TEMA 1: MULȚIMEA NUMERELOR COMPLEXE

Fie mulțimea $\mathbb{C} = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Vom defini pe $\mathbb{C}$ operațiile:

- de adunare: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$,
- de înmulțire: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2,\ x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$.

Definiție: Mulțimea $\mathbb{C}$ înzestrată cu operațiile de mai sus se numește **mulțimea numerelor complexe.** Un element al acestei mulțimi se numește **număr complex**.
Numerele complexe se notează cu z, u, v, w etc.

Considerăm în $\mathbb{C}$ submulțimea $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$. Atunci este evident izomorfismul $\mathbb{R} \times \{0\} \cong \mathbb{R}$. Putem nota $(x, 0) = x$.
Observăm că $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1$. Fie numărul complex $i = (0,1)$. Atunci $i^2 = i \cdot i = -1$. De unde $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0,1) \cdot (y, 0) = x + i \cdot y$. Deci, putem scrie $z = x + i \cdot y$.

Definiție: Expresia $\boldsymbol{x + i \cdot y}$ se numește **formă algebrică** a numărului complex $(x, y) \in \mathbb{C}$.
Astfel, $\mathbb{C} = \{\ \boldsymbol{x + i \cdot y} \mid x, y \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\ \}$.
i - unitate imaginară,
$x = Re\, z$ - **partea reală** a numărului complex z ,
$y = Im\, z$ - **parte imaginară** a numărului complex z,
$\bar{z} = \overline{x + i \cdot y} = x - i \cdot y$ - **conjugatul** lui z.

Operații cu numere complexe în formă algebrică

Fie $z_1 = x_1 + i \cdot y_1$ și $z_2 = x_2 + i \cdot y_2$
Suma: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i \cdot (y_1 + y_2)$,
Diferența: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i \cdot (y_1 - y_2)$,
Produsul: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$
Câtul: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$, $(z_2 \neq 0\ )$

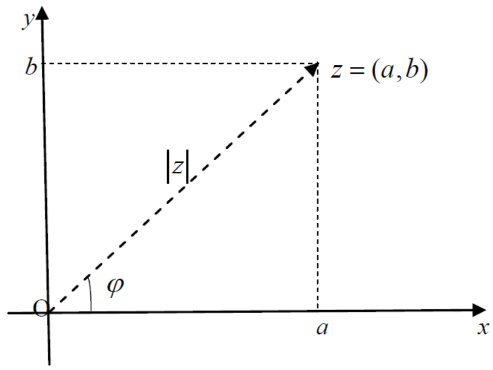
Pentru $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avem $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 \end{cases}$.

Modulul numărului complex $z = x + i \cdot y$**:** numărul real $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Proprietăți:
1. $|z| = 0_{\mathbb{R}} \Leftrightarrow z = 0_{\mathbb{C}}$;
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
3. $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
4. pentru $z \in \mathbb{C}$ avem $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$;
5. $|z| = |\bar{z}|, \ \forall z \in \mathbb{C}$;
6. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
7. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
8. $\bar{\bar{z}} = z, \ \forall z \in \mathbb{C}$;

9. $z \cdot \overline{z} = |z|^2, \ \forall z \in \mathbb{C};$

Forma trigonometrică a numerelor complexe

Fie că în plan este fixat un sistem cartezian rectangular de coordonate. Atunci fiecare număr complex $z = a + i \cdot b$ poate fi reprezentat ca un punct cu coordonatele (a, b). Reciproc, oricărui punct din plan îi corespunde un număr complex, numit ***afixul*** punctului respectiv. Planul în care sunt reprezentate numerele complexe, se numește ***plan complex***, axa Ox - ***axă reală***, Oy - ***axă imaginară***. Numărul z se mai reprezintă printr–un vector cu punctul de aplicație în originea sistemului de coordonate și extremitatea în punctul $z = (a, b)$.



Pentru $z \neq 0$, fie $\varphi \in (-\pi, \pi]$ unghiul format de direcția pozitivă a axei Ox cu raza vectoare a punctului din plan $z = (a, b)$. Atunci $\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}$ și $\sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}$. Unghiul φ există și este unic și

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Definiție. Scrierea $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in (-\pi, \pi]$ este numită ***formă trigonometrică*** a numărului complex nenul z, iar φ se numește ***argument redus*** (sau principal) al lui z. Se notează $\varphi = \arg z$.

Putem determina $\arg z$, $z \neq 0$ după una dintre formulele:

$$\arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, \ dacă \ x > 0 \\ \pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, \ \ dacă\, x < 0, \ y \geq 0; \\ -\pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, \ dacă\, x < 0, \ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \ dacă\, x = 0, \ y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \ dacă \ x = 0, \ y < 0. \end{cases} \quad \text{sau} \quad \arg z = \begin{cases} \arccos\dfrac{a}{|z|}, \ b \geq 0 \\ -\arccos\dfrac{a}{|z|}, \ b < 0. \end{cases}$$

Notă: Pentru $z = 0$ se consideră ca valoarea lui $\arg z$ poate fi luată oricare (nu este bine determinată).

În general, există o infinitate de valori θ, astfel încât $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Evident, $\theta = \arg z + 2\pi k, \ \ k \in \mathbb{Z}$.

Notăm $Arg\, z = \{\mathbf{arg}\, z + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Dacă $z = a + ib, \ a \neq 0$, atunci $arctg\,\dfrac{b}{a} \in Arg\, z$.

Notă: În mulțimea $\mathbb{C}$ nu putem vorbi despre numere pozitive și numere negative, de comparare în sens ”mai mare” sau ”mai mic” folosit în mulțimea numerelor reale.

Dacă $z_1=|z_1|(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=|z_2|(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, atunci

$$z_1\cdot z_2=|z_1|\cdot|z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)),\ z_2\neq 0.$$

Teoremă. $Arg(z_1\cdot z_2)=Arg\,z_1+Arg\,z_2$; $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=Arg\,z_1-Arg\,z_2$.

De mai sus rezultă că, dacă $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, atunci:

1. $\frac{1}{z}=\frac{1}{|z|}(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)),\ z\neq 0.$
2. $z^n=|z|^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)),\ n\in N$ - formula lui Moivre.
3. $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$, $k=\overline{0,n-1}$, $n\in \mathrm{N}$, $n\geq 2$..

EXERCIȚII REZOLVATE

1. **De calculat:** a) $(2-i)^3$; b) $\frac{-3+i}{(1+2i)(1-i)}$; c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{2021}$.

Rezolvare: a) $(2-i)^3=8-3\cdot4\cdot i+3\cdot2\cdot i^2-i^3=8-12i-6+i=2-11i.$

b) $\frac{-3+i}{(1+2i)(1-i)}=\frac{-3+i}{3+i}=\frac{(-3+i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{-8+6i}{10}=-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i.$

c) Avem că $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}-3\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}i+3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{4}i^2-\frac{1}{8}i^3=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{9}{8}i-\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{8}i=-i.$

Deci, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{2021}=\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^3\right]^{673}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^2=(-i)^{673}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$

2. **De calculat:** a) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{2021}$; b) $\sqrt[4]{-81}$, folosind forma trigonometrică a numărului complex.

Rezolvare: a) Fie $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$ Atunci $|z|=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$; $\arg z=-\arccos\frac{\sqrt{3}/2}{1}=-\frac{\pi}{6}.$ folosind formula Moivre, avem:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{2021}=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{2021}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\cdot2021\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\cdot2021\right)=$$

$$=\cos\left(336\pi+\frac{5\pi}{6}\right)-i\sin\left(336\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i.$$

b) Fie $z=-81$, $|z|=81$, $\arg z=\arccos\left(\frac{-81}{81}\right)=\arccos(-1)=\pi.$

$$\sqrt[4]{-81}=\sqrt[4]{81}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),\ k=\overline{0,3}.$$

Obținem valorile:

$$z_0=3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$z_1=3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+i\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$z_2=3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$z_3=3\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}-i\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

3. Să se scrie sub formă trigonometrică $\left(\frac{1+i\,tg\alpha}{1-i\,tg\alpha}\right)^n$.

Rezolvare: $\left(\frac{1+i\,tg\alpha}{1-i\,tg\alpha}\right)^n=\left(\frac{1+i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\right)^n=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n}{(\cos\alpha-i\sin\alpha)^n}=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n}{(\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha))^n}=$

$$=\frac{\cos n\alpha+i\sin n\alpha}{\cos(-\alpha n)+i\sin(-n\alpha)}=\cos(2n\alpha)+i\sin(2n\alpha).$$

4. Să se scrie forma trigonometrică a numărului complex $(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$, $0\le\varphi\le\pi$.

Rezolvare: $1+\cos\varphi+i\sin\varphi=2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2i\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$. Deoarece $0\le\frac{\varphi}{2}\le\frac{\pi}{2}$, atunci $2\cos\frac{\varphi}{2}$ este modulul numărului complex $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$. Prin urmare,

$$(1+\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=2^n\cos^n\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{n\varphi}{2}+i\sin\frac{n\varphi}{2}\right).$$

ELEMENTE DE TOPOLOGIE

Ecuația dreptei ce trece prin două puncte date.

Fie punctele M_1 și M_2 din plan de afixe z_1 și z_2. Dacă M este un punct arbitrar al dreptei M_1M_2, iar afixul lui M este z, atunci $\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=t\in\mathbb{R}$ și reciproc. Astfel, ecuația canonică a dreptei M_1M_2 în formă complexă este $z=(z_2-z_1)t+z_1$ sau $z=(1-t)z_1+tz_2,\ \ t\in\mathbb{R}$.

Ecuația segmentului M_1M_2 este $z=(1-t)z_1+tz_2,\ \ t\in[0;1]$. Deseori se notează: $[z_1z_2]=\{(1-t)z_1+tz_2\ \mid\ t\in[0;1]\}$.

Fie $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat, iar $r > 0$. Vom considera mulțimile:

$C(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \| z - z_0| = r\}$ - ***cerc de centru*** z_0 ***și rază r;***

$U(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \| z - z_0| < r\}$ - ***disc deschis de centru*** z_0 **și rază *r;***

$\bar{U}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \| z - z_0| \le r_2\}$ - ***disc închis de centru*** z_0 ***și rază r;***

$U(z_0, r_1, r_2) = \{\mathbb{Z} \in \mathbb{C} | r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ - **coroană circulară de centru** z_0 **și raze** r_1, r_2 **cu** $0 < r_1 < r_2$.

Definiție:

1. Fie $z_0 \in \mathbb{C}$. Se numește ***vecinătate a lui*** z_0 orice mulțime nevidă $V \subset \mathbb{C}$, dacă există $r > 0$, astfel încât $U(z_0, r) \subseteq V$.
2. O mulțime $G \subset \mathbb{C}$ se numește ***deschisă***, dacă pentru orice $z_0 \in G$, există $r > 0$ astfel încât $U(z_0, r) \subseteq G$.
3. Mulțimea G se numește ***închisă***, dacă mulțimea $\mathbb{C} \setminus G$ este deschisă.
4. Mulțimea $K \subset \mathbb{C}$ se numește ***compactă***, dacă este închisă și mărginită: $\exists M > 0$ astfel încât $|z| \le M$, $\forall z \in K$.
5. Mulțimea G se numește ***domeniu***, dacă este deschisă și orice două puncte din G pot fi unite cu o linie frântă care se conține în D.

ȘIRURI DE NUMERE COMPLEXE

Definiție. Vom spune că șirul de numere complexe $(z_n)_{n \in N}$ se numește **convergent către numărul complex *w***, dacă pentru $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in N$, astfel încât $|z_n - w| < \varepsilon$, pentru $\forall n \in N$, $n \ge n_\varepsilon$. Se scrie $\lim_{n \to \infty} z_n = w$.

Teoremă. Fie șirul de numere complexe $(z_n)_{n \in N}$, $z_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ și $w = u + iv$. Atunci $\lim_{n \to \infty} z_n = w$, dacă și numai dacă $\lim_{n \to \infty} x_n = u$, $\lim_{n \to \infty} y_n = v$.

Demonstrație. Fie $\lim_{n \to \infty} z_n = w$. Atunci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \ge n_\varepsilon$, astfel încât $|z_n - w| < \varepsilon$. Rezultă că

$$\sqrt{(x_n - u)^2 + (y_n - v)^2} < \varepsilon \Rightarrow |x_n - u| < \varepsilon \text{ și } |y_n - v| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = u \text{ și } \lim_{n \to \infty} y_n = v.$$

Fie $\lim_{n \to \infty} x_n = u$, $\lim_{n \to \infty} y_n = v$. Rezultă $|x_n - u| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $|y_n - v| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, $\forall n \ge n_\varepsilon$

$$\Rightarrow |z_n - w| = \sqrt{(x_n - u)^2 + (y_n - v)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \to \infty} z_n = w.$$

Exemple: Determinați $\lim_{n \to \infty} z_n$, unde

1. $z_n = \frac{\sin n}{n} + i(n+1)^{\frac{1}{n}}$.

Avem că $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0;\ \lim_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$. Deci, $\lim_{n\to\infty}z_n=0+i\cdot 1=i$.

