \frac{A_{12}}{(p-p_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(p-p_1)^{m_1}} + \frac{A_{21}}{p-p_2} + \frac{A_{22}}{(p-p_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2m_1}}{(p-p_2)^{m_2}} +..$$

$$+\frac{A_{n1}}{p-p_s} + \frac{A_{n2}}{(p-p_s)^2} + \cdots + \frac{A_{nm_s}}{(p-p_s)^{m_s}} = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{m_s} \frac{A_{kl}}{(p-p_k)^l},\ A_{kl} \in \mathbb{C},$$

atunci funcția original se calculează după formula

$$f(t) = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{m_n} \frac{A_{kl} t^{l-1}}{(l-1)!} e^{p_k t}, \quad t \geq 0.$$

Notă. În practică se aplică formula

$$f(t) = \sum_{k=1}^{s} \underset{p=p_k}{Rez} \left(F(p) e^{pt}\right)$$

Corolar: Fie $F(p) = \frac{Q_m(p)}{R_n(p)}, m < n$, o fracție rațională ce admite doar poli simpli $p_1, p_2, \ldots, p_s$, atunci originalul este

$$\boldsymbol{f(t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{Q_m(p_k)}{R'_n(p_k)} e^{p_k t}}$$

Exemplu. Utilizând a doua teoremă de dezvoltare, să se afle originalul $f(t)$ a imaginii Laplace $F(p)$:

1. $F(p) = \frac{p-1}{p^2+3p}$,
2. $F(p) = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$,
3. $F(p) = \frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)}$

APLICAREA CALCULULUI OPERAȚIONAL LA REZOLVAREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE LINIARE CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

Fie ecuația diferențială liniară cu coeficienți reali

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = f(t),$$

unde $f(t)$ este funcție original. Există o singură soluție a ecuației care verifică condițiile inițiale

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ x'(0) = x_1, \\ \dots \\ x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}. \end{cases}$$

Se poate de arătat că dacă $x(t)$ este soluția problemei Cauchy, atunci funcția $x(t)$ este original.

Fie $X(p)$ imaginea Laplace a funcției $x = x(t)$.

Din teorema de derivare a originalului avem

$\boldsymbol{x(t) \leftrightarrow pX(p),}$

$\boldsymbol{x'(t) \leftrightarrow pX(p) - x_0,}$

$\boldsymbol{x''(t) \leftrightarrow p^2X(p) - [px_0 + x_1],}$

...

$\boldsymbol{x^{(n)}(t) \leftrightarrow p^nX(p) - [p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x_1 + \cdots + px_{n-2} + x_{n-1}]}$

Fie $F(p)$ este imaginea Laplace a funcției $f(t)$. Aplicând transformata Laplace asupra ecuației diferențiale $\boldsymbol{x^{(n)} + p_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + p_1x' + p_0x = f(t)}$, obținem ecuația algebrică în raport cu $X(p)$:

$$X(p) \cdot Q(p) + R(p) = F(p),$$

unde $\boldsymbol{Q(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1p + a_0 = 0}$, iar $\boldsymbol{R(p)}$ este un polinom de grad cel mult egal cu *n*-1. Atunci

$$X(p) = \frac{F(p) - R(p)}{Q(p)}, \quad Rep > M$$

unde *M* este destul de mare. Determinarea originalului $x(t)$ se face utilizând teoremele de bază, sau teoremele de dezvoltare.

Exemplu. De rezolvat ecuațiile diferențiale:

1. $\boldsymbol{x'' + x = t,\ x(0) = x'(0) = 1,}$
2. $\boldsymbol{x'' - 2x' = t^2e^t,\ x(0) = x'(0) = 0,}$
3. $\boldsymbol{x'' - 3x' + 2x = te^{3t},\ x(1) = x'(1) = 1.}$

Rezolvare:

1. Avem

$\boldsymbol{x(t) \leftrightarrow pX(p)},$

$\boldsymbol{x'(t) \leftrightarrow pX(p) - 1},$

$\boldsymbol{x''(t) \leftrightarrow p^2X(p) - p - 1},$

$\boldsymbol{t \leftrightarrow \frac{1}{p^2}}.$

Aplicând transformata Laplace asupra ecuației diferențiale, obținem ecuația algebrică:

$$\boldsymbol{p^2X(p) - p - 1 + X(p) = \frac{1}{p^2}}.$$

Atunci

$$\boldsymbol{(p^2+1)X(p) = \frac{1}{p^2} + p + 1 \Leftrightarrow X(p) = \frac{1}{p^2+1}\left(\frac{1}{p^2} + p + 1\right) =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{1}{p^2+1}\left(\frac{1+p^2}{p^2} + p\right) = \frac{1}{p^2} + \frac{p}{p^2+1}}.$$

Deoarece

$$\boldsymbol{\frac{1}{p^2} \leftrightarrow t, \frac{p}{p^2+1} \leftrightarrow cost},$$

Obținem că $x(t) = t + cost$.

