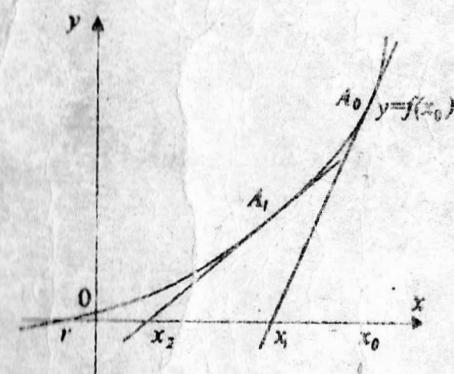


42 901

Ştefan BUZURNIUC

Vasile MORARU 873

METODE NUMERICE



Chişinău 2001

Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică

Catedra Matematica de Calcul și Programare

Conf. univ. dr. Ștefan BUZURNIUC
Conf. univ. dr. Vasile MORARU

METODE NUMERICE

Material didactic



Chișinău
U.T.M.
2001

Lucrarea prezintă principalele metode numerice și algoritmi de rezolvare a ecuațiilor algebrice și transcendentale, a sistemelor de ecuații liniare și neliniare, de aproximare a funcțiilor, de calcul numeric al integralelor, de integrare numerică a ecuațiilor diferențiale și de calcul al valorilor și vectorilor proprii. Majoritatea metodelor prezentate sunt însoțite de programe de calculator scrise în limbajul PASCAL. Conține șapte lucrări de laborator și se propun spre soluționare exerciții, rezolvate sau însoțite de indicațiile corespunzătoare.

Lucrarea se adresează studenților de la *Facultatea de Calculatoare, Informatică și Microelectronică* cu specializările 2153 "Automatica și Informatica", 2103 "Calculatoare", 2104 "Tehnologii Informaționale" și 2105 "Microelectronică" precum și celor care doresc să se inițieze în rezolvarea practică a problemelor cu ajutorul calculatorului.

Responsabil pentru ediție:

Recenzent:

prof. univ. dr. habilitat Anatol Popescu
conf. univ. dr. Victor Beșliu

© Universitatea Tehnică
a Moldovei, 2001

PREFATĂ

Informatica, sau știința calculatoarelor, a cunoscut în cele cinci decenii de la apariția sa o dezvoltare foarte rapidă, ba chiar explozivă. O foarte vastă literatură de specialitate consemnează progresele înregistrate de această disciplină, ce poate fi considerată dintr-un punct de vedere, acela al tehnologiilor, ca aparținând de grupul de științe ingineresti ale electroniciei, iar în raport cu problemele informației și de utilizare a acesteia, ca făcând parte din grupul de științe ale managementului.

Calculatoarele și-au găsit aplicarea nu numai în științele ingineresti și economice, dar și în aşa domenii tradițional nematematice ca medicina, istoria, psihologia etc. Acest fapt a condus la apariția unei numeroase categorii de specialiști – utilizatori ai calculatorului, care au nevoie de literatură privind aplicațiile tehnicii de calcul.

La rezolvarea unei probleme la calculator rolul principal îl este rezervat omului. Calculatorul doar execută instrucțiunile utilizatorului, date sub forma unui program. Funcțiunile utilizatorului și cele ale calculatorului se pot vedea, dacă vom diviza procesul de rezolvare a problemei date în câteva etape.

Formularea problemei. În această etapă se realizează formularea fizică (narativă) a problemei care trebuie rezolvată și se determină obiectivul (scopul) sau obiectivele care se urmăresc.

Elaborarea modelului matematic. Noțiunea "model" este un concept relativ nou, utilizat pe larg în știință, dar metoda modelării este cunoscută din vechime. În esență, modelul este o reprezentare izomorfă a realității care, oferind o imagine intuitivă și totodată strictă a fenomenului sau procesului aflat în studiu, facilitează descoperirea unor legături și legități greu sau chiar imposibil de determinat pe alte căi. Se pot deosebi modele fizice, modele matematice, modele grafice etc.

Modelul matematic constituie o reprezentare matematică a modelului fizic abordat, considerat din punct de vedere funcțional. Modelul trebuie să descrie într-un mod corect obiectul fizic. În cele mai simple cazuri modelul matematic este un sistem de ecuații liniare sau neliniare, ecuații diferențiale ordinare sau cu derivate parțiale, dar și o combinație a acestora. Modelul matematic, fiind o aproximare a procesului fizic, adesea este imperfect.

În prima fază a cercetării unui proces sau fenomen, rezultatele obținute nu corespund celor scontate, ceea ce implică modificarea modelului. Aici o importanță mare o are experiența și intuiția cercetătorului pentru a aprecia în ce măsură soluția modelului matematic corespunde rezultatelor observărilor fenomenului studiat. De regulă, modificarea modelului constă în intro-

ducerea în model a unor elemente sau parametri care la începutul studiului au fost excluși din model ca fiind neesențiali. Mai complicat este cazul în care modelul construit trebuie completamente revăzut de pe alte poziții. În ambele situații, după schimbarea modelului, cercetările se reiau de la început: obținerea unei soluții noi, studiul rezultatelor obținute, modificarea modelului. Altfel spus, această procedură este un proces ciclic (fig. 1).

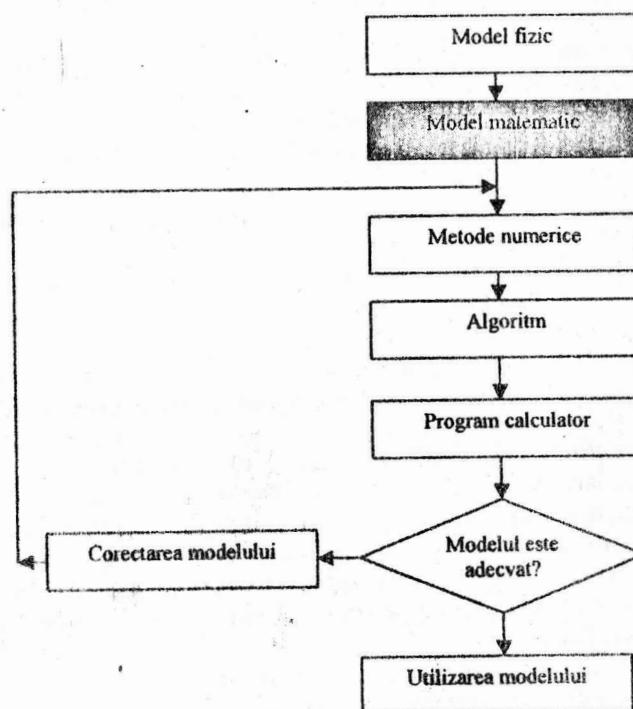


Fig. 1

Modelul matematic este de cele mai multe ori de natură continuă – de exemplu, calculul unei integrale definite. Pe de altă parte, calculatoarele operează numai cu mărimi discrete, ceea ce impune discretizarea problemei – calculul integralei definite se reduce la calculul unei sume finite de valori.

Deci soluția problemei inițiale este aproximată prin soluția problemei discretizate.

Construirea modelului numeric. Transformarea modelului matematic într-un model numeric se face cu ajutorul metodelor numerice. Metodele numerice permit rezolvarea problemelor matematice cu ajutorul calculatorului. Soluția modelului numeric trebuie să fie consistentă, adică, în cazul în care se trece la limită în problema discretizată, să se poată obține soluția problemei continue. În același timp, alegerea metodei numerice trebuie făcută în aşa mod, încât soluția modelului numeric să fie robustă, adică ea să fie puțin sensibilă la o mică schimbare a parametrilor problemei.

Proiectarea algoritmului. Algoritmul permite trecerea de la modelul numeric la programul de calcul. Prin algoritm se subînțelege o succesiune finită de operații elementare, unic determinate, cu ajutorul cărora se poate soluționa problema dată. Orice algoritm întocmit corect posedă următoarele proprietăți:

- **unicitatea**, care implică obținerea unui singur rezultat pentru setul concret de date inițiale ale problemei;
- **generalitatea**, adică posibilitatea aplicării lui nu numai la problema dată ci și la o clasă de probleme de acest tip;
- **finititudinea**. Numărul de operații efectuate asupra datelor inițiale pentru a obține soluția problemei trebuie să fie finit.

De obicei, algoritmul poate fi descris cu ajutorul schemei logice sau al pseudocodului. Aceasta din urmă este o notație simplificată care conține structurile de control din limbajele de programare, dar este mai sărac din punctul de vedere al descrierii datelor.

Numărul de instrucțiuni ale algoritmului constituie *complexitatea algoritmului*. Din mulțimea de algoritmi, destinați rezolvării problemei concrete, trebuie excluși algoritmii nerealizabili (cu complexitate exponențială) și algoritmii neficienți.

Analiza numerică operează cu valori de un diapazon foarte mare, ceea ce implică folosirea datelor de tip real. Aceasta însă aduce la erori de rotunjire, cauzate de reprezentarea aproximativă a datelor inițiale și de calcule approximative în calculator. Prin urmare, alegerea algoritmului se va efectua în baza unor criterii de convergență, de stabilitate și de propagare a erorilor.

Pe parcursul etapei de construire a modelului numeric o importanță deosebită are eficacitatea metodelor numerice alese pentru rezolvarea problemei. De exemplu, dacă modelul conține sisteme de ecuații liniare algebrice, rezolvarea acestora poate fi efectuată prin mai multe metode. Una din cele mai simple metode de rezolvare a unui sistem de ecuații liniare este

metoda Kramer. Algoritmul metodei constă în calculul unui sir de determinanți, urmand ca mai apoi să se calculeze soluția exactă prin formarea unor raporturi ale acestor determinanți. Pe de altă parte, calculul unui determinant de ordinul n se reduce la calculul sumei tuturor produselor posibile a elementelor matricei luate cate unul din fiecare linie și fiecare coloană. Numărul de operații necesar (adunari, înmulțiri etc) pentru calculul unui determinant este proporțional cu $n(n+1)!$. Atunci când avem un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute calculul determinantului nu este o problemă complicată. Cu totul alta este situația când determinantul este de ordinul treizeci sau, sa zicem, patruzeci. Chiar și pentru calculatoarele de performanță efectuarea acestor operații cere sute și mii de ani de calcul continuu. Pe de altă parte, metoda Gauss de rezolvare a unui sistem de ecuații are complexitatea $O(n^3)$, iar complexitatea metodelor iterative este $O(n^2)$. Acest exemplu demonstrează necesitatea unei analize minuțioase a metodelor de calcul care vor fi utilizate în modelul numeric.

Program calculator. În această etapă algoritmul proiectat se programează într-un limbaj de nivel înalt. Compilarea acestui program este efectuată de însuși calculatorul.

Testarea și verificarea programului. Destinația acestei etape constă în înălțarea tuturor greșelilor, care au apărut în procesul transformării algoritmului într-un program pentru calculator. Corectitudinea programului se verifică cu ajutorul unor probleme-teste.

Soluția numerică și interpretarea rezultatelor. Programul testat fiind aplicat la rezolvarea problemei inițiale permite obținerea soluției numerice pe calculator. Rezultatele obținute în această etapă se vor analiza în corespondere cu obiectivul urmărit.

1. ELEMENTE DE ANALIZĂ A ERORILOR

1.1. Surse de erori

În procesul modelării numerice a unei probleme apar erori, care pot avea o influență esențială asupra soluției finale. Astfel, apare necesitatea cunoașterii acestora și a gradului lor de influență asupra soluției problemei. În general, erorile pot fi grupate în modul următor: erori inerente, erori de metodă, erori de rotunjire și de trunchiere.

Erori inerente. Aceste erori apar în procesul construirii modelului matematic al problemei în cauză, deoarece orice model matematic este doar o aproximare a modelului real, fizic. Cu cât modelul matematic este mai detaliat, cu atât el va fi mai adecvat procesului aflat în studiu. Pe de altă parte, erori de acest tip apar și din cauza datelor inițiale ale problemei, care fiind incorecte sau determinante cu o precizie redusă, pot aduce la soluții complect greșite, indiferent de faptul că de mult modelul matematic corespunde celui fizic.

Erori de metodă. Aceste erori apar în urma utilizării metodelor numerice în rezolvarea modelului matematic. Orice metodă numerică este caracterizată prin eroarea sa, care, de regulă, depinde de un parametru (de exemplu, pasul de discretizare), schimbarea căruia poate reduce influența erorilor de acest tip asupra rezultatului final. De obicei această eroare este de câteva ori mai mică decât erorile din datele inițiale.

Erorile de rotunjire și de trunchiere apar datorită reprezentării aproximative a numerelor reale în calcule. Dacă în calcule numerice trebuie să folosim numărul π , îl putem scrie 3.14, 3.14159 sau 3.1415926 etc. Nici un număr irațional nu poate fi reprezentat printr-un număr finit de cifre. Chiar și unele numere raționale nu au o reprezentare exactă (de exemplu, numărul $1/3$ poate fi scris ca 0.3333... - o succesiune a cifrei 3 la partea zecimală). Majoritatea metodelor numerice (de exemplu, calculul unei sume cu un număr infinit de termeni) necesită un număr infinit de operații aritmetice pentru a ajunge la soluția exactă a problemei, ceea ce e imposibil, și atunci suntem nevoiți să ne mărginim la un număr finit de operații. Ca rezultat, apare eroarea de trunchiere.

1.2. Erori absolute și erori relative

Să notăm prin x^* valoarea aproximativă pentru numărul exact x . Dacă $x^* < x$, atunci spunem că x^* approximează numărul x prin lipsă, iar în cazul în care $x^* > x$, atunci approximarea lui x prin x^* este prin adăos. De obicei, în

procesul de calcul se înlocuiește valoarea exactă (care, în caz general, nu este cunoscută) prin valoarea sa aproximativă. În felul acesta comitem o eroare. Expresia

$$\Delta(x^*) = |x - x^*|$$

poartă numele de *eroare absolută*.