2. $z_n=n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+i\frac{(n+1)}{n}$. Avem că $\lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$

Deci, $\lim_{n\to\infty}z_n=1+i.$

3. $z_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)^n$. Avem că $z_n=\frac{1}{\sqrt{2}^n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot n\right)\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\sqrt{2}^n}=0;\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\sqrt{2}^n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}z_n=0.$$

Teoremă. Dacă $\lim_{n\to\infty}z_n=a,\ \lim_{n\to\infty}w_n=b,$ atunci:

1. $\lim_{n\to\infty}(z_n\pm w_n)=a\pm b,$
2. $\lim_{n\to\infty}(z_n\cdot w_n)=a\cdot b,$
3. $\lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n}=\frac{a}{b},\ b\neq 0.$

În mod similar mulțimii $\mathbb{R}$, prin completarea cu $-\infty$ și $+\infty$, obținem dreapta încheiată $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, mulțimea $\mathbb{C}$ se completează cu un singur punct-simbol ∞, obținând planul $\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, numit ***plan complex extins*** sau ***planul lui Gauss***. Simbolul ∞ se numește ***număr complex impropriu***.

În $\mathbb{C}_\infty$ nu se folosesc simbolurile $-\infty$ sau $+\infty$. Operațiile cu simbolul ∞:

$\infty+a=a+\infty=\infty,\ a\in\mathbb{C},$

$\infty\cdot a=a\cdot\infty=\infty,\ a\in\mathbb{C}_\infty/\{0\},$

$\frac{a}{0}=\infty,\ a\in\mathbb{C}_\infty/\{0\};\ \frac{a}{\infty}=0,\ a\in\mathbb{C}.$

Definiție: Prin ***vecinătate a lui*** ∞ se consideră orice mulțime $V\subset\mathbb{C}_\infty$, care conține exteriorul unui disc. Adică V este vecinătate a lui ∞, dacă $\exists\varepsilon>0$, astfel încât $\mathbb{C}\setminus U(0,\varepsilon)\subset V.$

Definiție: Dacă pentru $\forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$, astfel încât pentru $\forall n>n_\varepsilon,\ |z_n|>\varepsilon,$ atunci se spune că **șirul** (z_n) **converge la** ∞. Se scrie $\lim_{n\to\infty}z_n=\infty.$

Teoremă. Fie șirul $(z_n)_{n\in N}$. Atunci $\lim_{n\to\infty}z_n=\infty$, dacă și numai dacă $\lim_{n\to\infty}|z_n|=+\infty.$

TEMA 2: FUNCȚII DE VARIABILĂ COMPLEXĂ

2.1. Limita și continuitatea pentru funcții complexe

Definiție 2. Vom spune că pe mulțimea $D \subseteq \mathbb{C}$ **este definită funcția de variabilă complexă** $w = f(z)$, dacă fiecărui punct $z \in D$ i se pune în corespondență un punct $w \in \mathbb{C}$ sau o totalitate de puncte $w \in \mathbb{C}$.

În cazul când *w* este unic, funcția *f* se numește ***univocă***, iar în cazul unei totalități de puncte *w*, funcția *f* se numește ***multivocă***.

Exemple: $f(z) = 3z^2 - iz + 5i - 2,\ g(z) = \mathrm{Re}(z^2) - \bar{z},\ h(z) = \sqrt{z}$

Funcțiile *f, g* sunt univoce, iar *h* este funcție multivocă.

Notă:

1. Funcțiile univoce se notează cu $f: D \to \mathbb{C},$ iar funcțiile *multivoce* (mai numite și funcții *multiforme*) se notează cu $f: D \to P(\mathbb{C}),$ unde $P(\mathbb{C})$ este mulțimea părților mulțimii $\mathbb{C}$.
2. Fie $f: D \to \mathbb{C}$. Atunci $f(z) = f(x+yi) = U(x,y) + iV(x,y),$ cu $U, V: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se notează ***Re*** $f = U$, ***Im*** $f = V$. Astfel definirea funcției de variabilă complexă este echivalentă cu definirea a două funcții de două variabile reale.

Exemplu.

1. Pentru $f(z) = 3z^2 - iz + 5i - 2,$ avem

$$f(x+yi) = 3(x+yi)^2 - i(x+yi) + 5i - 2 = (3x^2 - 3y^2 + y - 2) + i(6xy - x + 5).$$

Atunci, $U(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + y - 2,\ V(x,y) = 6xy - x + 5.$

3. Pentru $g(z) = \mathrm{Re}(z^2) - \bar{z}$, avem

$$g(x+iy) = \mathrm{Re}(x^2 - y^2 + i2xy) - (x - yi) = (x^2 - y^2 - x) + yi.\ \ \mathrm{Re}\, g = x^2 - y^2 - x; \quad \mathrm{Im}\, g = y.$$

Vom ajusta în continuare definiții cunoscute din cazul real în contextul funcțiilor complexe.

Definiția 2.1. (cu șiruri) Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ nevidă și $z_0 \in \mathbb{C}$ un punct de acumulare pentru *D*. Spunem că funcția $f: D \to \mathbb{C}$ ***are limită în punctul*** z_0 egală cu $l \in \mathbb{C},$ dacă pentru orice șir $(z_n)_{n \in N^*} \subset D,\ z_n \neq z_0$ cu $z_n \to z_0$ avem $f(z_n) \to l.$ Se scrie $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l.$

Dacă ∞ este punct de acumulare pentru *D*, spunem că funcția *f* ***are limită la*** ∞ egală cu l_∞, dacă pentru orice șir de numere complexe $(z_n)_{n \in N}$ cu $z_n \in D,\ z_n \to \infty$ avem $f(z_n) \to l_\infty$.

Se scrie $\boldsymbol{\lim\limits_{z \to \infty} f(z) \overset{not}{=} f(\infty) = l_\infty}$.

Definiția 2.2 (cu vecinătăți) Fie funcția $f: D \to \mathbb{C},\ z_0 \in \mathbb{C}$ - punct de acumulare pentru *D*. Spunem că funcția ***f are limită în*** z_0 egală cu *l*, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0,$ astfel încât inegalitatea $0 < |z - z_0| < \delta$ implică inegalitatea $|f(z) - l| < \varepsilon.$

Teoremă. Fie $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = f(x+yi) = U(x,y) + iV(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ este punct de acumulare pentru *D*. Atunci $\lim_{z \to z_0} f(z) = a + ib$, dacă și numai dacă $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} U(x,y) = a$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} V(x,y) = b$.

Demonstrație: Fie $z_n \to z_0, z_n \neq z_0$, $z_n = x_n + iy_n$. Atunci $\lim_{z \to z_0} f(z) = a + ib$ implică

$f(z_n) \to a + ib \Rightarrow f(z_n) = U(x_n, y_n) + iV(x_n, y_n) \to a + ib$. Din teorema respectivă de la șiruri, avem $U(x_n, y_n) \to a$, $V(x_n, y_n) \to b$, și reciproc.

Proprietăți:

I. Fie $f, g: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, z_0 - punct de acumulare pentru *D*. Dacă există $\lim_{z \to z_0} f(z) = l_1$, $\lim_{z \to z_0} g(z) = l_2$ cu $l_1, l_2 \in \mathbb{C}$, atunci:

1. Există $\lim_{z \to z_0} (\alpha f + \beta g)(z) = \alpha \cdot l_1 + \beta \cdot l_2$, oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
2. Există $\lim_{z \to z_0} (fg)(z) = l_1 \cdot l_2$;
3. Dacă $g(z) \neq 0$ într-o vecinătate a lui z_0 și $l_2 \neq 0$, atunci există $\lim_{z \to z_0} \left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{l_1}{l_2}$.

II. Dacă $f: D \subseteq \mathbb{C} \to E \subseteq \mathbb{C}$, $g: E \to \mathbb{C}$, z_0 este punct de acumulare pentru *D* și există $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$, iar *l* este punct de acumulare pentru $f(D)$, cu $f(z) \neq l$ p-e vecinătate a lui z_0 și există $\lim_{w \to l} f(w) = l_1$, atunci $g \circ f: D \to \mathbb{C}$ are limită în z_0 și $\lim_{z \to z_0} (g \circ f)(z) = l_1$.

Definiția 2.3. Fie $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Funcția *f* se numește ***continuă în*** z_0 dacă pentru orice șir $(z_n)_{n \in N^*} \in D$, $z_n \to z_0$ avem $f(z_n) \to f(z_0)$.

Teoremă. Fie $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, z_0 este punct de acumulare pentru *D*. Atunci *f* este continuă în z_0, dacă și numai dacă există $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât inegalitatea $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ implică inegalitatea $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Proprietăți:

1. Dacă $f, g: D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ și *f*, *g* sunt continue în z_0, atunci $f + g$ și $f \cdot g$ sunt continue în z_0. Dacă în plus $g(z_0) \neq 0$, atunci funcția $\dfrac{f}{g}$ este continuă în z_0.
2. Dacă $f: D \subseteq \mathbb{C} \to E \subseteq \mathbb{C}$, $g: E \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, *f* este continuă în z_0 și *g* continuă în $w_0 = f(z_0)$, atunci funcția $g \circ f: D \to \mathbb{C}$ este continuă în z_0.

Teoremă: Fie $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+y_i) = U(x,y) + iV(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Funcția f este continuă în z_0 dacă și numai dacă U și V sunt continui în (x_0, y_0).

Funcții complexe elementare

1. Fie $n \in N^*$ și $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$.

Aplicația $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dată de $\boldsymbol{P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}$, se numește ***funcție polinomială*** (de grad n). Avem $\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0)$, pentru orice $z_0 \in \mathbb{C}$ și $\lim_{z \to \infty} P(z) = \infty$.

Caz particular: funcția putere $f(z) = z^n$.

2. Fie funcțiile polinomiale $P, Q: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Aplicația $R: \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \ldots z_m\} \to \mathbb{C}$, $\boldsymbol{R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}}$, se numește ***funcție rațională,*** unde P și Q sunt funcții polinomiale, iar $z_1, z_2, \ldots, z_m$ sunt rădăcinile lui Q, adică $Q(z_k) = 0$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, și $Q(z) \neq 0$ pentru $z \notin \{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$.

Caz particular: $f: C^* \to \mathbb{C}$,, $\boldsymbol{f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)}$ - **funcția Iucovschi.**

3. Prin ***funcție complexă exponențială*** se înțelege funcția $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\boldsymbol{\exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y)}$. Se notează prin $\boldsymbol{e^z}$.

Deci, $\boldsymbol{e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \sin y)}$.

Notă:

1. Pentru $\boldsymbol{x = 0}$: $\boldsymbol{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$ - **formula lui Euler.**
2. Folosind formula lui Euler avem că $z = \boldsymbol{|z|(\cos\varphi + \sin\varphi) = |z| e^{i\varphi}}$, unde $\varphi = \arg z$.

Proprietăți:

1. $\exp|_{\mathbb{R}}$ coincide cu funcția exponențială reală, (adică pentru $y = 0$, $e^z = e^x$).
2. **exp** este periodică de perioadă principală $2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z$.

Într-adevăr, $e^{z+2\pi i} = e^{x+(y+2\pi)i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$. Mai mult $\exp(z + 2\pi k i) = \exp z \left(e^{z+2\pi k i} = e^z\right)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

3. $\exp(2\pi i) = 1$ $\left(e^{2\pi i} = 1\right)$; $\exp(\pi i) = -1$ $\left(e^{\pi i} = -1\right)$.

   $e^{\pi i} + 1 = 0$ - faimoasa identitate a lui Euler.
4. $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$ – $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.
5. $\exp(z_1 - z_2) = \exp z_1 : \exp z_2$ – $e^{z_1 - z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$.
6. $\lim_{z \to z_0} e^z = e^{z_0}$, $\forall z_0 \in \mathbb{C}$. Întrucât funcția exponențială este periodică, nu există $\lim_{z \to \infty} e^z$.

Exemple:

1. $e^{2 - \frac{\pi}{2} i} = e^2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\frac{\pi}{2} \right) = i \cdot e^2;$

2. $e^{5i} = \cos 5 + i\sin 5.$

3. De determinat partea reală și cea imaginară a funcției $f(z) = e^{(\bar{z}+3i)^2}$.

Rezolvare. Cum $(\bar{z}+3i)^2 = (x+(3-y)i)^2 = x^2-(3-y)^2+2x(3-y)i$, avem $e^{(\bar{z}+3i)^2} = e^{x^2-(3-y)^2}\cdot e^{2x(3-y)i} = e^{x^2-(3-y)^2}(\cos(2x(3-y))+i\sin(2x(3-y)))$.

Prin urmare, $\operatorname{Re} f = e^{x^2-(3-y)^2}\cos(6x-2xy)$ și $\operatorname{Im} f = e^{x^2-(3-y)^2}\sin(6x-2xy)$.

4. Funcția logaritm

Fie $z\in\mathbb{C}^*$. Să rezolvăm ecuația $e^w = z$. Fie $w = x+yi$, $z = |z|e^{i\varphi}$. Obținem $e^{x+iy} = |z|e^{i\varphi}$, de unde $e^x\cdot e^{iy} = |z|e^{i\varphi}$, respectiv $e^x = |z|$ și $y = \varphi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$ Astfel, $w = \ln|z| + i(\varphi+2\pi k),\ k\in\mathbb{Z}.$

Fie $P(\mathbb{C})$ mulțimea părților (submulțimilor) lui $\mathbb{C}$, iar $D\subseteq\mathbb{C}$ o mulțime nevidă.

