1. VECTORI. OPERAŢII LINIARE CU VECTORI ÎN COORDONATE

Fie că vectorii $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ formează bază în spaţiu. Atunci pentru orice vector $\overline{a}$ există numerele reale x, y, z, astfel încât $\overline{a} = x\overline{e}_1 + y\overline{e}_2 + z\overline{e}_3$. Aceste numere se numesc **coordonate ale vectorului** $\overline{a}$ în baza $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$. Se mai scrie $\overline{a} = \{x,\ y,\ z\}$. În mod analog se definesc coordonatele vectorului în plan.

Fie vectorii $\overline{a} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\}$ și $\overline{b} = \{x_2,\ y_2,\ z_2\}$ într-o bază fixată, iar $\lambda \in \mathbb{R}$. Atunci $\lambda\,\overline{a} = \{\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1\}$ și $\overline{a} + \overline{b} = \{x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2\}$.

Coordonatele vectorului. Fie date punctele $A(x_1, y_1, z_1)$ și $B(x_2, y_2, z_2)$. Atunci $\overline{AB} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$.

Împărţirea segmentului într-un raport dat. Fie date punctele $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq -1$. Punctul *C* astfel încât $\overline{AC} = \lambda\overline{CB}$, are coordonatele $\left(\dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

În cazul $\lambda = 1$ punctul *C* este mijlocul segmentului *AB* și $C\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}, \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Condiţia de coliniaritate a vectorilor $\overline{a} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\}$ și $\overline{b} = \{x_2,\ y_2,\ z_2\}$ este $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

O bază se numeşte **ortonormată** dacă vectorii ei sunt doi câte doi ortogonali și unitari. Se notează cu $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.

2. PRODUSE DE VECTORI: SCALAR, VECTORIAL, MIXT. APLICAŢII

Vom numi **unghi dintre doi vectori**, unghiul format de alţi doi vectori, egali celor daţi, dar cu origine comună.

Definiţie. Prin **produs scalar** a doi vectori vom înţelege numărul egal cu produsul dintre lungimile acestor vectori şi cosinusul unghiului dintre ei. Se notează cu $\overline{a} \cdot \overline{b}$. Astfel, $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right)$.

Produsul scalar al vectorilor posedă următoarele **proprietăţi**:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$
2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot pr_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{b}| \cdot pr_{\overline{b}}\overline{a}.$
3) Vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt **ortogonali** dacă și numai dacă $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$
4) $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b}) = \overline{a} \cdot (\lambda\overline{b})$, $(\lambda \in R)$
5) $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$
6) $\overline{a} \cdot \overline{a} = \overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$
7) $\overline{i} \cdot \overline{i} = \overline{j} \cdot \overline{j} = \overline{k} \cdot \overline{k} = 1$, $\overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{j} \cdot \overline{k} = \overline{k} \cdot \overline{i} = 0$.

Dacă $\overline{a} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\}$ și $\overline{b} = \{x_2,\ y_2,\ z_2\}$ în baza $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, atunci

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

2. $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{\overline{a}^{\,2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. $\cos\square \left(\overline{a}, \overline{b}\right) = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

4. $pr_{\overline{a}}\overline{b} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}$

5. Dacă α, β, γ sunt unghiurile formate de vectorul $\overline{a} = \{x,\ y,\ z\}$ cu axele de coordonate $Ox,\ Oy,\ Oz$, atunci

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

și $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$.

6. $\overline{a} \perp \overline{b}$ dacă şi numai dacă $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

7. Distanţa dintre punctele $A(x_1, y_1, z_1)$ şi $B(x_2, y_2, z_2)$ este egală cu modulul vectorului $\overline{AB}$, adică $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

8. În mecanică, lucrul L al forţei $\overline{F}$ la deplasarea punctului material de-a lungul unei axe S este $L = \overline{F} \cdot \overline{S} = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{S}\right| \cdot \cos\left(\overline{F} \,\hat{,}\, \overline{S}\right)$, unde $\overline{S}$ - este vectorul deplasării.

Definiţie. Prin **produs vectorial** al vectorului $\overline{a}$ la vectorul $\overline{b}$ vom înţelege vectorul $\overline{c}$, care verifică condiţiile: a) $\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \sin\left(\overline{a} \,\hat{,}\, \overline{b}\right)$; b) $\overline{c} \perp \overline{a}, \overline{c} \perp \overline{b};$ c) vectorii $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ formează un triplet de dreapta. Se notează cu $\overline{a} \times \overline{b}.$

Proprietăţi:

1) $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}$ dacă şi numai dacă vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt coliniari.

2) $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$.

3) $\lambda\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) = \left(\lambda\overline{a}\right) \times \overline{b} = \overline{a} \times \left(\lambda\overline{b}\right)$

4) $\left(\overline{a} + \overline{b}\right) \times \overline{c} = \overline{a} \times \overline{c} + \overline{b} \times \overline{c}$

5) **Dacă** $\overline{a} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\}$ și $\overline{b} = \{x_2,\ y_2,\ z_2\}$ în baza $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, atunci:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Aplicaţii ale produsului vectorial

1. Aria paralelogramului construit pe vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ este egală cu $A_{paral} = \left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$

2. Aria triunghiului construit pe vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ este egală cu $A_{\Delta} = \dfrac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$.

Definiţie. Se numeşte **produs mixt** a trei vectori produsul scalar dintre vectorul, ce reprezintă produsul vectorial al primilor doi vectori, şi vectorul al treilea. Se notează cu $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}$. Deci, $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c}$.

Teoremă. Modulul produsului mixt a trei vectori necoplanari $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$, este egal cu volumul paralelipipedului construit pe acești vectori: $V_{paral} = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}.$

Proprietăţi:

1. $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{a} = \overline{c} \cdot \overline{a} \cdot \overline{b}$; $\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = -\overline{b} \cdot \overline{a} \cdot \overline{c}$

2. . Vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$

3. Fie $\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\overline{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$ în baza $\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$,

atunci $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Aplicaţiile produsului mixt:

1. Volumul piramidei, construite pe vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$ şi $\overline{c}$, este egal cu $\frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|$.

2. Vectorii $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ sunt necolpanari (formează bază în spațiu) , dacă $\overline{a}\overline{b}\overline{c} \neq 0$.

3. PLANUL. DIVERSE ECUAŢII ALE PLANULUI

Fie că în spaţiu este fixat un sistem cartezian rectangular de coordonate $OXYZ$, iar π un plan. Fie $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ un punct ce aparține planului π. Considerăm vectorul nenul $\overline{n} = \{A, B, C\}$ perpendicular planului π, numit vector normal al planului. Atunci **ecuaţia planului ce conține punctul** $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ **cu vector normal** $\overline{n}$ este $A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0$. Din ultima ecuație obținem $Ax + By + Cz + D = 0$, cu $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, numită **ecuaţie generală a planului.**

Ecuaţii incomplete ale planului

1. $D = 0$; ecuaţia $Ax + By + Cz = 0$, determină un plan ce trece prin originea coordonatelor.
2. $A = 0$; ecuaţia $By + Cz + D = 0$, determină un plan paralel axei OX.
3. $B = 0$; ecuaţia $Ax + Cz + D = 0$ determină un plan paralel axei OY .
4. $C = 0$; ecuaţia $Ax + By + D = 0$ determină un plan paralel axei OZ .
5. $A = D = 0;$ ecuaţia $By + Cz = 0$ determină un plan ce conţine axa OX .
6. $B = D = 0;$ ecuaţia $Ax + Cz = 0$ determină un plan ce conţine axa OY .
7. $C = D = 0;$ ecuaţia $Ax + By = 0$ determină un plan paralel axei OZ .
8. $A = B = 0;$ ecuaţia $Cz + D = 0$ determină un plan paralel planului OXY
9. $B = C = 0;$ ecuaţia $Ax + D = 0$, determină un plan paralel planului OXY .
10. $A = C = 0;$ ecuaţia $By + D = 0$, determină un plan paralel planului OXZ .
11. $A = B = D = 0;$ ecuaţia $Cz = 0$ sau $z = 0$ - ecuaţia planului OXY .
12. $A = C = D = 0;$ ecuaţia $By = 0$ sau $y = 0$ - ecuaţia planului OXZ .
13. $B = C = D = 0;$ ecuaţia $Ax = 0$ sau $x = 0$ - ecuaţia planului OYZ .