Eroarea absolută nu caracterizează suficient de bine precizia cu care se obțin rezultatele. Astfel, de exemplu, dacă $x = 1$ și $x^* = 2$, atunci eroarea absolută $\Delta(x^*) = 1$ indică o precizie slabă a măsurării. Dacă $x = 10^{10} + 1$ iar $x^* = 10^{10}$, aceeași eroare absolută $\Delta(x^*) = 1$ caracterizează o precizie remarcabilă. Aceasta ne conduce la noțiunea de *eroare relativă* $\delta(x^*)$ care reprezintă raportul dintre eroarea absolută și valoarea aproximativă, adică

$$\delta(x^*) = \frac{|x - x^*|}{|x^*|},$$

dacă $x^* \neq 0$.

În exemplele de mai sus erorile relative sunt egale cu 0.5 și respectiv cu 10^{-10} , ceea ce confirmă buna precizie a măsurării în cazul al doilea.

Dacă se cunosc numerele x și x^* , atunci calculul erorii absolute și relative este imediat. Dar de obicei, în majoritatea cazurilor se cunoaște numai aproximarea x^* . De aceea se introduce noțiunea de margine (sau limită) a erorii absolute și relative.

Numărul pozitiv r este o *margine* (sau o *limită*) a erorii absolute a numărului aproximativ x^* dacă

$$|x - x^*| \leq r,$$

iar numărul pozitiv r este o limită a erorii relative dacă

$$\frac{|x - x^*|}{|x^*|} \leq r$$

Notăția $x^* = x^* \pm \varepsilon$ semnifică întotdeauna faptul că $|x - x^*| \leq \varepsilon$, adică

$$x^* - \varepsilon \leq x^* \leq x^* + \varepsilon.$$

Orice număr aproximativ x^* poate fi scris sub forma

$$x^* = c_1 \cdot 10^m + c_2 \cdot 10^{m-1} + \dots + c_n \cdot 10^{m-n+1},$$

unde c_1, c_2, \dots, c_n sunt cifrele zecimale ale numărului aproximativ x^* . Se știe că zerourile de la începutul numărului servesc numai pentru a fixa poziția virgulei zecimale. Cifrele cuprinse între prima și ultima cifră diferită de zero sau care indică ordinea păstrată în calcule se numesc *cifre semnificative*.

Exemplu. Numărul aproximativ

$$x^* = 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} = 36.058$$

are cinci cifre semnificative, iar numărul

$$y^* = -(2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + 0 \cdot 10^{-5}) = -0.00280$$

are trei cifre semnificative (primele trei zerouri sunt nesemnificative). Dacă mărimea erorii x^* nu depășește $0.5 \cdot 10^{-1}$, se spune că numărul aproximativ x^* are 7 cifre zecimale corecte.

Dacă numărul aproximativ se scrie fără a indica limita erorii absolute, atunci în scrierea lui se consideră că toate cifrele sunt corecte. În acest caz zerourile de la sfârșitul numărului nu se elimină.

De exemplu, numerele 0.0345 și 0.034500 sunt diferite; eroarea absolută a primului număr nu depășește 0.0001, iar eroarea absolută al celui de al doilea număr este mai mică decât 10^{-6} .

Exemplu. 0.010224 ± 0.000004 are cinci zecimale corecte și patru cifre semnificative; 0.001234 ± 0.000006 are patru zecimale corecte și două cifre semnificative (deoarece valoarea maximă a numărului poate fi 0.001240, iar cea minimă 0.001228 și deci ultimele două zecimale sunt nesigure).

Numărul de zecimale corecte ne sugerează o idee despre mărimea erorii absolute, în timp ce numărul de cifre semnificative ne sugerează o idee sumară despre mărimea erorii relative.

1.3. Propagarea erorilor

În procesul de calcul aproximativ eroarea se propagă de la o operație la alta. Fie date valorile aproximative x^* și y^* ale valorilor exacte x și y , afectate de erorile ε_x și ε_y , adică fie

$$x^* = x^* \pm \varepsilon_x, \quad y^* = y^* \pm \varepsilon_y.$$

Atunci avem

$$\begin{aligned}x^* - \varepsilon_x + y^* - \varepsilon_y &\leq x + y \leq x^* + \varepsilon_x + y^* + \varepsilon_y, \\x^* + y^* - (\varepsilon_x + \varepsilon_y) &\leq x + y \leq x^* + y^* + (\varepsilon_x + \varepsilon_y)\end{aligned}$$

sau

$$x + y = x^* + y^* \pm (\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

În mod analog ca și în cazul adunării, se va obține

$$x - y = x^* - y^* \pm (\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

Deci la adunare sau scădere, marginea erorii absolute a rezultatului este dată de suma marginilor pentru erorile absolute ale termenilor.

Se poate demonstra, de asemenea, că la înmulțire și împărțire marginile erorilor relative ale factorilor se adună.

Fie acum date două numere pozitive x^* și y^* aproximativ egale, afectate de erorile absolute $\Delta(x^*)$ și $\Delta(y^*)$. Atunci

$$\delta(x^* - y^*) = \frac{\Delta(x^* - y^*)}{|x^* - y^*|} \leq \frac{\Delta(x^*) + \Delta(y^*)}{|x^* - y^*|},$$

și deci, eroarea relativă a diferenței poate fi destul de mare, dacă diferența $|x^* - x|$ este foarte mică. Aceasta ne arată că exactitatea relativă poate fi foarte slabă atunci când efectuăm diferența a două numere aproximativ egale.

Exemplu. Vom considera numerele aproximativ egale $x = 0.1234 \pm 0.5 \cdot 10^{-4}$ și $y = 0.1233 \pm 0.5 \cdot 10^{-4}$, atunci $x - y = 0.0001 \pm 0.0001$ și marginea erorii este tot atât de mare ca și estimarea rezultatului.

Acest fenomen poartă denumirea de *anulare prin scădere sau de neutralizare a termenilor*. Cele mai serioase erori care apar în calculele efectuate cu ajutorul calculatorului electronic se datorează acestui fenomen.

De câte ori este posibil se evită neutralizarea termenilor prin rescrierea formulelor de calcul sau prin alte schimbări în algoritm. De exemplu, o expresie de forma $(\alpha + \gamma)^2 - \alpha^2$ poate fi scrisă sub forma $\gamma \cdot (2\alpha + \gamma)$, iar expresia

sub forma

$$\frac{\sqrt{\alpha + \gamma} - \sqrt{\alpha}}{b}$$

$$\frac{\gamma}{b(\sqrt{\alpha + \gamma} + \sqrt{\alpha})}$$

Vom mai da un exemplu în care se arată cum poate fi evitată anularea prin scădere. Ecuția de gradul doi

$$x^2 + 1000.01 \cdot x - 25245315 = 0$$

are una dintre rădăcini egală cu 0.0025245. Dacă calculăm rădăcina cu ajutorul formulei

$$x_1 = 0.5 \cdot (-1000.01 + \sqrt{(1000.01)^2 + 4 \cdot 25245315}),$$

efectuând calculele cu opt cifre semnificative, se va obține

$$x_1 = 0.5 \cdot (-1000.01 + 1000.0150) = 0.0025.$$

Rezultatul obținut are numai două cifre corecte, cu toate că radicalul de gradul doi a fost calculat cu opt cifre semnificative.

Dacă vom face calculul aceleiași rădăcini utilizând formula

$$x_1 = 2 \cdot 2524315 / (1000.01 + \sqrt{(1000.01)^2 + 4 \cdot 25245315}) = 0.0025245,$$

se va obține rezultatul exact.

Precizia calculelor numerice este criteriul cel mai eficient pentru alegerea metodelor de calcul. Analiza erorii dintr-un rezultat numeric este o chestiune esențială în orice calcul, fie că este executat manual, fie de un calculator. Cu toate performanțele calculatoarelor electronice, precizia rezultatelor este influențată de erorile de rotunjire, metodice sau de trunchiere.

Datorită proprietăților constructive ale calculatoarelor electronice este necesară limitarea numărului cifrelor semnificative. Un exemplu ilustrativ este furnizat de numărul rațional $1/10$, care se folosește de multe ori ca dimensiune a pasului de discretizare în mulți algoritmi. În sistemul binar (utilizează pentru reprezentarea numerelor cifrele 0 și 1) frația $1/10$ are o reprezentare infinită $0.00011001100\dots$. În calcule trebuie să ne mărginim la un număr finit de cifre semnificative. Deci dacă se adună de zece ori numărul care reprezintă o aproximare binară a numărului $1/10$, rezultatul nu va fi egal exact cu unitatea.

1.4. Numere cu virgulă mobilă

Este bine cunoscut că pe majoritatea calculatoarelor moderne numerele reale se reprezintă cu ajutorul virgulei mobile. Un număr scris în virgulă mobilă este compus dintr-o fracție, numită *mantisă*, și un întreg, numit *exponent*. Deci

$$x = \pm m \cdot \beta^e,$$

unde β este baza sistemului de numerație (binar, octal sau hexazecimal), m este mantisa numărului și e este exponentul, afectat de semn. Fracția m satisfacă

$$\frac{1}{\beta} \leq m < 1$$

și are forma

$$m = \frac{d_1}{\beta^1} + \frac{d_2}{\beta^2} + \dots + \frac{d_t}{\beta^t},$$

unde numerele întregi d_1, d_2, \dots, d_t , numite cifre, verifică inegalitățile:

$$0 \leq d_i \leq \beta - 1, \quad i=1,2,\dots,t \text{ și } L \leq e \leq U.$$

Dacă prima cifră din mantisă este diferită de zero, atunci numărul reprezentat în virgulă mobilă se numește *număr normalizat*.

Prin urmare, *sistemul de calcul cu numere cu virgulă mobilă* este o mulțime $F(\beta, t, L, U)$ caracterizată de patru parametri: baza β , precizia calculatorului t și intervalul exponenților $[L, U]$.

F este o mulțime finită care conține $2 \cdot (\beta - 1) \cdot \beta^{t-1} (U - L) + 1$ numere. Ea nu poate reproduce oricât de detaliat structura continuă a numerelor reale. Mai mult, în general nu putem reprezenta în calculator numerele al căror modul depășește cel mai mare element al lui F sau care sunt mai mici în modul decât cel mai mic număr din F .

Mantisă m poate fi scrisă

$$m = \beta^{-t} \cdot (d_1 \cdot \beta^{t-1} + d_2 \cdot \beta^{t-2} + \dots + d_t),$$

de unde rezultă, că dacă $d_1 \neq 0$, atunci maximul mărimii m este egal cu $1 - \beta^{-t}$, ceea ce corespunde cazului $m_i = \beta - 1, i=1,2,\dots,t$; valoarea minimală va fi β^{-t} și se obține pentru $d_1 = 1, d_2 = d_3 = \dots = d_t = 0$.

Fie x un număr real care nu depășește limitele mulțimii F și $x \neq 0$; în calculator acest număr este reprezentat de numărul cu virgulă mobilă notat $f(x)$, a cărui mantisă m^* se obține din mantisa m a lui x rotunjind-o la t cifre (de aceea spunem că precizia calculatorului este t). Dacă se efectuează

rotunjirea corectă atunci $|m - m^*| \leq 0.5 \cdot \beta^{-t}$. Eroarea relativă în $f(x)$ este $\frac{|f(x) - x|}{|x|} \leq 0.5 \cdot \beta^{1-t}$, deoarece $\frac{|x - x^*|}{|x^*|} = \frac{|m - m^*|}{|m|}$ și $\frac{1}{\beta} \leq m < 1$.

Numărul $\epsilon_M \leq 0.5 \cdot \beta^{1-t}$ se numește *unitatea (de rotunjire a) mașinii*. Efectuând rotunjirea corectă, numărul $f(x)$ este cel mai apropiat element de x , care aparține lui F . Dacă se folosește rotunjirea prin tăiere (se elimină compararea primei cifre neglijate), atunci și $f(x)$ este cel mai apropiat element din F , inferior lui x .

În afară de parametrul ϵ_M în practică sunt răspândiți pe larg încă doi parametri: σ și λ - cel mai mic element pozitiv și elementul maxim al lui F .

Unitatea de rotunjire a mașinii ϵ_M se mai numește *epsilon al mașinii* și este cel mai utilizat parametru ce caracterizează sistemul dat de calcul. Acest parametru ne dă măsura de discretizare a sistemului F care are loc pentru tot intervalul numerelor nenule în virgulă mobilă. Deci distanța dintre numărul $x \in F$ și numărul cel mai apropiat de el în sistemul dat nu e mai mică decât $\epsilon_M \cdot |x| / \beta$ și nu e mai mare decât $\epsilon_M \cdot |x|$ (numai dacă numărul x nu este situat în vecinătatea lui zero).

Exemplu. Fie $\beta = 10, t = 6$ și $L = -100$. Atunci $\epsilon_M = 10^{-5}, \sigma = 10^{-101}$. Între zero și σ nu există nici un număr ce aparține sistemului dat, în timp ce între σ și $10 \cdot \sigma$ sunt 899999 de numere cu virgulă mobilă.

Vom menționa că parametrii $\epsilon_M, \beta, t, U, L, \sigma$ și λ pot fi estimati direct pe calculator, utilizând tehnicele de programare ale acestuia.

2. REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR ALGEBRICE ȘI TRANSCENDENTE

Majoritatea proceselor care se studiază în tehnică, știință și economie sunt neliniare. Aceasta deseori implică rezolvarea următoarei probleme: pentru funcția

$$f: x \rightarrow f(x)$$

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

continuă și derivabilă să se determine rădăcinile reale și complexe adică valorile x_1, x_2, \dots, x_k care satisfac ecuația $f(x) = 0$.

Ecuațiile neliniare de acest tip pot fi de două tipuri: algebrice și transcendentă.

Ecuațiile algebrice sunt aceleia în care funcția $f(x)$ este o funcție polinomială de gradul n . Ecuațiile care conțin și alte funcții se numesc *ecuații transcendentă*. Pentru ecuațiile algebrice de gradul $n > 4$ cu toate că nu dispunem de formule pentru determinarea rădăcinilor lor, totuși în baza teoremei lui D'Alembert, putem afirma că există n rădăcini (în general, complexe). Pentru o ecuație transcendentă, însă, nu mai putem garanta existența soluțiilor.

Metodele de rezolvare a ecuațiilor neliniare pot fi divizate în două grupuri: a) metode directe și b) metode iterative.

Metodele directe permit determinarea soluției ecuației cu ajutorul unei formule. Așa formule avem pentru ecuațiile pătratice, trigonometrice, logaritmice, exponențiale.