Definiție: Aplicația $\boldsymbol{Ln}: \mathbb{C}^* \to \boldsymbol{P}(\mathbb{C})$, dată de $\boldsymbol{Ln(z)} = \{\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)\ |k\in\mathbb{Z}\}$ se numește ***funcție logaritmică***. Valorile funcției le vom nota cu Lnz.

Deci, $Lnz = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k\in\mathbb{Z}$ sau $Lnz = \ln|z| + iArgz.$

Aplicația $\ln:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ dată de $\mathbf{ln(z) = ln|z| + iargz}$ se numește ***ramură principală*** a funcției Ln (pentru $k=0$ sau ***logaritm principal***).

Proprietăți:

$Ln(z_1\cdot z_2) = Lnz_1 + Lnz_2,\ \ z_1,z_2\in\mathbb{C}^*.$

$Ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = Lnz_1 - Lnz_2,\ \ z_1,z_2\in\mathbb{C}^*.$

$Lnz^n = n\cdot Lnz,\ \ z\in\mathbb{C}^*,\ n\in N.$

$Lnz^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}Lnz,\ \ z\in\mathbb{C}^*,\ n\in N^*.$

5. Funcția putere cu exponent complex

Fie $\alpha\in\mathbb{C}.$ Aplicația $z\in\mathbb{C}^*\to z^\alpha\in P(\mathbb{C})$ dată de $\boldsymbol{z^\alpha = e^{\alpha\cdot Ln(z)}}$ se numește ***funcția putere.***

Funcția putere este univocă.

Exemplu: $1^i = e^{iLn1} = e^{i2\pi ki} = e^{2\pi k},\ \ k\in\mathbb{Z};$

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^i = e^{iLn(1-i\sqrt{3})} = e^{i(\ln 2+(-\frac{\pi}{6}+2\pi k)i)} = e^{\frac{\pi}{6}+2\pi k}\left(\cos 2 + i\sin 2\right),\ \ k\in\mathbb{Z}.$$

Notă: Proprietățile "obișnuite" ale funcției putere din cazul real nu se aplică variantei complexe. Regula $z^\alpha\cdot w^\alpha = (z\cdot w)^\alpha$ nu este valabilă pentru orice $z,w\in\mathbb{C}^*$ și $\alpha\in\mathbb{C}.$ De exemplu: $(-1)^i\cdot(-1)^i = 1^i = e^{iLn1} = e^{i2\pi ki} = e^{2\pi k},\ \ k\in\mathbb{Z}.$ Pe de altă parte,

$$(-1)^i\cdot(-1)^i = e^{iLn(-1)}\cdot e^{iLn(-1)} = e^{i(\ln 1+i(\pi+2\pi k))}\cdot e^{i(\ln 1+i(\pi+2\pi n))} = e^{-\pi+2\pi k}\cdot e^{-\pi+2\pi n} = e^{-2\pi+2\pi(n+k)},\ \ k,n\in\mathbb{Z}.$$

6. Funcțiile trigonometrice

Prin definiție funcțiile sinus, cosinus, tangentă sunt:

$\sin:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ \boldsymbol{\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}},$ $\cos:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ \boldsymbol{\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}}.$

$tg:\mathbb{C}\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{C},\ \boldsymbol{tg(z)=\frac{\sin z}{\cos z}},$ $ctg:\mathbb{C}\setminus\{\pi k|k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{C},\ \boldsymbol{ctg(z)=\frac{\cos z}{\sin z}}.$

Proprietăți

1. Restricțiile funcțiilor $\sin|_{\mathbb{R}}$ și $\cos|_{\mathbb{R}}$ sunt funcțiile studiate în $\mathbb{R}$.
2. Au loc:

$\sin^2 z+\cos^2 z=1,\ \forall z\in\mathbb{C}$

$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\cdot\sin z_2,\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C},$

$\cos(2z)=\cos^2 z-\sin^2 z$

$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\sin z_2\cos z_1,\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C},$

$\sin(2z)=2\sin z\cos z.$

3. Valorile modulului lui $\sin z$ și $\cos z$ pot fi mai mari decât 1.

Exemple:

1. $\sin(2i)=\dfrac{e^{-2}-e^{2}}{2i}=\dfrac{e^{2}-e^{-2}}{2}i\,(=ish2).$
2. $\cos(\pi+2i)=\cos\pi\cos 2i-\sin\pi\sin 2i=-\cos 2i=-\dfrac{e^{-2}+e^{2}}{2}=-ch2.$
3. $|\sin 2i|=\dfrac{e^{2}-e^{-2}}{2}>1.$

7. Funcțiile trigonometrice inverse

Fie $z\in\mathbb{C}$ fixat. Să determinăm $w\in\mathbb{C}$, astfel încât $\sin w=z$. Din definiția sinusului, obținem $\dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}=z\Leftrightarrow e^{2iw}-2iz\cdot e^{iw}-1=0$. Dacă notăm $e^{iw}=t$, obținem ecuația de gradul 2: $t^2-2iz\,t-1=0$ cu $t=iz+\sqrt{1-z^2}$ ($\sqrt{1-z^2}$ este rădăcina pătrată în sens complex, rezultat fiind două valori). Astfel, $e^{iw}=iz+\sqrt{1-z^2}\Rightarrow iw=Ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)\Rightarrow w=-i\,Ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)$.

Definiție: Aplicația $\mathbf{Arcsin}:\mathbb{C}\to\boldsymbol{P}(\mathbb{C})$ dată de $\boldsymbol{\mathrm{Arcsin}(z)=-i\,Ln\left(iz+\sqrt{1-z^2}\right)}$ se numește ***funcția arcsinus***. Valorile funcției se notează cu **Arcsinz**.

Exemplu: $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{\pi i}{6}\right)=-iLn\left(-\dfrac{\pi}{6}\pm\sqrt{1-\dfrac{\pi^2}{36}}\right)$. Deoarece $-\dfrac{\pi}{6}-\sqrt{1-\dfrac{\pi^2}{36}}<0$, atunci $\left|-\dfrac{\pi}{6}-\sqrt{1-\dfrac{\pi^2}{36}}\right|=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{1-\dfrac{\pi^2}{36}}$ și $\arg\left(-\dfrac{\pi}{6}-\sqrt{1-\dfrac{\pi^2}{36}}\right)=\pi$. Pentru $-\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{1-\dfrac{\pi^2}{36}}>0$, avem

$\left|-\frac{\pi}{6}+\sqrt{1-\frac{\pi^2}{36}}\right| = -\frac{\pi}{6}+\sqrt{1-\frac{\pi^2}{36}}$ şi $\arg\left(-\frac{\pi}{6}+\sqrt{1-\frac{\pi^2}{36}}\right)=0$. Prin urmare,

$$\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\pi i}{6}\right)=\begin{cases}-i\left(\ln\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{1-\frac{\pi^2}{36}}\right)+i(\pi+2k\pi)\right), k\in Z\\ -i\left(\ln\left(-\frac{\pi}{6}+\sqrt{1-\frac{\pi^2}{36}}\right)+i2k\pi\right), k\in Z\end{cases}=\begin{cases}-i\ln\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{1-\frac{\pi^2}{36}}\right)+(2k+1)\pi, k\in Z\\ i\ln\left(-\frac{\pi}{6}+\sqrt{1-\frac{\pi^2}{36}}\right)+2k\pi, k\in Z\end{cases}.$$

În mod similar se definesc:

$\operatorname{Arccos}:\mathbb{C}\to P(\mathbb{C}),\ \operatorname{Arccos}(z)=-iLn\left(iz+\sqrt{z^2-1}\right)$

$Arctg:\mathbb{C}\setminus\{i;-i\}\to P(\mathbb{C}),\ Arctg(z)=\frac{i}{2}Ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$

$Arcctg:\mathbb{C}\setminus\{i;-i\}\to P(\mathbb{C}),\ Arcctg(z)=\frac{i}{2}Ln\left(\frac{z-i}{z+i}\right)$.

8. Funcțiile hiperbolice

Definiție*:** Aplicația $sh:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dată de $\boldsymbol{sh(z)=\frac{e^z-e^{-z}}{2}}$ se numește funcție ***sinus hiperbolic, $ch:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\boldsymbol{ch(z)=\frac{e^z+e^{-z}}{2}}$ se numește ***cosinus hiperbolic***, $th:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\boldsymbol{th(z)=\frac{sh(z)}{ch(z)}}$ se numește ***tangentă hiperbolică***, $cth:\mathbb{C}\setminus\{\pi ki\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{C}$. $\boldsymbol{cth(z)=\frac{ch(z)}{sh(z)}}$ se numește ***cotangentă hiperbolică***.

Proprietăți:

1. Sunt funcții univoce
2. $ch^2z-sh^2z=1$;

$ch(z_1+z_2)=chz_1chz_2+shz_1shz_2$,

$ch(2z)=ch^2z+sh^2z$,

$sh(z_1+z_2)=shz_1chz_2+shz_2chz_1$,

$sh(2z)=2shzchz$.

3. Funcțiile shz, chz sunt periodice cu perioada principală $2\pi i$.

Următoarele formule stabilesc relațiile dintre funcțiile trigonometrice și hiperbolice:

$\boldsymbol{\sin(iz)=ishz}$; $\boldsymbol{\cos(iz)=chz}$; $\boldsymbol{tg(iz)=ithz}$; $\boldsymbol{ctg(iz)=-icthz}$;
$\boldsymbol{sh(iz)=i\sin z}$; $\boldsymbol{ch(iz)=\cos z}$; $\boldsymbol{th(iz)=itgz}$; $\boldsymbol{cth(iz)=-ictgz}$.

TEMA 3: DERIVABILITATEA ȘI DIFERENȚIABILITATEA FUNCȚIILOR COMPLEXE

Fie $D \subseteq C$ o mulțime deschisă și conexă. În cazul când D nu este conexă, se realizează studiul pe fiecare componentă conexă a lui D.

Definiție:

1. Fie $f: D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Vom numi ***derivata funcției f*** în punctul z_0 ”numărul” din C_∞, notat cu $f'(z_0)$, unde $\boldsymbol{f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}$, atunci când această limită există.
2. Dacă $f'(z_0) \in \mathbb{C}$, funcția f se numește ***derivabilă*** în z_0.
3. Funcția f se numește ***olomorfă*** pe D, dacă f este derivabilă în orice punct al lui D.
4. Funcția f se numește ***diferențiabilă*** în z_0, dacă există $\alpha \in \mathbb{C}$ și $w: D \to \mathbb{C}$, astfel încât $\lim\limits_{z \to z_0} w(z) = w(z_0) = 0$ și $f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + w(z)(z - z_0)$, $\forall z \in D$.

Notă: Diferențiabilitatea funcției presupune aproximarea când este posibil a funcției complexe prin funcții mai simple, anume prin ***funcții afine***.

Teoremă: Fie $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Funcția f este derivabilă în z_0 dacă și numai dacă f este diferențiabilă în z_0. Constanta α din definiția diferențiabilității este $A = f'(z_0)$.

Teoremă: Fie $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivabilă în $z_0 \in D$. Atunci f este continuă în z_0.

Proprietăți:

I. Fie $f, g: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, f, g derivabile în z_0. Atunci

1. $f + g$ este derivabilă în z_0 cu $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$;
2. $f \cdot g$ este derivabilă în z_0 și $(f \cdot g)'(z_0) = f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0)$;
3. În condiția $g(z_0) \neq 0$, $\frac{t}{g}$ este derivabilă în z_0 și

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) g'(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

II. Fie $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{C}$, $D, E \subseteq \mathbb{C}$ - mulțimi deschise, $z_0 \in D$ și $w_0 = f(z_0)$. Dacă f este derivabilă în z_0 și g este derivabilă în w_0, atunci $g \circ f$ este derivabilă în z_0 cu $(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$.

III. **Teoremă:** (**Condițiile Cauchy- Riemann** de caracterizare a derivabilității):
Fie $f: D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+yi) = U(x,y) + iV(x,y)$, o funcție complexă și $z_0 \in D$. Funcția f este derivabilă în z_0 dacă și numai dacă funcțiile $U, V: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt diferențiabile în (x_0, y_0) și au loc condițiile Cauchy-Riemann: $\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$.

În acest caz: $f'(z_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0)$ sau $f'(z_0) = \frac{\partial U}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0)$;

$$f'(z_0) = \frac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0) + i\frac{\partial V}{\partial x}(x_0, y_0); \quad f'(z_0) = \frac{\partial V}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial U}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Demonstrație

Exemplu:

1. De cercetat derivabilitatea funcției $f(z) = 3iz^2 + 4z - 5i + 1.$

Determinăm $U(x, y) = \operatorname{Re} f$; $V(x, y) = \operatorname{Im} f$: $f(x + yi) = 3i(x + yi)^2 + 4(x + yi) - 5i + 1 =$
$= 3i(x^2 - y^2 + 2xyi) + 4x + 4yi - 5i + 1 = (-6xy + 4x + 1) + i(3x^2 - 3y^2 + 4y - 5).$

Deci, $U(x, y) = -6xy + 4x + 1$; $V(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 4y - 5.$ Condițiile Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6y + 4 = -6y + 4 \\ -6x = -6x. \end{cases}$$

Orice pereche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ verifică condițiile Cauchy-Riemann. Astfel, funcția f este derivabilă în orice punct $z \in \mathbb{C}$, deci, olomorfă pe $\mathbb{C}$.