Dacă în ecuaţia generală toţi coeficienţii sunt nenuli, atunci ecuaţia se numeşte **completă** și poate fi scrisă sub forma: $\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1$ sau $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, numită **ecuaţia planului „în segmente”.**

Ecuaţia planului ce trece prin trei puncte necoliniare $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ este $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$

Unghiul dintre plane. Condiţiile de paralelism şi perpendicularitate

Fie planele $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ şi $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. Atunci

$$\cos\angle(\pi_1,\pi_2)=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

Condiţia de paralelism ale planelor π_1 şi π_2: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

Condiţia de perpendicularitate a planelor π_1 şi π_2: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Fie punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi planul $\pi: Ax+By+Cz+D=0$. Atunci **distanţa de la** M_0 **la** π se calculează după formula $d(M_0,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

4. DREAPTA ÎN SPAȚIU. DIVERSE ECUAŢII ALE DREPTEI ÎN SPAŢIU

În spaţiu, o dreaptă este bine determinată de un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ ce-i aparţine şi un **vector director** $\bar{q}=\{m,n,p\}$. Ecuaţia acestei drepte este $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, numită **ecuaţie canonică** a dreptei. **Ecuaţiile parametrice** ale dreptei sunt $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt\,,\ t\in R. \\ z=z_0+pt \end{cases}$

Ecuaţia dreptei ce trece prin punctele distincte $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ este $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Intersecţia a două plane neparalele $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_2=0$ şi $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ reprezintă o dreaptă în spaţiu. Atunci sistemul $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ se numeşte **ecuaţie generală a dreptei**.

În calitate de vector director al dreptei cu ecuație generală putem considera vectorul $\vec{q}=\overline{n_1}\times\overline{n_2}$, iar un punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$, care aparţine dreptei, poate fi determinat, aflând o soluţie (x_0,y_0,z_0) a sistemului.

Unghiul dintre drepte. Condiţiile de paralelism şi perpendicularitate

Fie dreptele

$l_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ şi $l_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$. Atunci

$$\cos\angle(l_1,l_2)=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Dreptele l_1 şi l_2 sunt **perpendiculare** dacă $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Dreptele l_1 şi l_2 sunt **paralele**, dacă $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

Unghiul dintre dreaptă şi plan. Distanţa de la punct la dreaptă. Distanţa minimă dintre două drepte neconcurente

Fie planul $\pi_1: Ax+By+Cz+D=0$ şi dreapta $l:\dfrac{x-x_0}{m_0}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$. Unghiul dintre dreapta l şi planul π este determinat din relația

$$\sin\square\,(l,\pi)=\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Fie dată dreapta $l:\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ şi punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$. **Distanţa de la** M_0 **la dreapta** l este egală cu $d(M_0,l)=\dfrac{\left|\overline{q}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{|\overline{q}|}$.

Fie dreptele neconcurente: $l_1:\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$ şi $l_2:\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$.

Distanţă minimă între două drepte se numeşte lungimea segmentului de perpendiculară comună, cu extremităţile situate pe aceste . Se calculează după formula: $d=\dfrac{\left|\overrightarrow{q_1}\cdot\overline{q_2}\cdot\overline{M_1M_2}\right|}{\left|\overline{q_1}\times\overline{q_2}\right|}$.

<u>Problema 1</u>. Să se verifice dacă sunt coliniari vectorii $\overrightarrow{c_1}$ și $\overrightarrow{c_2}$, construiți pe vectorii $\vec{a}$ si $\vec{b}$.

1. $\vec{a}=\{1,\ -2,\ 3\}$, $\vec{b}=\{3,\ 0,\ -1\}$, $\overrightarrow{c_1}=2\vec{a}+4\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=-\vec{a}+3\vec{b}$.

2. $\vec{a}=\{1,\ 0,\ 1\}$, $\vec{b}=\{-2,\ 3,\ 5\}$, $\overrightarrow{c_1}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=3\vec{a}-\vec{b}$.

3. $\vec{a}=\{-2,\ 4,\ 1\}$, $\vec{b}=\{1,\ -2,\ 7\}$, $\overrightarrow{c_1}=5\vec{a}+3\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=2\vec{a}-\vec{b}$.

4. $\vec{a}=\{1,\ 2,\ -3\}$, $\vec{b}=\{2,\ -1,\ -1\}$, $\overrightarrow{c_1}=4\vec{a}+3\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=8\vec{a}-\vec{b}$.

5. $\vec{a}=\{3,\ 5,\ 4\}$, $\vec{b}=\{5,\ 9,\ 7\}$, $\overrightarrow{c_1}=-2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

6. $\vec{a}=\{1,\ 4,\ -2\}$, $\vec{b}=\{1,\ 1,\ -1\}$, $\overrightarrow{c_1}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=4\vec{a}+2\vec{b}$.

7. $\vec{a}=\{1,\ -2,\ 5\}$, $\vec{b}=\{3,\ -1,\ 0\}$, $\overrightarrow{c_1}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=-2\vec{a}+\vec{b}$.

8. $\vec{a}=\{3,\ 4,\ -1\}$, $\vec{b}=\{2,\ -1,\ 1\}$, $\overrightarrow{c_1}=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=2\vec{a}+5\vec{b}$.

9. $\vec{a}=\{-2,\ -3,\ -2\}$, $\vec{b}=\{1,\ 0,\ 5\}$, $\overrightarrow{c_1}=3\vec{a}+9\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=-\vec{a}-3\vec{b}$.

10. $\vec{a}=\{-1,\ 4,\ 2\}$, $\vec{b}=\{3,\ -2,\ 6\}$, $\overrightarrow{c_1}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=3\vec{b}-6\vec{a}$.

11. $\vec{a}=\{5,\ 0,\ -1\}$, $\vec{b}=\{7,\ 2,\ 3\}$, $\overrightarrow{c_1}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=-6\vec{a}+3\vec{b}$.

12. $\vec{a}=\{0,\ 3,\ -2\}$, $\vec{b}=\{1,\ -2,\ 1\}$, $\overrightarrow{c_1}=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=3\vec{a}+5\vec{b}$.

13. $\vec{a}=\{-2,7,-1\},\vec{b}=\{-3,5,2\},\overrightarrow{c_1}=2\vec{a}+3\vec{b},\overrightarrow{c_2}=3\vec{a}+2\vec{b}$.

14. $\vec{a}=\{3,\ 7,\ 0\}$, $\vec{b}=\{1,\ -3,\ 4\}$, $\overrightarrow{c_1}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=\vec{b}-2\vec{a}$.

15. $\vec{a}=\{-1,\ 2,\ -1\}$, $\vec{b}=\{2,\ -7,\ 1\}$, $\overrightarrow{c_1}=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=\vec{b}-3\vec{a}$.

16. $\vec{a}=\{7,\ 9,\ -2\}$, $\vec{b}=\{5,\ 4,\ 3\}$, $\overrightarrow{c_1}=4\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=4\vec{b}-\vec{a}$.

17. $\vec{a}=\{5,\ 0,\ -2\}$, $\vec{b}=\{6,\ 4,\ 3\}$, $\overrightarrow{c_1}=5\vec{a}-3\vec{b}$, $\overrightarrow{c_2}=6\vec{b}-10\vec{a}$.

18. $\vec{a}=\{8, \ 3, \ -1\}$, $\vec{b}=\{4, \ 1, \ 3\}$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c_2}=2\vec{b}-4\vec{a}$.

19. $\vec{a}=\{3, \ -1, \ 6\}$, $\vec{b}=\{5, \ 7, \ 10\}$, $\vec{c_1}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=\vec{b}-2\vec{a}$.

20. $\vec{a}=\{1, \ -2, \ 4\}$, $\vec{b}=\{7, \ 3, \ 5\}$, $\vec{c_1}=6\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c_2}=\vec{b}-2\vec{a}$.

21. $\vec{a}=\{3, \ 7, \ 0\}$, $\vec{b}=\{4, \ 6, \ -1\}$, $\vec{c_1}=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c_2}=5\vec{a}-7\vec{b}$.

22. $\vec{a}=\{2, \ -1, \ 4\}$, $\vec{b}=\{3, \ -7, \ -6\}$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c_2}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

23. $\vec{a}=\{5, \ -1, \ -2\}$, $\vec{b}=\{6, \ 0, \ 7\}$, $\vec{c_1}=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=4\vec{b}-6\vec{a}$.

24. $\vec{a}=\{-9, \ 5, \ 3\}$, $\vec{b}=\{7, \ 1, \ -2\}$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c_2}=3\vec{a}+5\vec{b}$.

25. $\vec{a}=\{4, \ 2, \ 9\}$, $\vec{b}=\{0, \ -1, \ 3\}$, $\vec{c_1}=4\vec{b}-3\vec{a}$, $\vec{c_2}=4\vec{a}-3\vec{b}$.

26. $\vec{a}=\{2, \ -1, \ 6\}$, $\vec{b}=\{-1, \ 3, \ 8\}$, $\vec{c_1}=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=2\vec{a}-5\vec{b}$.

27. $\vec{a}=\{5, \ 0, \ 8\}$, $\vec{b}=\{-3, \ 1, \ 7\}$, $\vec{c_1}=3\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{c_2}=12\vec{b}-9\vec{a}$.

28. $\vec{a}=\{-1, \ 3, \ 4\}$, $\vec{b}=\{2, \ -1, \ 0\}$, $\vec{c_1}=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=\vec{b}-3\vec{a}$.

29. $\vec{a}=\{4, \ 2, \ -7\}$, $\vec{b}=\{5, \ 0, \ -3\}$, $\vec{c_1}=\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c_2}=6\vec{b}-2\vec{a}$.