2. Avem

$\boldsymbol{x(t) \leftrightarrow pX(p)},$

$\boldsymbol{x'(t) \leftrightarrow pX(p)},$

$\boldsymbol{x''(t) \leftrightarrow p^2X(p)},$

$\boldsymbol{t^2e^t \leftrightarrow \frac{2}{(p-1)^3}}.$

Aplicând transformata Laplace asupra ecuației diferențiale, obținem ecuația algebrică:

$$\boldsymbol{p^2X(p) - 2pX(p) = \frac{2}{(p-1)^3}}.$$

Atunci

$$\boldsymbol{(p^2-2p)X(p) = \frac{2}{(p-1)^3} \Leftrightarrow X(p) = \frac{1}{p^2-2p} \cdot \frac{2}{(p-1)^3} =}$$

$$\boldsymbol{= \frac{2}{p(p-2)(p-1)^3}}.$$

Vom utiliza

$$x(t) = \sum_{k=1}^{s} \underset{z=p_k}{Rez}\left(F(p)e^{pt}\right),$$

adică

$$\boldsymbol{x(t)=\sum_{k=1}^{s}\underset{p=p_k}{Rez}\left(\frac{2}{p(p-2)(p-1)^3}e^{pt}\right)}$$

Deoarece punctele singulare sunt $\boldsymbol{p=0}$, $\boldsymbol{p=2}$, $\boldsymbol{p=1.}$ Avem că $\boldsymbol{p=0}$ și $\boldsymbol{p=2}$ sunt poli simpli, iar $\boldsymbol{p=1}$ este pol de ordinul 3.

Vom calcula reziduurile funcției $\boldsymbol{G(p)=\frac{2}{p(p-2)(p-1)^3}e^{pt}}$.

$$\boldsymbol{\underset{p=0}{\mathrm{Rez}}G(p)=\lim_{z\to z_0}\frac{2}{p(p-2)(p-1)^3}e^{pt}p=\lim_{z\to z_0}\frac{2}{(p-2)(p-1)^3}e^{pt}=1},$$

$$\boldsymbol{\underset{p=2}{\mathrm{Rez}}G(p)=\lim_{z\to z_0}\frac{2}{p(p-2)(p-1)^3}e^{pt}(p-2)=\lim_{z\to z_0}\frac{2}{p(p-1)^3}e^{pt}=e^{2t}}$$

$$\boldsymbol{\underset{z=1}{Rez}G(p)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\left(\frac{2}{p(p-2)(p-1)^3}e^{pt}(p-1)^3\right)''=\frac{1}{2!}\lim_{z\to1}\left(\frac{2}{p(p-2)}e^{pt}\right)''}$$

$$\boldsymbol{=\frac{1}{2}\lim_{z\to1}\left(\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p}\right)e^{pt}\right)''_{z\to1}=}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\lim_{p\to1}\left(\left(\frac{2}{(p-2)^3}-\frac{2}{p^3}+2t\left(-\frac{1}{(p-2)^2}+\frac{1}{p^2}\right)+\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p}\right)t^2\right)e^{pt}\right)=-2e^t-t^2e^t}$$

Astfel $\boldsymbol{x(t)=1+e^{2t}-2e^t-t^2e^t}$.

3. Deoarece momentul inițial este $t=1$, și nu $t=0$, vom face substituția $\tau=t-1$, adică $t=\tau+1$, iar $\boldsymbol{x(t)}=\boldsymbol{x}(\tau+1)=\boldsymbol{y}(\tau)$. Atunci avem problema Cauchy

$$\boldsymbol{y''-3y'+2y}=(\tau+1)\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{3}(\tau+1)},\qquad \boldsymbol{y(0)=y'(0)=1}.$$

Sau $\boldsymbol{y''-3y'+2y=(\tau+1)e^{3\tau}e^3}$.

$\boldsymbol{y(\tau)\leftrightarrow Y(p)}$,

$\boldsymbol{y'(\tau)\leftrightarrow pY(p)-1}$,

$\boldsymbol{y''(\tau)\leftrightarrow p^2Y(p)-p-1}$,

$\boldsymbol{(\tau+1)e^{3\tau}e^3\leftrightarrow e^3\left(\frac{1}{(p-3)^2}+\frac{1}{p-3}\right)=e^3\frac{p-2}{(p-3)^2}}$.

Obținem ecuația algebrică

$$\boldsymbol{p^2Y(p)-p-1-3(pY(p)-1)+2Y(p)=e^3\frac{p-2}{(p-3)^2}}\Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{(p^2-3p+2)Y(p)-p+2\ =e^3\frac{p-2}{(p-3)^2}}\Leftrightarrow$$

$$(p-1)(p-2)Y(p)-(p-2)=e^3\,\frac{p-2}{(p-3)^2}\Leftrightarrow$$

$$(p-1)Y(p)-1=e^3\,\frac{1}{(p-3)^2}\Leftrightarrow Y(p)=e^3\,\frac{1}{(p-1)(p-3)^2}+\frac{1}{p-1}$$

Avem că $\frac{1}{(p-1)(p-3)^2}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{(p-3)^2}+\frac{C}{p-3}=\frac{A(p-3)^2+B(p-1)+C(p-3)(p-1)}{(p-1)(p-3)^2}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{4}\\ B=\frac{1}{2}\\ C=-\frac{1}{4}\end{cases}$

și $Y(p)=e^3\left(\frac{1}{4}\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(p-3)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{p-3}\right)+\frac{1}{p-1}$, de unde

$$y(\tau)=e^3\left(\frac{1}{4}e^{\tau}+\frac{1}{2}\tau e^{3\tau}-\frac{1}{4}e^{3\tau}\right)+e^{\tau}.$$

Deci

$$x(t)=e^3\left(\frac{1}{4}e^{t-1}+\frac{1}{2}(t-1)e^{3(t-1)}-\frac{1}{4}e^{3(t-1)}\right)+e^{t-1}=$$

$$\left(=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{e}\right)e^t+\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\right)e^{3t}$$