În practică, însă, adesea întâlnim ecuații care nu pot fi rezolvate în așa mod și pentru rezolvarea lor se aplică *metode iterative*. Algoritmul determinării soluției ecuației neliniare $f(x) = 0$ cu ajutorul metodelor iterative implică parcurgerea a două etape importante: a) separarea rădăcinilor, care constă în determinarea unui așa interval $[a, b]$ în care este situată o rădăcină reală a ecuației; b) calculul aproximativ al fiecărei rădăcini și evaluarea erorii care s-a comis considerând că separarea deja s-a efectuat.

2.1 Separarea rădăcinilor

Separarea rădăcinilor se poate realiza prin diferite metode. Cele mai des utilizate în practică sunt următoarele două metode de separare:

Metoda grafică. Adeseori ecuația $f(x) = 0$ poate fi adusă la forma echivalentă $\varphi(x) = g(x)$. Rădăcinile ultimei ecuației sunt abscisele punctelor de intersecție ale curbilor $y = \varphi(x)$ și $y = g(x)$. De exemplu, ecuația $2^x - \cos x - 0.5 = 0$ se poate scrie sub forma echivalentă

$2^x - 0.5 = \cos x$. Atunci rădăcinile ei sunt abscisele punctelor de intersecție a curbelor $y = 2^x - 0.5$ și $y = \cos x$ (vezi fig. 2).

Astfel, ecuația dată are două rădăcini reale $\xi_1 \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ și $\xi_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$.

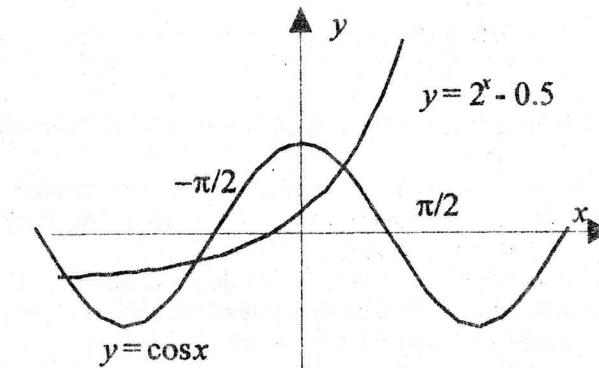


Fig. 2.

Metoda șirului lui Rolle. Metodele analitice de separare a soluțiilor unei ecuații neliniare sunt bazate pe următoarele două teoreme:

Teorema Bolzano-Cauchy. Dacă funcția $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$ și primește la capetele intervalului valori de semn opus, atunci pe intervalul (a, b) există un așa punct ξ încât $f(\xi) = 0$.

Teorema Rolle. Dacă funcția $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$, diferențiabilă pe (a, b) și $f(a) = f(b)$, atunci există un așa punct $\xi \in (a, b)$ pentru care $f'(\xi) = 0$.

Așadar, între două rădăcini reale consecutive ale derivatei $f'(x)$ a funcției $y = f(x)$ există cel mult o rădăcină reală a ecuației $f(x) = 0$. De asemenea între două rădăcini consecutive ale ecuației $f(x) = 0$ există cel puțin o rădăcină a ecuației $f'(x) = 0$.

Fie $a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b$ rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$, așezate în ordine crescătoare. Șirul $f(a), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k), f(b)$ se numește șirul lui Rolle. Ecuația $f(x) = 0$ are atâtea rădăcini reale câte alternanțe de semn prezintă șirul lui Rolle.

Exemplu. Pentru ecuația $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ să se localizeze soluțiile.

R e z o l v a r e. Derivata $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = (x^2 - 1)(4x - 3)$ se anulează pentru $x = -1, x = 3/4, x = 1$ și deci șirul lui Rolle este următorul:

x	-2	-1	$3/4$	1	2
y	7	-6	-1.98	-2	3

Prin urmare avem două alternanțe de semn, deci ecuația dată are pe intervalul $(-2, 2)$ două rădăcini reale $\xi_1 \in (-2, -1)$ și $\xi_2 \in (1, 2)$.

2.2 Calculul rădăcinii reale prin metoda înjumătățirii intervalului

Să considerăm ecuația $f(x) = 0$, unde funcția $f(x)$ este continuă pe intervalul $[a, b]$, are o singură rădăcină reală în acest interval și $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Calculăm $c = (a + b)/2$ - jumătatea intervalului $[a, b]$. Dacă $f(c) = 0$, atunci c este chiar rădăcina căutată. Dacă nu, atunci rădăcina reală se găsește într-unul din intervalele $[a, c]$ sau $[c, b]$, acolo unde funcția ia valori de semne contrare la capetele intervalului. Fie acesta-i notat din nou cu $[a, b]$, unde:

$$a = \begin{cases} c, & \text{sgn } f(a) = \text{sgn } f(c) \\ a, & \text{sgn } f(a) \neq \text{sgn } f(c) \end{cases}, \quad b = \begin{cases} c, & \text{sgn } f(b) = \text{sgn } f(c) \\ b, & \text{sgn } f(b) \neq \text{sgn } f(c) \end{cases}$$

Fie $\epsilon > 0$ marginea superioară a erorii absolute, care se admite. Dacă $|b - a| < 2\epsilon$, atunci c aproximează rădăcina ξ cu eroarea dorită, deoarece $|c - \xi| < \epsilon$.

Prezentăm în continuare o procedură de calcul după metoda înjumătățirii intervalului

{*****}

{ [a,b]-segmentul pe care se află soluția ecuației $f(x)=0$; Eps-precizia cu care se determină soluția; x- soluția numerică a ecuației; Fx - valoarea funcției $f(x)$ în punctul x; k-numărul de divizări a segmentului}

{*****}

```
Procedure Bisect(a,b,Eps:Real;var x,Fx:Real;var k:Integer);
Var c,d:Real;
Begin
```

```
c:=a;
If f(a)<0 Then c:=b;
d:=a+b-c;
k:=0;
Repeat
  x:=c+(d-c)/2;
  k:=k+1;
  fx:=f(X);
  If fx=0 Then Exit;
  If fx>0 Then c:=x Else d:=x;
Until (Abs(c-d)<Eps);
End;
```

2.3. Metoda aproximățiilor succesive

Ecuția $f(x) = 0$ o punem sub forma echivalentă $x = \varphi(x)$. Această reprezentare se mai numește *funcție iterativă*. Plecând de la o valoare inițială arbitrară x_0 generăm șirul $\{x_k\}$ (funcția generică) după regula:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

adică

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(x_0) \\ x_2 = \varphi(x_1) \\ \vdots \\ x_n = \varphi(x_{n-1}) \end{cases}$$

Din punct de vedere geometric, rădăcina reală ξ este abscisa punctului de intersecție a curbei cu dreapta $y = x$. Modul cum șirul aproximățiilor succesive $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ conduce spre soluția exactă este ilustrat în fig.3 și fig. 6 (aici pentru primul caz $0 < \varphi'(x) < 1$, iar în al doilea $-1 < \varphi'(x) < 0$). Divergența metodei este ilustrată pe fig. 5 ($\varphi'(x) < -1$) și în fig. 4 ($1 < \varphi'(x)$).

O condiție suficientă de convergență este dată de următoarea:

Teorema 2.1 Fie funcția $\varphi(x)$ definită pe intervalul $[a, b]$ și $\varphi(x) \in [a, b]$ pentru orice $x \in [a, b]$. Dacă funcția $\varphi(x)$ este derivabilă și derivata sa $\varphi'(x)$ va satisface inegalitatea $|\varphi'(x)| \leq \alpha < 1$, oricare ar fi $x \in [a, b]$ atunci ecuația $x = \varphi(x)$ are în $[a, b]$ o singură rădăcină reală ξ , și deci putem

forma şirul de iterare $x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ după regula $x_{k+1} = \phi(x_k)$, astfel încât $x_k \in [a, b]$ pentru $k = 0, 1, 2, \dots$ și acest şir converge către rădăcina ξ . În plus, eroarea este evaluată prin relația

$$|x_k - \xi| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |x_k - x_{k-1}| \leq \frac{\alpha^k}{1-\alpha} |x_1 - x_0|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Dacă $-1 < \phi'(x) < 0$, atunci, $|x_k - \xi| \leq |x_k - x_{k-1}|, \quad \forall k \geq 1$.

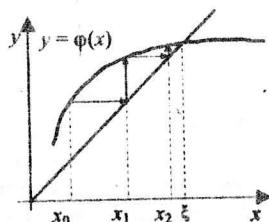


Fig. 3

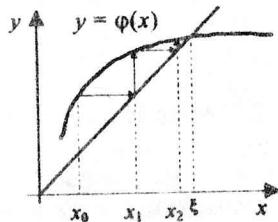


Fig. 4

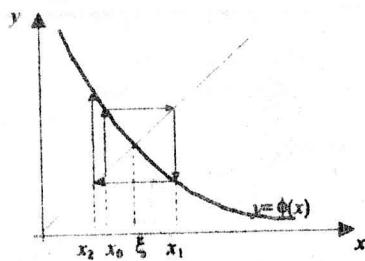


Fig. 5.

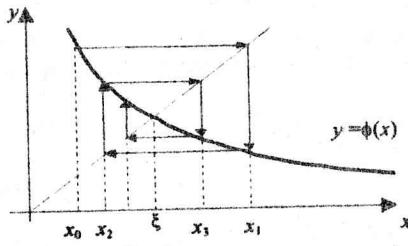


Fig. 6.

Exemplu. Pentru ecuația $x^3 - 2x - 9 = 0$ să se determine funcția generică de calcul al rădăcinii ecuației după metoda aproximăriilor succesive.

R e z o l v a r e. Prin metoda grafică se stabilește că ecuația admite o singură rădăcină reală în intervalul $(2, 3)$. Rescriem ecuația sub formă echivalentă

$$x = \sqrt[3]{2x + 9}.$$

Pentru a verifica condiția de convergență, calculăm derivata

$$\phi'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+9)^2}}.$$

Condiția de convergență $|\phi'(x)| < 1$ este îndeplinită pentru intervalul $(2, 3)$ și deci şirul de iterare

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{2x_k + 9}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

cu valoarea inițială (de start) $x_0 \in (2, 3)$ converge către rădăcina exactă $\xi \in (2, 3)$. Pentru determinarea rădăcinii aproximative x cu eroarea $\epsilon > 0$ procesul de calcul îl vom opri când

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot |x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon.$$

Acest criteriu pentru determinarea calculelor necesită aprecierea parametrului subunitar α , care în general nu se cunoaște.

Procedura care realizează metoda aproximăriilor succesive în limbajul Turbo Pascal este următoarea:

```
{*****
{x0 - valoarea initială a radacinii; x1 - valoarea aproximativa a
solutiei ecuației; Fi - numele functiei din ecuația x=Fi(x);
k-numarul de iteratii necesar pentru obtinerea exactitatii date;
Nmax - numarul maximal admisibil de pasi; Eps - eroarea cu care se
determina solutia; Tf - variabila tip Boolean care indica daca sa
determinat sau nu solutia ecuației cu precizia data}
{*****}
```

```
Procedure Siter(var x1:Real; x0,Eps:real; Nmax:Integer;
var K:Integer;var Tf:Boolean);
```

```
Var y,x:Real;
```

```
Begin
```

```
  k:=0; y:=x0;
```

```
Repeat
```

```
  x:=y;
```

```
  y:=Fi(x);
```

```
  k:=k+1;
```

```
Until (Abs(y-x)<Eps) or (k>Nmax);
```

```
Tf:=k<Nmax;
```

```
x1:=x;
```

```
End;
```

2.4. Metoda lui Newton (tangentelor)

Fie ecuația algebrică sau transcendentă $f(x) = 0$ care admite o singură rădăcină reală ξ în intervalul $[a, b]$. Presupunem în plus că derivatele $f'(x)$ și $f''(x)$ păstrează un semn constant pe intervalul $[a, b]$.

Metoda lui Newton este definită de următoarea formulă:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

unde x_0 este aproximarea inițială a rădăcinii din intervalul $[a, b]$. Punctul x_{k+1} este abscisa punctului de intersecție a tangentei dusă la curba $y = f(x)$ în punctul x_k cu axa Ox . De aceea această metodă se mai numește metoda tangentelor.

Sensul geometric al metodei poate fi urmărit (în funcție de comportarea derivatelor funcției $y = f(x)$) în fig. 7-10.

Teorema 2.2. Fie funcția $f(x)$ definită și de două ori derivabilă pe intervalul $[a, b]$. Presupunem că există $0 < m < \infty$, $0 < M < \infty$ astfel încât

$$|f'(x)| \geq m, \quad |f''(x)| \leq M, \quad \forall x \in [a, b]$$

și $\xi \in [a, b]$ este rădăcina ecuației $f(x) = 0$. Atunci șirul de iterare determinat de relația (2.2) converge către ξ dacă aproximarea inițială x_0 este aleasă într-o vecinătate a rădăcinii ξ . Eroarea este estimată de relația

$$|x_k - \xi| \leq c \cdot |x_k - x_{k-1}|^2, \quad c = \frac{M}{2m}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Metoda lui Newton este un caz particular al metodei approximațiilor succesive pentru funcția de iterare

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Dacă aproximarea inițială a soluției în metoda Newton a fost aleasă nereușit (de exemplu, departe de soluția ξ), pot apărea situații în care procesul iterational se comportă "rău". În fig. 11 sunt reprezentate cazuri patologice pentru metoda Newton.

În cazul a), datorită faptului că $f'(x_0) = 0$, următoarea aproximatie x_1 nu poate fi calculată. În cazul c) apare fenomenul oscilării soluției. În sfârșit, cazul când metoda tangentelor diverge poate fi urmărit în fig. 11 b).