30. $\vec{a}=\{2, \ 0, \ -5\}$, $\vec{b}=\{1, \ -3, \ 4\}$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-5\vec{b}$, $\vec{c_2}=5\vec{a}-2\vec{b}$.

31. $\vec{a}=\{-1, 2, -1\}$, $\vec{b}=\{2, -7, 1\}$, $\vec{c_1}=6\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=\vec{b}-3\vec{a}$.

32. $\vec{a}=\{5, \ 4, \ 1\}$, $\vec{b}=\{-3, 5, 2\}$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{c_2}=2\vec{b}-3\vec{a}$.

33. $\vec{a}=\{-5, \ 0, \ -1\}$, $\vec{b}=\{2, \ -3, \ 4\}$, $\vec{c_1}=3\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c_2}=\vec{b}-5\vec{a}$.

34. $\vec{a}=\{-7,-2,-5\}, \vec{b}=\{1,-3,0\}, \vec{c_1}=4\vec{a}-\vec{b}, \vec{c_2}=2\vec{b}-7\vec{a}$.

35. $\vec{a}=\{-2,-3,-5\}$, $\vec{b}=\{-1,0,4\}$, $\vec{c_1}=\vec{a}+5\vec{b}$, $\vec{c_2}=12\vec{b}-3\vec{a}$.

36. $\vec{a}=\{-1, \ 4, \ 3\}$, $\vec{b}=\{3, \ -3, \ 4\}$, $\vec{c_1}=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=7\vec{b}-9\vec{a}$.

37. $\vec{a}=\{5, \ 7, \ -2\}$, $\vec{b}=\{1, \ -3, \ 3\}$, $\vec{c_1}=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c_2}=2\vec{b}-9\vec{a}$.

38. $\vec{a}=\{1, \ -4, \ 6\}$, $\vec{b}=\{3, \ -3, \ 1\}$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c_2}=3\vec{b}-8\vec{a}$.

39. $\vec{a}=\{1, \ -3, \ 1\}$, $\vec{b}=\{-2, \ -4, \ 4\}$, $\vec{c_1}=7\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{c_2}=8\vec{b}-3\vec{a}$.

40. $\vec{a}=\{4, \ 5, \ -1\}$, $\vec{b}=\{1, \ -3, \ 1\}$, $\vec{c_1}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c_2}=12\vec{b}+5\vec{a}$.

41. $\vec{a}=\{7, \ 2, \ 1\}$, $\vec{b}=\{3, \ -3, \ 5\}$, $\vec{c_1}=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c_2}=5\vec{b}+6\vec{a}$.

42. $\vec{a}=\{-3, \ 0, \ -1\}$, $\vec{b}=\{4,-3,7\}$, $\vec{c_1}=3\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c_2}=10\vec{b}-3\vec{a}$.

43. $\vec{a}=\{2, \ -5, \ 1\}$, $\vec{b}=\{-7,-3,4\}$, $\vec{c_1}=-2\vec{a}+6\vec{b}$, $\vec{c_2}=\vec{b}-3\vec{a}$.

44. $\vec{a}=\{4, \ -5, \ -3\}$, $\vec{b}=\{-3,2,4\}$, $\vec{c_1}=8\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c_2}=5\vec{b}-6\vec{a}$.

45. $\vec{a}=\{-4, \ 3, \ -5\}$, $\vec{b}=\{2, \ 7, \ -4\}$, $\vec{c_1}=9\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{c_2}=4\vec{b}+\vec{a}$.

46. $\vec{a}=\{-5, \ -2, \ 1\}$, $\vec{b}=\{4,-3, 2\}$, $\vec{c_1}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{c_2}=-5\vec{b}+4\vec{a}$.

47. $\vec{a}=\{-2, \ -1, \ -3\}$, $\vec{b}=\{5,-6, 3\}$, $\vec{c_1}=-3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c_2}=9\vec{b}+3\vec{a}$.

48. $\vec{a}=\{5,-6,3\}$, $\vec{b}=\{-6, \ -1, \ 3\}$, $\vec{c_1}=-\vec{a}+7\vec{b}$, $\vec{c_2}=-\vec{b}+5\vec{a}$.

49. $\vec{a}=\{8, \ -3, \ -2\}$, $\vec{b}=\{-5, \ 1, \ 2\}$, $\vec{c_1}=6\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c_2}=4\vec{b}-7\vec{a}$.

50. $\vec{a}=\{-1,\quad 6,\quad -7\}$, $\vec{b}=\{3,8,-5\}$, $\vec{c_1}=8\vec{a}-7\vec{b}$, $\vec{c_2}=2\vec{b}-7\vec{a}$.

Exemplu rezolvat:

Să se verifice dacă sunt coliniari vectorii $\vec{c_1}$ și $\vec{c_2}$, unde $\vec{a}=\{3,-1,2\}$, $\vec{b}=\{0,1,3\}$, $\vec{c_1}=-\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{c_2}=-\vec{b}+2\vec{a}$.

Rezolvare:

Determinăm coordonatele vectorilor $\vec{c_1}$ și $\vec{c_2}$:

$\vec{c_1}=-\{3,-1,2\}+2\cdot\{0,1,3\}=\{-3,3,4\}$.

$\vec{c_2}=2\cdot\{3,-1,2\}-\{0,1,3\}=\{6,-3,1\}$.

Cum $-\frac{3}{6}\neq-\frac{3}{3}\neq\frac{4}{1}$, rezultă că vectorii $\vec{c_1}$ și $\vec{c_2}$ nu sunt coliniari.

Problema 2. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

1. $\vec{a}=\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/6$.

2. $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/4$.

3. $\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$, $|\vec{p}|=1/5$, $|\vec{q}|=1$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/2$.

4. $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+5\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1/2$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=5\pi/6$.

5. $\vec{a}=\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=3\pi/4$.

6. $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/3$.

7. $\vec{a}=2\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$, $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/2$.

8. $\vec{a}=4\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/4$.

9. $\vec{a}=\vec{p}-4\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/6$.

10. $\vec{a}=\vec{p}+4\vec{q}$, $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=7$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/3$.

11. $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$, $|\vec{p}|=10$, $|\vec{q}|=1$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/2$.

12. $\vec{a}=4\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$, $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=4$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/4$.

13. $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=6$, $|\vec{q}|=7$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/3$.

14. $\vec{a}=3\vec{p}-\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+2\vec{q}$, $|\vec{p}|=3$, $|\vec{q}|=4$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/3$.

15. $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, $|\vec{p}|=2$, $|\vec{q}|=3$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/4$.

16. $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q}$, $\vec{b}=3\vec{p}+\vec{q}$, $|\vec{p}|=4$, $|\vec{q}|=1$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/6$.

17. $\vec{a}=5\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/3$.

18. $\vec{a}=7\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}+3\vec{q}$, $|\vec{p}|=1/2$, $|\vec{q}|=2$, $(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q})=\pi/2$.

19. $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}+\vec{q},\ |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=4,\left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=\pi/4.$

20. $\vec{a}=10\vec{p}+\vec{q},\ \vec{b}=3\vec{p}-2\vec{q},\ |\vec{p}|=4,\ |\vec{q}|=1,\left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=\pi/6.$

21. $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}+2\vec{q},\ |\vec{p}|=8,|\vec{q}|=1/2,\ \left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=\pi/3.$

22. $\vec{a}=3\vec{p}+4\vec{q},\ \vec{b}=\vec{q}-\vec{p},|\vec{p}|=5/2,\ |\vec{q}|=2,\ \left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=\pi/2.$

23. $\vec{a}=7\vec{p}+\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}-3\vec{q},|\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=1,\ \left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=3\pi/4.$

24. $\vec{a}=\vec{p}+3\vec{q},\vec{b}=3\vec{p}-\vec{q},\ |\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=5,\ \left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=2\pi/3.$

25. $\vec{a}=3\vec{p}+\vec{q},\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q},\ |\vec{p}|=7,\ |\vec{q}|=2,\ \left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=\pi/4.$

26. $\vec{a}=5\vec{p}-\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}+\vec{q},\ |\vec{p}|=5,\ |\vec{q}|=3,\ \left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=5\pi/6.$

27. $\vec{a}=3\vec{p}-4\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}+3\vec{q},\ |\vec{p}|=2,\ |\vec{q}|=3,\left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=\pi/4.$

28. $\vec{a}=6\vec{p}-\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}+5\vec{q},\ |\vec{p}|=1/2,\ |\vec{q}|=4,\left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=5\pi/6.$

29. $\vec{a}=2\vec{p}+3\vec{q},\ \vec{b}=\vec{p}-2\vec{q},|\vec{p}|=2,\ |\vec{q}|=1,\ \left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=\pi/3.$

30. $\vec{a}=2\vec{p}-3\vec{q},\ \vec{b}=5\vec{p}+\vec{q},\ |\vec{p}|=2,|\vec{q}|=3,\ \left(\vec{p}\,\hat{}\,\vec{q}\right)=\pi/2.$

