ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

Logica matematică reuneşte teoria mulţimilor, teoria algoritmilor, teoria modelelor şi teoria demonstraţiilor.

Vom face cunoştinţă mai tirziu cu unele momente legate de teoria algoritmilor, care studiază modelele matematice ale operaţiilor mecanice executate de oameni sau dispozitive speciale atunci când rezolvă probleme de masă de acelaşi tip.

Teoria modelelor a apărut prin aplicarea metodelor logicii matematice la algebră, transformându-se într-o disciplină de-sine-stătătoare, care studiază modelele matematice ale teoriilor ştiinţifice, punând în evidenţă legile comune tuturor teoriilor ce se exprimă printr-un limbaj formalizat dat.

Teoria demonstraţiilor, care reprezintă partea principală a logicii matematice, studiază modelele matematice ale procesului gândirii, structura gândirii, ale raţionamentelor utilizate în matematică.

Orice proces de gândire, printre care şi cel utilizat în matematică, este legat de următoarele patru obiecte:

1. Un limbaj L în care se exprimă premisele iniţiale (date) ale gândirii, diferite momente ale gândirii, rezultatele obţinute prin raţionament. De obicei, L este limba unui popor, îmbogăţită cu termeni şi concepte caracteristice teoriei obiectelor studiate.
2. O clasă K a obiectelor studiate N.
3. Un concept de adevăr al enunţului a în limbajul L privind obiectul studiat N din K.
4. Un proces de elaborare a enunţurilor folosite în raţionament, constând în trecerea de la unele enunţuri, numite premise, la un enunţ nou, numit consecinţă a enunţurilor iniţiale.

Modelul matematic al procesului gândirii constă din următoarele modele:

- Limbajul formalizat Lf - modelul matematic al limbajului L;
- Modelul matematic Nm al obiectului studiat N;
- Definiţia exactă a conceptului de adevăr a enunţului α din limbajul Lf în modelul Nm;
- Calculul logic sau modelul matematic al trecerii de la premise la consecinţe.

Dintre principalele orientări ale logicii matematice pot fi menţionate logica clasică, logica intuiţionistă, logica polivalentă, logica hibridă, logica fuzzy, etc. Definirea riguroasă a problemelor legate de ştiinţa calculatoarelor, informatica teoretică şi aplicată este bazată pe principiile logicii matematice. Problemele tehnice privind circuitele logice şi comenzile secvenţiale, majoritatea modelelor matematice utilizate în inteligenţa artificială nu pot fi concepute în afara acestui domeniu.

TEMA 3. Funcţiile algebrei logicii

Vom evidenţia în mod deosebit mulţimea *B* care conţine două elemente, notate de obicei prin 0 şi 1 $B=\{0,1\}$. Aceste elemente nu vor fi considerate numere în sensul obişnuit. Ne vom opri la interpretarea logică: 0 în sens de **nu** sau **fals** şi 1 în sens de **da** sau **adevărat**; (vă amintiţi de programare - FALS şi TRUE). Într-un caz mai general această interpretare nu este obligatorie - adesea elementele mulţimii B pot fi considerate simboluri formale care nu au un sens aritmetic. Algebra $A = \langle B, F\rangle$, în care F este mulţimea operaţiilor $f: B^n \to B, n = 1, 2,..., m$ se numeşte algebra logicii sau booleană, după numele matematicianului şi logicianului englez George Boole (1815 - 1864). Operaţiile $f: B^n \to B$ se numesc funcţii ale algebrei logicii sau funcţii logice, funcţii booleene (*FB*). Cu alte cuvinte, o funcţie booleană de n argumente $f(x_1, x_2,..., x_n)$ are domeniul de valori şi domeniul de definiţie mulţimea $B=\{0,1\}$. Mulţimea tuturor funcţiilor logice de n argumente notăm prin $P_2(n)$. Luând în locul lui *B* o mulţime finită *M* de cardinal **k** de simboluri formale împreună cu toate operaţiile definite pe *M* vom ajunge la logica polivalentă. Mulţimea tuturor funcţiilor logice în logica polivalentă se va nota prin $P_k(n)$.

O funcţie logică de n argumente $f(x_1, x_2,..., x_n)$ poate fi definită cu ajutorul unui tabel care conţine n+1 coloane. Primele n coloane vor enumera toate combinaţiile posibile ale argumentelor, iar ultima determină valorile posibile ale funcţiei.

Exemplul 1. Pentru o funcţie de trei argumente $f(x_1, x_2, x_3)$ putem avea următorul table (valorile lui *f* sunt luate arbitrar):

N	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Se va mai spune că combinaţia (000) este aplicată în 1, (001) - în 0 ş.a.m.d. Combinaţiile au fost enumerate în ordine lexicografică, începând de la 0, reprezentat în binar prin (000) până la 7 - (111). Avem 8 combinaţii posibile în cazul unei funcţii de trei argumente.

Pentru cazul unei funcţii de *n* argumente observăm că combinaţiile posibile ale argumentelor sunt vectori binari de lungime *n*. Este uşor de demonstrat, că mulţimea tuturor combinaţiilor posibile este $k = 2^n$. Din aceleaşi considerente pot exista 2^k (unde $k = 2^n$) funcţii booleene distincte. Întradevăr, mulţimea tuturor vectorilor binari de lungime *n* prin definiţie reprezintă produsul cartezian B^n. Cardinalul acestui produs este $|B| = 2^n$
Funcţii booleene de un singur argument pot fi patru:
Tabelul 1.

x	*f0*	*f1*	*f2*	*f3*
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Funcţiile f_o şi f_3 se numesc constanta 0 si, respectiv, constanta 1. Valorile lor nu depind de valoarea argumentului. În acest caz se va spune că argumentul este nesemnificativ, redundant sau fictiv.

Funcţia f_1 repetă valoarea argumentului x: vom scrie $f_1(x) = x$. Se mai numeste functia identica.

Funcţia $f_2(x)$ se numeşte negaţia lui x (NONx) şi se notează $\overline{x}$ (x barat) sau ˥x.

Exista 16 FB de două argumente:

Tabelul 2

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

FB $f_0(x_1, x_2)$ şi $f_{15}(x_1, x_2)$ sunt constante 0 şi 1, respectiv.

Funcţia $f_1(x_1, x_2)$=, care aplică combinaţiile celor două argumente în 1 atunci şi numai atunci, când ambele argumente au valoarea 1, se numeşte *conjuncţie, produs logic* sau *funcţia logică ŞI, (AND).* Se notează $x_1\&x_2$, x_1x_2 sau $x_1 \wedge x_2$.

Deci, $f_1(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1\&x_2 = x_1x_2$.

x_1	x_2	f_1
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Funcţia $f_2(x_1, x_2) = x_1 \wedge \overline{x}_2$.

x_1	x_2	f_2
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Funcţia constanta $f_3(x_1, x_2) = x_1$.

x_1	x_2	f_3
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Funcţia constanta $f_5(x_1, x_2)= x_2$.

x_1	x_2	f_5
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Funcţia $f_4(x_1, x_2)= \overline{x}_1\wedge x_2$

x_1	x_2	f_4
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Funcţia $f_6(x_1, x_2)$ se numeşte *suma modulo* 2, funcţia *SAU-EXCLUSIV* sau *neechivalenţă* şi se notează $f_6(x_1, x_2)= x_1 \oplus x_2= x_1\wedge \overline{x}_2\vee \overline{x}_1\wedge x_2$.

x_1	x_2	f_6
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Funcţia $f_7(x_1, x_2)$ are valoarea 1 dacă cel puţin unul din argumente este 1 şi se numeşte *disjuncţie, sumă logică, funcţia logică SAU* (*OR*). Se notează $f_7(x_1, x_2)= x_1 \vee x_2= x_1+x_2$.

x_1	x_2	f_7
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Funcţia $f_8(x_1, x_2) = x_1 \uparrow x_2 = \overline{f_7}(x_1, x_2)$ poartă denumirea de *funcţia lui Pierce* sau funcţia lui *Webb*. Se mai numeşte această funcţie *NICI* sau *NOR* din cauza că coincide cu $\overline{x_1 + x_2}$.

x_1	x_2	f_8
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

FB $f_9(x_1, x_2)$ care are valoarea 1 atunci şi numai atunci când valorile argumentelor coincid se numeşte funcţia de *echivalenţă* şi se notează prin $f_9(x_1, x_2) = x_1 \leftrightarrow x_2$ sau $x_1 \sim x_2$. $f_9(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 x_2$.

x_1	x_2	f_9
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Funcţia $f_{10}(x_1, x_2) = \overline{f_5(x_1, x_2)} = \overline{x}_2$

x_1	x_2	f_{10}
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Funcţia $f_{11}(x_1, x_2)$ are valoarea 0 numai în cazul când x_1 este 0, iar $x_2 = 1$. Ea se numeşte *implicaţie.* Se va mai spune că x_2 *implică* x_1 sau *dacă* x_2 *atunci* x_1 şi vom nota $x_2 \rightarrow x_1$. Deci, $f_{11}(x_1, x_2) = x_2 \rightarrow x_1 = \rceil f_4(x_1, x_2) = x_1 \vee \overline{x}_2$.

x_1	x_2	f_{11}
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Funcţia $f_{12}(x_1, x_2) = \overline{f_3(x_1, x_2)}. = \overline{x}_1$

x_1	x_2	f_{12}
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Funcţia $f_{13}(x_1, x_2)$ are valoarea 0 numai în cazul când x_1 este 1, iar $x_2 = 0$. Ea se numeşte *implicaţie.* Se va mai spune că x_1 *implică* x_2 sau *dacă* x_1*, atunci* x_2 şi vom nota $x_1 \to x_2$.

x_1	x_2	f_{13}
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Deci, $f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2 = \urcorner f_2(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \vee x_2.$

FB $f_{14}(x_1, x_2)$ este 0 dacă şi numai dacă ambele argumente sunt 1 şi se numeşte funcţia lui *Sheffer* sau *ŞI-NU* (*NAND*). Se notează $f_{14}(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$ sau $\overline{x_1 x_2}$.

x_1	x_2	f_{14}
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Algebra A=<P_2, {$\vee$, $\wedge$, $\urcorner$ }>, suportul căreia este mulţimea tuturor funcţiilor logice, iar în calitate de operaţii sunt luate disjuncţia, conjuncţia şi negaţia, se numeşte **a***lgebra booleană* a funcţiilor logice. Operaţiile acestei algebre se numesc *operaţii booleene.* Are loc

Teorema Orice functie logica de doua argumente in mod unic pot fi reprezentata prin operatiile booleene.