Avem

$$f'(x + yi) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial V}{\partial x}(x, y) = -6y + 4 + i6x = i6x + 6i^2 y + 4 = 6i(x + iy) + 4 = 6iz + 4.$$

Astfel $f'(z) = (3iz^2 + 4z - 5i + 1)' = 6iz + 4$ - similar cazului real.

2. De cercetat derivabilitatea funcției $f(z) = \bar{z} + \operatorname{Re}(z^2) - 5i.$

Avem $f(x + yi) = x - yi + \operatorname{Re}(x^2 + 2xyi - y^2) - 5i = (x + x^2 - y^2) + i(-y - 5).$ Astfel,
$U(x, y) = x + x^2 - y^2$; $V(x, y) = -y - 5.$ Condițiile Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = -1 \\ -2y = -0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Deci, f este derivabilă doar în punctul $z = -1 + i \cdot 0 \Leftrightarrow z = -1$ și

$$f'(-1) = \frac{\partial U}{\partial x}(-1; 0) + i\frac{\partial V}{\partial x}(-1; 0) = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

Exemple de funcții olomorfe

1. Funcția putere cu exponent natural, $z \in \mathbb{C} \to z^n \in \mathbb{C}$, $n \in N^*$, este olomorfă pe $\mathbb{C}$ și $\boldsymbol{(z^n)' = nz^{n-1}}$, iar $\boldsymbol{k' = 0}$, unde $k \in \mathbb{C}$.
2. Funcția exponențială $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^z$, este olomorfă pe $\mathbb{C}$ și $\boldsymbol{(e^z)' = e^z}$.
3. Fie $\mathbb{C} \backslash (-\infty; 0] = \mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \leq 0,\ \operatorname{Im} z = 0\}$ și $f_k: \mathbb{C} \backslash (-\infty; 0] \to \mathbb{C}$, $f_k(z) = \ln z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Atunci, pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, funcțiile f_k sunt olomorfe și $\boldsymbol{f_k{}'(z) = \frac{1}{z}}$.
4. Funcția putere complexă este olomorfă cu derivata $\boldsymbol{(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha - 1}}$, $\forall z \in \mathbb{C} \backslash (-\infty; 0]$.

5. Funcțiile trigonometrice sinus și cosinus sunt olomorfe pe $\mathbb{C}$ și $(\cos z)' = -\sin z$ și $(\sin z)' = \cos z$.

Funcții armonice

Definiție: Funcția $U: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continuă pe D împreună cu derivatele sale până la ordinul 2 inclusiv, se numește ***funcție armonică***, dacă verifică ecuația lui Laplace: $\Delta U = 0$, unde $\Delta U = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Expresia ΔU se numește ***laplace-ianul*** *funcției u.*

Teoremă: Fie $f: D \to \mathbb{C}$ olomorfă pe domeniul D și $f(x+yi) = U(x,y) + iV(x,y)$. Dacă U și V sunt continui pe D împreună cu derivatele până la ordinul 2 inclusiv, atunci U și V sunt funcții armonice.

Într-adevăr, deoarece funcția este olomorfă, atunci au loc condițiile lui Cauchy-Riemann:
$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \end{cases}$. Atunci, $\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial V}{\partial y \partial x} \end{cases}$. Conform teoremei lui Shwarz, $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$.

Astfel, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, de unde rezultă că U este funcție armonică. În mod similar se demonstrează că V este armonică.

! ! ! Reciprocă nu este adevărată: din faptul că U și V sunt două funcții armonice pe $D \in \mathbb{R}^2$, nu rezultă că funcția $f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$ este olomorfă.

Teoremă: Fie $U, V: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ două funcții armonice. Funcția complexă $f: D \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$ este olomorfă dacă și numai dacă U și V verifică condițiile Cauchy-Riemann.

În acest caz, funcțiile U și V se numesc **armonice conjugate**.

Notă: Dacă este dată una dintre funcțiile armonice conjugate, atunci cealaltă funcție poate fi determinată cu exactitatea unei constante.

Exemplu: Să se determine funcția olomorfă $f(z) = U + iV$, dacă $U(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$ și $f(i) = 2i - 1$.

Rezolvare. **Metoda 1**. Avem $\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + 2$. Conform condițiilor Cauchy- Riemann $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$, deci, $\frac{\partial V}{\partial y} = 2x + 2$. Prin urmare, $V(x,y) = \int (2x+2)\,dy = 2xy + 2y + C(x)$. Pe de altă parte $\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{\partial U}{\partial y}$, adică $2y+C'(x)=-(-2y)\Leftrightarrow C'(x)=0\Leftrightarrow C(x)=C-$constantă reală. Deci, $V(x,y)=2xy+2y+C$.

Obținem $f(x+iy)=x^2-y^2+2x\ +i(2xy+2y+C)=x^2-y^2+i2xy+2(x+iy)+Ci=(x+iy)^2+2(x+iy)+Ci\Longrightarrow f(z)=z^2+2z+iC$. Din condiția $f(i)=2i-1$ determinăm C: $2i-1=i^2+2i+iC\Leftrightarrow iC=0\Leftrightarrow C=0$. Prin urmare funcția căutată este $f(z)=z^2+2z$.

TEMA 4: INTEGRALA FUNCȚIILOR COMPLEXE

INTEGRALE PE CONTUR

Fie L o curbă simplă netedă pe porțiuni, definită de ecuațiile parametrice $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [a,b]$, iar f o funcție complexă definită pe L. Fie $\Delta : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ o diviziune a segmentului $[a,b]$, care implică o divizare a curbei L prin punctele $z_k = x(t_k) + iy(t_k)$, $\forall k = \overline{0, n-1}$. Notăm $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. Considerăm sistemul de puncte intermediare $\xi_k = x(\tau_k) + iy(\tau_k)$, unde $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{0, n-1}$. Fie norma diviziunii Δ, $\|\Delta\| = \max\limits_{k=\overline{1,n}} |t_k - t_{k-1}|$ cu suma Riemann asociată funcției f pe diviziunea Δ și sistemul de puncte intermediare : $\sigma_f(\Delta, \xi_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$.

Definiție: Numărul I se numește ***limita sumelor integrale*** $\sigma_f(\Delta, \xi_k)$, atunci când $\|\Delta\| \to 0$, dacă $\lim\limits_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_f(\Delta, \xi_k) = I$ pentru orice diviziune Δ și orice sistem intermediar de puncte (ξ_k). Dacă această limită există și este finită, numărul I se notează cu $\boldsymbol{\int_L f(z)dz}$ și îl vom numi ***integrala funcției f*** pe curba L.

Teoremă: Fie $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$ și $L \subset D$ o curbă. Dacă f este integrabilă pe L, atunci: $\boldsymbol{\int_L f(z)dz = \int_L U(x,y)dx - V(x,y)dy + i\int_L V(x,y)dx + U(x,y)dy}$.

Astfel, calcularea integralei unei funcții complexe pe curbă se reduce la calcularea a două integrale curbilinii de speța II.

Demonstrație: Fie $f(z) = f(x+iy) = U(x,y) + iV(x,y)$, $z_k = x(t_k) + y(t_k)$, $k = \overline{0, n-1}$. Fie $\xi_k = \mu_k + i\nu_k$. Atunci

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(U(\mu_k,\nu_k)\Delta x_k - V(\mu_k,\nu_k)\Delta y_k\right) + \sum_{k=0}^{n-1}\left(V(\mu_k,\nu_k)\Delta x_k + U(\mu_k,\nu_k)\Delta y_k\right).$$

Sumele din partea dreaptă a egalității sunt sumele integrale respective integralelor curbilinii.

În condițiile teoremei, aceste integrale curbilinii există și deci, există și $\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L U(x,y)dx - V(x,y)dy + i\int\limits_L V(x,y)dx + U(x,y)dy$.

Notă: În caz particular, $f(z) \equiv 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta z_k = (-z_1 + z_2) + (-z_2 + z_3) + \ldots + (-z_{n-1} + z_n) = z_n - z_0.$$

Astfel, $\boldsymbol{\int_L dz = z_n - z_0}$, unde $z_n = x(t_n) + iy(t_n)$, $z_0 = x(t_0) + iy(t_0)$.

Proprietăți ale integralelor pe contur

1. $\int\limits_L (f(z) + g(z))dz = \int\limits_L f(z)dz + \int\limits_L g(z)dz$;

2. $\int\limits_L af(z)dz = a\int\limits_L f(z)dz, \quad a \in \mathbb{C};$

3. $\int\limits_L f(z)dz = -\int\limits_{L^-} f(z)dz,$ unde L^- este curba L, parcursă în sens opus;

4. $\int\limits_{L_1 \cup L_2} f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{L_2} f(z)dz,$ unde L_1 și L_2 sunt curbe fără puncte interioare comune;

5. $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le M \cdot l,$ unde l este lungimea curbei L și $|f(z)| \le M, \ z \in L.$

Dacă curba L este o curbă netedă pe porțiuni, definită de **ecuații parametrice** $\begin{cases} \boldsymbol{x = x(t)} \\ \boldsymbol{y = y(t)} \end{cases}$, $\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ și f o funcție complexă integrabilă pe L, atunci

$$\int\limits_L \boldsymbol{f(z)dz} = = \int\limits_a^b [\boldsymbol{U(x(t), y(t))x'(t) - V(x(t), y(t))y'(t)}]\, \boldsymbol{dt}$$

$$+\, \boldsymbol{i} \int\limits_a^b [\boldsymbol{V(x(t), y(t))x'(t) + U(x(t), y(t))y'(t)}]\boldsymbol{dt}$$

sau

$$\int\limits_L \boldsymbol{f(z)dz} = = \int\limits_a^b \boldsymbol{f(z(t))z'(t)dt}$$

unde $\boldsymbol{z(t) = x(t) + iy(t)}$ este ecuația complexă parametrică a curbei L.

Exemple:

1. Să se calculeze $I = \int\limits_L (1+i-2\bar{z})dz,$ unde L este arcul de parabolă $y = x^2$, ce unește punctele $z_1 = 0$ și $z_2 = 1+i.$

Rezolvare: $f(z) = 1+i-2\bar{z} \Rightarrow f(x+iy) = 1+i-2(x-yi) = (1-2x)+i(1+2y).$ Astfel, $U(x,y) = 1-2x, \quad V(x,y) = 1+2y \Rightarrow I = \int\limits_L (1-2x)dx-(1-2y)dy + i\int\limits_L (1+2y)dx+(1-2x)dy.$

Deoarece $y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx,$ $0 \le x \le 1 \Rightarrow$

$$I = \int\limits_0^1 (1-2x-(1+2x^2)\cdot 2x)dx + i\int\limits_0^1 (1+2x^2+(1-2x)\cdot 2x)dx =$$

$$I = \int\limits_0^1 (1-4x-4x^3)dx + i\int\limits_0^1 (1+2x-2x^2)dx = (x-2x^2-x^4)\Big|_0^1 + i\,(x+x^2-\frac{2x^2}{3})\Big|_0^1 = -2+\frac{4}{3}i.$$

2. Să se calculeze $I = \int\limits_L (z^2 + z\cdot\bar{z})dz,$ unde L este arcul cercului $|z| = 1, \quad 0 \le \arg z \le \pi.$

Rezolvare:

Metoda I. Forma complexă a lui z este $z = |z|e^{i\varphi} \Rightarrow z = e^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \pi \Rightarrow dz = ie^{i\varphi}d\varphi.$ Obținem $I = \int\limits_L \left(z^2 + |z|^2\right)dz = \int\limits_0^\pi (e^{2i\varphi}+1)\cdot ie^{i\varphi}d\varphi =$

$$=\int_0^\pi\left(ie^{3i\varphi}+ie^{i\varphi}\right)d\varphi=\left(\frac{1}{3}e^{3i\varphi}+e^{i\varphi}\right)\Bigg|_0^\pi=\left(\frac{1}{3}e^{3i\pi}+e^{\pi i}\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=-\frac{8}{3}.$$

Metoda II. Ecuațiile parametrice ale conturului L sunt: $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$, $0\le t\le\pi$,

$$z=\cos t+i\sin t\Rightarrow dz=(-\sin t+i\cos t)dt\Rightarrow\ I=\int_0^\pi\left[(\cos t+i\sin t)^2+1\right](-\sin t+i\cos t)dt=$$

$$=\int_0^\pi(\cos 2t+i\sin 2t+1)\,(-\sin t+i\cos t)dt$$

$$=\int_0^\pi(-\cos 2t\cdot\sin t+i\cos 2t\cos t-i\sin 2t\sin t-$$

$$-\sin 2t\cos t-\sin t+i\cos t)dt=$$

$$=\int_0^\pi\left[-\frac{1}{2}(\sin 3t-\sin t)+\frac{1}{2}i(\cos 3t+\cos t)-\frac{1}{2}i(\cos t-\cos 3t)-\frac{1}{2}(\sin 3t\right.$$

$$+\sin t)-$$

$$\left.-\sin t+i\cos t\right]dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3t+\cos t\right)+\frac{1}{2}i\left(\frac{1}{3}\sin 3t+\sin t\right)-\frac{1}{2}i\left(\sin t-\frac{1}{3}\sin 3t\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3t-\cos t+\cos t-i\sin t\right]\right|_0^\pi=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}-2\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+2\right)-2=-\frac{8}{3}.$$

Teorema Chauchy. Integrala nedefinită în domeniul complex și formula Newton-Lebniz. Formule integrale Chauchy

Definiție. Domeniul $G\subset\mathbb{C}$ se numește **simplex conex**, dacă domeniul mărginit de orice curbă închisă, ce se conține în *G*, de asemenea se închlude în *G*.