31. $\vec{a}=-5\vec{p}-4\vec{q},\ b=3\vec{q}+\overrightarrow{6p},|\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=5,\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\frac{5\pi}{3}.$

32. $\vec{a}=-2\vec{p}+3\vec{q},\ b=4\vec{q}-\vec{p},|\vec{p}|=1,\ |\vec{q}|=3,\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\frac{\pi}{6}.$

33. $\vec{a}=5\vec{p}-2\vec{q},\ b=-3\vec{q}-\vec{p},|\vec{p}|=4,\ |\vec{q}|=5,\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\frac{4\pi}{3}.$

34. $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q},\ b=-6\vec{q}-\overrightarrow{4p},|\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=2,\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\frac{5\pi}{3}.$

35. $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q},\ b=-4\vec{q}+\overrightarrow{5p},|\vec{p}|=2,\ |\vec{q}|=3,\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\frac{\pi}{3}.$

36. $\vec{a}=2\vec{p}-5\vec{q},\ b=-3\vec{q}+\overrightarrow{4p},|\vec{p}|=2,\ |\vec{q}|=4,\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\frac{2\pi}{3}.$

37. $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q},\ b=-4\vec{q}-\overrightarrow{6p},|\vec{p}|=2,\ |\vec{q}|=5,\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\frac{4\pi}{3}.$

38. $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q},\ b=\vec{q}-\overrightarrow{4p},|\vec{p}|=-4,\ |\vec{q}|=3,\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\pi.$

39. $\vec{a}=-3\vec{p}-2\vec{q},\ b=\vec{q}+\overrightarrow{5p},|\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=6,\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\frac{4\pi}{3}.$

40. $\vec{a}=5\vec{p}-3\vec{q},\ b=4\vec{q}+\overrightarrow{2p},|\vec{p}|=4,\ |\vec{q}|=1,\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\frac{2\pi}{3}.$

41. $\vec{a}=-2\vec{p}+3\vec{q},\ b=3\vec{q}-\overrightarrow{6p},|\vec{p}|=6,\ |\vec{q}|=3,\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\frac{5\pi}{3}.$

42. $\vec{a}=-2\vec{p}-4\vec{q},\ b=3\vec{q}+\vec{p},|\vec{p}|=3,\ |\vec{q}|=2,\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\frac{7\pi}{3}.$

43. $\vec{a}=4\vec{p}+3\vec{q},\ b=-\vec{q}+\overrightarrow{2p},|\vec{p}|=4,\ |\vec{q}|=5,\ (\vec{p}\wedge\vec{q})=\frac{3\pi}{2}.$

44. $\vec{a} = -2\vec{p} + 3\vec{q},\ b = 5\vec{q} + \vec{p},\ |\vec{p}| = 2,\ |\vec{q}| = 5,\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{2\pi}{3}.$

45. $\vec{a} = 4\vec{p} - 3\vec{q},\ \vec{b} = 5\vec{q} + \overline{2p}, |\vec{p}| = 3,\ |\vec{q}| = 5,\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{4\pi}{3}.$

46. $\vec{a} = -3\vec{p} + 2\vec{q},\ b = 4\vec{q} - \overline{7p}, |\vec{p}| = 2,\ |\vec{q}| = 5,\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{8\pi}{3}.$

47. $\vec{a} = -3\vec{p} + 5\vec{q},\ b = -3\vec{q} + \overline{6p}, |\vec{p}| = 4,\ |\vec{q}| = 1,\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{7\pi}{6}.$

48. $\vec{a} = 5\vec{p} - 2\vec{q},\ b = -\overline{2q} + \overline{3p}, |\vec{p}| = 7,\ |\vec{q}| = 3,\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{5\pi}{2}.$

49. $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q},\ b = -5\vec{q} + 6\vec{p}, |\vec{p}| = 6,\ |\vec{q}| = 3,\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{4\pi}{3}.$

50. $\vec{a} = 5\vec{p} - 8\vec{q},\ \vec{b} = 4\vec{q} - 5\vec{p}, |\vec{p}| = 12,\ |\vec{q}| = 2,\ (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{3\pi}{4}.$

Exemplu rezolvat:

Să se calculeze aria paralelogramului construit pe vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$:

$$\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}, b = \vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1, (\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{\pi}{3}.$$

Rezolvare:

$A_{paralelogr.} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |(3\vec{p} - \vec{q}) \times (\vec{p} - \vec{q})| = |3(\vec{p} \times \vec{p}) - 3(\vec{p} \times \vec{q}) - (q \times \vec{p}) + (\vec{q} \times \vec{q})| = \left|-3\left((\vec{p} \times \vec{q}) + (\vec{p} \times \vec{q})\right)\right| = \left|-2\left((\vec{p} \times \vec{q})\right)\right| = 2 \cdot |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin(\vec{p} \wedge \vec{q}) = 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ u.p.

Problema 3. Să se demonstreze că vectorii $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$ formează bază și să se descompună vectorul $\vec{x}$ după vectorii $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$.

1. $\vec{x} = \{-2, 4, 7\},\ \vec{p} = \{0, 1, 2\},\ \vec{q} = \{1, 0, 1\},\ \vec{r} = \{-1, 2, 4\}.$

2. $\vec{x} = \{6, 12, -1\},\ \vec{p} = \{1, 3, 0\},\ \vec{q} = \{2, -1, 1\},\ \vec{r} = \{0, -1, 2\}.$

3. $\vec{x} = \{1, -4, 4\},\ \vec{p} = \{2, 1, -1\},\ \vec{q} = \{0, 3, 2\}\ \vec{r} = \{1, -1, 1\}.$

4. $\vec{x} = \{-9, 5, 5\},\ \vec{p} = \{4, 1, 1\},\ \vec{q} = \{2, 0, -3\},\ \vec{r} = \{-1, 2, 1\}.$

5. $\vec{x} = \{-5, -5, 5\},\ \vec{p} = \{-2, 0, 1\},\ \vec{q} = \{1, 3, -1\},\ \vec{r} = \{0, 4, 1\}.$

6. $\vec{x} = \{13, 2, 7\},\ \vec{p} = \{5, 1, 0\},\ \vec{q} = \{2, -1, 3\},\ \vec{r} = \{1, 0, -1\}.$

7. $\vec{x} = \{-19, -1, 7\},\ \vec{p} = \{0, 1, 1\},\ \vec{q} = \{-2, 0, 1\},\ \vec{r} = \{3, 1, 0\}.$

8. $\vec{x} = \{3, -3, 4\},\ \vec{p} = \{1, 0, 2\},\ \vec{q} = \{0, 1, 1\},\ \vec{r} = \{2, -1, 4\}.$

9. $\vec{x} = \{3, 3, -1\},\ \vec{p} = \{3, 1, 0\},\ \vec{q} = \{-1, 2, 1\}\ \vec{r} = \{-1, 0, 2\}.$

10. $\vec{x} = \{-1, 7, -4\},\ \vec{p} = \{-1, 2, 1\},\ \vec{q} = \{2, 0, 3\},\ \vec{r} = \{1, 1, -1\}.$

11. $\vec{x} = \{6, 5, -14\},\ \vec{p} = \{1, 1, 4\},\ \vec{q} = \{0, -3, 2\},\ \vec{r} = \{2, 1, -1\}.$

12. $\vec{x} = \{6, -1, 7\},\ \vec{p} = \{1, -2, 0\},\ \vec{q} = \{-1, 1, 3\},\ \vec{r} = \{1, 0, 4\}.$

13. $\vec{x} = \{5, 15, 0\},\ \vec{p} = \{1, 0, 5\},\ \vec{q} = \{-1, 3, 2\},\ \vec{r} = \{0, -1, 1\}.$

14. $\vec{x} = \{2, -1, 11\},\ \vec{p} = \{1, 0, 1\},\ \vec{q} = \{0, 1, -2\},\ \vec{r} = \{1, 0, 3\}.$

15. $\vec{x}=\{11, \quad 5, \quad -3\}$, $\vec{p}=\{1, \quad 0, \quad 2\}$, $\vec{q}=\{-1,0,1\}$, $\vec{r}=\{2,5,-3\}$.

16. $\vec{x}=\{8, \quad 0, \quad 5\}$, $\vec{p}=\{2, \quad 0, \quad 1\}$, $\vec{q}=\{1, \quad 1, \quad 0\}$, $\vec{r}=\{4,1,2\}$.

17. $\vec{x}=\{3, \quad 1, \quad 8\}$, $\vec{p}=\{0, \quad 1, \quad 3\}$, $\vec{q}=\{1,2,-1\}$, $\vec{r}=\{2,0,-1\}$.

18. $\vec{x}=\{8, \quad 1, \quad 12\}$, $\vec{p}=\{1, \quad 2, \quad -1\}$, $\vec{q}=\{3,0,2\}$, $\vec{r}=\{-1,1,1\}$.