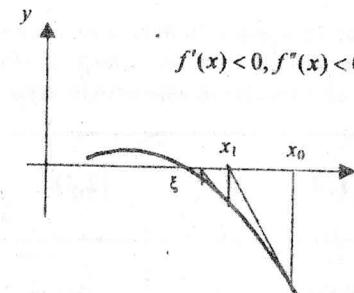


Fig. 7

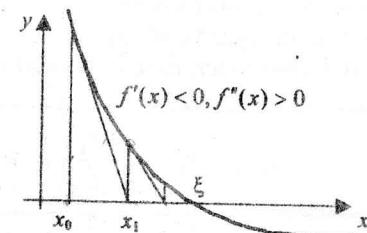


Fig. 8

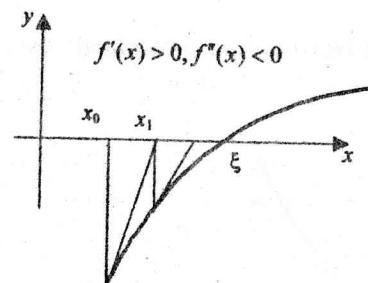


Fig. 9

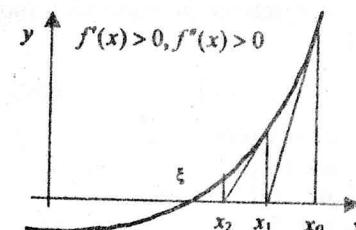
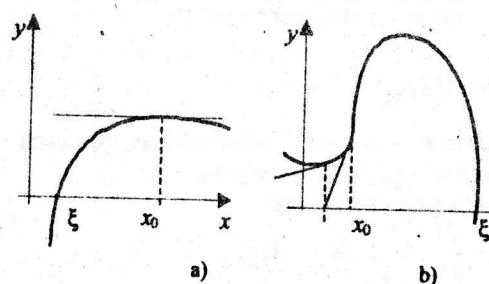
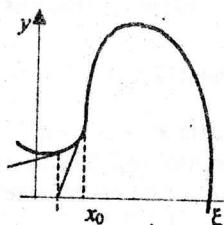


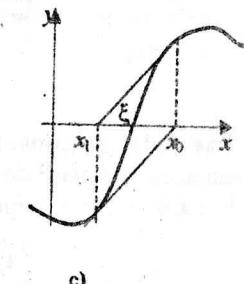
Fig. 10



a)



b)



c)

Fig. 11

Se poate demonstra că pentru ca procesul iterational (2.1) să fie convergent este necesar ca din valorile a și b să fie aleasă în calitate de soluție inițială x_0 acea pentru care are loc inegalitatea $f(x) \cdot f''(x) > 0$.

Deseori pentru micșorarea volumului de calcule la aplicarea metodei Newton se utilizează o modificare a acestei metode, care se numește *metoda Newton-Kantorovici*, funcția generică de calcul a căreia este următoarea

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Reducerea volumului de calcule se datorează faptului că la fiecare pas nou nu este nevoie de calculat valoarea derivatei, ea fiind calculată numai în punctul x_0 . De reținut, că viteza de convergență a acestei metode este mai mică decât în cazul algoritmului (2.2).

Interpretarea geometrică a metodei Newton-Kantorovici este dată în fig. 12.

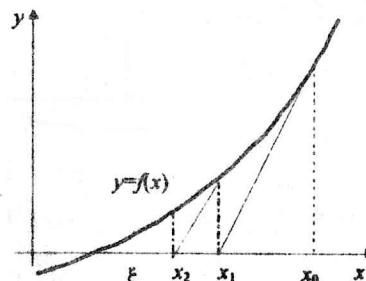


Fig. 12

Exemplu. Se consideră ecuația $x^3 - 3 \cdot x \cdot e^{-x} - 1 = 0$. Să se găsească rădăcina acestei ecuații de pe intervalul $[1, 1.5]$ cu precizia $\epsilon = 10^{-3}$.

R e z o l v a r e. Funcția generică de calcul este

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

pentru $f(x_k) = x_k^3 - 3 \cdot x_k \cdot e^{-x_k} - 1$ și $f'(x_k) = 3x_k^2 + 3x_k \cdot e^{-x_k} - 3e^{-x_k}$. Așa cum $f(1.5) \cdot f''(1.5) = 12.79 > 0$, în calitate de aproximare inițială se va lua valoarea $x_0 = 1.5$.

Rezultatele calculelor sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Deoarece $|x_3 - x_2| < \epsilon$, calculele se opresc, considerând soluția ecuației numărul $\xi = 1.2742$.

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$f(x_k)/f'(x_k)$
0	1.50000	1.37091	7.08467	0.19350
1	1.30652	0.16883	5.36981	0.03144
2	1.27506	0.00415	5.10790	0.00081
3	1.27424	0.000001	5.10111	0.00000

În încheiere urmează procedura pentru calculul rădacinii unei ecuații nelineare cu o singură necunoscută prin metoda lui Newton:

```

{*****
*x0 - valoarea initială a radacinii; x1 - valoarea aproximativa a
solutiei ecuației; F- numele functiei din ecuația F(x)=0; F1 - numele
derivatei F'(x); K-numarul de iteratii necesar pentru obtinerea exactitatii date; Nmax - numarul maximal admisibil de pasi;
Eps - precizia cu care se determina solutia; Ier - codul corectitudinii: daca Ier = 0 atunci solutia a fost gasita cu precizia Eps;
daca Ier = 1 atunci nu are loc convergenta catre solutie; daca
Ier = 2, atunci precizia prescrisa nu poate fi atinsa dupa Nmax pasi
{*****}
Procedure Newton(var x1:Real; x0,Eps:real; Nmax:Integer;
var K:Integer;var ier:Integer);
Label Et;
Var d0,d1,y,x:Real;
Begin
d0:=1e30;
x:=x0; k:=0;
Et:
x1:=x-f(x)/f1(x);
d1:=Abs(x1-x);
If d1<Eps Then
Begin
ier:=0; Exit
End
Else

```

```

Begin
If d1<d0 Then
Begin
If k>Nmax Then
Begin
Ier:=2; Exit
End
Else
k:=k+1; x:=x1; d0:=d1;
goto Et
End
Else
Begin
Ier:=1; Exit
End
End;

```

2.5. Metoda coardelor și metoda secantelor

Ideea metodei coardelor, mai numită și metoda poziției false, constă în aproximarea funcției $f(x)$ pe intervalul $[a, b]$, în care ecuația $f(x) = 0$ are o rădăcină izolată printr-o dreaptă.

Fie $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$, derivatele de ordinul unu și doi își păstrează semnul pe acest interval și $f(a) \cdot f(b) < 0$, de exemplu, $f(b) < 0$, $f(a) > 0$ (fig. 14). Vom uni punctele $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$ printr-o coardă. Această coardă intersectează axa Ox în punctul x_1 . Prin urmare, putem considera acest punct ca o primă aproximare a rădăcinii ξ . Să determinăm abscisa x_1 .

Ecuația coardei este ecuația dreptei, care trece prin două puncte date

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{f(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

Luând în considerație faptul că această coardă intersectează axa Ox în punctul x_1 și deci $f(x_1) = 0$, obținem:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b)-f(a)} \cdot (b-a).$$

Trecem la determinarea următoarei aproximării. Observăm, că $f(x_1) < 0$ și deoarece $f(x_1) \cdot f(a) < 0$ concludem, că soluția ecuației se află pe intervalul $[a, x_1]$. Trasind o coardă nouă, de acum prin punctele $(a, f(a))$ și $(x_1, f(x_1))$, obținem punctul de intersecție x_2 a coardei cu axa Ox și a.m.d.

Cercetând graficele din figurile 13-16, se poate observa că din punctele $(a, f(a))$ și $(b, f(b))$ pe tot parcursul de calcul al rădăcinii ecuației nemîșcat este acel punct în care semnul funcției coincide cu semnul derivatei de ordinul doi.

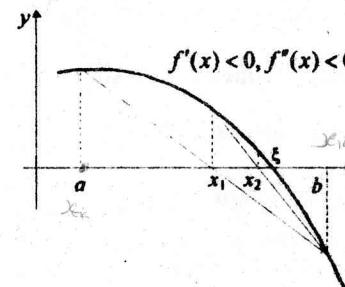


Fig. 13

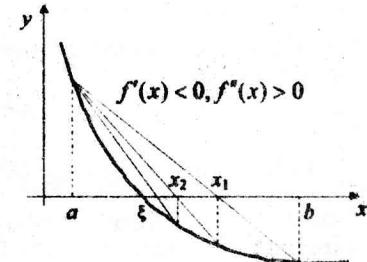


Fig. 14

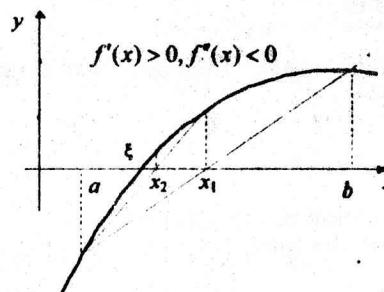


Fig. 15

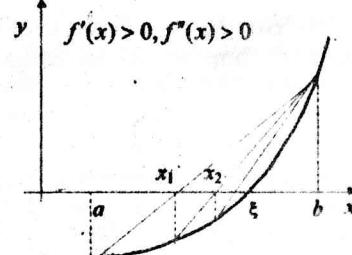


Fig. 16

Atunci algoritmul metodei coardelor constă în calculul iterativ după formulele:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(a)}(x_k - a), & k = 0, 1, \dots, x_0 = b; \\ x_k - \frac{f(x_k)}{f(b) - f(x_k)}(b - x_k), & k = 0, 1, \dots, x_0 = a \end{cases} \quad (2.6)$$

Prima formulă se utilizează în cazul, în care $f'(a) > 0, f''(a) > 0$ sau $f'(a) < 0, f''(a) < 0$, în timp ce a doua – cind $f'(b) > 0, f''(b) > 0$ sau $f'(b) < 0, f''(b) < 0$.

Aplicind aceste formule, obținem pentru primul caz un șir mărginit și monoton descrescător

$$a < \xi < \dots < x_k < \dots < x_0 < b,$$

iar într-al doilea – șirul mărginit și monoton crescător

$$a < x_0 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < \xi < b.$$

În ambele cazuri există limitele acestor șiruri, și anume:

$$\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k.$$

Procesul de aproximare a rădăcinilor ecuației, fiind un proces iterativ, continuă atât timp, cât are loc inegalitatea

$$|x_{k+1} - x_k| \geq \epsilon,$$

unde ϵ este precizia de aproximare a rădăcinii ecuației $f(x) = 0$.

Metoda secantelor poate fi dedusă din metoda lui Newton utilizând relația

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}. \quad (2.7)$$

Obținem

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.8)$$

Pentru startul iterărilor în metoda secantelor avem nevoie de două aproximări inițiale x_0 și x_1 . Valoarea x_{k+1} este abscisa punctului de intersecție dintre secanta care trece prin punctele $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ și $(x_k, f(x_k))$; de aici și denumirea metodei. La fiecare pas nou în metoda secantei se calculează o singură valoare nouă pentru funcția $f(x)$. Formula (2.8) se mai poate scrie sub forma

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_kf(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})},$$

care nu se recomandă la programare, deoarece dacă $f(x_k) \cdot f(x_{k-1}) > 0$ și $x_k \approx x_{k-1}$, atunci poate avea loc o neutralizare a termenilor.

Metoda coardelor își găsește aplicațiile într-un algoritm, numit *metoda combinată a coardelor și tangentelor*. Ideea acestei metode constă în următoarele. Dacă funcția $f(x)$ ia valori de semn diferit la extremitățile intervalului $[a,b]$, iar derivatele ei de ordinul unu și doi nu-și schimbă semnele în acest domeniu, apoi aplicarea concomitentă a metodei Newton și coardelor generează două șiruri, unul dintre care este monoton descrescător, celălalt fiind monoton crescător. Limitele acestor șiruri este unul și același număr: rădăcina ξ a ecuației $f(x) = 0$. În încheierea acestui paragraf se prezintă funcția COMBI în limbajul Turbo-Pascal pentru calculul rădăcinii unei ecuații neliniare pe segmentul dat $[a,b]$ aplicând algoritmul combinat al coardelor și secantelor.

{*****}
 {x - valoarea aproximativa a radacinii, calculata dupa metoda coardelor;
 x1 - valoarea aproximativa a solutiei ecuatiei, calculata dupa metoda tangentelor; [a,b] - intervalul in care se afla o solutie unica a ecuatiei; F - numele functiei din ecuatia $F(x)=0$; Fd -numele derivatei $F'(x)$; Num - numarul de iteratii necesar pentru obtinerea exactitatii date; Eps - precizia cu care se determina solutia; Nmax - numarul maximul admisibil de pasi}
 {*****}

{*****}

```

Function Combi(a,b,Eps:real;Nmax:integer):Real;
Var FA,FX,FB,x,xt:Real;Num:Integer;
Begin
  FA:=f(a); FB:=f(b); Num:=0;
  x:=(a-b)*FA/(FB-FA); {calculul solutiei initiale}
  FX:=f(x);
  If (FA*FX<=0) Then
    Begin
      xt:=A;
      Repeat
        x:=x-(x-a)*FX/(FX-FA);
        {calculul dupa formula coardelor}
        FX:=f(x);
        xt:=xt-f(xt)/df(xt);
        {calculul dupa formula tangentelor}
        Num:=Num+1;
      Until (Abs(x-xt)<Eps) Or ( Num>Nmax);
    End
  Else
    Begin
      xt:=b;
      Repeat
        x:=(b-x)*FX/(FB-FX);
        {calculul dupa formula coardelor}
        FX:=f(x);
        xt:=xt-f(xt)/df(xt);
        {calculul dupa formula tangentelor}
        Num:=Num+1;
      Until ( Abs(x-xt)<Eps) Or ( Num>Nmax)
    End;
  Combi:=(x+xt)/2
End;

```

LUCRAREA DE LABORATOR NR. 1

1. Scopul lucrării

1) Să se separe toate rădăcinile reale ale ecuației $y = f(x)$
este o funcție reală de variabilă reală.

- 2) Să se determine o rădăcină reală a ecuației date cu ajutorul metodei înjumătățirii intervalului cu o eroare mai mică decât $\epsilon = 10^{-2}$.
- 3) Să se precizeze rădăcina obținută cu exactitatea $\epsilon = 10^{-6}$, utilizând:
 - metoda aproximățiilor succesive;
 - metoda tangentelor (Newton);
 - metoda secantelor.
- 4) Să se compare rezultatele luând în considerație numărul de iterații, evaluările pentru funcții și derivată.