Demonstratia rezulta din cele mentionate mai sus.

Prioritatile operatiilor booleene: $\urcorner$, $\wedge$, $\vee$. La necesitate se aplica paranteze.

Proprietăţile operaţiilor booleene:

- asociativitate $x_1(x_2x_3)=(x_1x_2)x_3$;

  $x_1 \vee (x_2 \vee x_3)=(x_1 \vee x_2)\vee x_3$; (1)
- comutativitate $x_1x_2 = x_2x_1$;

  $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$; (2)
- distributivitate $x_1(x_2 \vee x_3)= x_1x_2 \vee x_1x_3$;

  $x_1 \vee (x_2x_3)=(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)$; (3)
- idempotenţă $xx = x$; $x \vee x = x$; (4)
- $x = xx = xxx \ldots$, $x = x \vee x = x \vee x \vee x \ldots$
- Principiul involuţiei $\overline{\overline{x}} = x$; (5)
- operaţii cu constante $x \& 1 = x$; $x \& 0 = 0$;

  $x \vee 1 = 1$; $x \vee 0 = x$;

  $\overline{0} = 1$; $\overline{1} = 0$; (6)
- legile lui de Morgan $\overline{x_1x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$; $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1}.\overline{x_2}$ (7)
- contradicţie $x\overline{x} = 0$; (8)
- legea terţului exclus $x + \overline{x} = 1$. (9)
- legea alipirii $x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2 = x_1$.

  $(x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1$. (10)

Legea absorbtiei $x_1 \vee x_1x_2 = x_1$

$x_1 \wedge (x_1 \vee x_2) = x_1$ (11)

TEMA4.Transformări echivalente şi decompoziţia FB

Formule echivalente Anterior am numit superpoziţie a funcţiilor $f_1, f_2,..., f_n$, funcţia f obţinută prin substituiri şi redenumiri de argumente în aceste funcţii, iar prin formulă înţelegem expresia care descrie această superpoziţie. Vom concretiza noţiunea de formulă pentru funcţiile logice, introducând noţiunea de formulă peste $\Omega = \{ f_1, f_2,..., f_n,...\}$, Ω fiind o mulţime de funcţii logice date. Considerăm formulă peste Ω toate expresiile care conţin numai simboluri de variabile, simboluri de funcţii şi paranteze. Valoarea funcţiei dată de o formulă poate fi calculată, cunoscând valorile argumentelor şi tabelele de adevăr ale funcţiilor logice elementare (v. tab.2).

Deci, o formulă, pune în corespondenţă fiecărui set de valori ale argumentelor o anumită valoare de adevăr a funcţiei şi poate servi, împreună cu tabelele de adevăr, drept metodă de definire şi calculare a valorilor funcţiilor logice. Se mai spune că o formulă reprezintă sau realizează o funcţie logică.

Calculând valorile FB pentru toate 2^n combinaţii ale argumentelor restabilim tabelul de adevăr al acestei funcţii.

Însă, spre deosebire de tabelele de adevăr, o funcţie logică poate fi realizată prin mai multe formule. Cu alte cuvinte, dacă între mulţimea tabelelor de adevăr şi mulţimea funcţiilor logice există o corespondenţă biunivocă, alta este situaţia cu formulele: o FB poate fi prezentată printr-o infinitate de formule. De exemplu, funcţia Pierce $f_8(x_1, x_2)= x_1 \uparrow x_2$ mai poate fi realizată prin formula $\overline{x_1 + x_2}$, sau $\overline{x_1}.\overline{x_2}$ iar funcţia Sheffer $f_{14}(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$ prin $\overline{x_1 x_2}$, sau $\overline{x_1} + \overline{x_2}$

Formulele, care realizează aceeaşi funcţie logică se numesc echivalente. Echivalenţa a două formule se va nota prin simbolul = sau ≡. Metoda generală de stabilire a echivalenţei a două formule constă în construirea tabelelor lor de adevăr şi compararea acestora. Altă metodă, denumită metoda transformărilor echivalente, presupune transformarea uneia dintre formule (sau a ambelor) până se ajunge la o formă evident comună.

EXEMPLUl 1.

Pentru funcţia logică

$$f = \overline{\left(\overline{x_1 \oplus x_2} \downarrow \overline{x_1 \to \overline{x_3 \oplus x_4}}\right) \sim \left(\overline{\left(x_1\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_4}\right) \mid \left(\overline{x_2 \vee x_3} \downarrow \overline{x_4 \sim x_2}\right)}\right)}$$

de alcătuit tabelul de adevăr;

Rezolvare:

Pentru a simplifica funcţia logică dată întroducem notăţiile:

$x_1 \oplus x_2 = \varphi_1$	$\overline{x_3} = \varphi_8$	$x_4 \sim x_2 = \varphi_{15}$
$\overline{\varphi_1} = \varphi_2$	$x_1\varphi_8 = \varphi_9$	$\overline{\varphi_{15}} = \varphi_{16}$
$x_3 \oplus x_4 = \varphi_3$	$\overline{x_4} = \varphi_{10}$	$\varphi_{14} \downarrow \varphi_{16} = \varphi_{17}$
$\overline{\varphi_3} = \varphi_4$	$x_1\varphi_{10} = \varphi_{11}$	$\varphi_{12} \mid \varphi_{17} = \varphi_{18}$
$x_1 \to \varphi_4 = \varphi_5$	$\varphi_9 \vee \varphi_{11} = \varphi_{12}$	$\overline{\varphi_{18}} = \varphi_{19}$
$\overline{\varphi_5} = \varphi_6$	$x_2 \vee x_3 = \varphi_{13}$	$\varphi_7 \sim \varphi_{19} = \varphi_{20}$
$\varphi_2 \downarrow \varphi_6 = \varphi_7$	$\overline{\varphi_{13}} = \varphi_{14}$	$\overline{\varphi_{20}} = f$

Rezultatele calculelor pe operatii le introducem in urmatorul tabel de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9	φ_{10}	φ_{11}	φ_{12}	φ_{13}	φ_{14}	φ_{15}	φ_{16}	φ_{17}	φ_{18}	φ_{19}	φ_{20}	f
0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
6	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1
8	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
9	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
10	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
12	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
13	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
14	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0
15	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0

Pentru functia data *f* tabelul de adevar contine obligator coloanele:

N – numarul echivalentului zecimal a seturilor de valori ale argumentelor;

Valorilor argumentelor x_1, x_2, x_3, x_4;

Coloana lui *f:*

Tabelul de adevăr:

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

In tabelul de adevar pentru a introduce valorile argumentelor exista o metoda simpla:

In I coloana inscriem 8 de zero si apoi 8 de unu;

In II coloana inscriem 4 de zero si apoi 4 de unu,apoi irasi 4 de zero si apoi 4 de unu;

In III coloana inscriem alternativ cite 2 de 0 si apoi 2 de unu;

In IV coloana inscriem alternativ cite 1 de 0 si apoi 1 de unu;

Functia logica poate fi scrisa si ca suma logica a echvalentilor zecimal a acelor seturi de valori pentru care functia primeste valoarea **1:**

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sum_{f=1}(4,5,6,7,8,10,11,13) \qquad (*)$$

Functia logica mai poate fi scrisa ca produsul logic a echvalentilor zecimal a acelor seturi de valori pentru care functia primeste valoarea **0**

$$f = \prod_{f=0}(0,1,2,3,9,12,14,15). \qquad (**)$$

Din tabelul de adevar putem obtine reprezentarile (*) sau (**) si invers.

TEMA4.1.Decompoziţia FB. Forma Canonica Disjunctiva Normala (FCDN)

Notam $x^0=\overline{x}$ si $x^1=x$.

Atunci pentru un parametru a∈ ***B={0,1}*** avem

$x^a=1$, daca x=a si

$x^a=0$, daca $x \neq a$

Are loc

Teorema: Orice functie logica $f(x_1, x_2,..., x_n)$ in mod unic poate fi reprezentata in forma

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = \bigvee_{\alpha_1,...,\alpha_m} x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m} f(\alpha_1,..., \alpha_m, x_{m+1},..., x_m), \qquad (1)$$

unde m≤n, iar disjunctiile se vor lua pentru toate 2^m seturi formate de variabilele $x_1, x_2,..., x_m$.

Formula (1) se numeste decompozitia functiei booleene.

Pentru m=1

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = \overline{x}_1\, f(0, x_2,..., x_n) + x_1\, f(1, x_2,..., x_n)$$

Pentru m=2

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = \overline{x}_1 \overline{x}_2\, f(0,0, x_3..., x_n) + \overline{x}_1 x_2\, f(01, x_3..., x_n) + x_1 \overline{x}_2\, f(1,0, x_3..., x_n) + x_1\, x_2\, f(1,1, x_3..., x_n)$$

Un interes deosebit prezinta cazul m=n.