19. $\vec{x}=\{-9, \quad -8, \quad -3\}$, $\vec{p}=\{1,4,1\}$, $\vec{q}=\{-3,2,0\}$, $\vec{r}=\{1,-1,2\}$.

20. $\vec{x}=\{-5, \quad 9, \quad -13\}$, $\vec{p}=\{0,1,-2\}$, $\vec{q}=\{3,-1,1\}$, $\vec{r}=\{4,1,0\}$.

21. $\vec{x}=\{-15, \quad 5, \quad 6\}$, $\vec{p}=\{0, \quad 5, \quad 1\}$, $\vec{q}=\{3,2,-1\}$, $\vec{r}=\{-1,1,0\}$.

22. $\vec{x}=\{8, \quad 9, \quad 4\}$, $\vec{p}=\{1,0,1\}$, $\vec{q}=\{0, \quad -2, \quad 1\}$, $\vec{r}=\{1,3,0\}$.

23. $\vec{x}=\{23,-14,-30\}$, $\vec{p}=\{2,1,0\}$, $\vec{q}=\{1,-1,0\}$, $\vec{r}=\{-3,2,5\}$.

24. $\vec{x}=\{3, \quad 1, \quad 3\}$, $\vec{p}=\{2, \quad 1, \quad 0\}$, $\vec{q}=\{1, \quad 0, \quad 1\}$, $\vec{r}=\{4,2,1\}$.

25. $\vec{x}=\{-1, \quad 7, \quad 0\}$, $\vec{p}=\{0, \quad 3, \quad 1\}$, $\vec{q}=\{0,3,1\}$, $\vec{r}=\{2,-1,0\}$.

26. $\vec{x}=\{11, \quad -1, \quad 4\}$, $\vec{p}=\{1,-1,2\}$, $\vec{q}=\{3,2,0\}$, $\vec{r}=\{-1,1,1\}$.

27. $\vec{x}=\{-13, \quad 2, \quad 18\}$, $\vec{p}=\{1,1,4\}$, $\vec{q}=\{-3,0,2\}$, $\vec{r}=\{1,2,-1\}$.

28. $\vec{x}=\{0, \quad -8, \quad 9\}$, $\vec{p}=\{0, \quad -2, \quad 1\}$, $\vec{q}=\{3,1,-1\}$, $\vec{r}=\{4,0,1\}$.

29. $\vec{x}=\{8, \quad -7, \quad -13\}$, $\vec{p}=\{0,1,5\}$, $\vec{q}=\{3,-1,2\}$, $\vec{r}=\{-1,0,1\}$.

30. $\vec{x}=\{2,7,5\}$, $\vec{p}=\{1,0,1\}$, $\vec{q}=\{1, \quad -2, \quad 0\}$, $\vec{r}=\{0, \quad 3, \quad 1\}$.

31. $\vec{x}=\{-13, 2, 18\}$, $\vec{p}=\{1, 1, 4\}$, $\vec{q}=\{-3, 0, 2\}$, $\vec{r}=\{1, 2, -1\}$.

32. $\vec{x}=\{7, 23, 4\}$, $\vec{p}=\{5, 4, 1\}$, $\vec{q}=\{-3, 5, 2\}$, $\vec{r}=\{2, -1, 3\}$.

33. $\vec{x}=\{0, 11, -14\}$, $\vec{p}=\{2, -1, 4\}$, $\vec{q}=\{-3, 0, -2\}$, $\vec{r}=\{4, 5, -3\}$

34. $\vec{x}=\{28, -19, -7\}$, $\vec{p}=\{-1, 1, 2\}$, $\vec{q}=\{2, -3, -5\}$, $\vec{r}=\{-6, 3, -1\}$.

35. $\vec{x}=\{16, 6, 15\}$, $\vec{p}=\{-7, -2, -4\}$, $\vec{q}=\{-4, 0, 3\}$, $\vec{r}=\{3, 1, 2\}$.

36. $\vec{x}=\{15, -15, 24\}$, $\vec{p}=\{5, 1, 2\}$, $\vec{q}=\{-2, 1, -3\}$, $\vec{r}=\{4, -3, 5\}$.

37. $\vec{x}=\{-19, -5, -4\}$, $\vec{p}=\{0, 2, -3\}$, $\vec{q}=\{4, -3, -2\}$, $\vec{r}=\{-5, -4, 0\}$.

38. $\vec{x}=\{-3, 2, -3\}$, $\vec{p}=\{3, -1, 2\}$, $\vec{q}=\{-2, 3, 1\}$, $\vec{r}=\{4, -5, -3\}$.

39. $\vec{x}=\{-9, 34, -20\}$, $\vec{p}=\{5, 3, 1\}$, $\vec{q}=\{-1, 2, -3\}$, $\vec{r}=\{3, -4, 2\}$.

40. $\vec{x}=\{1, 12, -20\}$, $\vec{p}=\{3, 1, -3\}$, $\vec{q}=\{-2, 4, 1\}$, $\vec{r}=\{1, -2, 5\}$.

41. $\vec{x}=\{15, 6, -17\}$, $\vec{p}=\{6, 1, -3\}$, $\vec{q}=\{-3, 2, 1\}$, $\vec{r}=\{-1, -3, 4\}$.

42 $\vec{x}=\{-12, 14, -31\}$, $\vec{p}=\{4, 2, 3\}$, $\vec{q}=\{-3, 1, -8\}$, $\vec{r}=\{2, -4, 5\}$.

43. $\vec{x}=\{-2, 17, 5\}$, $\vec{p}=\{1, 3, 6\}$, $\vec{q}=\{-3, 4, -5\}$, $\vec{r}=\{1, -7, 2\}$.

44. $\vec{x}=\{-5, 11, -15\}$, $\vec{p}=\{11, 1, 2\}$, $\vec{q}=\{-3, 3, 4\}$, $\vec{r}=\{-4, -2, 7\}$.

45. $\vec{x}=\{-10, -13, 8\}$, $\vec{p}=\{9, 5, 3\}$, $\vec{q}=\{-3, 2, 1\}$, $\vec{r}=\{4, -7, 4\}$.

46. $\vec{x}=\{1, 7, -12\}$, $\vec{p}=\{5, 4, -3\}$, $\vec{q}=\{-3, 2, -5\}$, $\vec{r}=\{-1, 3, -4\}$.

47. $\vec{x}=\{6, 9, -1\}$, $\vec{p}=\{8, 3, -5\}$, $\vec{q}=\{-6, 7, -3\}$, $\vec{r}=\{4, -1, 7\}$.

48. $\vec{x}=\{3, -4, 6\}$, $\vec{p}=\{11, -3, 4\}$, $\vec{q}=\{-13, 2, -6\}$, $\vec{r}=\{5, -3, 8\}$.

49. $\vec{x}=\{-6,\ 10,\ 23\},\ \vec{p}=\{1,11,\ 12\},\ \vec{q}=\{-2,\ 2,\ 3\},\ \vec{r}=\{-5,\ -3,\ 8\}.$

50. $\vec{x}=\{-5,\ 6,\ 7\},\ \vec{p}=\{6,\ 4,8\},\ \vec{q}=\{-13,5,\ -6\},\ \vec{r}=\{2,\ -3,\ 5\}.$

Exemplu rezolvat:

Să se demonstreze că vectorii $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$ formează bază și să se descompună vectorul $\vec{x}$ după vectorii $\vec{p},\ \vec{q},\ \vec{r}$, unde $\vec{x}=\{-9,2,25\}, \vec{p}=\{1,1,3\}, \vec{q}=\{2,-1,-6\}, \vec{r}=\{5,3,-1\}$.

<u>Rezolvare</u>:

Cum $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$, $\{\vec{p},\vec{q},\vec{r}\}$ este bază în spațiu. Coordonatele a,b,c ale vectorului $\vec{x}$ în această bază se determină din egalitatea: $a\vec{p}+b\vec{q}+c\vec{r}=\vec{x}$.

Scriind această egalitate în coordonate, obținem sistemul:

$$\begin{cases} a+2b+5c=-9, \\ a-b+3c=2, \\ 3a-6b-c=25, \end{cases}$$

care are soluția $a=2, b=-3, c=-1$.

Deci, $\vec{x}=\{2,-3,-1\}_{\{\vec{p},\vec{q},\vec{r}\}}$.

<u>Problema 4.</u> Sunt date punctele A_1, A_2, A_3, A_4.

a) Să se scrie ecuația planului $(A_1A_2A_3)$;

b) Să se scrie ecuația dreptei A_1A_2;

c) Să se scrie ecuația dreptei A_4M, perpendiculară planului $(A_1A_2A_3)$;

d) Să se scrie ecuația dreptei A_3N, paralelă dreptei A_1A_2;

e) Să se calculeze volumul tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$;

f) Să se determine lungimea înălțimii coborâte din vârful A_4 al tetraedrului pe fața $(A_1A_2A_3)$.