2. Ecuațiile propuse spre rezolvare

1. $\cos x + x + 1 = 0$; 2. $x^3 - 30x - 40 = 0$; 3. $\ln(x+1) - 4x = 0$;
4. $x^3 - 25x + 19 = 0$; 5. $e^x + 3x = 0$; 6. $x^3 - 23x - 42 = 0$;
7. $\sqrt{x+1} - 1/x = 0$; 8. $x^3 + 34x + 23 = 0$; 9. $x + \ln x - 2 = 0$;
10. $x^3 - 29x + 34 = 0$; 11. $2x - e^{-x} = 0$; 12. $x^3 - 26x + 43 = 0$;
13. $\lg(1+x) + x - 15 = 0$; 14. $x^3 + 25x - 37 = 0$; 15. $(2-x)e^x - 0.5 = 0$;
16. $x^3 - 12x + 9 = 0$; 17. $(x+3)^3 - \cos x = 0$; 18. $x^3 + 13x - 1 = 0$;
19. $2^x + 3x - 0.5 = 0$; 20. $x^3 - 37x - 52 = 0$; 21. $x^3 - 26x + 43 = 0$;
22. $x^2 - \ln(x+1) = 0$; 23. $x^3 + 12x + 5 = 0$; 24. $e^{-x} \sin x + 1 = 0$;
25. $x^3 - 15x - x^2 + 19 = 0$; 26. $\cos x + 2x - 15 = 0$; 27. $x^3 - 5x - 9 = 0$;
28. $5^x - 7x - 32 = 0$; 29. $x^3 + 2x \cos x - 28 = 0$; 30. $2(x-1)^2 - e^x = 0$;
31. $x^3 + 5x^2 - 41x \sin x - 25 = 0$; 32. $\lg(2x+3) + 2x - 11 = 0$;
33. $x^3 - 25x + 19 = 0$; 34. $\sqrt{\lg(x+22)} - x = 0$; 35. $x^3 - 3xe^x + 34 = 0$;
36. $x^2 + 5 \sin x = 0$; 37. $x^3 - 2 \ln(5x+1) - 21 = 0$.

3. REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

3.1. Elemente de analiză matricială

Pentru început vom aminti unele noțiuni din algebra liniară.

Un tablou dreptunghiular de $m \times n$ numere reale așezate pe m linii și n coloane

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se numește *matrice*.

Matricea se mai poate reprezenta simbolic astfel $(a_{ij})_{mn}$. Numerele, a_{ij} , $i=1, 2, \dots, m$; $j=1, 2, \dots, n$ se numesc elementele matricei. O astă matrice are dimensiunea $m \times n$. În cazul în care $m=n$ matricea este pătrată de ordinul n și se va nota astfel: $A=(a_{ij})_n$. Dacă $m \neq n$, atunci matricea se numește rectaunghiulară (dreptunghiulară). O matrice, pentru care $m=1$ se numește matrice-linie, iar matricea pentru care $n=1$ se numește matrice-coloană.

Un sistem ordonat de n numere reale se numește *vector n -dimensional*. Vectorul poate fi prezentat printr-o matrice-linie sau matrice-coloană. În cele ce urmează printr-un vector vom înțelege coloana-vector:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Matricea care se obține din matricea dată A schimbând liniile cu coloanele și invers se numește matrice transpusă:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

În particular, transpusa unui vector-coloană este vectorul-linie $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Dacă o matrice A coincide cu transpusa sa A^T , atunci o astă matrice se numește *matrice simetrică*. Evident, pentru o matrice simetrică au loc egalitățile $a_{ij} = a_{ji}$ pentru toți i și j .

Mulțimea tuturor vectorilor n -dimensionali pentru care sunt definite operațiile înmulțirii vectorului cu un număr și adunării a doi vectori se numește spațiu liniar aritmetic n -dimensional.

Suma matricelor $A=(a_{ij})_{mn}$ și $B=(b_{ij})_{mn}$, ambele fiind de aceleasi dimensiuni $m \times n$, este matricea $C=(c_{ij})_{mn}$ elementele căreia sunt $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Produsul a două matrice se definește numai pentru acele matrice, pentru care numărul de coloane ale primei matrice coincide cu numărul de linii a matricei a doua. Astfel, dacă avem matricele $A=(a_{ij})_{mn}$ și $B=(b_{ij})_{np}$, atunci prin produsul $C=A \cdot B$ se înțelege matricea $C=(c_{ij})_{mp}$ cu elementele

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \quad i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, p.$$

În particular, pentru doi vectori x și y , obținem

$$x^T \cdot y = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Spațiu aritmetic în care este definit un astă produs, numit *produs scalar* a doi vectori, se numește *spațiu euclidian R^n* .

Matrice-unitate I se numește matricea pătrată

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru orice matrice pătrată A de dimensiunea n are loc relația $A \cdot I = I \cdot A$.

Matricea A se numește *inversabilă* dacă există o astă matrice, notată prin A^{-1} , încât are loc relația $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$.

Matricea pătrată de forma

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

se numește *matrice diagonală*.

Matricea A se numește *inferior triunghiulară (superior triunghiulară)* dacă elementele ei satisfac relațiile:

$$a_{ij} = 0, \text{ pentru } i < j \text{ (} i > j \text{)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Matricea A se numește *matrice pozitiv definită*, dacă

$$\mathbf{x}^T \cdot A \cdot \mathbf{x} > 0, \text{ pentru orice } \mathbf{x} \neq 0.$$

3.2. Sisteme de ecuații liniare algebrice

Metodele numerice de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare pot fi divizate în două grupuri: metode directe și metode iterative.

Metodele directe constau în transformarea sistemului

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{nn}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

(acest sistem poate fi scris în formă vectorială în modul următor $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$) într-un sistem echivalent pentru care rezolvarea este cu mult mai simplă. În metodele directe soluția exactă se obține după un număr finit de operații aritmetice elementare (adunare, scădere, înmulțire, împărțire și calculul rădăcinii pătrate) și acest număr de operații este de ordinul n^3 . Subliniem că soluția exactă se obține în cazurile (ideale) în care erorile de rotunjire sunt absente. La fiecare operație elementară efectuată de calculator apar erori de rotunjire și, prin urmare, metodele directe în caz general furnizează doar o soluție aproximativă. Metodele directe se utilizează pentru rezolvarea sistemelor nu prea " mari", de dimensiune $n \leq 200$.

Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare printr-o metodă iterativă înseamnă construirea unui șir de vectori $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (pornind de la un vector $\mathbf{x}^{(0)}$ ales arbitrar) convergent către soluția sistemului considerat. În metodele iterative, de obicei, o iterație necesită efectuarea unui număr de ori în n^2 operații aritmetice. De aceea metodele iterative se utilizează pentru rezolvarea sistemelor " mari", de dimensiune $n > 100$ (în cazul asigurării unei viteze sporite de convergență pentru o alegere a aproximării inițiale adecvate). Trunchierea șirului $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ are loc la un indice m astfel încât $\mathbf{x}^{(m)}$ constituie o aproximatie satisfăcătoare a soluției căutate \mathbf{x}^* (de exemplu, $|\mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}^*| \leq \epsilon$, unde $\epsilon > 0$ este eroarea admisă).

3.3. Metoda eliminării a lui Gauss

Metoda eliminării a lui Gauss constă în a aduce sistemul inițial la un sistem echivalent având matricea coeficienților superior triunghiulară. Transformarea sistemului dat într-un sistem de formă triunghiulară fără ca să se modifice soluția sistemului se realizează cu ajutorul următoarelor trei operații de bază:

- 1) rearanjarea ecuațiilor (schimbarea a două ecuații între ele);
- 2) înmulțirea unei ecuații cu o constantă (diferită de zero);
- 3) scăderea unei ecuații din alta și înlocuirea celei de-a doua cu rezultatul scăderii.

Fie dat sistemul de ecuații liniare

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (3.1)$$

unde $A = (a_{ij})_n$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in R^n$, $\det A \neq 0$.

Să presupunem că $a_{11} \neq 0$, dacă $a_{11} = 0$, se aduce un element nenul pe locul (1,1), permutează ecuațiile sistemului. Acest număr se numește *element pivot*.

Primul pas constă în eliminarea necunoscutei x_1 din ecuațiile sistemului, începând cu a doua, înmulțind ecuația întâi cu raportul

$$\mu_{ii} = \frac{a_{ii}}{a_{11}}, \quad i = 2, 3, \dots, n$$

și scăzând rezultatul obținut din ecuația i pentru orice $i \geq 2$.

Introducând notațiile $A^{(1)} = A$, $\mathbf{b}^{(1)} = \mathbf{b}$ obținem în acest fel sistemul echivalent:

$$A^{(2)} \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)} \quad (3.2)$$

cu coeficienții

$$a_{1j}^{(2)} = a_{1j}^{(1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad a_{ii}^{(2)} = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n;$$

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \mu_{ii} \cdot a_{ij}^{(1)}, \quad i, j = 2, 3, \dots, n;$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \mu_{ii} b_i^{(1)}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Prima ecuație a sistemului (3.2) coincide cu prima ecuație a sistemului (3.1).

În continuare se repetă procedeul de mai sus pentru eliminarea necunoscutei x_2 din sistemul (3.2) și.a.m.d. La pasul k se obține sistemul:

$$A^{(k)} \mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)},$$

unde

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \dots & a_{1,k-1}^{(0)} & a_{1k}^{(0)} \dots a_{1n}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2,k-1}^{(2)} & a_{2k}^{(2)} \dots a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} \dots a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nk}^{(k)} \dots a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad b^{(k)} = \begin{pmatrix} b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \\ \vdots \\ b_n^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Elementele $a_y^{(k)}$ ale lui $A^{(k)}$ și $b_i^{(k)}$ ale lui $b^{(k)}$ se calculează recursiv prin formulele:

$$a_y^{(k)} = \begin{cases} a_y^{(k-1)}, & i \leq k-1 \\ 0, & i \geq k, j \leq k-1 \\ a_y^{(k-1)} - \mu_{i,k-1} a_{k-1,j}^{(k-1)}, & i, j \geq k, \end{cases}$$

unde $\mu_{i,k-1} = a_{i,k-1}^{(k-1)} / a_{k-1,k-1}^{(k-1)}$, iar

$$b_i^{(k)} = \begin{cases} b_i^{(k-1)}, & i \leq k-1 \\ b_i^{(k-1)} - \mu_{i,k-1} b_{k-1}^{(k-1)}, & i \geq k \end{cases}$$

După n pași necunoscuta x_{n-1} va fi eliminată din ultima ecuație, obținându-se un sistem cu matricea superior triunghiulară

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + \dots + a_{1k}^{(0)}x_k + \dots + a_{1n}^{(0)}x_n = b_1^{(0)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2k}^{(2)}x_k + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \dots \\ a_{kk}^{(k)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k)}x_n = b_k^{(k)} \\ \dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{array} \right.$$

Acest sistem se rezolvă începând cu ultima ecuație cu ajutorul procesului de eliminare inversă care se poate descrie astfel:

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, \quad x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n}{a_{n-1,n-1}^{(n-1)}}, \dots, x_k = \frac{b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k)}x_j}{a_{kk}^{(k)}}, \dots$$

Metoda lui Gauss presupune că elementele a_{kk} sunt diferite de zero. Dacă la efectuarea pasului k elementul $a_{kk} = 0$, atunci cel puțin unul din celelalte elemente din coloana k și din liniile $k+1, k+2, \dots, n$ este nenul; în caz contrar, matricea A ar fi singulară ($\det A = 0$). Permutând ecuațiile sistemului, putem aduce pe locul (k,k) elementul nenul și, deci, este posibil să reluăm eliminarea. Dacă un element pivot este exact egal cu zero, din motive de stabilitate numerică, trebuie să efectuăm rearanjarea ecuațiilor.

Exemplu. Să se determine prin metoda Gauss soluția sistemului liniar de trei ecuații cu trei necunoscute

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 = -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

R e z o l v a r e. Se observă că necunoscuta x_1 poate fi eliminată din ultimele două ecuații, înmulțind prima ecuație respectiv cu factorii:

$$\mu_{21} = a_{21}/a_{11} = 4/2 = 2, \quad \mu_{31} = a_{31}/a_{11} = -2/2 = -1$$

și scăzând ecuațiile obținute din ecuațiile a două și a treia.

Astfel, obținem un sistem echivalent cu cel inițial:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Coefficientul $a_{11} = 2$ este elementul pivot, prima coloană a matricei sistemului se numește *coloană pivot*, iar prima linie – *linie pivot*.

În mod analog putem elimina necunoscuta x_2 din ecuația a treia. La pasul al doilea vom alege în calitate de element pivot coefficientul $a_{32}^{(0)} = -1$. Înmulțind ecuația a doua cu $\mu_{32} = a_{32}^{(0)}/a_{22}^{(0)} = 3/(-1) = -3$ și scăzând

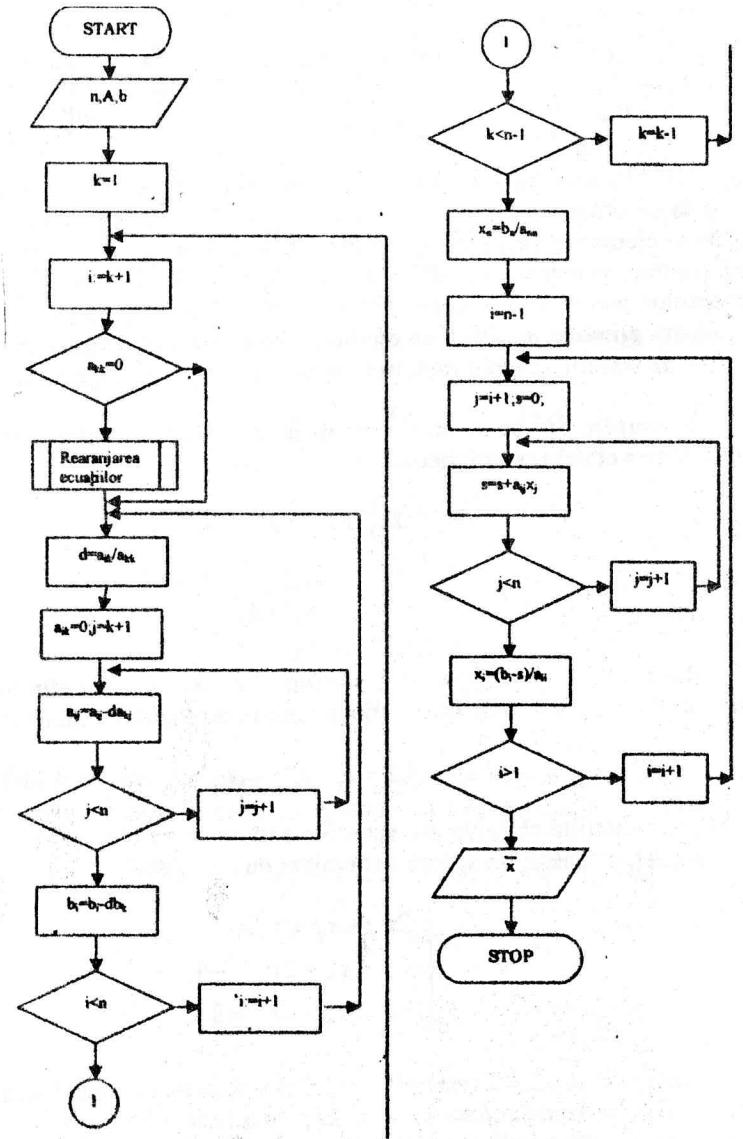


Fig. 17. Schema logică a metodei Gauss

expresia obținută din ecuația a treia, eliminăm din ultima ecuație necunoscuta x_2 .