Decompoziţia

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = \bigvee_{\alpha_1,...,\alpha_n} x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n} f(\alpha_1,...,\alpha_n) = \bigvee_{f(\alpha_1,...,\alpha_n)=1} x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n} \qquad (2)$$

se numeşte *formă canonică disjunctivă normala* (FCDN) sau *formă normală disjunctă perfectă* (FNDP) a funcţiei $f(x_1, x_2,..., x_n)$, iar conjuncţiile respective $x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ se numesc *conjunctii elementare, termeni canonici conjunctivi* (TCC) sau *termeni minimali (mintermi).*

FCDN contine exact atitea TCC cite unitati contine tabelul de adevar al functiei.

Fiecarui set de valori a argumentelor pentru care f=1 ii corespunde un TCC in care variabila x_i *este negata, daca in set ii corespunde valoarea zero si* x_i *este fara negatie, daca in set ii corespunde valoarea 1.*

Algoritmul determinarii FCDN pentru functia booleana:

1)Pentru FB construim tabelul de adevar;

2)Pentru toate seturile de valori a argumentelor pentru care f=1 se scriu TCC s-in fiecare variabila x_i *este negata, daca in set ii corespunde valoarea zero si* x_i *este fara negatie, daca in set ii corespunde valoarea 1.*

3) Reunind toti TCC obtinuti primim FCDN.

Deci, FCDN= $\bigvee_{f=1} TCC$,

Daca pentru un TCC orice variabila x_i va fi inlocuita cu **0,** daca in TCC intra ca $\overline{x}_i$ si cu 1 daca in TCC intra ca x_i, atunci primim reprezentarea binara a acestui TCC.

De exemplu daca TCC= $\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$, reprezentarea binara a acestui TCC va fi 0 1 0 1.

Pentru FCDN poate fi utilizata suma echivalentilor zecimali a seturilor de valori ale argumentelor pentru care f=1.

Pentru ilustrare consideram exemplul din tema precedenta:

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Pentru fiecare combinaţie de valori ale argumentelor aplicate în 1 se scriu termenii canonici conjunctivi în care argumentul x_i este luat ca atare sau negat după cum valoarea lui în combinaţia respectivă este 1 sau 0:

TCC: $\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ $\quad x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$

$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4$ $\quad x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$

$\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$ $\quad x_1\overline{x_2}x_3x_4$

$\overline{x_1}x_2x_3x_4$ $\quad x_1x_2\overline{x_3}x_4$

Determinăm FCDN, reunind TCC prin semnul disjuncţiei:

FCDN: $f= \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee$
$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$

Functia logica poate fi scrisa si ca suma logica a echivalentilor zecimal a acelor seturi de valori pentru care functia primeste valoarea **1:**

$$f=\sum_{f=1}(4,5,6,7,8,10,11,13) \qquad (*)$$

TEMA4.2.Decompoziţia FB. Forma Canonica Conjunctiva Normala (FCCN)

Reprezentarea unei FB se poate face şi sub o altă formă, numită *forma canonică conjunctiva normala* (FCCN).

Orice FB poate fi descrisă printr-o expresie de forma

$$f\left(x_1, x_2,..., x_n\right)= \underset{0}{\&}\left(x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee x_2^{\bar{\alpha}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}\right) \qquad (1)$$

unde prin $\underset{0}{\&}$ s-a notat faptul că se consideră conjuncţia termenilor disjunctivi pentru care funcţia f ia valoarea 0.
Reprezentarea FB sub forma (1) se numeşte *formă canonică conjunctivă normala* (FCCN) sau *formă normală conjunctă perfectă* (FNCP) a funcţiei $f\left(x_1, x_2,..., x_n\right)$, iar disjuncţiile respective

$$x_1^{\bar{\alpha}_1} \vee x_2^{\bar{\alpha}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\alpha}_n}$$

se numesc *disjunctii elementare, termeni canonici disjunctivi* (TCD) sau *factori minimali (minfactori).*

FCCN contine exact atitea TCD cite zerouri contine tabelul de adevar al functiei.

Fiecarui set de valori a argumentelor pentru care f=0 ii corespunde un TCD in care variabila x_i *este negata, daca in set ii corespunde valoarea 1 si* x_i *este fara negatie, daca in set ii corespunde valoarea zero.*

Algoritmul determinarii FCCN pentru functia booleana:

1)Pentru FB construim tabelul de adevar;

2)Pentru toate seturile de valori a argumentelor pentru care f=0 se scriu TCD s-in fiecare variabila x_i *este negata, daca in set ii corespunde valoarea 1 si* x_i *este fara negatie, daca in set ii corespunde valoarea zero.*

3) Consderind produsul logic a tuturor TCD obtinuti primim FCCN.

$$\text{Deci, FCCN} = \bigwedge_{f=1,} \text{TCD}$$

Daca pentru un TCD orice variabila x_i va fi inlocuita cu 1**,** daca in TCD intra ca $\overline{x}_i$ si cu 0 daca in TCD intra ca x_i, atunci primim reprezentarea binara a acestui TCD.

De exemplu, daca TCD= $\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4$, reprezentarea binara a acestui TCD va fi 1 0 1 0.

Pentru FCCN poate fi utilizata produsul echivalentilor zecimali a seturilor de valori ale argumentelor pentru care f=0.

Pentru ilustrare consideram exemplul din tema precedenta:

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

La fiecare combinaţie de valori ale argumentelor aplicate în 0 se scriu termenii canonici disjunctivi(TCD) în care argumentul x_i este luat ca atare sau negat după cum valoarea lui în combinaţia respectivă este 0 sau 1:

TCD: $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ $\quad \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}$

$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}$ $\quad \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4$

$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4$ $\quad \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4$

$x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$ $\quad \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}$

Pentru a determina FCCN reunim TCD prin semnul conjuncţiei:

FCCN: $y = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge$
$(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4}) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \wedge$
$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})$.

Functia logica poate fi scrisa si ca produsul logic a echvalentilor zecimal a acelor seturi de valori pentru care functia primeste valoarea 0**:**

$$\text{FCC: } f=\prod_{f=0}(0,1,2,3,9,12,14,15).$$

TEMA 5.Alte forme de reprezentare a FB.

5.1.Diagramele Karnaugh au fost concepute pentru compactizarea tabelelor de adevar utilizate la simplificarea (minimizarea) FB şi reprezintă un tablou bidimensional, care pentru o funcţie de *n* argumente conţine 2^p linii şi 2^q coloane, iar $p+q = n$.

Daca *n*–par, atunci $p=q=n/2$, iar daca *n*– impar, atunci $p=q+1$.

Se aplica cu success pentru n=3, 4, 5. Mai dificil pentru n ≥ 6

In diagrama Karnaugh titlurile coloanelor si liniilor sunt formate din combinatiile posibile ale argumentelor dispuse in cod Gray (binar reflectat), adica titlurile lor adiacente difera printr-un singur rang (valoare), ceia ce asigura relatia de adiacenta (alipire) intre cimpurile diagramei.

Pentru functia de 4 argumente combinaţiile valorilor argumentelor x_1 şi x_2 sunt dispuse în partea superioară a diagramei, iar cele ale argumentelor x_3 şi x_4 vertical în partea stângă. La intersecţia unei coloane şi a unei linii este câmpul diagramei în care se trece 0 sau 1, după cum valoarea funcţiei în tabelul de adevăr este 0 sau 1.

Pentru ilustrare consideram exemplul din tema precedenta:

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f	N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	9	1	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	10	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	11	1	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1	12	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	13	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	14	1	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1	15	1	1	1	1	0

sau $f=\Sigma(4,5,6,7,8,10,11,13)$

$f=1$

De reprezentat FB prin diagrama sa Karnaugh.
Deci, titlurile coloanelor si liniilor sunt dispuse in ordinea
00 01 11 10

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

La intersectia coloanei 00 cu linia 01 introducem 0.

La intersectia coloanei 00 cu linia 11 introducem 0.

La intersectia coloanei 00 cu linia 10 introducem 0.

La intersectia coloanei 01 cu linia 00 introducem 1.

La intersectia coloanei 01 cu linia 01 introducem 1.

La intersectia coloanei 01 cu linia 11 introducem 1.

La intersectia coloanei 01 cu linia 10 introducem 1.

La intersectia coloanei 11 cu linia 00 introducem 0.

La intersectia coloanei 11 cu linia 01 introducem 1.

La intersectia coloanei 11 cu linia 11 introducem 0.

La intersectia coloanei 11 cu linia 10 introducem 0.

La intersectia coloanei 10 cu linia 00 introducem 1.

La intersectia coloanei 10 cu linia 01 introducem 0.

La intersectia coloanei 10 cu linia 11 introducem 1.

La intersectia coloanei 10 cu linia 10 introducem 1.

Exemplu 2.

De reprezentat prin diagrama Karnaugh functia de trei variabile:

$$f(x_1, x_2, x_3)=\Sigma(1,2,4,5)$$
$$f=1$$

FB are tabelul de adevăr

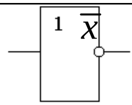
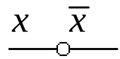
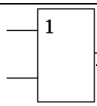
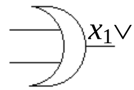
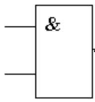
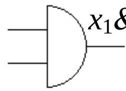
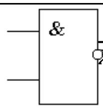
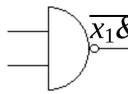
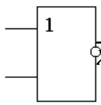
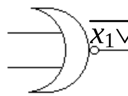
N	x_1	x_2	x_3	f
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

x_2x_3 \ X_1	0	1
00	0	1
01	1	1
11	0	0
10	1	0

5.2Circuitul logic (sau schema logică) este o reprezentare grafică a FB obtinuta prin adoptarea unor semene conventionale pentru operatiile logice de baza, ceia ce permite materializarea functiilor logice elementare. Unele dintre cele mai des utilizate semne grafice pentru FB elementare sunt prezentate în tab. 1.