1. $A_1(1, 3, 6)$, $A_2(2, 2, 1)$, $A_3(-1, 0, 1)$, $A_4(-4, 6, -3)$;
2. $A_1(-4, 2, 6)$, $A_2(2, -3, 0)$, $A_3(-1, 5, 8)$, A_4-5, 2, -4);
3. $A_1(7, 2, 4)$, $A_2(7, -1, -2)$, $A_3(3, 3, 1)$, $A_4(-4, 2, 1)$;
4. $A_1(2, 1, 4)$, $A_2(-1, 5, -2)$, $A_3(-7, -3, 2)$, $A_4(-6, -3, 6)$;
5. $A_1(-1, -5, 2)$, $A_2(-6, 0, -3)$, $A_3(3, 6, -3)$, $A_4(-10, 6, 7)$;
6. $A_1(0, -1, -1)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(1, -5, -9)$, $A_4(-1, -6, 3)$;
7. $A_1(5, 2, 0)$, $A_2(2, 5, 0)$, $A_3(1, 2, 4)$, $A_4(-1, 1, 1)$;
8. $A_1(2, -1, -2)$, $A_2(1, 2, 1)$, $A_3(5, 0, -6)$, $A_4(-10, 9, -7)$;
9. $A_1(-2, 0, -4)$, $A_2(-1, 7, 1)$, $A_3(4, -8, -4)$, $A_4(1, -4, 6)$;
10. $A_1(14, 4, 5)$, $A_2(-5, -3, 2)$, $A_3(-2, -6, -3)$, $A_4(-2, 2, -1)$;
11. $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(3, 0, -3)$, $A_3(5, 2, 6)$, $A_4(8, 4, -9)$;
12. $A_1(2, -1, 2)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(3, 2, 1)$, $A_4(-4, 2, 5)$;
13. $A_1(1, 1, 2)$, $A_2(-1, 1, 3)$, $A_3(2, -2, 4)$, $A_4(-1, 0, -2)$;
14. $A_1(2, 3, 1)$, $A_2(4, 1, -2)$, $A_3(6, 3, 7)$, $A_4(7, 5, -3)$;
15. $A_1(1, 1, -1)$, $A_2(2, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 1)$, $A_4(5, 9, -8)$;
16. $A_1(1, 5, -7)$, $A_2(-3, 6, 3)$, $A_3(-2, 7, 3)$, $A_4(-4, 8, -12)$;
17. $A_1(-3, 4, -7)$, $A_2(1, 5, -4)$, $A_3(-5, -2, 0)$, $A_4(2, 5, 4)$;
18. $A_1(-1, 2, -3)$, $A_2(4, -1, 0)$, $A_3(2, 1, -2)$, $A_4(3, 4, 5)$;
19. $A_1(4, -1, 3)$, $A_2(-2, 1, 0)$, $A_3(0, -5, 1)$, $A_4(3, 2, -6)$;
20. $A_1(1, -1, 1)$, $A_2(-2, 0, 3)$, $A_3(2, 1, -1)$, $A_4(2, -2, -4)$;
21. $A_1(1, 2, 0)$, $A_2(1, -1, 2)$, $A_3(0, 1, -1)$, $A_4(-3, 0, 1)$;

22. $A_1(1, 0, 2)$, $A_2(1, 2, -1)$, $A_3(2, -2, 1)$, $A_4(2, 1, 0)$;
23. $A_1(1, 2, -3)$, $A_2(1, 0, 1)$, $A_3(-2, -1, 6)$, $A_4(0, -5, -4)$;
24. $A_1(3, 10, -1)$, $A_2(-2, 3, -5)$, $A_3(-6, 0, -3)$, $A_4(1, -1, 2)$;
25. $A_1(-1, 2, 4)$, $A_2(-1, -2, -4)$, $A_3(3, 0, -1)$, $A_4(7, -3, 1)$;
26. $A_1(0, -3, 1)$, $A_2(-4, 1, 2)$, $A_3(2, -1, 5)$, $A_4(3, 1, -4)$;
27. $A_1(1, 3, 0)$, $A_2(4, -1, 2)$, $A_3(3, 0, 1)$, $A_4(-4, 3, 5)$;
28. $A_1(-2, -1, -1)$, $A_2(0, 3, 2)$, $A_3(3, 1, -4)$, $A_4(-4, 7, 3)$;
29. $A_1(-3, -5, 6)$, $A_2(2, 1, -4)$, $A_3(0, -3, -1)$, $A_4(-5, 2, -8)$;
30. $A_1(2, -4, -3)$, $A_2(5, -6, 0)$, $A_3(-1, 3, -3)$, $A_4(-10, -8, 7)$;
31. $A_1(0, -1, 5)$, $A_2(-1, 3, 5)$, $A_3(-1, -5, -9)$, $A_4(-1, 7, 3)$;
32. $A_1(6, 6, 5)$, $A_2(4, 9, 5)$, $A_3(4, 6, 11)$, $A_4(6, 9, 3)$;
33. $A_1(7, 2, 2)$, $A_2(-5, 7, -7)$, $A_3(5, -3, 1)$, $A_4(2, 3, 7)$;
34. $A_1(8, -6, 4)$, $A_2(10, 5, -5)$, $A_3(5, 6, -8)$, $A_4(8, 10, 7)$;
35. $A_1(1, -1, 3)$, $A_2(6, 5, 8)$, $A_3(3, 5, 8)$, $A_4(8, 4, 1)$;
36. $A_1(1, -2, 7)$, $A_2(4, 2, 10)$, $A_3(2, 3, 5)$, $A_4(5, 7, 3)$;
37. $A_1(0, 4, 5)$, $A_2(3, -2, 1)$, $A_3(4, 5, 6)$, $A_4(3, 3, 2)$;
38. $A_1(2, -1, 7)$, $A_2(6, 3, 1)$, $A_3(3, 2, 8)$, $A_4(2, -3, 7)$;
39. $A_1(2, 1, 7)$, $A_2(3, 3, 6)$, $A_3(2, -3, 9)$, $A_4(1, 2, 5)$;
40. $A_1(2, 1, 6)$, $A_2(1, 4, 9)$, $A_3(2, -5, 8)$, $A_4(5, 4, 2)$;
41. $A_1(3, 2, 5)$, $A_2(4, 0, 6)$, $A_3(2, 6, 5)$, $A_4(6, 4, -1)$;
42. $A_1(4, 3, 5)$, $A_2(1, 9, 7)$, $A_3(0, 2, 0)$, $A_4(5, 3, 10)$;
43. $A_1(5, 3, 7)$, $A_2(-2, 3, 5)$, $A_3(4, 2, 10)$, $A_4(1, 2, 7)$;
44. $A_1(2, 3, 5)$, $A_2(5, 3, -7)$, $A_3(1, -2, -9)$, $A_4(4, 2,0)$;
45. $A_1(4, 2, 10)$, $A_2(1, 2, 0)$, $A_3(3, 5, 7)$, $A_4(2, -3, 5)$;
46. $A_1(-3, 2, 0)$, $A_2(4, -2, 7)$, $A_3(2,-6, 5)$, $A_4(3, -4, -1)$;
47. $A_1(2, 3, -5)$, $A_2(-1, 9, -6)$, $A_3(0, 2, 5)$, $A_4(5, 3, -4)$;
48. $A_1(-5, -3, 1)$, $A_2(-2, 3, 6)$, $A_3(4, 2, -4)$, $A_4(1, -2, 6)$;
49. $A_1(1, 6, -5)$, $A_2(2, 3, -1)$, $A_3(1, -2, 7)$, $A_4(3, 2, 5)$;
50. $A_1(1, -2, 9)$, $A_2(4, 3, 0)$, $A_3(-2, 5, 6)$, $A_4(2, -3, 4)$.

Exemplu rezolvat: Sunt date punctele $A_1(4, 7, 8)$, $A_2(-1, 13, 0)$, $A_3(2, 4, 9)$, $A_4(1, 8, 9)$.

a) Să se scrie ecuația planului $(A_1A_2A_3)$;

b) Să se scrie ecuația dreptei A_1A_2;

c) Să se scrie ecuația dreptei A_4M, perpendiculară planului $(A_1A_2A_3)$;

d) Să se scrie ecuația dreptei A_3N, paralelă dreaptei A_1A_2;

e) Să se calculeze volumul tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$;

f) Să se determine lungimea înălțimii coborâte din vârful A_4 pe fața $(A_1A_2A_3)$.

Rezolvare:

a) Scriem ecuația planului $(A_1A_2A_3)$ folosind ecuația unui plan ce trece prin 3 puncte:
$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$
6x-7y-9z+97=0.

b) Scriem ecuația dreptei A_1A_2 folosind ecuația dreptei ce trece prin două puncte: $\frac{x-4}{5} = \frac{y-7}{-6} = \frac{z-8}{8}$.

c) Din condiția de perpendicularitate a dreptei A_4M și planului $(A_1A_2A_3)$ în calitate de vector director $\vec{q}$ al dreptei se poate de luat vectorul normal $\vec{n} = (6, -7, -9)$ al planului $(A_1A_2A_3)$. Ecuația dreptei A_4M este $\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9}$.

d) Deoarece dreptele A_3N și A_1A_2 sunt paralele, vectorul director al dreptei A_3N servește drept vector director al dreptei A_1A_2. Ecuația dreptei A_3N este $\frac{x-2}{5} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z-9}{8}$.

e) Determinăm coordonatele vectorilor $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$:

$\overrightarrow{A_1A_2} = (-5, 6, -8), \overrightarrow{A_1A_3} = (-2, -3, 1), \overrightarrow{A_1A_4} = (-3, 1, 1)$.