Așadar, după acești pași ai etapei directe a metodei Gauss sistemul inițial este adus la următoarea formă triunghiulară:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ -x_2 - 2x_3 = -4 \\ -4x_3 = -4 \end{cases}$$

Etapa indirectă a metodei constă în determinarea din ultima ecuație a necunoscutei $x_3 = 1$. În continuare substituind această valoare în ecuația a doua, putem calcula necunoscuta $x_2 = 2$. În sfârșit, utilizând aceste două necunoscute, obținem $x_1 = -1$.

Procedura de calcul în limbajul Turbo Pascal care realizează metoda lui Gauss cu pivotarea parțială (la pasul k pivotul se ia egal cu primul element maxim în modul din coloana k subdiagonala a lui $A^{(k)}$):

$$|a_{ik}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|$$

și se permute liniile k și r) este următoarea:

{*****
n - numarul de ecuatii; A - matricea sistemului; b - la intrare vectorul termenilor liberi, iar la iesire - solutia sistemului de ecuatii; ier - codul corectitudinii: daca ier=0 atunci sistemul este compatibil definit, in caz ca ier=1, sistemul dat nu poate fi rezolvat ($\det(A)=0$)
*****}

```
Procedure Gauss(n:byte;A:Matr; var b:vec; var ier:byte);
Label et_1, et_2;
Var i,j,l,m,k: Integer; t:Real;
Begin
  Ier:=0;
  For l:=1 To n Do
    Begin
      m:=l+1; j:=l;
      For i:=l To n Do
        If a[i,l]>a[j,l] Then j:=i;
      i:=l;
```

```

If A[i,i]=0 Then Begin
  {Writeln('Determinantul sistemului este egal cu zero');}
  ier:=1; Exit; End;
If l=n Then Goto Et_2;
If j=l Then i Goto Et_1;
For k:=l To n Do Begin
  t:=A[i,k]; A[i,k]:=A[j,k]; A[j,k]:=t;
End;
T:=b[l]; b[l]:=b[j]; b[j]:=t;
i:=i+1;
Repeat
  If A[i,i]=0 Then i:=i+1;
  t:=A[i,i]/A[l,l]; b[i]:=b[i]-t*b[l];
  For k:=m To n Do
    A[i,k]:=A[i,k]-t*A[l,k];
Et_1: i:=i+1
  Until i>n
End;
Repeat
  m:=l; l:=l-1;
  For i:=1 To l Do b[i]:=b[i]-A[i,m]*b[m];
Et_2:
  b[l]:=b[l]/A[l,l]
  Until (l-1)<=0;
End;

```

Schema logică a lui Gauss este prezentată în figura 17.

3.4. Metoda lui Cholesky (metoda rădăcinii pătrate)

Metoda lui Cholesky de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare algebrice se mai numește metoda rădăcinii pătrate și constă în descompunerea sistemului $Ax = b$ în două sisteme triunghiulare:

$$L^T y = b, \quad Lx = y.$$

Aici L și L^T sunt matricele

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & l_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad L^T = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & 0 \\ l_{13} & l_{23} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{1n} & l_{2n} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}.$$

În această metodă se presupune că matricea A este o matrice simetrică și pozitiv definită.

Matricea L se alege astfel, încât $A = L^T L$. Această descompunere a matricii A se numește *factorizare Cholesky*. Are loc

Teorema 3.4. Dacă matricea A este simetrică și pozitiv definită, atunci există o unică matrice inferior triunghiulară L^T cu elementele diagonale pozitive, astfel încât $A = L^T L$.

Înmulțind matricele L^T și L și egalând produsul obținut cu matricea A obținem formulele de calcul pentru elementele l_{ij} :

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{1j} = a_{1j}/l_{11}, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

După ce s-au obținut primele $(k-1)$ coloane ale matricei L se calculează elementele coloanei k astfel:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \quad i = 2, 3, \dots, n;$$

$$l_{ij} = \begin{cases} (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot l_{kj}) / l_{ii}, & i < j \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

Sistemul (3.1) este compatibil definit dacă $l_{kk} \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Într-adevăr, deoarece pentru determinantul matricei A are loc relația

$$|A| = |L^T| \cdot |L| = |L|^2 = (l_{11} \cdot l_{22} \cdots l_{nn})^2 \neq 0,$$

rezultă că acest sistem are o soluție unică.

Fiind determinată matricea L^T , obținem două sisteme de ecuații liniare algebrice cu matrice triunghiulare în raport cu vectorii necunoscuți x și y :

și

$$\begin{cases} l_{11}y_1 = b_1 \\ l_{12}y_1 + l_{22}y_2 = b_2 \\ \dots \\ l_{1n}y_1 + l_{2n}y_2 + \dots + l_{nn}y_n = b_n \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} l_{11}x_1 + l_{12}x_2 + l_{13}x_3 + \dots + l_{1n}x_n = y_1 \\ l_{22}x_2 + l_{23}x_3 + \dots + l_{2n}x_n = y_2 \\ \dots \\ l_{nn}x_n = y_n. \end{cases} \quad (3.4)$$

Din primul sistem, în mod direct, calculăm componentele vectorului y după formulele:

$$y_1 = b_1 / l_{11}; \quad y_i = (b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k) / l_{ii}, \quad i=2,3,\dots,n.$$

În sfârșit, din sistemul (3.4), cu matricea superior triunghiulară, succesiv determinăm soluția sistemului (3.1):

$$x_n = y_n / l_{nn}; \quad x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^n l_{ik}x_k) / l_{ii}, \quad i=n-1, n-2, \dots, 1.$$

Exemplu. Să se rezolve prin metoda rădăcinii patrate sistemul:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$$

R e z o l v a r e . Calculăm elementele matricei L^T :

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{5}; \quad l_{12} = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad l_{13} = \frac{a_{13}}{\sqrt{a_{11}}} = \frac{3}{\sqrt{5}};$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{12}^2} = \sqrt{2 - \frac{1}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}; \quad l_{23} = \frac{a_{23} - l_{12}l_{13}}{\sqrt{a_{11}}} = \frac{8}{3\sqrt{5}};$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{13}^2 - l_{23}^2} = \sqrt{4 - \frac{9}{5} - \frac{64}{45}} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Determinăm componentele vectorului y :

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}} = \frac{6}{\sqrt{5}}; \quad y_2 = \frac{b_2 - l_{12}y_1}{l_{22}} = \frac{4 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}}}{3} = \frac{26}{3\sqrt{5}};$$

$$y_3 = \frac{b_3 - l_{13}y_1 - l_{23}y_2}{l_{33}} = \frac{9 - \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{8}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{26}{3\sqrt{5}}}{7} = \frac{3}{\sqrt{7}}.$$

Acum putem determina soluția:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{y_3}{l_{33}} = \frac{\sqrt{7}}{3} = 1; & x_2 &= \frac{y_2 - l_{23}x_3}{l_{22}} = \frac{26}{3\sqrt{5}} - \frac{8}{3\sqrt{5}} \cdot 1 \\ && &= \frac{26 - 8}{3\sqrt{5}} = 2; \\ x_1 &= \frac{y_1 - l_{12}x_2 - l_{13}x_3}{l_{11}} = \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot 2 - \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot 1 \\ && &= \frac{6 + 2 + 3}{\sqrt{5}} = 1. \end{aligned}$$

Așadar, soluția sistemului este vectorul $x = (1, 2, 1)$.

3.5. Metode iterative de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. Metodele Jacobi și Gauss -Seidel

O metodă iterativă poate fi construită utilizând desfacerea matricei A definită prin

$$A = S - T.$$

Atunci sistemul (3.1) este echivalent cu următorul:

$$Sx = Tx + b, \quad (3.5)$$

sau

$$x = Qx + d, \quad (3.6)$$

unde $Q = S^{-1}T$, $d = S^{-1}b$.

Prin urmare, putem construi șirul $\{x^{(k)}\}$, utilizând relația recurrentă

$$Sx^{(k+1)} = Tx^{(k)} + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

sau

$$x^{(k+1)} = Qx^{(k)} + d, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

unde $x^{(0)}$ este o aproximare inițială a soluției x^* .

Pentru a reduce sistemul (3.1) la o formă (3.5) sau (3.6), potrivită pentru iterare, desfacerea matricei A trebuie să satisfacă condițiile:

a) sistemul (3.8) are o soluție unică $x^{(k+1)}$ și se rezolvă ușor. De aceea matricea S se alege de o formă simplă și este inversabilă. Ea poate fi diagonală sau triunghiulară;

b) sirul $\{x^{(k)}\}$ converge către soluția exactă x^* oricare ar fi $x^{(0)}$.

Presupunem că elementele diagonale ale matricei A sunt diferite de zero. Atunci în calitate de matrice S se poate lua matricea diagonală atașată matricei A :

$$S = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}).$$

De aici rezultă

$$S^{-1} = \text{diag}(1/a_{11}, 1/a_{22}, \dots, 1/a_{nn})$$

și deci sistemul (3.6) poate fi scris sub forma:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \cdot x_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Așadar, procesul iterativ (3.8) în componente este definit prin formula:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

Astfel, obținem o metodă iterativă de rezolvare a sistemului liniar (3.1), numită *metoda lui Jacobi*.

Condițiile de convergență a metodei Jacobi depend în mare măsură de modul în care a fost construită matricea Q . Astfel, se poate demonstra că dacă pentru elementele q_{ij} ale acestei matrice se satisfac cel puțin una din condițiile

$$\sum_{j=1}^n |q_{ij}| \leq \alpha < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

sau

$$\sum_{j=1}^n |q_{ij}| \leq \beta < 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (3.11)$$

atunci procesul iterativ (3.9) converge către soluția exactă x^* , oricare nu ar fi soluția inițială $x^{(0)}$, adică

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}.$$

Așadar, soluția exactă poate fi obținută ca rezultat al unui proces iterațional infinit de calcul și, ca urmare, orice vector intermediu $x^{(k)}$ este doar o soluție aproximativă.

Estimarea erorii metodei Jacobi poate fi efectuată sau prin formula

$$|x_i^* - x_i^{(k+1)}| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}|, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

dacă are loc inegalitatea (3.10), sau cu ajutorul formulei

$$|x_i^* - x_i^{(k+1)}| \leq \frac{\beta}{1-\beta} \cdot \sum_{j=1}^n |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}|$$

în cazul în care se satisfacă relația (3.11).

În particular, când matricea A a sistemului (3.1) este diagonal predominantă, ceea ce înseamnă că elementele de pe diagonala principală satisfac condiția

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

atunci inegalitățile (3.10) și (3.11) au loc și deci metoda lui Jacobi este convergentă.

De obicei, în aplicații, pentru a determina soluția problemei cu exactitatea dată ε , în calitate de criteriu de oprire a procesului iterativ poate servi condiția

$$\max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon.$$

În cazul în care se știe apriori că componentele soluției sistemului de ecuații sunt cu mult mai mari decât unu, procesul iterativ va fi oprit în momentul când are loc inegalitatea

$$\max_i \left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k)}} \right| < \epsilon.$$

Exemplu. Să se determine soluția sistemului de trei ecuații cu trei necunoscute

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 11 \end{cases}$$

cu precizia $\epsilon = 0.025$.

R e z o l v a r e . Pentru a aplica metoda Jacobi, vom descompune matricea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

după formula $A = S - T$, folosind matricile

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \text{ și } T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Atunci } Q = S^{-1}T = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & 0 \end{pmatrix}, \text{ iar } d = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ \frac{-11}{7} \end{pmatrix} \text{ și putem scrie}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_2^{(k)} - \frac{2}{5}x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1 + \frac{1}{4}x_1^{(k)} + \frac{1}{4}x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{11}{7} + \frac{2}{7}x_1^{(k)} + \frac{2}{7}x_2^{(k)} \end{cases}$$

Vom verifica condiția (3.10) de convergență. Se observă că

$$\sum_{j=1}^3 |q_{ij}| \leq \alpha < 1, \quad i=1,2,3 \text{ pentru } \alpha = 3/5 < 1.$$

Vom porni rezolvarea sistemului prin metoda Jacobi luând în calitate de soluție inițială vectorul

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ 1 \\ \frac{-11}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Prima iterare

$$x_1^{(0)} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \cdot 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{-11}{7} = \frac{43}{35} = 1.2286, \quad |x_1^{(0)} - x_1^{(0)}| = 0.43;$$

$$x_2^{(0)} = 1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{-11}{7} = \frac{6}{5} - \frac{11}{28} = 0.8071, \quad |x_2^{(0)} - x_2^{(0)}| = 0.193;$$

$$x_3^{(0)} = -\frac{11}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{5} + \frac{2}{7} \cdot 1 = -\frac{9}{7} + \frac{8}{35} = -1.0571, \quad |x_3^{(0)} - x_3^{(0)}| = 0.51.$$

Deoarece $\max_i |x_i^{(0)} - x_i^{(0)}| = 0.51 > \epsilon$, soluția n-a fost determinată și deci procesul iterativ trebuie continuat.