Prin implimentarea (realizarea) unei functii logice se intelege realizarea ei cu ajutorul circuitelor de baza.

Tabelul 1. Scheme logice de baza adoptate

Denumirea funcţiei	**Reprezentarea grafică**	
	Standardele fostei URSS	Standarde internaţionale
Negaţia $f(x) = \bar{x}$	x  1 $\bar{x}$	x  $\bar{x}$
Disjuncţia $f(x_1,x_2) = x_1 \vee x_2$	x_1 x_2  1 $x_1 \vee x_2$	x_1 x_2  $x_1 \vee x_2$
Conjuncţia $f(x_1,x_2) = x_1 \wedge x_2$	x_1 x_2  & $x_1 \& x_2$	x_1 x_2  $x_1 \& x_2$
Sheffer $f(x_1,x_2) = x_1 \vert x_2$	x_1 x_2  & $\overline{x_1 \& x_2}$	x_1 x_2  $\overline{x_1 \& x_2}$
Pierce $f(x_1,x_2) = x_1 \downarrow x_2$	x_1 x_2  1 $\overline{x_1 \vee x_2}$	x_1 x_2  $\overline{x_1 \vee x_2}$

Pentru sintezarea (implimentarea) schemei logice e necesar de a reprezenta FB prin schemele logice adoptate.

Un interes deosebit prezinta sintezarea (implimentarea) schemei logice in bazele “Si-Nu” (NAND, exprimate prin $\rceil, \wedge$) si “Sau-Nu” (NOR, exprimate prin $\rceil, \vee$.).

Pentru implimentarea schemei logice in baza “Si-Nu” (NAND) adica exprimata prin $\rceil, \wedge$ trancformam FCDN (mai tirziu Forma Disjunctiva Minima ~ FDM) cu ajutorul dublei negatii $\overline{\overline{x}} = x$ si legilor lui de Morgan $\overline{x_1 x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$; $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1}.\overline{x_2}$.

Exemplu1. Pentru a obţine schema logică în baza “ŞI-NU” vom transforma forma FDM (obtinuta prin prcedura de minimizare din FCDN – va fi aratata in tema urmatoare (FDM contine mai putine simboluri si este mai economa)), aplicând asupra ei dubla negaţie şi legile lui de Morgan:

$$y = \overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 =$$

$$\overline{\overline{\overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_3}} = \overline{\overline{\overline{x_1} x_2} \cdot \overline{x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_4}} \cdot \overline{x_2 \overline{x_3} x_4} \cdot \overline{x_1 \overline{x_2} x_3}}$$

(vezi fig.1).

În mod similar cu cazul precedent pentru a obţine schema logică în baza “Sau-Nu” (NOR, exprimate prin $\rceil, \vee$.)vom transforma forma FCM(Obtinuta prin minimizarea FCCN).:

$$y = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) =$$

$$\overline{\overline{(x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})}} =$$

$$\overline{\overline{(x_1 \vee x_2)} \vee \overline{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3})} \vee \overline{(x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})}}$$

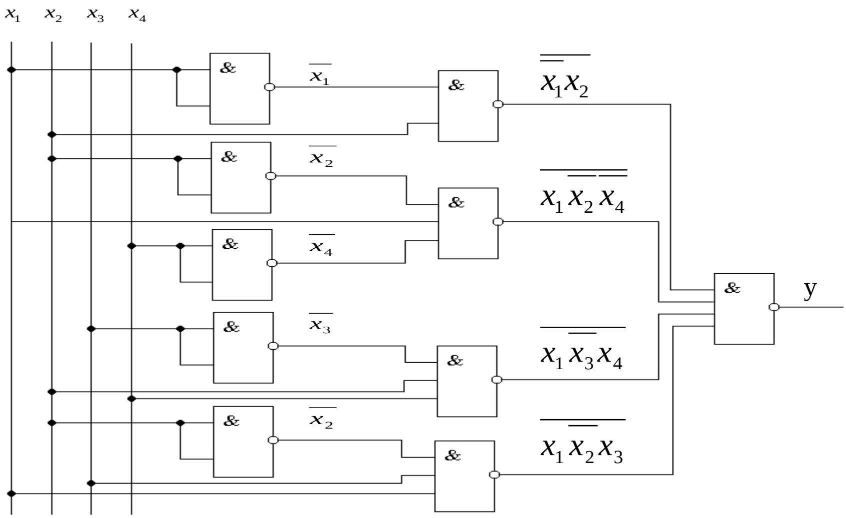


Fig. 1

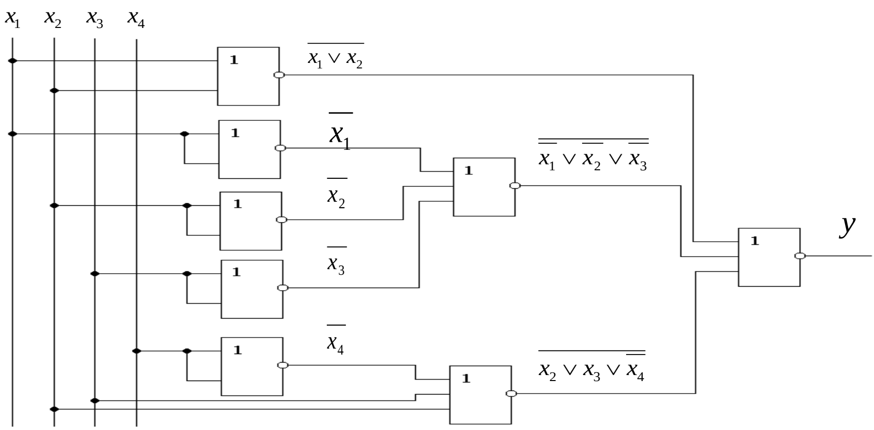


Fig. 2

(vezi fig. 2).

5.3Diagrama temporală.

Se reprezentă grafic argumentele x_i ca funcţii de timp, ataşând valorii 0 un nivel coborât, iar valorii 1 un nivel ridicat, astfel ca să existe o diferenţiere evidentă a acestor nivele. Acelaşi lucru facem şi cu valorile funcţiei, obţinem reprezentarea FB date prin diagramă în timp.

Reprezentarea prin diagrama temporala este foarte utila in studiul sistemelor secventiale in studiul carora intervine timpul.

EXEMPLU

Să se reprezinte prin diagramă în timp funcţia

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}$$

$\overline{x_1} = \varphi_1$ $\qquad$ $\overline{x_3} = \varphi_4$

$\varphi_1 x_2 = \varphi_2$ $\qquad$ $\varphi_3 \varphi_4 = \varphi_5$

$\overline{x_2} = \varphi_3$ $\qquad$ $\varphi_2 \vee \varphi_5 = \varphi_6$.

Construim tabelul de adevăr al funcţiei date:

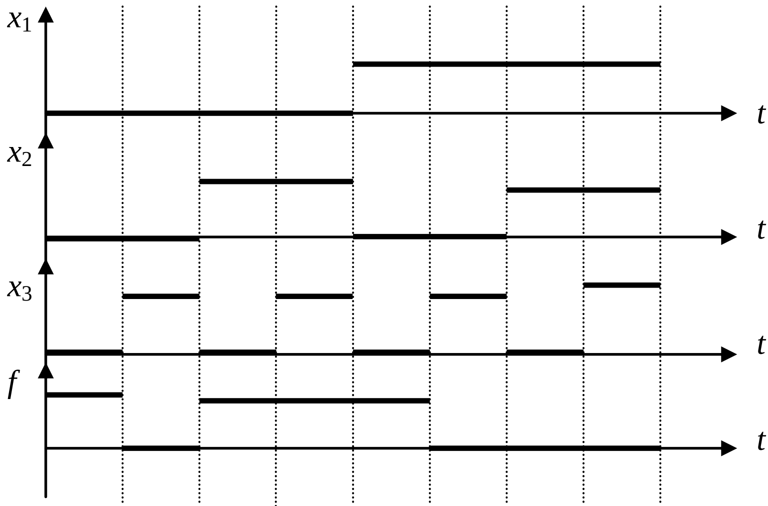
Tabelul de adevăr al functiei

x_1	x_2	x_3	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	$\varphi_6 = f$
0	0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0

$$f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(1,2,3,4)$$
$$f=1$$

Reprezentăm grafic argumentele x_i ca funcţii de timp, ataşând valorii 0 un nivel coborât, iar valorii 1 un nivel ridicat, astfel ca să existe o diferenţiere evidentă a acestor nivele. Acelaşi lucru facem şi cu valorile funcţiei, obţinem reprezentarea FB date prin diagramă în timp.

Diagrama temporală a funcţiei $f(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_2}\,\overline{x_3}$ are forma prezentată în figura urmatoare:



5.4. Sisteme complete de functii booleene

Definiţie. Numim sistem complet de funcţii booleene (bază) în clasa ℝ sistemul *S=(f1, f2,..., fk),* dacă orice funcţie f ∈ ℝ poate fi reprezentată prin superpoziţia funcţiilor din acest sistem.