Volumul tetraedrului $A_1A_2A_3A_4$ este:

$$V_{tetr} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}\right)\right| = \frac{1}{6} mod \begin{vmatrix} -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= \frac{1}{6}|102| = 17$ u.c.

f) Înălțimea $|A_4H| = \text{dist}\left(A_4, (A_1A_2A_3)\right) =$

$= \frac{|6x_4 - 7y_4 - 9z_4 + 97|}{\sqrt{36+49+81}} = \frac{|6-56-81+97|}{\sqrt{166}} = \frac{34}{\sqrt{166}} = \frac{17\sqrt{166}}{83}$ u.l.

Problema 5. Să se afle măsura unghiului determinat de planele date.

1. $x - 3y + 5 = 0,\ 2x - y + 5z - 16 = 0$;

2. $x - 3y + z - 1 = 0,\ x + z - 1 = 0$;

3. $4x - 5y + 3z - 1 = 0, x - 4y - z + 9 = 0$;

4. $3x - y + 2z + 15 = 0,\ 5x + 9y - 3z - 1 = 0$;

5. $6x + 2y - 4z + 17 = 0,\ 9x + 3y - 6z - 4 = 0$;

6. $x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0,\quad x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0$;

7. $3y - z = 0,\ 2y + z = 0$;

8. $6x + 3y - 2z = 0,\ x + 2y + 6z - 12 = 0$;

9. $x + 2y + 2z - 3 = 0,\ 16x + 12y - 15z - 1 = 0$;

10. $2x - y + 5z + 16 = 0,\ x + 2y + 3z + 8 = 0$;

11. $x + z - 1 = 0, 2x + 2y + z - 1 = 0$;

12. $3x + y + z - 4 = 0,\ y + z + 5 = 0$;

13. $3x - 2y - 2z - 16 = 0,\ x + y - 3z - 7 = 0$;

14. $2x + 2y + z + 9 = 0,\ x - y + 3z - 1 = 0$;

15. $x + 2y + 2z - 3 = 0,\ 2x - y + 2z + 5 = 0$;

16. $x + y + z - 7 = 0, 3x + 2y - 3z - 1 = 0$;

17. $x - 3y - 2z - 8 = 0,\ x + y - z + 3 = 0$;

18. $3x - 2y + 3z + 23 = 0,\ y + z + 5 = 0$;

19. $x + y + 3z - 7 = 0,\ y + z - 1 = 0$;

20. $x - 2y + 2z + 17 = 0,\ x - 2y - 1 = 0$;

21. $x + 2y - 1 = 0,\ x + y + 6 = 0$;

22. $2x - z + 5 = 0,\ 2x + 3y - 7 = 0$;

23. $5x + 3y + z - 18 = 0,\ 2y + z - 9 = 0$;

24. $x + 2y + 2z + 5 = 0, 4x + 3z - 2 = 0$;

25. $x + 4y - z + 1 = 0,\ 2x + y + 4z - 3 = 0$;

26. $2y+z-9=0,\ x-y+2z-1=0;$
27. $2x-6y+14z-1=0,\ 5x-15y+35z-3=0;$
28. $x-y+7z-1=0,\ 2x-2y-5=0;$
29. $2x+y-3=0, 3x-y-5=0;$
30. $x+y+z\sqrt{2}-3=0,\ x-y+z\sqrt{2}-1=0;$
31. $x-3y+2z+2=0,\ x+3y+z+14=0;$
32. $x+y+z-2=0,\ x-y-2z+2=0;$
33. $5x+y-3z+4=0,\ x-y+2z+2=0;$
34. $x+5y+2z+11=0,\ x-y-z-1=0;$
35. $4x+y-3z+2=0,\ 2x-y+z-8=0;$
36. $3x+3y-2z-1=0,\ 2x-3y+z+6=0;$
37. $8x-y-3z-1=0,\ x+y+z+10=0;$
38. $4x+y+z+2=0,\ 2x-y-3z-8=0;$
39. $x+5y-z+11=0,\ x-y+2z-1=0;$
40. $6x-7y-z-2=0,\ x+7y-4z-5=0;$
41. $2x+3y-2z+6=0,\ x-3y+z+3=0;$
42. $2x+3y-2z+6=0,\ x-3y+z+3=0;$
43. $6x-5y+3z+8=0,\ 6x+5y-4z+4=0;$
44. $x+5y-z-5=0,\ 2x-5y+2z+5=0;$
45. $x+y-2z-2=0,\ x-y+z+2=0;$
46. $x-3y-3z+5=0,\ x-2y+5z+13=0;$
47. $-2x+6y-5z+16=0,\ 3x-7y+9z-23=0;$
48. $3x-8y+4z-8=0,\ 4x+y-6z+14=0;$
49. $x+3y-7z-15=0,\ -2x+3y+4z+12=0;$
50. $x+5y-4z-21=0,\ 5x-2y+6z+12=0;$

Exemplu rezolvat:
Să se afle măsura unghiului determinat de planele:

$$\pi_1: 2x+y-3z+2=0,\ \ \pi_2: 3x+2y-z+3=0.$$

Rezolvare:
Vectorii normali ai acestor plane sunt $\overrightarrow{n_1}=(2,1,-3)$ și respectiv $\overrightarrow{n_2}=(3,2,-1)$. Măsura unuia dintre unghiurile formate de aceste două plane este $(\pi_1\hat{}\pi_2)=(\overrightarrow{n_1}\hat{}\overrightarrow{n_2})$.

$$\cos(\pi_1\hat{}\pi_2)=\frac{2\cdot 3+1\cdot 2+(-3)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{11}{14}.$$

$(\pi_1\hat{}\pi_2)=arccos(\frac{11}{14})$.

Problema 6. Să se scrie ecuațiile canonice ale dreptei.

1. $\ell:\begin{cases}2x+y+z-2=0\\2x-y-3z+6=0\end{cases};$ **2.** $\ell:\begin{cases}x-3y+2z+2=0\\x+3y+z+14=0\end{cases};$

3. $\ell:\begin{cases}x+3y+z+14=0\\x-2y+z-4=0\end{cases};$ **4.** $\ell:\begin{cases}x+y+z-2=0\\x-y-2z+2=0\end{cases};$

5. $\ell:\begin{cases}2x+3y+z+6=0\\x-3y-2z+3=0\end{cases};$ **6.** $\ell:\begin{cases}3x+y-z-6=0\\3x-y+2z=0\end{cases};$