Domeniile care nu posedă această proprietate se numesc multiconexe.

Exemple:

$D_1\{z\in\mathbb{C}|\,|z-a|<r\}$ – o mulțime simplu conexă;

$D_2\{z\in\mathbb{C}|\,|z-a|>r\}$ – o mulțime multiconexă;

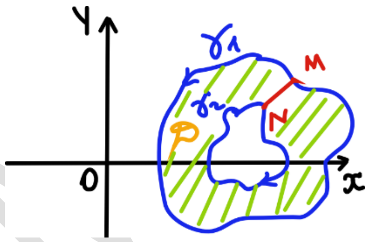
$D_3\{z\in\mathbb{C}|\,r<|z-a|<R\}$ – o mulțime multiconexă.

Teorema integrală Cauchy:

Fie funcția olomorfă $f:D\to\mathbb{C}$, unde $D\subset\mathbb{C}$ este un domeniu simplu conex. Dacă γ este un contur închis și neted pe porțiuni, care se conține în domeniul *D*, atunci $\oint_\gamma f(z)dz=0$.

Demonstrație. Fie $f(x+iy) = U(x,y) + i \cdot V(x,y)$, unde U și V sunt diferențiabile și au loc condițiile Cauchy-Riemann: $\begin{cases} U'_x(x,y) = V'_y(x,y) \\ U'_y(x,y) = -V'_x(x,y) \end{cases}$. Pe de altă parte pentru ca $\oint_\gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ este suficient ca $P'y(x,y) = Q'x(x,y)$, unde $P,\ Q,\ P'y,\ Q'x$ - continui pe D. Astfel obținem că $\oint_\gamma Udx - Vdy = 0$ și $\oint_\gamma Vdx + Udy = 0$ și teorema este demonstrată.

Teorema lui Cauchy poate fi extinsă și pentru cazul unui domeniu multiconex. Pentru concretitudine, vom considera o funcție $f : D \to \mathbb{C}$ olomorfă, iar D – dublu conex, delimitat de curbele închise γ_1 și γ_2.



Efectuăm tăietura MN și obținem domeniul simplu conex $\overline{D}$, care are drept frontieră conturul $\Gamma = \gamma_1 \cup \overline{MN} \cup \gamma_2 \cup \overline{NM}$. Atunci putem aplica teorema Cauchy: $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$. De unde

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\overline{MN}} f(z)dz + \oint_{\gamma_2^-} f(z)dz + \int_{\overline{NM}} f(z)dz = 0$$

$$\Rightarrow \oint_{\gamma_1} f(z)dz = -\oint_{\gamma_2^-} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Mai general, dacă D este domeniu delimitat de curbele $\gamma_1,\ \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, exterioare între ele și interioare unei curbe L, $L \subset D$, iar f este olomorfă în domeniul D, are loc

$$\oint_L \boldsymbol{f(z)dz} = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_n} \boldsymbol{f(z)dz}.$$

Exemple:

1. $I = \oint_L \dfrac{dz}{(z-z_0)^n}$, unde L – contur închis, $n \in \mathbb{Z}$.

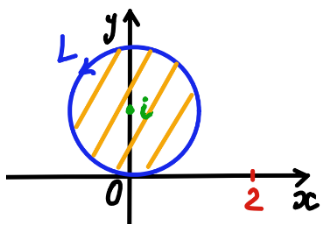
Dacă $n \le 0 \Rightarrow I = \oint_L (z-z_0)^m dz$, unde $m = -n \ge 0$ și $f(z) = (z-z_0)^m$ este olomorfă pe $\mathbb{C} \Rightarrow I = 0$. Dacă $n > 0$ și z_0 nu aparține domeniului D, mărginit de L, atunci $I = 0$.

Fie $n > 0$ și z_0 aparține domeniului mărginit de L. Considerăm un cerc C cu centrul în z_0 de rază R, încât discul mărginit de cerc se include în D. Ecuația acestui cerc este $z - z_0 = \mathrm{R}e^{i\varphi},\ 0 \le \varphi \le 2\pi$. Atunci $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ este olomorfă în domeniul delimitat de L și de cercul C. Atunci, $\oint_L f(z)dz = \oint_C f(z)dz = \oint_0^{2\pi} \dfrac{1}{R^n e^{ni\varphi}} \cdot Rie^{i\varphi}d\varphi = \dfrac{i}{R^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\varphi}d\varphi.$

Pentru $n = 1$, $I = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$

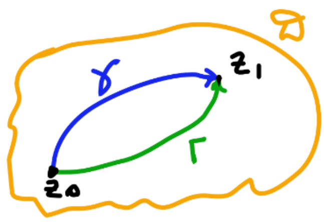
Pentru $n > 1$, $I = \dfrac{i}{R^{n-1}} \cdot \dfrac{e^{i(1-n)\varphi}}{i(1-n)}\Bigg|_0^{2\pi} = \dfrac{1}{R(1-n)}\left(e^{2\pi i(1-n)} - 1\right) = 0.$

2. De calculat integrala $\oint \dfrac{e^{iz}+1}{z-2}dz$, unde $L: |z-i| = 1$.



Rezolvare: Conturul L reprezintă un cerc cu centrul în $z_0 = i$ cu raza 1. Funcția $f(z) = \dfrac{e^{iz}+1}{z-2}$ este olomorfă în discul $|z-i| \le 1$. Punctul $z = 2$ este punct singular al funcției, dar nu aparține acestui disc. Astfel, $I = 0$.

Notă: Din teorema Cauchy rezultă, că dacă f este o funcție olomorfă într-un domeniu D, iar $z_0,\ z_1 \in D$, atunci $\int\limits_\gamma f(z)dz$, γ este un contur care unește punctele z_0, z_1, nu depinde de ”forma” lui γ, doar de z_0 și z_1.



Într-adevăr, din teorema Cauchy $\oint\limits_{\gamma\cup\Gamma^-} f(z)dz = 0$,

adică $\int_\gamma f(z)dz + \int_{\Gamma^-} f(z)dz = 0 \Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz.$

Atunci se obișnuiește notarea $\boldsymbol{\int_\gamma f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz}$.

Definiție: O funcție $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ **admite primitive**, dacă există $F: D \to \mathbb{C}$ olomorfă încât $F' = f$. Funcția F se numește **primitivă** pentru funcția f.

Propoziție: Fie F și Φ sunt două primitive ale funcției $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Atunci

1. $F+C$ – este de asemenea primitivă a lui f, unde este constantă complexă C;
2. diferența dintre F și Φ este constantă complexă C.

1. Într-adevăr, dacă F este primitivă a lui f, atunci $F' = f$ pe D și $C' = 0 \Rightarrow (F+C)' = f$.

2. Considerăm funcția $g(z) = F(z) - \Phi(z) = U(x,y) + i \cdot V(x,y) \Rightarrow g'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y}$. Dar $g'(z) = F'(z) - \Phi'(z) = f(z) - f(z) \equiv 0 \Rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} \equiv 0$ și $\dfrac{\partial V}{\partial X} = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \equiv 0$ în domeniul D. De unde rezultă că $U,\ V$ sunt constante în domeniul D. Astfel, $g(z) = C,\ C \in \mathbb{C}$ și $F(z) = \Phi(z) + C$.

Din cele relatate mai sus, dacă $F(z)$ este o primitivă a lui $f(z)$, atunci $F(z)+C$, unde C este o constantă arbitrară, reprezintă mulțimea tuturor primitivelor funcției $f(z)$. Această mulțime se numește ***integrala nedefinită*** a funcției $f(z)$ și se notează cu simbolul $\boldsymbol{\int f(z)dz = F(z) + C}$, unde $F'(z) = f(z)$.

Tehnica determinării integralelor nedefinite în analiza complexă, în general, este similară cazului real. Tabelul integralelor principale în ambele cazuri este același (deoarece este același tabelul derivatelor).

De exemplu,

1. $\int e^z dz = e^z + C;$

2. $\int z^n dz = \dfrac{z^{n+1}}{n+1} + C \; \left(n \neq -1,\, n \in \mathbb{Z}\right);$

3. $\int \dfrac{dz}{z} = \ln z + \mathbb{C};$

4. $\int \sin z dz = -\cos z + \mathbb{C}$ etc.

Primitiva este o *funcție olomorfă,* fapt care implică condiții anumite asupra domeniului în care sunt juste formulele de sus. De exemplu, formulele 1 și 4 sunt adevărate pe tot planul complex. Formula 2 este adevărată pe întreg planul complex pentru $n \geq 0,$ iar printre $n < 0$ avem o propoziție adevărată pentru orice domeniu ce nu conține $z = 0.$ Identitatea 3 este adevărată în orice domeniu, care nu conține o rază ce pornește din $z = 0,$ de exemplu: $D = \mathbb{C} \setminus \{z = x + yi,\, \operatorname{Im} z = 0,\, \operatorname{Re} z \leq 0\}.$

Dacă f este olomorfă în domeniul simplex conex *D*, iar z_0 și $z_1 \in D,$ după cum am menționat mai sus nu contează conturul γ, care unește punctele z_0 și z_1, și se notează $\boldsymbol{\int_\gamma f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz}$. Mai mult, dacă *F* este o primitivă a lui *f*, atunci

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_0) = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1}$$

Exemplu: $\displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{zi} dz = \frac{1}{i} e^{zi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{i}\left(e^{\frac{\pi}{2}i} - 1\right) = \frac{1}{i}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{1}{i}(i-1) = 1 - \frac{1}{i} = 1 + i.$

Funcția $f(z) = e^{zi}$ este olomorfă pe $\mathbb{C}$.

Notă. Facă *f* și *g* sunt funcții olomorfe în domeniul simplu conex *D*, iar z_0 și $z_1 \in D,$ atunci este adevărată:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z)dz = f(z)g(z)\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} g(z)f'(z)dz.$$

Exemplu:

$$\int_0^{\ln 2} z\sin(iz)dz = \left| \begin{matrix} f(z) = z & f'(z) = 1 \\ g'(z) = \sin(iz) & g(z) = -\dfrac{1}{i}\cos(iz) \end{matrix} \right| = -\frac{z}{i}\cos(iz)\Big|_0^{\ln 2}$$

$$+ \int_0^{\ln 2} \frac{1}{i}\cos(iz)dz = -\frac{\ln 2}{i}\cos(i\ln 2) + \frac{1}{i^2}\sin(iz)\Big|_0^{\ln 2}$$

$$= i\ln 2\cos(i\ln 2) - \sin(i\ln 2) =$$

$$= i\ln 2\, ch(\ln 2) - i sh(\ln 2) = i\left[\ln 2\frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} - \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2}\right] = i\left(\frac{5}{4}\ln 2 - \frac{3}{4}\right)$$

Teoremă: Dacă *f* este o funcție olomorfă în domeniul simplu conex *D*, atunci funcția $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$, unde z_0, $z_1 \in D,$ este o primitivă a funcției *f*.

Teoremă: Funcția continuă $f:D\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ admite primitive dacă și numai dacă $\oint_\gamma f(z)dz=0$ pe orice curbă închisă din *D*.

Formule integrale Cauchy

Teoremă: Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ un domeniu (simplu conex sau multiconex), γ o curbă închisă, parțial netedă ce se conține în *D*.Fie *f* o funcție olomorfă pe *D* și z_0 este din domeniul mărginit de γ.

Atunci $\boldsymbol{f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz}$, unde integrarea pe conturul γ este în sens pozitiv (când domeniul mărginit de γ rămâne în stânga).

Notă: Calcularea integralei pe un contur închis al unei funcții olomorfe se reduce la calcularea valorii funcției *f* într-un punct din domeniul mărginit de conturul *D*.

Exemplu 1: Să se calculeze $I=\int\limits_{|z|=2}\frac{ch(z\pi i)dz}{z+4z+3}$.

Rezolvare: Soluțiile ecuației $z^2+4z+3=0$ sunt -1 și -3. Doar $z_0=-1$ este situat în interiorul cercului $|z|=2$. Atunci $\frac{ch(z\pi i)}{z^2+4z+3}=\frac{\frac{ch(2\pi i)}{z+3}}{z+1}=\frac{\frac{ch(2\pi i)}{z+3}}{z-(-1)}$. Atunci $I=2\pi i\cdot f(-1)$, unde $f(z)=\frac{ch(z\pi i)}{z+3}$ este o funcție olomorfă în discul mărginit de $|z|=2$. Dar $f(-1)=\frac{ch(-\pi i)}{2}=\frac{\cos\pi}{2}=\frac{1}{2}$, de unde $I=2\pi i\cdot\frac{1}{2}=\pi i.$

Exemplu: $I=\int_\gamma\frac{e^{2z}+3iz+5}{z^2-6z}dz$, unde 1) $\gamma:|z-2i|=1$; 2) $\gamma:|z-2i|=3$; 3) $|z-2i|=7$.