În calitate de ℝ poate fi luată mulţimea $P_2(n)$. În această clasă există un sistem complet şi anume toate cele 2^k (unde $k=2^n$) funcţii de n argumente.

Orice funcţie logică de n argumente de asemenea poate fi reprezentată utilizând doar funcţiile negaţie, disjuncţie şi conjuncţie. Deci, în aceeaşi clasă pot exista mai multe sisteme complete cu un număr diferit de funcţii.

Un interes deosebit prezintă problema alegerii bazei, care conţine un număr minim de funcţii.

Definitie. Numim bază minimală (sistem complet minimal) un sistem complet arbitrar de funcţii booleene (*f1, f2,..., fk*), care odată cu eliminarea oricărei funcţii aparţinând sistemului devine incomplet.

Pentru a stabili completitudinea unui sistem oarecare de FB este suficient să se arate că funcţiile sistemului considerat pot reprezenta funcţiile sistemului ($\neg$, $\wedge$, $\vee$). Pot fi demonstrate teoremele:

Teorema 1. Sistemul ($\neg$,$\vee$.) este un sistem complet minimal în clasa *P2(n).*

Teorema 2. Sistemul ($\neg$, $\wedge$) este un sistem complet minimal în clasa *P2(n).*

Teorema 3. Funcţia lui Pierce ($\downarrow$) formează în clasa *P2(n)* un sistem complet minimal.

Teorema 4. Funcţia lui Sheffer (|) formează în clasa *P2(n)* un sistem complet minimal.

Pentru a demonstra, de exemplu, teorema 1 este suficient să se arate că funcţia disjuncţie ($\vee$) poate să fie reprezentată prin funcţiile negaţie ($\rceil$) şi conjuncţie ($\wedge$).

Utilizând principiul involuţiei şi una din relaţiile lui De Morgan, avem

$f(x_1, x_2,\dots x_n)= x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n = \rceil\rceil (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_n) =$
$\rceil (\rceil x_1 \wedge \rceil x_2 \wedge \dots \wedge \rceil x_n)$,

adica functia disjuncţie ($\vee$) poate să fie reprezentată prin funcţiile negaţie ($\rceil$) şi conjuncţie ($\wedge$), ceea ce trebuia demonstrat.

Analogic se demonstrează teorema 2, deci ca operatia conjunctie poate să fie reprezentată prin funcţiile negaţie ($\rceil$) şi disjuncţie ($\vee$).

$f(x_1, x_2,\dots x_n)= x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n = \rceil\rceil (x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n) =$
$\rceil(\rceil x_1 \vee \rceil x_2 \vee \dots \vee \rceil x_n)$, adica functia conjuncţie ($\wedge$) poate să fie reprezentată prin funcţiile negaţie ($\rceil$) şi disjuncţie ($\vee$), ceea ce trebuia demonstrat.

Am stabilit că sistemul ($\rceil$, $\wedge$, $\vee$) este redundant. Una din funcţii (disjuncţia sau conjuncţia) poate fi eliminată, sistemul rămânând complet.

Pentru a demonstra teorema 3 vom arăta că funcţia lui Pierce poate reprezenta sistemul ($\rceil$, $\wedge$, $\vee$). Negaţia se poate scrie astfel:
$\rceil x= \rceil(x \vee x) = x \downarrow x$.

Funcţia conjuncţie poate fi exprimată în modul următor:
$x_1 \wedge x_2 = \rceil\rceil (x_1 \wedge x_2)= \rceil (\rceil x_1 \vee \rceil x_2)= \rceil ((x_1 \downarrow x_1) \vee (x_2 \downarrow x_2)) =$
$(x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)$.

Funcţia disjuncţie poate fi exprimată în modul următor:
$x_1 \vee x_2 = \rceil\rceil (x_1 \vee x_2)= \rceil(x_1 \downarrow x_2)=$
$(x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$.

Analogic de demonstrat sinestatator teorema 4.

Teoremele 3 şi 4 prezintă un interes deosebit datorită numărului minim posibil de elemente care formează baza: putem utiliza un singur tip de circuit pentru materializarea oricărei funcţii booleene. În acest context este importantă trecerea de la FCDNsau FCCN la forme cu funcţii Pierce (SAU-NU) sau Sheffer (ŞI-NU), trecere denumită implementare in bazele (SAU-NU) sau (ŞI-NU).

TEMA6. Minimizarea funcţiilor booleene

Problema reprezentării funcţiilor booleene prin sisteme complete care conţin un număr minim de funcţii elementare vizează posibilitatea folosirii unui număr cât mai redus de tipuri de circuite logice pentru materializarea FB considerate. Există şi un alt aspect al problemei - cel care priveşte utilizarea unui număr cât mai mic de circuite standard. Teoretic această problemă se reflectă în simplitatea funcţiilor booleene. Este evident că formele canonice sunt departe de a fi cele mai simple. Obţinerea unor forme mai simple poate fi realizată prin metoda transformărilor echivalente utilizând proprietatile operatiilor booleene. Însă simplitatea finală depinde de măiestria şi experienţa cercetătorului, mai mult - nu există siguranţa că forma obţinută este cea mai simplă. Din această cauză au fost elaborate metode sistematice pentru obţinerea expresiilor minimale a FB.

6.1. Metoda lui Quine

Definiţie. Numim <u>*termen normal conjunctiv*</u> (TNC) conjuncţia $x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m}$ (m≤ n), în care fiecare variabilă se întâlneşte numai o singură dată. Numărul literelor unui termen normal conjunctiv se numeste *rangul termenului*, iar disjuncţia TNC - *formă normală disjunctivă* (FND), adica FND= ∨TNC.

Reieşind din aceste definiţii putem spune că FCDN a unei FB de n argumente este FND la care toţi termenii sunt de rang n (forma normală cea mai complexă).

Definiţie. Forma normal disjunctivă (FND), care conţine cel mai mic număr de litere (variabile) x_i în comparaţie cu toate celelalte FND ale unei FB date este numita formă disjunctivă minimă (FDM).

Definiţie. Numim *implicanţi primi* ai unei FB de n argumente termenii conjunctivi de forma $x_1^{\alpha_1}...x_m^{\alpha_m}$ (k ≤ n) care implică funcţia fără a se putea elimina vre-o variabilă (TNC de rang minim care implică funcţia).

Implicanţii primi pot fi determinaţi plecând de la FCD prin aplicarea sistematică la câte doi termeni conjunctivi care se deosebesc printr-un singur rang (sunt adiacenţi) proprietatea de alipire partial (vezi proprietatile operatiilor booleene $x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2 = x_1$.) $A \wedge x_i \vee A \wedge \overline{x_i} = A$.

Adesea, în rezultatul efectuării operaţiei de alipire parţială, pot apărea termeni normal disjunctivi în repetare sau asupra cărora poate fi executată operaţia absorbţie. Primii, conform proprietăţii idempotenţă se vor scrie o singură dată, pentru cei de categoria a doua se va opera absorbţia ($x_1 \vee x_1x_2 = x_1$).

Executând asupra FCD a unei FB toate operaţiile posibile de alipire parţială şi de absorbţie obţinem disjuncţia implicanţilor primi care se numeşte formă disjunctivă prescurtată (FDP). În FDP ar putea exista în caz general implicanţi primi de prisos (redundanţi, care implică suplimentar funcţia), deci FDP nu este minimă.

Implicanţii primi strict necesari (obţinuţi după eliminarea implicanţilor redundanţi) se numesc *implicanţi esenţiali*.
Implicantii esentiali se determina cu ajutorul tabelului de acoperire.

Disjuncţia implicanţilor esenţiali conduce la FDM.

În concluzie, putem afirma că minimizarea unei FB presupune următorii paşi :

1) Construirea tabelului de adevar pentru FB data;
2) determinarea formei canonice disjunctive normale FCDN;

3) determinarea formei disjunctive prescurtate FDP efectuind *toate* operatiile posibile de alipire si absorbtie;
4) alegerea implicanţilor esenţiali.

Implicanţii esenţiali pot fi aleşi construind un tabel special, numit tabelul implicanţilor primi sau tabel de acoperire.

Fiecare linie în acest tabel corespunde unui implicant prim, iar fiecare coloană unui TCC din FCDN iniţială. Vom spune că un implicant prim se află în relaţia de acoperire cu un TCC, dacă el se conţine în acesta. Se va construi matricea acestei relaţii binare (la intersecţia liniei i cu coloana j se va pune 1, dacă implicantul prim cu numărul i se află în relaţia de acoperire cu TCC cu numărul j, şi 0 în caz contrar.) Vom alege cel mai mic număr de implicanţi primi strict necesari (esenţiali) pentru ca să fie acoperiţi toţi TCC.

Consideram un

Exemplul 1.: De obtinut FDM

pentru funcţia $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ definită prin $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$=Σ(0,4,5,8,9,13)

f=1

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f	N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1	8	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	9	1	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0	10	1	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0	11	1	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1	12	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	13	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0	14	1	1	1	0	0
7	0	1	1	1	0	15	1	1	1	1	0

FCDN a FB (procedura a fost indicate anterior):

$$FCDN = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \quad (1)$$

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \vee \quad (2)$$

$$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \quad (3)$$

$$x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \quad (4)$$

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \vee \quad (5)$$

$$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \quad (6).$$

Să se determine forma disjunctivă minimă după metoda lui Quine.