7. $\ell:\begin{cases}x+5y+2z+11=0\\ x-y-z-1=0\end{cases};$

8. $\ell:\begin{cases}3x+4y-2z+1=0\\ 2x-4y+3z+4=0\end{cases};$

9. $\ell:\begin{cases}5x+y-3z+4=0\\ x-y+2z+2=0\end{cases};$

10. $\ell:\begin{cases}x-y-z-2=0\\ x-2y+z+4=0\end{cases};$

11. $\ell:\begin{cases}4x+y-3z+2=0\\ 2x-y+z-8=0\end{cases};$

12. $\ell:\begin{cases}3x+3y-2z-1=0\\ 2x-3y+z+6=0\end{cases};$

13. $\ell:\begin{cases}x+7y-z-5=0\\ 6x-7y-4z-2=0\end{cases};$

14. $\ell:\begin{cases}8x-y-3z-1=0\\ x+y+z+10=0\end{cases};$

15. $\ell:\begin{cases}6x-5y-4z+8=0\\ 6x+5y+3z+4=0\end{cases};$

16. $\ell:\begin{cases}x+5y-z-5=0\\ 2x-5y+2z+5=0\end{cases};$

17. $\ell:\begin{cases}x+5y-z-5=0\\ 2x-5y+2z+5=0\end{cases};$

18. $\ell:\begin{cases}x-y-3z+2=0\\ 5x+y+2z+4=0\end{cases};$

19. $\ell:\begin{cases}4x+y+z+2=0\\ 2x-y-3z-8=0\end{cases};$

20. $\ell:\begin{cases}2x+y-3z-2=0\\ 2x-y+z+6=0\end{cases};$

21. $\ell:\begin{cases}x+y-2z-2=0\\ x-y+z+2=0\end{cases};$

22. $\ell:\begin{cases}x+5y-z+11=0\\ x-y+2z-1=0\end{cases};$

23. $\ell:\begin{cases}x-y+z-2=0\\ x-2y-z+4=0\end{cases};$

24. $\ell:\begin{cases}6x-7y-z-2=0\\ x+7y-4z-5=0\end{cases};$

25. $\ell:\begin{cases}x+5y+2z-5=0\\ 2x-5y-z+5=0\end{cases};$

26. $\ell:\begin{cases}x-3y+z+2=0\\ x+3y+2z+14=0\end{cases};$

27. $\ell:\begin{cases}2x+3y-2z+6=0\\ x-3y+z+3=0\end{cases};$

28. $\ell:\begin{cases}3x+4y+3z+1=0\\ 2x-4y-2z+4=0\end{cases};$

29. $\ell:\begin{cases}3x+3y+z-1=0\\ 2x-3y-2z+6=0\end{cases};$

30. $\ell:\begin{cases}6x-5y+3z+8=0\\ 6x+5y-4z+4=0\end{cases};$

31. $\ell:\begin{cases}6x+2y-4z+17=0\\ 9x+3y-6z-4=0\end{cases};$

32. $\ell:\begin{cases}3x-y+2z+15=0\\ 5x+9y-3z-1=0\end{cases};$

33. $\ell:\begin{cases}6x+3y-2z=0\\ x+2y+6z-12=0\end{cases};$

34. $\ell:\begin{cases}2x-y+5z+16=0\\ x+2y+3z+8=0\end{cases};$

35. $\ell:\begin{cases}3x+y+z-4=0\\ y+z+5=0\end{cases};$

36. $\ell:\begin{cases}2x+2y+z+9=0\\ x-y+3z-1=0\end{cases};$

37. $\ell:\begin{cases}x+2y+2z-3=0\\ 2x-y+2z+5=0\end{cases};$

38. $\ell:\begin{cases}x+y+3z-7=0\\ y+z-1=0\end{cases};$

39. $\ell:\begin{cases}x+2y-1=0\\ x+y+6=0\end{cases};$

40. $\ell:\begin{cases}5x+3y+z-18=0\\ 2y+z-9=0\end{cases};$

41. $\ell:\begin{cases}x+4y-z+1=0\\ 2x+y+4z-3=0\end{cases};$

42. $\ell:\begin{cases}x-y+7z-1=0\\ 2x-2y-5=0\end{cases};$

43. $\ell:\begin{cases}x-y+7z-1=0\\ 2x-y-5=0\end{cases};$

44. $\ell:\begin{cases}6x+2y-4z+17=0\\ 9x+3y-6z-4=0\end{cases};$

45. $\ell:\begin{cases}3x-2y-2z-16=0\\ x+y-3z-7=0\end{cases};$

46. $\ell:\begin{cases}2x-3y+z+11=0\\ x+y-5z-8=0\end{cases};$

47. $\ell:\begin{cases}3x-2y+6z-10=0\\3x+y+2z-15=0\end{cases}$; **48.** $\ell:\begin{cases}4x-2y+z-21=0\\3x+7y-5z+3=0\end{cases}$;

49. $\ell:\begin{cases}-x+3y-6z+19=0\\2x-3y+5z-14=0\end{cases}$; **50.** $\ell:\begin{cases}4x-5y+2z-6=0\\3x+y-5z-10=0\end{cases}$.

Exemplu rezolvat:

Să se scrie ecuațile canonice ale dreptei: $\ell:\begin{cases}x-y+2z+4=0\\3x+y-5z-8=0\end{cases}$

<u>Rezolvare:</u> Determinăm coordonatele vectorului director al dreptei: $\vec{q}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\1 & -1 & 2\\3 & 1 & -5\end{vmatrix}=$ $(3,11,4)$.

Pentru a găsi un punct de pe dreapta dată considerăm în sistemul inițial z=0 și, rezolvând sistemul obținem x=1, y=5. Obținem punctul $M_0(1,5,0)$. Ecuațiile canonice ale dreptei vor fi:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{11}=\frac{z}{4}.$$

<u>Problema 7.</u> Să se găsească coordonatele punctului de intersecție a dreptei ℓ cu planul α:

1. $\ell:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4},\alpha:\ x+2y+3z-14=0;$

2. $\ell:\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5},\alpha:\ x+2y-5z+20=0;$

3. $\ell:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2},\alpha: x-3y+7z-24=0$;

4. $\ell:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2},\alpha: 2x-y+4z=0$;

5. $\ell:\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0},\alpha: 3x+y-5z-12=0$;

6. $\ell:\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2},\alpha: x+3y-5z+9=0$;

7. $\ell:\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1},\alpha: x-2y+5z+17=0$;

8. $\ell:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{1},\alpha: x-2y+4z-19=0$;

9. $\ell:\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+4}{-1},\alpha: 2x-y+3z+23=0$;

10. $\ell:\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0},\alpha: 2x-3y-5z-7=0$;

11. $\ell:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3},\alpha: 4x+2y-z-11=0$;

12. $\ell:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1},\alpha: 3x-2y-4z-8=0;$

13. $\ell:\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2},\alpha: x+2y-z-2=0;$

14. $\ell:\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3},\alpha:\ 5x-y+4z+3=0;$

15. $\ell:\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3},\alpha:\ x+3y+5z-42=0;$

16. $\ell:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z-4}{2}, \alpha:\ 7x+y+4z-47=0;$

17. $\ell:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{5}, \alpha: 2x+3y+7z-52=0;$

18. $\ell:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+3}{2}, \alpha: 3x+4y+7z-16=0;$

19. $\ell:\dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z+4}{-1}, \alpha: 2x-5y+4z+24=0;$

20. $\ell:\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-8}{-5}=\dfrac{z+5}{12}, \alpha: x-2y-3z+18=0;$

21. $\ell:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{0}, \alpha: x+7y+3z+11=0;$

22. $\ell:\dfrac{x-5}{-1}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-1}{2}, \alpha: 3x+7y-5z-11=0;$

23. $\ell:\dfrac{x-1}{7}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-6}{-1}, \alpha: 4x+y-6z-5=0;$

24. $\ell:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-8}{0}, \alpha: 5x+9y+4z-25=0;$

25. $\ell:\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+1}{3}, \alpha: x+4y+13z-23=0;$

26. $\ell:\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{3}, \alpha: 3x-2y+5z-3=0;$

27. $\ell:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+3}{-2}, \alpha: 3x-y+4z=0;$

28. $\ell:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-3}{-2}, \alpha: x+2y-5z+16=0;$

29. $\ell:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{0}=\dfrac{z+2}{-2}, \alpha: 3x-7y-2z+7=0;$

30. $\ell:\dfrac{x+3}{0}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+5}{11}, \alpha: 5x+7y+9z-32=0;$

31. $\ell:\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+3}{2}, \alpha: x+2y-z-2=0;$

32. $\ell:\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}, \alpha: 2x+y+7z-3=0;$

33. $\ell:\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{2}, \alpha: 11x-17y-19z+10=0;$

34. $\ell:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{3}, \alpha: 3x-y+2z-4=0;$

35. $\ell:\dfrac{x-10}{8}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{3}, \alpha: x+2y-4z+1=0;$

36. $\ell:\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-5}{4}, \alpha: 3x-y+2z-5=0;$

37. $\ell:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}, \alpha: 3x+y-5z+1=0;$

38. $\ell:\dfrac{x-7}{5}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-5}{4}, \alpha: 3x-y+2z-8=0;$

39. $\ell:\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{2}, \alpha: 2x+2y-3z+4=0;$

40. $\ell:\frac{x+4}{-2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{3}, \alpha: x+2y-z+3=0;$

41. $\ell:\frac{x+1}{-3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z+1}{1}, \alpha: x+2y-z+5=0;$

42. $\ell:\frac{x+1}{-3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-2}, \alpha: -x+2y-z-3=0;$

43. $\ell:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{2}, \alpha: 4x+y-3z+2=0;$

44. $\ell:\frac{x+5}{-3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{7}, \alpha: x+2y-5z+3=0;$

45. $\ell:\frac{x+1}{-3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{2}, \alpha: 3x+y-3z+4=0;$

46. $\ell:\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}, \alpha: 2x-y-3z+15=0;$

47. $\ell:\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{2}, \alpha: -2x+y-3z-13=0;$

48. $\ell:\frac{x+2}{-3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{-2}, \alpha: x-y+2z-7=0;$

49. $\ell:\frac{x-5}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-2}{5}, \alpha: 2x-3y+5z+12=0;$

50. $\ell:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+2}{-2}, \alpha: x-4y+z-14=0.$

Exemplu rezolvat:

Să se găsească coordonatele punctului de intersecție a dreptei $\ell:\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+2}{-2}$ cu planul $\alpha: x-4y+z-12=0.$

<u>Rezolvare:</u> Scriem ecuațiile parametrice ale dreptei:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+2}{-2}=t, t\in(-\infty,+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+3t, \\ y=1-4t, \\ z=-2-2t. \end{cases}$$

Înlocuim ecuațiile parametrice în ecuația planului și obținem
$(1+3t)$-4$(1-4t)$+$(-2-2t)$-12=0 $\Leftrightarrow$t=1. Pentru valoarea dată a parametrului punctului de intersecție este M(4,-3,-4).