Rezolvare: 1. Soluțiile ecuației $z^2-6z=0$ sunt $z_1=0$, $z_2=6$. Niciuna dintre aceste soluții nu aparțin domeniului mărginit de $|z-2i|=1$. Într-adevăr, $|0-2i|=|2i|=2>1$ și $|6-2i|=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}>1$.

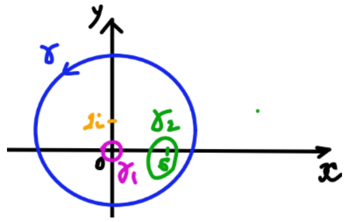
Astfel, $f(z)=\frac{e^{2z}+3iz+5}{z^2-6z}$ este olomorfă pe domeniul $|z-2i|\le1$ și $\int\limits_{|z-2i|=1}f(z)dz=0$.

2. Punctul $z=0$ aparține domeniului $|z-2i|=3$, iar $z=6$ nu aparține acestui domeniu. Atunci

$$I=\int_{|z-2i|=3}\frac{\frac{e^{2z}+3iz+5}{z-6}}{z-0}dz=2\pi i\cdot f(0)=2\pi i\cdot\frac{6}{-6}=-2\pi i,$$

unde $f(z)=\frac{e^{2z}+3iz+5}{z-6}$ este olomorfă în domeniul $|z-2i|<3$.

3. Ambele soluții $z_1=0$, $z_2=6$ aparțin domeniului $|z-2i|<7$. Considerăm cercurile γ_1 și γ_2, ce se conțin în domeniul $|z-2i|<7$. În domeniul triplu conex, mărginit de γ_1, γ_2 și $|z-2i|=7$, funcția de sub semnul integralei este olomorfă.



Astfel, $\oint_{|z-2i|=6} \frac{e^{2z}+3iz+5}{z^2-6z} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{e^{2z}+3iz+5}{z(z-6)} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{e^{2z}+3iz+5}{z(z-6)} dz.$

Pentru fiecare integrală din partea dreaptă a egalității vom aplica formula integrală Cauchy.

$$\int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^{2z}+3iz+5}{z-6}}{z} dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^{2z}+3iz+5}{z-6}\right)\Bigg|_{z=0} = 2\pi i \cdot \frac{6}{-6} = 2\pi i;$$

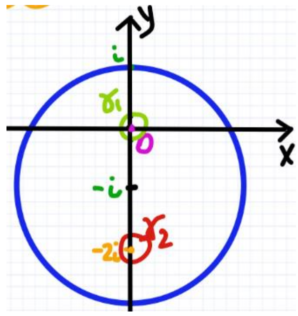
$$\int_{\gamma_2} \frac{\frac{e^{2z}+3iz+5}{z}}{z-6} dz \int_{\gamma_2} = 2\pi i \cdot \left(\frac{e^{2z}+3iz+5}{z}\right)\Bigg|_{z=6} = 2\pi i \cdot \frac{e^{12}+18i+5}{6}.$$

Deci, $\quad I = -2\pi i + 2\pi i \frac{e^{12}+18i+5}{6} = 2\pi i \left(-1 + \frac{e^{12}+18i+5}{6}\right) = 2\pi i \frac{e^{12}+18i-1}{6} = \frac{\pi i}{3}(e^{12} + 18i - 1).$

Exemplu: De calculat $I = \int_{|z+i|=2} \frac{1}{z(z^2+4)} dz$. Soluțiile ecuației $z(z^2+4)=0$ sunt $z_1=0$, $z_0=-2i$, $z_2=2i$. Dintre acestea doar $z_1=0$ și $z_2=-2i$ aparțin domeniului $|z+i|<2$ ($|0+i|=|i|=1<2$, $|-2i+i|=|-i|=1<2$, iar $|2i+i|=|3i|=3>2$).

Astfel, $\frac{1}{z(z^2+4)} = \frac{1}{z(z-2i)(z+2i)}$.

Considerăm cercurile γ_1 și γ_2, ce se conțin în domeniul $|z+i|<2$. În domeniul triplu conex, mărginit de γ_1, γ_2 și $|z+i|=2$, funcția de sub semnul integralei este olomorfă. Atunci,



$$\int_{|z+i|=2} \frac{1}{z(z^2+4)} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{z^2+4}}{z} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{1}{z(z-2i)}}{z+2i} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{z^2+4}\right)\Bigg|_{z=0} +$$

$$2\pi i \cdot \left(\frac{1}{z(z-2i)}\right)\Bigg|_{z=-2i} = 2\pi i \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{-2i\cdot(-4i)}\right) = 2\pi i \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) = -\frac{\pi i}{4}.$$

Teoremă: Fie $D \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu, $\gamma \subset D$ un contur închis, f o funcție olomorfă pe domeniul D. Atunci, oricare ar fi z_0 interior domeniului mărginit de γ, f admite derivate de orice ordin în z_0 și are loc $\boldsymbol{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz}$.

Exemplu: De calculat $I=\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z^2}\sin\frac{\pi}{z+3}dz.$

Rezolvare: Funcția $f(z)=\sin\frac{\pi}{z+3}$ este olomorfă în domeniul $|z|\le 1$ ($z=-3$ nu aparține domeniului dat).

Astfel, $I=\int\limits_{|z|=1}\frac{\sin\frac{\pi}{z+3}}{(z-0)^{1+1}}dz\overset{n=1}{=}\frac{2\pi i}{1!}f'(0).$ Determinăm

$f'(z)=\cos\frac{\pi}{z+3}\cdot\left(\frac{\pi}{z+3}\right)'=-\frac{\pi}{(z+3)^2}\cdot\cos\frac{\pi}{z+3}$ și

$f'(0)=-\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{18}\Rightarrow I=2\pi i\cdot\left(-\frac{\pi}{18}\right)=-\frac{\pi}{18}=-\frac{\pi^2 i}{9}.$

Teorema (lui Morera). Fie $f:D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ o funcție continuă, iar D un domeniu deschis. Dacă $\int\limits_{\gamma}f(z)dz=0$ pe orice curbă parțial netedă γ închisă din domeniul *D*, atunci *f* este olomorfă pe *D*.

Teorema (lui Liouville). Dacă $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ o funcție olomorfă și mărginită, atunci funcția f este constantă.

TEMA 5: SERII COMPLEXE

SERII DE NUMERE COMPLEXE. SERII DE PUTERI

Definiție. Fie (z_n) un șir de numere complexe și $s_n = z_1 + z_2 + ... + z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$, $n \geq 0$. Perechea $(a_n), (s_n)$ se numește ***serie de numere complexe*** cu termenul general a_n. Se notează $\sum_{n>0} z_n$, $\sum_n z_n$ sau $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ sau $z_0 + z_1 + z_2 + ... + z_n + ...$.

Elementul a_n se numește **termen de rang** *n*, iar s_n suma parțială a seriei.

Definiție. Seria $\sum_{n>0} z_n$ se numește ***convergentă*** dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n\geq 0}$ este convergent, în caz contrar seria este divergentă. În caz de convergență, limita *S* a șirului $(s_n)_{n\geq 0}$ se numește suma seriei $\sum_{n\geq 0} z_n$. Se scrie $\sum_{n\geq 0} z_n = S$.

Definiție. Se numește **rest de ordinul *n*** al seriei $\sum_{n\geq 0} z_n$, diferența $R_n = S - S_n = z_{n+1} + z_{n+2} + ... = \sum_{k\geq n+1} z_k$.

Lemă. Dacă $\sum z_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Teoremă. Seria $\sum z_n = \sum (x_n + iy_n)$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$, este convergentă dacă și numai dacă sunt convergente seriile reale $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$.

Consecință. Dacă $\sum z_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.

Ca și în cazul seriilor de numere reale este justă

Teorema. Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ este convergentă, atunci este convergentă și seria $\sum z_n$.

Definiție. Seria de numere complexe $\sum z_n$ se numește **absolut convergentă**, dacă seria $\sum |z_n|$ este convergentă.

Sunt aplicabile criteriile de convergență din cazul seriilor reale.

Criteriul D'Alembert (a raportului). Fie seria $\sum z_n$. Dacă există $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = l$, atunci seria este convergentă pentru $l < 1$ și este divergentă pentru $l > 1$.

Criteriul radical Cauchy. Fie seria $\sum z_n$. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z_n|}=l$, atunci seria este convergentă pentru $l<1$ și este divergentă pentru $l>1$.

Exemplu 1. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(2+i)^n}{3^n}$. Aplicăm criteriul radical: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n(2+i)^n}{3^n}\right|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n\cdot\sqrt{5}^n}{3^n}}=\frac{\sqrt{5}}{3}<1$, deci seria este convergentă.

Exemplu 2. Fie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{(3+2i)^{2n}}$. Putem utiliza ambele criterii. Aplicăm criteriul D'Alembert

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{i^{n+1}}{(3+2i)^{2n+2}}\cdot\frac{(3+2i)^{2n}}{i^n}\right|=\left|\frac{i}{(3+2i)^2}\right|=\frac{1}{13}<1$. Deci, seria este convergentă.

Definiție. O **serie de puteri** este o sumă de forma $c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$, unde $c_n\in\mathbb{C}$.

Ne interesează determinarea mulțimii valorilor lui *z* pentru care vom obține serii de numere complexe convergente.

Teorema lui Abel. Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ este convergentă pentru careva $z=z_0$, atunci ea va fi absolut convergentă pentru orice *z*, încât $|z|<|z_0|$, (adică în discul cu centrul în origine și rază $|z_0|$, numit disc de convergență). Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ este divergentă pentru $z=z_1$, atunci ea este divergentă și pentru orice *z*, încât $|z|>|z_1|$.

Vom demonstra prima afirmație a teoremei.

Fie $r_0=|z_0|$, $r=|z|$. Deoarece $\sum c_nz_0^n$ este convergentă, există $N\in\mathbb{N}$, astfel încât $|c_n|r_0^n<1$ pentru orice $n>N$. Adică $|c_n|<\frac{1}{r_0^{\,n}}$.

Considerăm seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|c_n|r^n$. Pentru $n>N$, $|c_n|r^n<\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$. Deoarece $|z|<|z_0|\Rightarrow\frac{r}{r_0}<1$, iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n$ este o serie geometrică convergentă, obținem că seria $\sum\limits_{n\ge N}|c_n|r^n$ este convergentă, de unde rezultă convergența seriei $\sum\limits_{n\ge N}|c_n|r^n=\sum\limits_{n\ge 0}|c_nz^n|$ și respectiv absolut convergentă seriei $\sum\limits_{n\ge 0}c_nz^n$.

Teorema (a razei de convergență). Pentru seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nz^n$ există și este unic numărul real $R\ge 0$ astfel încât:

1. Dacă $R=0$, seria este convergentă doar pentru $z_0=0$.
2. Dacă $R\in(0;\infty)$, seria converge absolut în domeniul $|z|<R$ și diverge pe $|z|>R$; pe cercul $|z|=R$ convergența se cercetează separat.

3. Dacă $R=\infty$, atunci seria converge pe toate compactele din $\mathbb{C}$.

Definiție: Se numește **rază de convergență** a seriei numărul $R\geq 0$ din teorema de mai sus.

Formulele de calcul a razei de convergență: $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}}$, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$, în cazul când $\exists$ aceste limite.

Exemplu: Pentru seria geometrică $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$, $S_n=1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^n}{1-z}$, iar șirul (S_n) este convergent pentru $|z|<1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Exemplu: Fie $\sum\limits_{0}^{\infty}(1+i)^{2n}\cdot z^n$. De determinat domeniul de convergență a seriei.

Avem că $c_n=(1+i)^{2n}$, $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|1+i|^{2n}}}=\frac{1}{|1+i|^2}=\frac{1}{2}$. Astfel, seria este convergentă în discul $|z|<\frac{1}{2}$ și este divergentă pentru $|z|>\frac{1}{2}$.

Cercetăm convergența seriei pe cercul $|z|=\frac{1}{2}$. $z=\frac{1}{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $\varphi\in(-\pi;\pi]\Rightarrow z^n=\frac{1}{2^n}(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$. Obținem $(1+i)^{2n}=(2i)^n=2^n\cdot i^n=2^n\left(\cos\frac{\pi}{2}n+i\sin\frac{\pi}{2}n\right)$, iar

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^{2n}\cdot z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}n\right)+i\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)n+i\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)n.$$

Este evident, că $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)n$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)n$ nu $\exists$, astfel mulțimea de convergență este $|z|<\frac{1}{2}$.

Teoremă: Dacă $R>0$ este raza de convergență pentru seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} c_n z^n$, atunci funcția $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^4$ este olomorfă pe domeniul $|z|<R$.

Mai general, o serie de puteri are forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, unde $c_n, z_0\in\mathbb{C}$. Discul de convergență în cazul dat este $|z-z_0|<R$.

SERII TAYLOR

Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ convergentă în domeniul $|z-z_0|<R$. Atunci suma acestei serii este o funcție $f(z)$ alomorfă în acest domeniu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n=f(z)$.