Rezolvare:

Etapa I. (I Alipire)

Determinăm FDP evidenţiind toţi implicanţii primi (numerotam toti TCC pentru a putea urmari care TCC se alipesc) :

TCC (1) se poate alipi cu(2), asa cum se deosebesc numai printr-un singur rang (x_2)

$$(1)\vee(2)= \begin{array}{l} \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = \\ \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4(x_2 \vee \bar{x}_2) = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \end{array}$$

Mai compact procedura poate fi scrisa asa:

$$(1)\vee(2)= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$$

$$(1)\vee(6)= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$$

$$(2)\vee(3)= \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4 = \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3$$

$$(3)\vee(4)= \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2\bar{x}_3 x_4 = x_2\bar{x}_3 x_4$$

$$(4)\vee(5)= x_1 x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 = x_1\bar{x}_3 x_4$$

$$(5)\vee(6)= x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

Asa cum toti TCC au participat la alipire,iar alipiri parţiale pentru termenii normali de rang 3 în cazul dat nu se pot opera, avem următoarea formă disjunctivă prescurtată (exista 6 implicanti primi):

$$FDP = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

Daca ar fi fost posibil am fi efectuat alipirea a II, apoi in caz de necessitate – a IIIe.t.c..

Etapa a II-a. Construim tabelul de acoperire:

Fiecare linie în acest tabel corespunde unui implicant prim, iar fiecare coloană unui TCC din FCD iniţială. Vom spune că un implicant prim se află în relaţia de acoperire cu un TCC, dacă el se conţine în acesta. Se va construi matricea acestei relaţii binare (la intersecţia liniei *i* cu coloana *j* se va pune 1, dacă implicantul prim cu numărul *i* se află în relaţia de acoperire cu TCC cu numărul *j*, şi 0 în caz contrar.) Vom alege cel mai mic număr de implicanţi primi strict necesari (esenţiali) pentru ca să fie acoperiţi toţi TCC.

Tabel de acoperire

Implicanţii primi	Termenii canonici conjunctivi					
	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4$	$x_1 x_2\bar{x}_3 x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$
A: $\bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$	1	1	0	0	0	0
B: $\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	1	0	0	0	0	1
C: $\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3$	0	1	1	0	0	0
D: $x_2\bar{x}_3 x_4$	0	0	1	1	0	0
E: $x_1\bar{x}_3 x_4$	0	0	0	1	1	0
F: $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	0	0	0	0	1	1
I varianta	A	A	D	D	F	F
II varianta	B	C	C	E	E	B

Avem două posibilităţi de alegere:

$$FDM_1 = A + D + F = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$$

$$FDM_2 = B + C + E = \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_3 x_4$$

Rezultă, că o FB poate avea mai multe forme minime.

Prin metoda Quine poate fi determinate si Forma Conjunctiva Minima (FCM) avind in vedere proprietatile operatiilor booleene (scimbind cu locul operatiile $\vee$ si $\wedge$ proprietatile ramin in vigoare).

Lucru individual:

1)De determinat prin metoda Quine FCM pentru functia

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underset{f=1}{\Sigma}(0,4,5,8,9,13)$$

Raspuns: Forma conjunctivă minimă:

$$\text{FCM} = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})$$

2)De determinat prin metoda Quine FDM si FCM pentru functia

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underset{f=1}{\Sigma}(4,5,6,7,8,10,11,13)$$

Raspuns: Forma disjunctivă minimă:

$$\text{FDM} = \overline{x_1} x_2 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2} x_3$$

Forma conjunctivă minimă:

$$\text{FCM} = \overline{x_3} \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_4) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_4})\ .$$

Exemplul 2(FDM): De obtinut FDM

pentru funcţia $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ definită prin

$$f = \underset{f=1}{\Sigma}(4,5,6,7,8,10,11,13) \qquad (*)$$

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Pentru fiecare combinaţie de valori ale argumentelor aplicate în 1 se scriu termenii canonici conjunctivi în care argumentul x_i este luat ca atare sau negat după cum valoarea lui în combinaţia respectivă este 1 sau 0:

TCC: $\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$ $\qquad x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$

$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_4$ $\qquad x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$

$\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$ $\qquad x_1\overline{x_2}x_3x_4$

$\overline{x_1}x_2x_3x_4$ $\qquad x_1x_2\overline{x_3}x_4$

Determinăm FCDN, reunind TCC prin semnul disjuncţiei:

FCDN: $f = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee$ *(1)*

$\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee$ *(2)*

$\overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \vee$ *(3)*

$\overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \vee$ *(4)*

$x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee$ *(5)*

$x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee$ *(6)*

$x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \vee$ *(7)*

$x_1 x_2 \overline{x_3} x_4$ *(8)*

I Alipire:

(1) $\vee$ (2)= $\overline{x_1} x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 = \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$ (1)

(1) $\vee$ (3)= $\overline{x_1} x_2 \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} = \overline{x_1} x_2 \overline{x_4}$ (2)

(2) $\vee$ (4)= $\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 = \overline{x_1} x_2 x_4$ (3)

(2) $\vee$ (8)= $\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 = x_2 \overline{x_3} x_4$ (4)

(3) $\vee$ (4)= $\overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 = \overline{x_1} x_2 x_3$ (5)

(5) $\vee$ (6)= $x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} = x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_4}$ (6)

(6) $\vee$ (7)= $x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 = x_1 \overline{x_2} x_3$ (7)

La prima alipire au participat toti TCC. Deci, nu-s pina cind implicanti primi.

II Alipire.

Numerotam toti <u>*termenii normali conjunctiv*</u>i (TNC). La a doua alipire pot participa doar acei TNC, care au aceiasi indici si se deosebesc printr-un singur rang:

(1) $\vee$ (5)= $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 = \bar{x}_1 x_2$

(2) $\vee$ (3)= $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_4 = \bar{x}_1 x_2$

Mai multe alipiri nu exista. Deci au aparut ***implicantii primi*** (ca rezultat al alipirei si TNC, care nu sau alipit)***:***

A: $\bar{x}_1 x_2$

B: $x_2 \bar{x}_3 x_4$

C: $x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4$

D: $x_1 \bar{x}_2 x_3$

Si Forma Disjunctiva Prescurtata (FDP) are forma

FDP=A $\vee \boldsymbol{B} \vee C \vee D$= $\bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3$.

Pentru a allege din implicantii primi pe cei esentiali alcatuim tabelul de acoperire

Tabel de acoperire

			Termenii canonici conjunctivi					
	$\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$	$\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$	$\overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_4$	$\overline{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$	$x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4$	$x_1 \overline{x}_2 x_3 x_4$	$x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$
A: $\overline{x}_1 x_2$	1	1	1	1	0	0	0	0
B: $x_2 \overline{x}_3 x_4$	0	1	0	0	0	0	0	1
C: $x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_4$	0	0	0	0	1	1	0	0
D: $x_1 \overline{x}_2 x_3$	0	0	0	0	0	1	1	0
	A	A	A	A	C	C	D	B

Toti implicantii primi sunt esentiali si FDM coincide FDP:

FDM= A $\vee \boldsymbol{B} \vee C \vee D = \overline{x}_1 x_2 \vee x_2 \overline{x}_3 x_4 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_4 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3$

Exemplul 3(FDM): De obtinut FDM prin metoda Quine

pentru funcţia $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ definită prin

$$f=\Sigma(0,2,4,6,7,12,14,15) \qquad (*)$$

$f=1$

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Pentru fiecare combinaţie de valori ale argumentelor aplicate în 1 se scriu termenii canonici conjunctivi în care argumentul x_i este luat ca atare sau negat după cum valoarea lui în combinaţia respectivă este 1 sau 0:

TCC: $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \qquad \bar{x}_1x_2x_3x_4$

$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \qquad x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$

$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \qquad x_1x_2x_3\bar{x}_4$

$\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 \qquad x_1x_2x_3x_4$

Determinăm FCDN, reunind TCC prin semnul disjuncţiei si numerotind TCC:

FCDN: $f = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee$ *(1)*

$\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 \vee$ *(2)*

$\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee$ *(3)*

$\bar{x}_1 x_2 x_3\bar{x}_4 \vee$ *(4)*

$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee$ *(5)*

$x_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee$ *(6)*

$x_1 x_2 x_3\bar{x}_4 \vee$ *(7)*

$x_1 x_2 x_3 x_4$ *(8)*

I Alipire:

(1) $\vee$ (2)= $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4$ (1)

(1) $\vee$ (3)= $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1\bar{x}_3\bar{x}_4$ (2)

(2) $\vee$ (4)= $\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1 x_3\bar{x}_4$ (3)

(3) $\vee$ (4)= $\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3\bar{x}_4 = \bar{x}_1 x_2\bar{x}_4$ (4)

(3) $\vee$ (6)= $\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 = x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ (5)

(4) $\vee$ (5)= $\bar{x}_1 x_2 x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 = \bar{x}_1 x_2 x_3$ (6)

(4) $\vee$ (7)= $\bar{x}_1 x_2 x_3\bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3\bar{x}_4 = x_2 x_3\bar{x}_4$ (7)

(5) $\vee$ (8)= $\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3 x_4$ (8)

(6) $\vee$ (7)= $x_1 x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3\bar{x}_4 = x_1 x_2\bar{x}_4$ (9)

(7) $\vee$ (8)= $x_1 x_2 x_3\bar{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 = x_1 x_2 x_3$ (10)

La prima alipire au participat toti TCC. Deci, nu-s pina cind implicanti primi.

II Alipire.