Iterația a doua

$$x_1^{(2)} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \cdot 0.8071 - \frac{2}{5} \cdot (-1.0571) = 1.0614, \quad |x_1^{(2)} - x_1^{(0)}| = 0.167;$$

$$x_2^{(2)} = 1 + \frac{1}{4} \cdot 1.2286 + \frac{1}{4} \cdot (-1.0571) = 1.0428, \quad |x_2^{(2)} - x_2^{(0)}| = 0.23;$$

$$x_3^{(2)} = -\frac{11}{7} + \frac{2}{7} \cdot 1.2286 + \frac{2}{7} \cdot 0.8071 = -0.9898, |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0.067.$$

După acest pas, obținem că $\max_i |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| = 0.23 > \epsilon$ și deci continuăm procesul iterativ.

Iterația a treia

$$x_1^{(3)} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \cdot 1.0428 - \frac{2}{5} \cdot (-0.9898) = 0.9873, |x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0.0074;$$

$$x_2^{(3)} = 1 + \frac{1}{4} \cdot 1.0614 + \frac{1}{4} \cdot (-0.9898) = 1.0179, |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0.025;$$

$$x_3^{(3)} = -\frac{11}{7} + \frac{2}{7} \cdot 1.0614 + \frac{2}{7} \cdot 1.0428 = -0.9702, |x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0.019.$$

Având în vedere că exactitatea dată iarăși n-a fost atinsă, mai efectuăm un pas al algoritmului Jacobi.

Iterația a patra

$$x_1^{(4)} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \cdot 1.0179 - \frac{2}{5} \cdot (-0.9702) = 0.9845, |x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| = 0.0028;$$

$$x_2^{(4)} = 1 + \frac{1}{4} \cdot 0.9873 + \frac{1}{4} \cdot (-0.9702) = 1.0042, |x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| = 0.0136;$$

$$x_3^{(4)} = -\frac{11}{7} + \frac{2}{7} \cdot 0.9873 + \frac{2}{7} \cdot 1.0179 = -0.9985, |x_3^{(4)} - x_3^{(3)}| = 0.025.$$

Dat fiind că $\max_i |x_i^{(4)} - x_i^{(3)}| = 0.024 < \epsilon$, soluția sistemului a fost determinată și procesul iterativ trebuie oprit, soluția aproximativă fiind $x^{(4)} = (0.9845, 1.0042, -0.9985)$. Pentru comparare vom menționa, că soluția exactă este vectorul $x^* = (1.0, 1.0, -1.0)$.

În metoda lui Jacobi este necesar de a păstra în memoria calculatorului toate componentele vectorului $x^{(k)}$ atât timp cât se calculează vectorul $x^{(k+1)}$. Putem modifica metoda lui Jacobi, astfel încât la pasul $(k+1)$ să folosim în calculul componentei $x_i^{(k+1)}$ valorile deja calculate la același pas: $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$. Această modificare a metodei lui Jacobi se numește *metoda Gauss-Seidel*, iar șirul iterativ (3.9) devine

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \cdot x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \cdot x_j^{(k)} \right), i = 1, 2, \dots, n.$$

Teorema 3.5. Dacă matricea A a sistemului de ecuații liniare algebrice (3.1) este diagonal predominantă pe linii, atunci metoda Gauss-Seidel este convergentă, indiferent de modul cum a fost aleasă soluția inițială $x^{(0)}$.

Exemplu. Vom exemplifică aplicarea acestei metode reluând exemplul care a fost rezolvat anterior prin metoda Jacobi, folosind aceeași soluție inițială și precise.

Rezolvare. Prima iterație

$$x_1^{(0)} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \cdot 1 - \frac{2}{5} \cdot \frac{-11}{35} = \frac{43}{35} = 1.2286, |x_1^{(0)} - x_1^{(0)}| = 0.43;$$

$$x_2^{(0)} = 1 + \frac{1}{4} \cdot 1.2286 + \frac{1}{4} \cdot \frac{-11}{35} = 0.9143, |x_2^{(0)} - x_2^{(0)}| = 0.086;$$

$$x_3^{(0)} = -\frac{11}{7} + \frac{2}{7} \cdot 1.2286 + \frac{2}{7} \cdot 0.9143 = -0.9592, |x_3^{(0)} - x_3^{(0)}| = 0.61.$$

Aici $\max_i |x_i^{(0)} - x_i^{(0)}| = 0.61 > \epsilon$, adică soluția n-a fost determinată și trecem la pasul al doilea a procesului iterativ.

Iterația a doua

$$x_1^{(2)} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \cdot 0.9143 - \frac{2}{5} \cdot (-0.9592) = 1.0008, |x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| = 0.20;$$

$$x_2^{(2)} = 1 + \frac{1}{4} \cdot 1.0008 + \frac{1}{4} \cdot (-0.9592) = 1.0104, |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| = 0.096;$$

$$x_3^{(2)} = -\frac{11}{7} + \frac{2}{7} \cdot 1.0008 + \frac{2}{7} \cdot 1.0104 = -0.9968, |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| = 0.037.$$

Deoarece $\max_i |x_i^{(2)} - x_i^{(1)}| = 0.20 > \epsilon$, continuăm procesul iterativ.

Iterația a treia

$$x_1^{(3)} = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \cdot 1.0104 - \frac{2}{5} \cdot (-0.9968) = 0.9966, |x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| = 0.004;$$

$$x_2^{(3)} = 1 + \frac{1}{4} \cdot 0.9966 + \frac{1}{4} \cdot (-0.9968) = 0.9998, |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| = 0.010;$$

$$x_3^{(3)} = -\frac{11}{7} + \frac{2}{7} \cdot 0.9966 + \frac{2}{7} \cdot 0.9998 = -1.0009, \quad |x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| = 0.004.$$

Se observă că $\max|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| = 0.01 < \epsilon$ și prin urmare soluția sistemului cu precizia dată este $x^{(3)} = (0.9966, 0.9998, -1.0009)$.

Din acest exemplu se poate observa că metoda Gauss-Seidel are o viteză de convergență mai mare. Totuși această afirmație nu are loc în toate cazurile, adică pentru unele sisteme numărul de iterări ale algoritmului Jacobi poate fi mai mic decât cel al lui Gauss-Seidel.

În continuare se prezintă un program Turbo Pascal care realizează metoda Gauss-Seidel.

```
*****
{ n - numarul de ecuații; A - matricea sistemului; b - vectorul
  termenilor liberi; x - soluția sistemului de ecuații; Eps - pre-
  cizia cu care se determină soluția sistemului; Nmax - numărul
  maxim admisibil de iterări }
*****
Procedure Seidel(n:byte;A:Matr;b:vec; Eps:Real;
                    var x:vec;Nmax:integer);
Var i,j,Nit:Integer;
    s,s1,y:Real;
Begin
  Nit:=0;
  For i:=1 To n Do
    Begin
      x[i]:=A[i,i];
      b[i]:=b[i]/x[i];
      For j:=1 To n Do A[i,j]:=-A[i,j]/x[i];
      x[i]:=b[i];
      A[i,i]:=0;
    End;
  Repeat s:=0; s1:=0;
  For i:=1 To n Do
    Begin
      y:=0;
      For j:=1 To n Do y:=y+A[i,j]*x[j];
      y:=y+b[i];
      s:=s+sqr(x[i]-y);
      s1:=s1+y*y;
    End;
Until s<Eps;
End;
```

```

x[i]:=y;
End;
s:=sqrt(s); s1:=sqrt(s1); s:=s/s1; Nit:=Nit+1;
If Nit>Nmax Then
Begin
  Writeln('Solutia nu poate fi determinata');
  Exit;
End;
Until s<Eps;
End;
```

Dacă metoda iterativă poate fi aplicată, adică procesul iterativ este convergent, atunci utilizarea acestei metode are următoarele avantaje față de o metodă directă de rezolvare:

- în cazul în care convergența este destul de rapidă, pentru obținerea soluției în procesul iterativ se cere un număr mai redus de operații. Astfel, dacă numărul de iterări necesar pentru a determina soluția cu precizia dată este mai mic decât n , numărul total de operații necesare pentru soluționare va fi cu mult mai mic decât n^3 , în timp ce numărul total de operații în metoda Gauss este proporțional cu n^3 (complexitatea $O(n^3)$);

- erorile de rotunjire în metodele iterative au o influență cu mult mai redusă decât în cele directe. Din alt punct de vedere, metodele iterative sunt *metode cu autocorectare*, ceea ce înseamnă că apariția unei erori izolate în calcule, care mai departe nu se mai repetă, nu va influența asupra soluției finale, deoarece aproximarea obținută greșit servește mai departe ca o soluție nouă inițială;

- metodele iterative sunt deosebit de eficiente în sistemele cu matrici cu structuri speciale, de exemplu, în care numărul elementelor nenule este considerabil mai mic decât n^2 (matrice rare). Metodele directe nu depind de structura matricii sistemului și aplicarea lor la matricele rare necesită efectuarea unui număr enorm de operații inutile de tipul înmulțirii la zero sau adunării unor numere cu zero;

- algoritmii metodelor iterative sunt ușor de realizat pe calculator.

3.6. Inversarea matricelor. Metoda Jordan-Gauss

În caz general, problema determinării matricei inverse poate fi redusă la rezolvarea a n sisteme algebrice de ecuații liniare. Într-adevăr, dacă vom nota prin X inversa matricii A , atunci, pornind de la identitatea

$$AX = I$$

(I - matricea unitara, $I = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$, pentru coloanele x_i ale matricei inverse obținem sistemul de ecuații liniare

$$Ax_i = e_i, \quad (3.12)$$

Aici vectorul unitar e_i este coloana cu numărul i a matricei unitare I .

Ideea metodei Jordan-Gauss constă în transformarea sistemului (3.12) la forma diagonală. În acest scop, presupunând că matricea A este nedegenerată (determinantul ei este nenul), vom forma matricea extinsă

$$B = (A|I) = (b_{ij})_{n,2n}.$$

Se observă, că $B = A \cdot (A^{-1})$. Prin urmare, efectuând niște transformări, în locul matricii unitare din matricea extinsă B se poate obține matricea inversă A^{-1} . Aceste transformări ale sistemului (3.10) se numesc *transformări Jordan-Gauss*. Piecare transformare modifică o coloană din primele n coloane ale matricei B și constă din normalizarea

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad r = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n,$$

sau reducerea

$$a'_{ij} = a_{ij} - a_{ir} \cdot a'_{rj}; \quad i, j, r = 1, 2, \dots, n.$$

Exemplu. Să se determine prin metoda Jordan-Gauss inversa matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

R e z o l v a r e. Pentru simplificarea calculelor se utilizează tabelele Gauss.

Formăm un tabel în care includem matricea A și în dreapta ei matricea unitară I :

a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
2	-1	2	1	0	0
1	1	-1	0	1	0
3	-1	3	0	0	1

Prima iterare. Alegem în calitate de element pivot elementul $a_{11} = 2$. Astfel, prima coloană devine coloană pivot, iar prima linie a tabelului - linie pivot. Elementele $a_y^{(0)}$ și $e_y^{(0)}$ ale tabelului Gauss modificat sunt generate de formulele:

$$a_{1j}^{(0)} = \frac{1}{a_{11}} \cdot a_{1j}, \quad e_{1j}^{(0)} = \frac{1}{a_{11}} \cdot e_{1j}, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$a_y^{(0)} = a_y - \frac{a_{11}}{a_{11}} \cdot a_{1j}, \quad e_y^{(0)} = e_y - \frac{a_{11}}{a_{11}} \cdot e_{1j}, \quad j = 1, 2, 3; \quad i = 2, 3.$$

Această regulă de calcul a elementelor tabelului se numește *regula dreptunghiului*, deoarece dacă vom trasa niște segmente care să unească celulele în care sunt situate elementele din formulele de mai sus, obținem un dreptunghi. După această transformare Jordan-Gauss obținem tabelul

a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
1	-1/2	1	1/2	0	0
0	3/2	-2	-1/2	1	0
0	1/2	0	-3/2	0	1

Iterația a doua. În calitate de element pivot alegem elementul $a_{22}^{(0)} = \frac{3}{2}$.

Formulele de calcul sunt

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{1}{a_{22}^{(0)}} \cdot a_{2j}^{(0)}, \quad e_{2j}^{(2)} = \frac{1}{a_{22}^{(0)}} \cdot e_{2j}^{(0)}, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$a_y^{(2)} = a_y^{(0)} - \frac{a_{12}^{(0)}}{a_{22}^{(0)}} \cdot a_{2j}^{(0)}, \quad e_y^{(2)} = e_y^{(0)} - \frac{a_{12}^{(0)}}{a_{22}^{(0)}} \cdot e_{2j}^{(0)}, \quad j = 1, 2, 3; \quad i = 1, 3.$$

Astfel tabelul precedent devine:

a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
1	0	1/3	1/3	1/3	0
0	1	-4/3	-1/3	2/3	0
0	0	2/3	-4/3	-1/3	1

Iterația a treia. În calitate de element pivot vom considera numărul $a_{33}^{(2)} = \frac{2}{3}$. Formulele de calcul a elementelor talei sunt:

$$a_{3j}^{(3)} = \frac{1}{a_{33}^{(2)}} \cdot a_{3j}^{(2)}, \quad e_{3j}^{(3)} = \frac{1}{a_{33}^{(2)}} \cdot e_{3j}^{(2)}, \quad j = 1, 2, 3;$$

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i3}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot a_{3j}^{(2)}, \quad e_{ij}^{(3)} = e_{ij}^{(2)} - \frac{a_{i3}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}} \cdot e_{3j}^{(2)}, \quad j = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2.$$

După acestă pivotare obținem tabelul final:

a_1	a_2	a_3	e_1	e_2	e_3
1	0	0	1	1/2	-1/2
0	1	0	-3	0	2
0	1	1	-2	-1/2	3/2

Elementele matricei inverse se află în ultimele trei coloane ale tabelului, adică:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Să verificăm acest rezultat. Avem:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

LUCRAREA DE LABORATOR NR. 2

1. Scopul lucrării

1) Să se rezolve sistemul de ecuații liniare $Ax = b$, utilizând:

- metoda eliminării Gauss;
- metoda lui Cholesky (metoda rădăcinii pătrate);
- metoda iterativă a lui Jacobi cu o eroare $\epsilon = 10^{-3}$;
- metoda iterativă a lui Gauss-Seidel cu o eroare $\epsilon = 10^{-3}$ și $\epsilon = 10^{-5}$.