Definiție: O funcție $f:D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (unde D este domeniu) se numește **analitică pe domeniul D**, dacă pentru orice $z_0\in D$ există un disc $|z-z_0|<r$ și $(a_n)_{n\geq 0}\subset\mathbb{C}$, astfel încât $\boldsymbol{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}$ pentru orice z din discul $|z-z_0|<r$.

Consecință: Orice funcție analitică este olomorfă. Are loc și afirmația reciprocă, adică o funcție olomorfă pe un disc este suma unei serii de puteri.

Teoremă: Dacă $f : D \to \mathbb{C}$ este o funcție olomorfă pe domeniul conex D, atunci f este analitică pe D. Anume pentru orice $z_0 \in D$ există $R > 0$, astfel încât pentru orice z, încât $|z - z_0| < R$, are loc:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ se numește **serie Taylor a funcției f**.

În cazul complex funcțiile derivabile și cele analitice coincid.

Pentru $z_0 = 0$ obținem $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, $|z| < R$.

În mod analog cazului funcției de variabilă reală au loc descompunerile funcțiilor e^z, $\cos z$, shz, chz, ln(i+z), $(i+z)^\alpha$ în vecinătatea lui $z_0 = 0$.

1. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^z$, $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$, $\forall z \in \mathbb{C}$ (raza de convergență $R = +\infty$)

2. $f: \mathbb{C} \setminus (-\infty; -1] \to \mathbb{C}, f(z) = \ln(1 + z)$, $\ln(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$, $|z| < 1$.

3. $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \sin z$, $g(z) = \cos z$,

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \ \forall z \in \mathbb{C}; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

4. $f: \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{1-z}$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$.

5. $f: \mathbb{C} \setminus \{-1\} \to \mathbb{C}, f(z) = \frac{1}{1+z}$, $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, $|z| < 1$.

6. $f, g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = shz, g(z) = chz$,

$$shz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall z \in \mathbb{C}, \qquad chz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Exemple:

1. Să se dezvolte în serie Taylor funcția $f(z) = \frac{1}{3 - 2z}$: a) în vecinătatea lui $z_0 = 0$ (după puterile lui z); b) în vecinătatea lui $z_0 = -1$ (după puterile lui z+1).

Rezolvare:

a) $\frac{1}{3-2z} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2z}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} z^n$ pentru $\left|\frac{2z}{3}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{3}{2}$.

b) $\frac{1}{3-2(z+1-1)} = \frac{1}{5-2(z+1)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2(z+1)}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2(z+1)}{5}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{5^{n+1}} (z+1)^n$,

pentru $\left|\frac{2(z+1)}{5}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+1| < \frac{5}{2}$.

2. Să se dezvolte în seria Taylor funcția $f(z) = \ln(2 + z - z^2)$în vecinătatea lui $z_0 = 0$ (după puterile lui z).

Rezolvare: Deoarece $2 + z - z^2 = (2 - z)(1 + z) \Rightarrow f(z) = \ln(2 - z) + \ln(1 + z)$.

Avem $\ln(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$ pentru $|z|<1$. Obținem

$$\ln(2-z)=\ln\left(2\left(1-\frac{z}{2}\right)\right)=\ln 2+\ln\left(1+\left(-\frac{z}{2}\right)\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{z}{2}\right)^n=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(-1)^n}{2^n n}z^n=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}z^n$$

pentru z astfel încât $\left|-\frac{z}{2}\right|<1 \Leftrightarrow |z|<2$.

În final, $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n+\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}z^n=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\frac{1}{2^n n}\right]z^n$ pentru $\begin{cases}|z|<1\\|z|<2\end{cases}\Leftrightarrow |z|<1.$

3. Să se dezvolte]n serie Taylor $f(z)=e^z$ în vecinătatea lui $z=i$ (după puterile lui z-i).

Rezolvare: $f(z)=e^{z-i+i}=e^i\cdot e^{z-i}=e^i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-i)^n=(\cos 1+i\sin 1)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-i)^n$, adevărată în discul $|z-i|<R,\ \ R=+\infty.$

4. Să se dezvolte în serie Taylor funcția $f(z)=\cos^2\frac{iz}{2}$ în vecinătatea lui $z_0=0$ (după puterile lui z).

Rezolvare:

$$f(z)=\cos^2\frac{iz}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\left(2\frac{iz}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}(1+\cos iz)=\frac{1}{2}(1+chz)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}chz=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

5. $f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z-5}$ după puterile lui z.

Rezolvare: $f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z-5}=\frac{z+1}{(z-1)(z+5)}$. Determinăm $A, B\in\mathbb{R}$, astfel încât $\frac{z+1}{(z-1)(z+5)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+5}$.

Avem $f(z)=\frac{A(z+5)+B(z-1)}{(z-1)(z+5)}=\frac{(A+B)z+(5A-B)}{(z-1)(z+5)}$. Avem $\begin{cases}A+B=1\\5A-B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{3}\\B=\frac{2}{3}\end{cases}$. Deci,

$$f(z)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z-1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{z+5}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-z}+\frac{2}{15}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{5}}=-\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{2}{15}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{5^n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3\cdot 5^{n+1}}\right)z^n,$$

adevărată pentru z astfel încât $\begin{cases}|z|<1\\\left|\frac{z}{5}\right|<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|<1\\|z|<5\end{cases}\Leftrightarrow|z|<1.$

SERII LAURENT

Dezvoltarea în serie Taylor a unei funcții alomorfe într-un disc poate fi generalizată, considerând o funcție olomorfă într-o coroană circulară, se obține o dezvoltare a funcției într-o serie numită serie Laurent. În acest caz seria Taylor este un caz particular al seriei Laurent.

Definiție: Se numește **serie Laurent într-o vecinătate punctată a lui** z_0 $\left(0<|z-z_0<R|\right)$ expresia $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, $c_n \in \mathbb{C}$. Se mai scrie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$ se numește **partea principală a seriei Laurent**, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ se numește **parte regulată a seriei Laurent**.

Fie că seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$ este convergentă în discul $|z-z_0|<R$ și fie că seria $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)^n$ este convergentă în domeniul $\left|\frac{1}{z-z_0}\right|<\frac{1}{r} \Leftrightarrow |z-z_0|>r$. Pentru $r<R$ seria Laurent $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(z-z_0\right)^n$ are domeniul de convergență coroana circulară $r<|z-z_0|<R$. Dacă suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ este funcția $f_1(z)$, iar suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-z_0)^n}$ este funcția $f_2(z)$, atunci funcțiile $f_1(z)$ și $f_2(z)$ sunt funcții analitice. Deci, suma seriei Laurent este funcția $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$, analitică în coroana $r<|z-z_0|<R$.

Teoremă: Dacă f este o funcție olomorfă în coroana circulară $r;|z-z_0|<R$, atunci f se poate dezvolta în serie Laurent după puterile lui $z-z_0$: $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, unde $c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z_0|=\rho} \frac{f(z)}{\left(z-z_0\right)^{n+1}}dz$, iar $r<\rho<R$.

Exemple:

1. Dezvoltați în serie Laurent funcția $f(z)=\frac{1}{z-2}$ în domeniile indicate: a) $|z|<2$, b) $|z|>2$, c) $|z-1|>1$.

   Rezolvare: Avem $\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty} w^n$, $|w|<1$.

   a) Cum $|z|<2 \Rightarrow \left|\frac{z}{2}\right|<1$. Atunci $f(z)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$.

   b) Cum $|z|>2 \Rightarrow \left|\frac{2}{z}\right|<1$. Atunci $f(z)=\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$.

   c) Cum $|z-1|>1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z-1}\right|<1$. „Transformăm” funcția evidențiind expresia $z-1$:

$$f(z)=\frac{1}{z-1+1-2}=\frac{1}{(z-1)-1}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}.$$

2. Dezvoltați în serie Laurent funcția $f(z)=\dfrac{1}{z^2-2z-3}$ în domeniul a) $|z|<1$, b) $1<|z|<3$.

Avem: $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-3)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z+1}\right)=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z+1}$.

a) Avem, $|z|<1 \Rightarrow |z|<3 \Rightarrow \left|\dfrac{z}{3}\right|<1$. Atunci $f(z)=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+z}=-\frac{1}{12}\cdot$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}-\frac{1}{4}\cdot\sum_0^{\infty}(-1)^n z^n = =\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4}\cdot(-1)^n\right]z^n.$$

b) Cum $1<|z|<3 \Leftrightarrow \begin{cases}|z|>1\\ |z|<3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left|\dfrac{1}{z}\right|<1\\ \left|\dfrac{z}{3}\right|<1\end{cases}$.

Obținem $f(z)=\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{3}}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{z}}=-\dfrac{1}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{3^n}-\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{z^n+1}$.

3. Dezvoltați în serie Laurent funcția $f(z)=\sin(2z-1)$ după puterile lui z.

$$f(z)=\cos 1\sin 2z-\sin 1\cos 2z=\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n+1}}{(2n+1)!}-\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}=$$

$$=\cos 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1}-\sin 1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}z^{2n}.$$

TEMA: PUNCTE SINGULARE IZOLATE

Definiție: Se numește **zerou** al funcției f orice $z_0\in\mathbb{C}$, astfel încât $f(z_0)=0$.

Fie că funcția olomorfă f se dezvoltă în seria Taylor în vecinătatea lui z_0 și $f(z)=c_k(z-z_0)^k+c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+...=\sum_{n=k}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n$, $c_n\neq 0$, atunci z_0 se numește **zerou de multiplicitatea *k***. Dacă $k=1$, atunci z_0 se numește **zerou simplu**.

Deoarece $c_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, pentru $n\geq 0$, atunci z_0 este zerou de multiplicitatea lui k al funcției f dacă $f(z_0)=f'(z_0)=f^{(k-1)}(z_0)=0$, iar $f^{(k)}(z_0)\neq 0$.

Exemplu:

1. $f(z)=1-e^z$. Deoarece $f(2\pi ni)=1-e^{2\pi ni}=1-e^0=0$ și $f'(2\pi ni)=e^{2\pi ni}=1$ $\Rightarrow z_n=2\pi ni$, e, $n\in\mathbb{Z}$ sunt zerouri simpli ale funcției.
2. Pentru funcția $f(z)=\sin z-z$ punctul $z=0$ este zerou de multiplicitatea lui $k=3$. Într-adevăr, $f(0)=0$, $f'(0)=\cos z-1$, $f'(0)=0$, $f''(z)=-\sin z$, $f''(0)=0$, $f'''(z)=-\cos z$, $f'''(0)=-1\neq 0$. Altă metodă de determinare a multiplicității lui $z=0$, prin dezvoltarea în seria Taylor a funcției

$$f(z)=\sin z - z=\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}+\ldots\right)-z=z^3\left(-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-\frac{z^4}{7!}+\ldots\right).$$

Definiție: Se numește **punct singular izolat** pentru funcția f un punct $z_0 \in D$, astfel încât $f: D\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ este olomorfă.

Notă: Dacă z_0 este punct singular izolat pentru funcția olomorfă f, atunci funcția f admite dezvoltarea în serie Laurent pe discul punctat $0<|z-z_0|<R$:

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n.$$

Vom distinge **trei tipuri de singularități** în funcție de ”forma” părții principale.

Definiție:

1. Punctul z_0 se numește **punct singular aparent**, dacă seria Laurent a funcției f **nu conține partea principală** $(c_n=0, \forall n\geq 1)$, $\boldsymbol{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n}$.
2. Punctul z_0 se **numește pol de ordinul *m***, dacă partea principală a dezvoltării în serie Laurent conține **un număr finit** de termeni $\boldsymbol{f(z)=\sum_{n=1}^{m}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ c_{-m}\neq 0}$.
   Dacă $m=1$, $z=z_0$ se numește **pol simplu**.
3. Punctul z_0 se numește **punct singular esențial**, dacă partea principală a dezvoltării în serie Laurent conține **o infinitate de termeni** (mulțimea coeficienților nenuli din partea principală este infinită).

Exemplu:

1. $f(z)=\frac{\sin z}{z}$, $z\in\mathbb{C}^*$ este funcție olomorfă.
   $f(z)=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot z^{2n-1}}{(2n-1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!}=\frac{1}{1!}-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}-\ldots$, $z=0$ este punct singular aparent.
2. $f(z)=\frac{e^z-1}{z^3}$, $z\in\mathbb{C}^*$, este funcție olomorfă.
   $f(z)=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-3}}{n!}=\frac{1}{0!\cdot z^3}+\frac{1}{1!\cdot z^2}+\frac{1}{2!z}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+3)!}$, - $z=0$ este pol de ordinul 3.
3. $f(z)=\cos\frac{1}{z}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, este funcție olomorfă cu singularitate în $z=0$.
   $\cos\frac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}\cdot\frac{1}{z^{2n}}$, de unde rezultă că $z=0$ este punct singular esențial.

Fie $f:\setminus\{z_0\}\to C$, $z_0\in D$ olomorfă. Vom caracteriza singularitățile izolate cu ajutorul limitei funcției z_0.

Teoremă (de caracterizare a singularității aparente). Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. Punctul z_0 este singular aparent;

2. $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

3. f este mărginită într-o vecinătate a lui z_0.

Teoremă (de caracterizare a polilor). Punctul z_0 este pol pentru funcția f dacă și numai dacă $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Teoremă (de caracterizare a singularității esențiale). Punctul z_0 este punct singular esențial dacă și numai dacă nu există $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ în $\mathbb{C}_\infty$.