Numerotam toti *termenii normali conjunctivi* (TNC). La a doua alipire pot participa doar acei TNC, care au aceiasi indici si se deosebesc printr-un singur rang:

$(1) \vee (4) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_4 = \overline{x}_1 \overline{x}_4 \qquad A$

$(2) \vee (3) = \overline{x}_1 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4 = \overline{x}_1 \overline{x}_4 \qquad A$

$(4) \vee (9) = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 \overline{x}_4 = x_2 \overline{x}_4 \qquad B$

$(5) \vee (7) = x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \vee x_2 x_3 \overline{x}_4 = x_2 \overline{x}_4 \qquad B$

$(6) \vee (10) = \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 x_3 = x_2 x_3 \qquad C$

$(7) \vee (8) = x_2 x_3 \overline{x}_4 \vee x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3 \qquad C$

Mai multe alipiri nu exista. Toti TNC au participat la alipire.

Deci au aparut ***implicantii primi***

A: $\overline{x}_1 \overline{x}_4$

B: $x_2 \overline{x}_4$

C: $x_2 x_3$

Si Forma Disjunctiva Prescurtata (FDP) are infatisarea

FDP=A $\vee$ $\boldsymbol{B} \vee C = \overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_4} \vee x_2x_3$.

Pentru a allege din implicantii primi pe cei esentiali alcatuim tabelul de acoperire:

Tabel de acoperire

			Termenii canonici conjunctivi					
	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4}$	$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4}$	$\overline{x_1}x_2x_3x_4$	$x_1x_2\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$x_1x_2x_3\overline{x_4}$	$x_1x_2x_3x_4$
A: $\overline{x_1}\,\overline{x_4}$	1	1	1	1	0	0	0	0
B: $x_2\overline{x_4}$	0	0	1	1	0	1	1	0
C: x_2x_3	0	0	0	1	1	0	1	1
	A	A	A	A	C	B	C	C

Toti implicantii primi sunt esentiali si FDM coincide FDP:

FDM= A $\vee$ $\boldsymbol{B} \vee C = \overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_4} \vee x_2x_3$

6.2Metoda Quine-McCluskey

Metoda prezentată mai sus poartă numele lui Quine, care a propus-o, şi are un neajuns evident, datorat necesităţii comparării la primul pas a tuturor perechilor de termeni (complexitatea creşte în mod factorial). Dar aceasta nu este necesar, deoarece operaţia de alipire parţială poate fi executată doar dacă doi termeni se deosebesc printr-un singur bit. McCluskey a propus să se transcrie în binar TCC şi să se împartă pe grupe după numărul de biţi 1. Vom avea grupa 0, grupa 1, etc. Alipirile parţiale pot avea loc numai pentru elementele grupelor vecine, deoarece aceste grupe diferă între ele cu un singur bit 1. În locul variabilelor eliminate la alipire se trece o liniuţă (spatiu) . Metoda Quine-McCluskey presupune îndeplinirea paşilor:

1. Ordonarea echivalenţilor binari ai TCC, corespunzători valorilor 1 ale FB, pe nivele începând cu nivelul 0, unde numarul nivelului coincide cu numarul de 1 in combinatie;

2. Determinarea implicanţilor primi prin comparaţii succesive ale echivalenţilor binari, aparţinând nivelelor adiacentesi alipirea celor care e posibil;

La I alipire se alipesc termenii care se deosebesc printr-o singura valoare si in ultima coloana se marcheaza care termen cu care s-a alipit.

Vom nota prin A, B,... implicanţii primi, adică acei termeni ce nu se mai pot reduce. La a II alipire putem cupla mai departe conjuncţii vecine, cu simbolul „-” în acelaşi rang şi pentru care echivalenţii binari diferă într-un singur rang. Conjuncţia, care nu se mai poate cupla cu nici o altă conjuncţie din tabel, va fi un implicant prim al funcţiei date.

Prin cuplarea conjuncţiei cu echivalentul binar (000-) cu conjuncţia cu (001-) rezultă conjuncţia cu echivalentul binar (00--), etc.

3. Determinarea implicantilor primi cu ajutorul tabelului de acoperire al funcţiei si calculul formal de determinare a tuturor soluţiilor funcţiei.

Exemplul 1. Să se determine după metoda lui Quine-McCluskey FDM a funcţiei $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sum_{f=1}(0,1,2,3,4,7,8,11,12,13,15)$.

Tabelul de adevar al acestei functii:

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f	N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1	8	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	9	1	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1	10	1	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1	11	1	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1	12	1	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0	13	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0	14	1	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1	15	1	1	1	1	1

Etapa I. Ordonarea pe nivele si marcajul pentru prima alipire

Nivelele	Echivalentul binar	Marcajul TCC care se alipesc
0	0000 /0	1,2,3,4
1	0001 /1 0010 /2 0100 /4 1000 /8	1,5 2,6 3,7 4,8
2	0011 /3 1100 /12	5,6,9,10 7,8,11
3	0111 /7 1011 /11 1101 /13	9,12 10,13 11,14
4	1111 /15	12,13

Etapa a II-a. Determinarea implicanţilor primi.

Nivelul o	000- 00-0 0-00 -000	1 2 3 4
Nivelul 1	00-1 001- -100 1-00	2 1 4 3
Nivelul 2 A	0-11 -011 110-	5 6
Nivelul 3 B	-111 1-11 11-1	6 5

Fig.6.2.2. A doua alipire

Prin A,B,.. vom nota implicanţii, adică acei termeni ce nu se mai pot reduce(alipi). În continuare cuplăm conjuncţii vecine care sunt de acelaşi rang.

Conjuncţia care nu se mai poate cupla cu nici o altă conjuncţie din nivelul adiacent al tabelului, va fi un implicant prim al funcţiei date.

La a doua alipire participa doar termenii din nivelele adiacente care contin spatiul (-) pe aceeasi locatie Prin cuplarea conjuncţiei cu echivalentul binar (000-) cu conjuncţia cu (001-) rezultă conjuncţia cu echivalentul binar (00--), etc.

În figura 6.2.3 este prezentat al doilea tabel de comparare.

C D	00-- --00
E	--11

Fig.6.2.3. A doua alipire

Etapa a III-a. Construim tabelul de acoperire ca si in cazul metodei Quine:

Implicantul prim	***Echivalentii binari al TCC iniţiali***										
	0000	0001	0010	0011	0100	0111	1000	1011	1100	1101	1111
A (110-)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
B(11-1)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
C (00--)	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
D (--00)	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0
E (--11)	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1
FDM_1	C	C	C	C	D	E	D	E	A	A	E
FDM_2	C	C	C	C	D	E	D	E	D	B	B

FDM are două expresii:

FDM_1= $A+C+D+E= x_1x_2\overline{x_3} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_3x_4$ sau

FDM_2=$B+C+D+E= x_1x_2x_4 \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee x_3x_4$.

Constatăm, că forma minimală nu este unică.

Exemplul 2.
De obtinut FDM prin metoda Quine-McCluskey

pentru funcţia $f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ definită prin

f=Σ(0,2,4,6,7,12,14,15)

f=1

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

Etapa I. Ordonarea pe nivele si marcajul pentru prima alipire

Nivelele	Echivalentul binar	Marcajul TCC care se alipesc
0	0000 /0	1,2
1	0010 /2 0100 /4	1,3 2,4,5
2	0110 /6 1100 /12	3,4,6,7 5,8
3	0111 /7 1110 /14	6,9 7,8,10
4	1111 /15	9,10

Etapa a II-a. Determinarea implicanţilor primi.

Nivelul o	00-0 0-00	1 2
Nivelul 1	0-10 01-0 -100	2 1,3 4
Nivelul 2	011- -110 11-0	5 4,6 3
Nivelul 3	-111 111-	6 5

al doilea tabel de comparare.

A	0--0 0--0
B	-1-0 -1-0
C	-11- -11-

Mai multe alipiri nu exista. Toti TNC au participat la alipire.

Construim tabelul de acoperire ca si in cazul metodei Quine:

Mai multe alipiri nu exista. Toti TNC au participat la alipire.

Deci au aparut ***implicantii primi***

A: 0—0 ($\overline{x_1}\,\overline{x_4}$)

B: -1-0 ($x_2 \overline{x_4}$)

C: -11- ($x_2 x_3$)

Si Forma Disjunctiva Prescurtata (FDP) are infatisarea

FDP=A$\vee$***B***$\vee$*C*= $\overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_4} \vee x_2x_3$.

Pentru a allege din implicantii primi pe cei esentiali alcatuim tabelul de acoperire:

Tabel de acoperire

			Termenii canonici conjunctivi					
	0000	*0010*	*0100*	*0110*	*0111*	*1100*	*1110*	*1111*
A: 0--0	1	1	1	1	0	0	0	0
B: *-1-0*	0	0	1	1	0	1	1	0
C: *-11-*	0	0	0	0	1	0	1	1
	A	A	A	A	C	B	C	C

Toti implicantii primi sunt esentiali si FDM coincide FDP:

FDM= A$\vee$***B***$\vee$*C*= $\overline{x_1}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_4} \vee x_2x_3$

Exemplul 3.: De obtinut FDM prin metoda Quine-McCluskey pentru funcţia $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ definită prin

f=Σ(4,5,6,7,8,10,11,13) (*)

f=1

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	0

Etapa I. Ordonarea pe nivele si marcajul pentru prima alipire

Nivelele	Echivalentul binar	Marcajul TCC care se alipesc
0		
1	0100 /4 1000 /8	1,2 3
2	0101 /5 0110 /6 1010 /10	1,4,5 2,6 3,7
3	0111 /7 1011 /11 1101 /13	4,6 7 5
4		

Etapa a II-a. Determinarea implicanţilor primi.

Nivelul o		
Nivelul 1	010- 01-0 10-0	1 2 C
Nivelul 2	01-1 -101 011- 101-	2 B 1 D
Nivelul 3		

al doilea tabel de comparare.

A	01-- 01--

Mai multe alipiri nu exista. Nu toti TNC au participat la alipire.

Deci au aparut ***implicantii primi*** (ca rezultat al alipirei si TNC, care nu sau alipit)***:***

A: 01--   ($\overline{x_1} x_2$)

B: -101   ($x_2 \overline{x_3} x_4$)

C: 10-0   ($x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_4}$)

D: 101-   ($x_1 \overline{x_2} x_3$)

Si Forma Disjunctiva Prescurtata (FDP) are forma

FDP=A $\vee$ ***B*** $\vee$ *C* $\vee$ *D*= $\overline{x_1} x_2 \vee x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3$.

Pentru a allege din implicantii primi pe cei esentiali alcatuim tabelul de acoperire

Tabel de acoperire

			Termenii canonici conjunctivi					
	0100	0101	0110	0111	*1000*	*1010*	*1011*	*1101*
A: *01--*	1	1	1	1	0	0	0	0
B: *-101*	0	1	0	0	0	0	0	1
C: *10-0*	0	0	0	0	1	1	0	0
D: *101-*	0	0	0	0	0	1	1	0
	A	A	A	A	C	C	D	B

Toti implicantii primi sunt esentiali si FDM coincide FDP:

FDM= $A \vee \boldsymbol{B} \vee C \vee D = \overline{x_1} x_2 \vee x_2 \overline{x_3} x_4 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_1 \overline{x_2} x_3$

Tema 6.3 METODA DIAGRAMEI KARNAUGH

Diagramele Karnaugh au fost concepute pentru compactizarea tabelelor de adevar utilizate la simplificarea (minimizarea) FB şi reprezintă un tablou bidimensional, care pentru o funcţie de *n* argumente conţine 2^p linii şi 2^q coloane, iar $p+q = n$.

Daca *n*–par, atunci $p=q=n/2$, iar daca *n*– impar, atunci $p=q+1$.

Se aplica cu success pentru n=3, 4, 5. Mai dificil pentru n ≥ 6

In diagrama Karnaugh titlurile coloanelor si liniilor sunt formate din combinatiile posibile ale argumentelor dispuse in cod Gray (binar reflectat), adica titlurile lor adiacente difera printr-un singur rang (valoare), ceia ce asigura relatia de adiacenta (alipire) intre cimpurile diagramei.

Pentru functia de 4 argumente combinaţiile valorilor argumentelor x_1 şi x_2 sunt dispuse în partea superioară a diagramei, iar cele ale argumentelor x_3 şi x_4 vertical în partea stângă. La intersecţia unei coloane şi a unei linii este câmpul diagramei în care se trece 0 sau 1, după cum valoarea funcţiei în tabelul de adevăr este 0 sau 1.

Pentru ilustrare consideram exemplul din tema precedenta:

FB are tabelul de adevăr

N	x_1	x_2	x_3	x_4	f	N	x_1	x_2	x_3	x_4	f
0	0	0	0	0	0	8	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	9	1	0	0	1	0
2	0	0	1	0	0	10	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0	11	1	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1	12	1	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1	13	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	14	1	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1	15	1	1	1	1	0

sau $f = \Sigma(4,5,6,7,8,10,11,13)$
$f=1$

De reprezentat FB prin diagrama sa Karnaugh.
Deci, titlurile coloanelor si liniilor sunt dispuse in ordinea
00 01 11 10

x_1x_2 / x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

Este demonstrate ca:

Reuniunea a două locaţii vecine ce contin **1** a diagramei(situate alaturea in aceias linie (coloana) sau la extremitatile ei) contribuie la excluderea (eliminarea) variabilei, valoarea căreia se schimbă la trecerea de la o locaţie la alta.

Reuniunea a două perechi de locaţii vecine (pe orizontală sau verticală, sau la extremitatile liniilor (coloanelor), sau varfurile diagramei), care contin **1** oferă posibilitatea excluderii din expresie a două variabile, valorile carora se schimba la trecerea de la o locatie la alta), reuniunea a patru perechi de locaţii vecine aduce la excluderea a trei variabile dupa acelasi principiu

Adica la alipirea a $\mathbf{2^n}$ locatii adiacente care contin **1** se elimina **n** variabile si anume acelea a caror valoare se modifica la trecerea de la o locatie la alta.

La alipire se incepe cu cel mai mare numar posibil de locatii, care pot fi alipite.

Forma disjunctivă minimă (FDM) se obţine prin alipirea mintermenilor prin încercuirea poziţiilor cu valoarea 1:

Determinăm FCDN, reunind TCC prin semnul disjuncţiei:

Pentru exemplu adus de obtinut FDM funcţiei logice date cu ajutorul diagramei Karnaugh

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

Alipim elementele din coloana II.

Asa cum in coloana II x_1 si x_2 pastreaza neschimbate valorile lor , iar x_3 isi schimba valoarea la trecerea de la linia a III la a IV si x_4 isi schimba valoarea la trecerea de la linia a I la a II rezulta ca in TCC corespunzator ramine doar $\overline{x_1}x_2$, fiindca lui x_1 *ii corespunde 0*, iar lui x_2 *ii corespunde 1*.

x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

Alipim elementele din coloana IV.

Asa cum in coloana IV x_1 si x_2 pastreaza neschimbate valorile lor , iar x_3 nu-si schimba valoarea la trecerea de la linia a III la a IV si x_4 isi schimba valoarea la trecerea de la linia a III la a IV rezulta ca in TCC corespunzator ramine doar $x_1\overline{x_2}x_3$.

x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

Alipim elementele din linia II de pe locul 2 si 3.

Asa cum in linia II x_3 si x_4 pastreaza neschimbate valorile lor (0 si 1) , iar x_1 isi schimba valoarea la trecerea de la coloana a II la a III(deci este eliminat) si x_2 isi pastreaza valoarea 1 la trecerea de la coloana a II la a III rezulta ca in TCC corespunzator ramine doar $x_2\overline{x}_3x_4$. Alipim elementele de la extremitati din coloana IV.

x_3x_4	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	1	0
11	0	1	0	1
10	0	1	0	1

Asa cum in coloana IV x_1 si x_2 pastreaza neschimbate valorile lor(1 si 0), iar x_3 isi schimba valoarea la trecerea de la linia a I la a IV si x_4 isi pastreaza valoarea la trecerea de la linia a I la a IV rezulta ca in TCC corespunzator ramine doar $x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4}$.

Deoarece toate celulele care contin 1 au participat la alipire rezulta ca $FDM = \overline{x_1}x_2 \vee x_1\overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee x_2\overline{x_3}x_4 \vee x_1\overline{x_2}x_3$

Forma conjunctivă minimă (FCM) se obţine prin alipirea mintermenilor prin încercuirea poziţiilor cu valoarea 0:

$$FCM = (x_1 \vee x_2) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})$$

Aceste încercuiri pot cuprinde un număr 2^n (2,4,8 etc) de locaţii vecine (adiacente) ale diagramei. Trebuie de adăugat că în diagramă, locaţiile aflate la extremurile rîndurilor sau a coloanelor se consideră adiacente şi pot participa la o încercuire de eliminare.

Exemplu 2. Să se determine FDM si FCM a funcţiei

$$f\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \sum(0,1,2,3,4,7,8,10,12,13,15)$$

după metoda diagramei Karnaugh.

Completam diagram Karnaugh:

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Alipim elementele din prima linie.

x_1x_2 / x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Obtinem TCD$_1$= $\overline{x_3}\,\overline{x_4}$,fiindca x_3 si x_4 in linia I pastreaza valorile lor (0 0), iar x_1 isi scimba valoarea la trecerea de la coloana I la a II si x_2 isi scimba valoarea la trecerea de la coloana II la a III.

Alipim elementele din prima coloana:

x_1x_2 / x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Obtinem TCD$_2$=$\overline{x_1}\,\overline{x_2}$.

Alipim elementele din virfurile diagramei:

x_1x_2 / x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Variabila x_1 isi schimba valoarea 0 in 1 la trecerea de la coloana I la IV. Deci ea este eliminata.Variabila x_2 nu-si schimba valoarea 0 la trecerea de la coloana I la IV. Deci ea intra-n TCD ca $\overline{x_2}$. Variabila x_3 isi schimba valoarea 0 in 1 la trecerea de la linia I la IV. Deci ea este eliminata.Variabila x_4 nu-si schimba valoarea 0 la trecerea de la linia I la IV. Deci ea intra-n TCD ca $\overline{x_4}$. Obtinem

TCD$_3$= $\overline{x_2}\,\overline{x_4}$.

Alipim elementele II si al III din coloana a III

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Obtinem TCD$_4$= $x_1x_2x_4$.

Alipim elementele II si al III din linia a III (se poate I cu II)

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	1	1	1	0
10	1	0	0	1

Obtinem TCD$_5$= $x_2x_3x_4$.

FDM= $\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_2x_3x_4$.

Asa cum exista alternative de alegere TCD$_4$ si TCD$_5$ mai exista inca 2 FDM.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Sigma(0,1,2,4,8,10,11,12)$
după metoda diagramei Karnaugh.

Completam diagram Karnaugh:

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

x_1x_2 \ x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

Obtinem TCD$_1$= $\overline{x}_3\overline{x}_4$,

x_1x_2 / x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

Obtinem

TCD$_2$= $\overline{x_2}\,\overline{x_4}$.

x_1x_2 / x_3x_4	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

Obtinem TCD$_3$= $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	0	0
11	0	0	0	1
10	1	0	0	1

Obtinem TCD$_4$= $x_1\overline{x_2}x_3$

FDM= $\overline{x_3}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_2}\,\overline{x_4} \vee \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee x_1\overline{x_2}x_3$