Comportamentul funcției la ∞

Vecinătate a punctului infinit depărtat $z=\infty$ este orice mulțime $|z|>R$.

Definiție: Punctul infinit depărtat $z=\infty$ se numește **punct izolat** pentru funcția *f*, dacă există o vecinătate a lui $z=\infty$, care nu conține alte puncte izolate.

Cu substituția $w=\frac{1}{z}$ obținem o transformare a vecinătății lui $z=\infty$ într-o vecinătate a lui $w_0=0$. Astfel, studierea comportamentului lui f în $z=\infty$ se reduce la studierea comportamentului lui $g(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$ în $w_0=0$.

Fie că g este olomorfă într-un domeniu $0<|w|<r$ și $g(w)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{w^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n w^n$ - dezvoltarea în serie Laurent a funcției *g*. Atunci $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^n$.

Notă:

1. Dacă $w=0$ este punct aparent pentru *g*, atunci $z=\infty$ se numește punct aparent pentru funcția *f*, iar $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}$. Atunci $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=c_0$.
2. Dacă $w=0$ este pol de ordinul *m* pentru funcția *f*, iar $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}+\sum\limits_{n=1}^{m}c_{-m}z^n$. Atunci $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$.
3. Dacă $w=0$ este punct esențial pentru funcția *g*, atunci $z=\infty$ se numește punct esențial pentru funcția *f*, iar $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{z^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_{-n}z^n$.

REZIDUUL FUNCȚIEI. APLICAȚII

Definiție: Fie $f: D\setminus\{z_0\}\to\mathbb{C}$ olomorfă, unde *D* este domeniu deschis și $z_0\in D$, cu dezvoltarea în serie Laurent $f(z)=\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots$ Se numește ***reziduul funcției f în*** z_0 coeficientul c_{-1} din această dezvoltare. Se notează $\underset{z=z_0}{Rez} f(z)$.

Deci, $\underset{z=z_0}{Rez} f(z)=c_{-1}$.

Exemplu: Funcția $f(z)=\dfrac{e^z}{z^3}$ este olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Punctul $z=0$ este punct singular izolat și $f(z)=\frac{1}{0!z^3}+\frac{1}{1!z^2}+\frac{1}{2!z}+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots$, iar $\underset{z=0}{Rez} f(z)=\frac{1}{2}$.

Calcularea reziduurilor:

1. Dacă z_0 este **punct singular aparent**, atunci $c_{-1}=0$și , $\underset{z=0}{Rez} f(z)=0$

2. a) Fie că z_0 este **pol de ordinul *m*** și $f(z)=\sum_{n=1}^{m}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$. Atunci

$$(z-z_0)^m\cdot f(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\ldots+c_{-1}(z-z_0)^{m-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^{n+m}.$$

Derivând ambele părți de $m-1$ ori și trecând la limită, obținem

$$\boldsymbol{c_{-1}=\underset{z=z_0}{Rez} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)^m\right]^{(m-1)}}.$$

b) Dacă $m=1$, adică z_0 este **pol simplu**, atunci $\boldsymbol{\underset{z=z_0}{\mathrm{Rez}} f(z)=\lim_{z\to z_0}(f(z)(z-z_0))}$.

Notă: Dacă $\boldsymbol{f(z)=\frac{\varphi(z)}{g(z)}}$, unde $\varphi,g:D\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ olomorfe, $z_0\in D$ astfel încât $\boldsymbol{\varphi(z_0)\neq 0,\ g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0}$ (z_0 este pol simplu), atunci $\boldsymbol{\underset{z=z_0}{Rez} f(z)=\frac{\varphi(z_0)}{g'(z_0)}}$.

3. Dacă $\boldsymbol{z_0}$ este **punct esențial** pentru funcția *f*, reziduu poate fi determinat, utilizând dezvoltarea Laurent pe un disc punctat în z_0.

Exemple:

a) $f(z)=\frac{\sin(z^2)}{z^3-\frac{\pi}{4}z^2}$. Puncte singulare sunt $z=0$ și $z=\frac{\pi}{4}$.

Avem că $\lim_{z\to 0} f(z)=\frac{\sin(z^2)}{z^2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{4}{\pi}\Rightarrow z=0$ este punct aparent și $\underset{z=0}{Rez} f(z)=0$.

Punctul $z=\frac{\pi}{4}$ este pol simplu rezultă $\underset{z=\frac{\pi}{4}}{Rez} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin(z^2)}{z^2(z-\frac{\pi}{4})}\cdot\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{16}{\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$.

b) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$.

Punctele singulare sunt $z=-1$ și $z=2$.

Punctul $z=2$ este pol simplu, de unde $\underset{z=2}{Rez} f(z)=\lim_{z\to 2}\left(\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}\cdot(z-2)\right)=\frac{e^2}{27}$.

Punctul $z=-1$ este pol de ordinul $m=3$. Deci, $\underset{z=-1}{Rez} f(z)=\frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left(\frac{e^z}{z-2}\right)''$. Dar $\left(\frac{e^z}{z-2}\right)''=\frac{e^z(z^2-6z+10)}{(z-2)^3}$ și $\underset{z=-1}{Rez} f(z)=\frac{17}{54e}$.

c) $f(z)=z\cos\dfrac{1}{2}$. Punct singular este $z=0$ - punct esențial și

$$f(z)=z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n)!z^{2n}}=z\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^n}-\frac{1}{6!z^6}+\ldots\right)=z-\frac{1}{2!z}+\frac{1}{4!z^3}-\ldots$$

Astfel, $\underset{z=0}{Rez} f(z)=-\frac{1}{2!}=-\frac{1}{2}$.

TEOREMA DE BAZĂ A REZIDUURILOR

Fie $f : D \setminus \{z_1 ... z_n\} \to \mathbb{C}$, olomorfă și $z_1, z_2 ..., z_n \in D$, iar L un contur închis parțial neted, ce se conține în D și punctele $z_1, z_2, ... z_n$ aparțin domeniului mărginit de L. Atunci $\boldsymbol{\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{\mathrm{Rez}} f(z)}$, unde L este parcurs în sens pozitiv.

Exemple:

1. $\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z^3} dz = 2\pi i \underset{z=0}{Rez} f(z)$.

Punctul $z=0$ este pol de ordinul 3 al funcției $f(z) = \frac{e^z}{z^3} \Rightarrow \underset{z=0}{Rez} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} (e^z)'' = \frac{1}{2}$.

Astfel, $I = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i$.

2. $\oint_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i \left(\underset{z=0}{Rez} f(z) - \underset{z=-1}{Rez} f(z) \right)$.

Deoarece $\lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} = 1 \Rightarrow \underset{z=0}{Rez} f(z) = 0$ ($z=0$ este punct aparent).

Punctul $z=-1$ este pol simplu rezultă $\underset{z=-1}{Rez} f(z) = \lim_{z\to -1} \left(\frac{e^z - 1}{z(z+1)} \cdot (z+1) \right) = 1 - \frac{1}{e}$.

Obținem $I = 2\pi i \left(1 - \frac{1}{e}\right)$.

3. $\oint_{|z|=2} tgzdz = \oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{\cos z} dz = 2\pi i \left(\underset{z=\frac{\pi}{2}}{Rez} f(z) + \underset{z=-\frac{\pi}{2}}{Rez} f(z) \right)$.

$\underset{z=\frac{\pi}{2}}{Rez} f(z) = \lim_{z\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{(\cos z)'} = -1; \quad \underset{z=-\frac{\pi}{2}}{Rez} f(z) = \lim_{z\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z}{(\cos z)'} = -1.$

Obținem $I = 2\pi i(-2) = -4\pi i$.

4. $\oint_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\frac{1}{z} dz = 2\pi i \left(\underset{z=1}{Rez} f(z) + \underset{z=0}{Rez} f(z) \right)$.

Punctul $z=1$ este pol simplu, de unde $\underset{z=1}{Rez} f(z) = \lim_{z\to 1} \sin\frac{1}{z} = \sin 1$.

Punctul $z=0$ este punct esențial. Avem

$$\frac{1}{z-1} \cdot \sin\frac{1}{z} = -\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + ...\right) \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - ... \right) = \frac{1}{z}\left(-1 + \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} - ... \right) + ...$$

Deci, $\underset{z=0}{Rez} f(z) = -\sin 1$. Deci, $I = 2\pi i(\sin 1 - \sin 1) = 0$.

CALCULAREA UNOR INTEGRALE REALE FOLOSIND TEOREMA REZIDUURILOR

1. Integrala de forma $\boldsymbol{\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x) dx}$, unde R este o funcție rațională. Această integrală se reduce la integrala unei funcții complexe cu schimbul de variabilă

$z = e^{ix} \Rightarrow dz = ie^{ix}dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{iz},$

$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right).$

Când x parcurge intervalul $[0;2\pi]$, variabila complexă z parcurge în sens pozitiv cercul $|z|=1$ cu ecuația în formă exponențială $z=e^{ix}$.

$$\int_0^{2\pi} R(\sin x, \cos x)dx = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right),\ \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z}.$$

Exemplu:

$\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{4-\cos x} = \frac{1}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{4-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\frac{dz}{z} = \frac{2}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{8z-z^2-1}dz = -\frac{2}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{z^2-8z+1}dz.$ Determinăm punctele singulare: $z^2-8z+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=4-\sqrt{15} \\ z=4+\sqrt{15}\end{array}\right.$ - poli simpli. Doar $z=4-\sqrt{15}$ aparțin discului $|z|<1$.

Atunci $I = -\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot \underset{z=4-\sqrt{15}}{Rezf(z)} = -4\pi \lim\limits_{z\to 4-\sqrt{15}}\frac{1}{(z^2-8z+1)'} = -4\pi\lim\limits_{z\to 4-\sqrt{15}}\frac{1}{2z-8} = -4\pi\frac{1}{-2\sqrt{15}} = \frac{2\pi}{\sqrt{15}}.$

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, unde grad $Q(x)\geq gradP(x)+2$, $Q(x)\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Integrala improprie este convergentă. Atunci

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0} Rezf(z),$$

unde z_k sunt singularități ale funcției $R(z)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, aflate în semiplanul superior.

Exemple:

a) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx$. Fie $f(z)=\frac{z^2}{z^4+1}$. Punctele singulare sunt $z=\sqrt[4]{-1}$. Avem că $\sqrt[4]{-1}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i;\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i;\ \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i;\ \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$. Selectăm punctele singulare, pentru care $\operatorname{Im} z_k>0$, adică $z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$; $z_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$. Atunci $I=2\pi i\left(\underset{z=z_1}{Rezf(z)}+\underset{z=z_2}{Rezf(z)}\right)$. Avem $\underset{z=z_1}{Rezf(z)} = \lim\limits_{z\to z_1}\frac{z^2}{(z^4+1)'} = \lim\limits_{z\to z_1}\frac{1}{4z} = \frac{1}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}$;

$\underset{z=z_2}{Rezf(z)} = \lim\limits_{z\to z_2}\frac{z^2}{(z^4+1)'} = \lim\limits_{z\to z_2}\frac{1}{4z} = \frac{1}{4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}.$

$$I = 2\pi i\left(\frac{1}{4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}+\frac{1}{4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}\right) = 2\pi i\cdot\frac{1}{4}\frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}i}{-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Funcția $f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}$ este pară pe $(-\infty,+\infty)$ reiese $I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx = \pi i \sum_{\text{Im} z_k>0} \underset{z=z_k}{Rez} f(z)$, unde $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$.

Punctele singulare ale funcției f sunt $z_1=i$ și $z_1=-i$, $\text{Im}\, z_1>0$. Atunci $I = \pi i \underset{z=i}{Rez}\, f(z)$.

Punctul $z=i$ este pol de ordinul 2 și $f(z)=\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$ $\underset{z=i}{Rez} f(z) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}(z-i)^2\right)' = \lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{8i^3} = \frac{1}{4i}$. Obținem $I=\pi i\frac{1}{4i}=\frac{\pi}{4}$.

3. a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_k>0} \underset{z=z_k}{Rez}\left(f(z)e^{iaz}\right)$, unde $a>0$ $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$,

$(grad\ Q \geq 1 + grad\ P$ și $Q(x)\neq 0 \forall x\in R)$;

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(ax)dx = Re\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx\right]$,

c) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(ax)dx = Im\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx\right]$

Exemplu:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2-2x+2}dx = \text{Im}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}e^{ix}dx\right].$$

Avem că $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+2}e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\text{Im} z_k>0} Rez\, f(z)$, $f(z)=\frac{1}{z^2-2z+2}e^{iz}$. Punctele singulare ale funcției sunt $z_1=1+i$ și $z_2 = 1-i$ și $\text{Im}\, z_1>0$, $\text{Im}\, z_2<0$. Punctul z_1 este pol simplu și $\underset{z=z_1}{R_e z} f(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{e^{iz}}{(z^2-2z+2)'} = \lim_{z\to z_1}\frac{e^{iz}}{2z-2} = \frac{e^{i(1+i)}}{2i}$. Atunci $I=2\pi i\frac{e^{i-1}}{2i}=\frac{\pi}{e}(\cos 1+i\sin 1)$.