- 2) Să se determine numărul de iterații necesare pentru aproximarea soluției sistemului cu eroarea dată ϵ . Să se compare rezultatele.
- 3) Să se inverseze matricea A cu ajutorul metodei Jordan-Gauss.

2. Sisteme de ecuații, propuse spre rezolvare

$$1. A = \begin{pmatrix} 3.4 & 0.7 & 0.2 & -0.2 \\ 0.7 & 5.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 3.8 & -0.4 \\ -0.2 & 0.5 & -0.4 & 4.7 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 5.1 \\ 4.2 \\ 5.3 \\ 5.4 \end{pmatrix};$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 8.1 & -0.9 & 0.6 & 0.8 \\ -0.9 & 14.3 & 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.3 & 7.9 & -0.4 \\ 0.8 & 0.7 & -0.4 & 10.6 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 7.2 \\ 10.3 \\ -11.9 \\ 9.2 \end{pmatrix};$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 8.7 & 1.1 & -0.5 & 0.4 \\ 1.1 & 9.6 & 1.2 & 0.4 \\ -0.5 & 1.2 & 14.1 & 1.3 \\ 0.4 & 0.4 & 1.3 & 13.6 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10.2 \\ -4.3 \\ 8.6 \\ 0.9 \end{pmatrix};$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 6.1 & -1.9 & 0.4 & 0.2 \\ -1.9 & 16.2 & 1.8 & 1.4 \\ 0.4 & 1.8 & 12.7 & -0.6 \\ 0.2 & 1.4 & -0.6 & 13.1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 7.1 \\ 10.2 \\ -7.5 \\ 8.6 \end{pmatrix};$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 11.3 & -1.2 & 0.7 & 0.5 \\ -1.2 & 12.2 & 1.0 & -0.9 \\ 0.7 & 1.0 & 4.99 & 0.8 \\ 0.5 & -0.9 & 0.8 & 8.4 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 5.8 \\ -6.4 \\ 7.2 \\ -5.6 \end{pmatrix};$$

4. METODE NUMERICE PENTRU REZOLVAREA SISTEMELOR NELINIARE

4.1. Metoda Newton

Rezolvarea sistemelor neliniare este o problemă cu mult mai dificilă decât determinarea rădăcinilor unei ecuații nelineare. Pentru a simplifica expunerea metodei ne vom limita la cazul unui sistem de două ecuații neliniare:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Metoda lui Newton se bazează pe descompunerea în serii Taylor a funcțiilor $f(x, y)$ și $g(x, y)$, în care sunt neglijate derivatele parțiale de ordinul doi și mai mare.

Să considerăm o soluție inițială (x_0, y_0) ale sistemului (4.1). Problema constă în determinarea unor astăzi creșteri Δx și Δy ale argumentelor funcțiilor, încit soluția sistemului (4.1) să poată fi scrisă sub formă

$$\xi_1 = x_0 + \Delta x; \quad \eta_1 = y_0 + \Delta y.$$

Vom descompune părțile din dreapta sistemului (4.1) în serii Taylor, în jurul punctului (ξ_1, η_1) , mărginindu-ne cu termenii liniari față de creșterile Δx și Δy :

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \eta_1) &\approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y, \\ g(\xi_1, \eta_1) &\approx g(x_0, y_0) + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Deoarece părțile din stânga ale acestor relații satisfac sistemul (4.1), apoi și cele din dreapta trebuie să fie egale cu zero, de unde obținem

$$\begin{aligned} -f(x_0, y_0) &= \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y, \\ -g(x_0, y_0) &= \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y. \end{aligned} \quad (4.3)$$

În sistemul (4.3) derivatele parțiale f'_x și f'_y sunt calculate în punctul (x_0, y_0) .

Să considerăm matricea Jacobi a sistemului de funcții $f(x, y)$ și $g(x, y)$:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

Valoarea Jacobianului $|J|$ în punctul (x_0, y_0) este determinantul sistemului de ecuații (4.3) care posede o soluție unică atunci când $|J(x_0, y_0)| \neq 0$.

În acest caz, dacă $J^{-1}(x_0, y_0)$ este matricea inversă pentru matricea Jacobi, apoi pentru creșterile Δx și Δy obținem

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -J^{-1}(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

De aici rezultă că algoritmul Newton pentru sisteme de două ecuații neliniare în formă vectorială poate fi scris sub formă

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - J^{-1}(x_k, y_k) \cdot \begin{pmatrix} f(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.4)$$

Pentru cazul cind se rezolvă un sistem neliniar cu n ecuații și n necunoscute, formulele de calcul recurent sunt similare.

Exemplu. Să se determine cu precizia $\varepsilon = 10^{-3}$ soluțiile reale ale sistemului

$$\begin{cases} e^{-x^2} - y = 0 \\ x^2 - 2y^2 = 0 \end{cases}$$

R e z o l v a r e . Prin metoda grafică (fig. 18) putem considera următoarea soluție inițială: $x_0 = 0.75$; $y_0 = 0.3$.

Calculăm jacobianul:

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} -2xe^{-x^2} & -1 \\ 3x^2 & -4y \end{bmatrix}.$$

Valoarea acestui determinant în punctul $(0.75; 0.3)$ este egală cu:

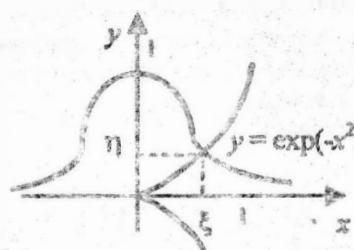


Fig. 18

$$|J(x_0, y_0)| = \begin{vmatrix} -0.85467 & -1 \\ 1.68750 & -1.2 \end{vmatrix} = 2.71430.$$

Determinăm matricea inversă $J^{-1}(x_0, y_0)$:

$$|J^{-1}(x, y)| = \frac{1}{|J(x, y)|} \begin{pmatrix} -y & 1 \\ -3x^2 & -2xe^{-x^2} \end{pmatrix},$$

$$|J^{-1}(0.75, 0.3)| = \frac{1}{2.71310} \begin{pmatrix} -12 & 1 \\ -1.68750 & -0.85467 \end{pmatrix}.$$

Atunci după formulele (4.4) obținem

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2.71310} \begin{pmatrix} -1.2 & 1 \\ -1.68750 & -0.85467 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.30 \end{pmatrix} - \frac{1}{2.71310} \begin{pmatrix} -1.2 & 1 \\ -1.68750 & -0.85467 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.26980 \\ 0.24187 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.30 \end{pmatrix} - 0.36858 \begin{pmatrix} -0.0819 \\ -0.662 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0.03010 \\ -0.24400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.78010 \\ 0.54400 \end{pmatrix}.$$

Așadar, a fost determinată prima aproximare a soluției $x_1 = 0.7801$, $y_1 = 0.54400$.

Analog calculăm $x_2 = 0.81176$, $y_2 = 0.4368$.

4.2. Metoda aproximărilor succesive (contracției)

Să considerăm sistemul de două ecuații (4.1) cu două necunoscute pentru care trebuie de determinat soluțiile reale cu precizia dată ϵ . Vom presupune că acest sistem are numai rădăcini izolate. Numărul acestor rădăcini și valorile lor aproximative se poate determina geometric, dacă se vor construi curbele $f(x, y) = 0$ și $g(x, y) = 0$. Coordonatele punctelor de intersecție ale acestor curbe vor fi soluțiile sistemului (4.1).

Sistemul dat poate fi adus la forma echivalentă

$$\begin{cases} x = \varphi_1(x, y) \\ y = \varphi_2(x, y) \end{cases} \quad (4.5)$$

Astfel, obținem algoritmul soluționării numerice a sistemului (4.1):

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi_1(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = \varphi_2(x_k, y_k) \end{cases} \text{ pentru } k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

Aici (x_0, y_0) este o soluție inițială arbitrară. Condiția de convergență a acestui algoritm e stabilită de următoarea teoremă:

Teorema 4.1. Fie sistemul de ecuații (4.1) posedă în domeniul închis $D = \{a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$ o soluție unică $x = \xi$; $y = \eta$. Dacă

- 1) funcțiile $\varphi_1(x, y)$ și $\varphi_2(x, y)$ precum și derivatele partiale de ordinul întâi sunt continue în D ;
- 2) soluția inițială de aproximare (x_0, y_0) și celelalte aproximări succesive (x_k, y_k) ($k = 1, 2, \dots$) aparțin lui D ;
- 3) în D sunt satisfăcute inegalitățile

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| \leq q_1 < 1, \quad \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \leq q_2 < 1, \quad (4.7)$$

atunci procesul aproximărilor succesive (4.6) converge către soluția $x = \xi$, $y = \eta$ a sistemului, adică

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta.$$

Vom menționa că teorema rămâne valabilă dacă condițiile (4.7) vor fi înlocuite cu următoarele inegalități:

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| \leq q_1 < 1, \quad \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| \leq q_2 < 1. \quad (4.8)$$

Estimarea erorii metodei la iterarea cu numărul k este dată de inegalitatea

$$|\xi - x_k| + |\eta - y_k| \leq \frac{q}{1-q} \cdot (|x_k - x_{k-1}| + |y_k - y_{k-1}|), \quad (4.9)$$

unde $q = \max\{q_1, q_2\}$.

Exemplu. Să se determine cu precizia $\epsilon = 10^{-2}$ soluția sistemului

$$\begin{cases} x^3 - y^3 + 6x - 2 = 0 \\ x^3 + y^3 - 6y + 3 = 0 \end{cases}$$

R e z o l v a r e. Vom transcrie sistemul dat sub forma

$$\begin{cases} x = -(x^3 - y^3)/6 + 1/3 = \varphi_1(x, y) \\ y = (x^3 + y^3)/6 + 1/2 = \varphi_2(x, y). \end{cases}$$

Să considerăm pătratul $D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$. Pentru punctele (\bar{x}, \bar{y}) ce aparțin acestui pătrat avem

$$0 < \varphi_1(\bar{x}, \bar{y}) < 1,$$

$$0 < \varphi_2(\bar{x}, \bar{y}) < 1.$$

Deoarece $0 < \frac{\bar{x}^3 + \bar{y}^3}{6} < \frac{1}{3}$, iar $\frac{1}{6} < \frac{\bar{x}^3 - \bar{y}^3}{6} < \frac{1}{6}$ rezultă că pentru orice

punct (x, y) vom avea $1/6 < x < 1/2$; $-1/2 < y < 5/6$.

Pe de altă parte, deoarece

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\frac{1}{2}x^2; \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{1}{2}y^2; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{1}{2}x^2; \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{1}{2}y^2;$$

obținem

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right| = \left| \frac{x^2}{2} \right| + \frac{y^2}{2} < \frac{1}{4} + \frac{25}{36} = \frac{34}{72} < 1$$

și

$$\left| \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right| + \left| \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{34}{72} < 1.$$

Prin urmare, condițiile teoremei 4.2 sunt satisfăcute și în pătratul dat există o soluție unică care poate fi găsită prin metoda aproximăriilor successive.

Fie soluția aproximativă inițială $x_0 = 0.5, y_0 = 0.5$. Atunci obținem:

$$x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1/8 - 1/3}{6} = 0.333, \quad y_1 = \frac{1}{2} + \frac{1/8 + 1/8}{6} = 0.542.$$

Deoarece $\max \{|x_1 - x_0|, |y_1 - y_0|\} > \epsilon$, efectuăm următoarea iterație:

$$x_2 = \frac{1}{3} + \frac{0.1223}{6} = 0.354, \quad y_2 = \frac{1}{2} + \frac{0.19615}{6} = 0.533.$$

Precizia dorită încă n-a fost atinsă, de aceea calculele continuă. Obținem: $x_3 = 0.351, y_3 = 0.533$.

Așadar, putem considera că soluția sistemului dat este $\xi = 0.351, \eta = 0.533$.

Pentru accelerarea procesului iterativ, în multe cazuri se recomandă aplicarea așa-numitului "proces Seidel", conform căruia procesul iterativ (4.6) se va scrie în modul următor:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \varphi_1(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = \varphi_2(x_{k+1}, y_k) \end{cases}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

LUCRAREA DE LABORATOR NR. 3

1. Scopul lucrării

Să se rezolve un sistem neliniar din două ecuații cu două necunoscute utilizând:

- metoda Newton cu o eroare $\epsilon = 10^{-4}$;
- metoda iterării simple cu o eroare $\epsilon = 10^{-3}$.

(Soluția inițială (x_0, y_0) se va determina prin metoda grafică).

2. Exemple propuse pentru rezolvare

Să se determine soluțiile pozitive ale sistemului de ecuații nelineare

$$\begin{cases} x^3 - by^2 - \frac{a^3}{64} = 0 \\ x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3} = 0 \end{cases} \quad (a = 2 + 0.5n; b = 1 + 0.5m; n, m = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Să se determine numărul de iterării necesare pentru aproximarea soluției sistemului cu eroarea dată ϵ . Să se compare rezultatele.

5. INTERPOLAREA FUNCȚIILOR

5.1. Descrierea problemei de interpolare

Să considerăm funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dată sub forma unui tabel de valori

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

unde $y_i = f(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$. Punctele $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ se numesc *noduri*, iar însăși tabelul de mai sus – *suportul problemei de interpolare*.

Problema interpolării funcției constă în următoarele: pentru o funcție $f(x)$, forma analitică a căreia sau nu ne este cunoscută, sau este foarte complicată, să se construiască o funcție $F(x)$, valorile căreia în sistemul dat de noduri să fie aceleași ca și ale funcției $f(x)$ (fig. 19).

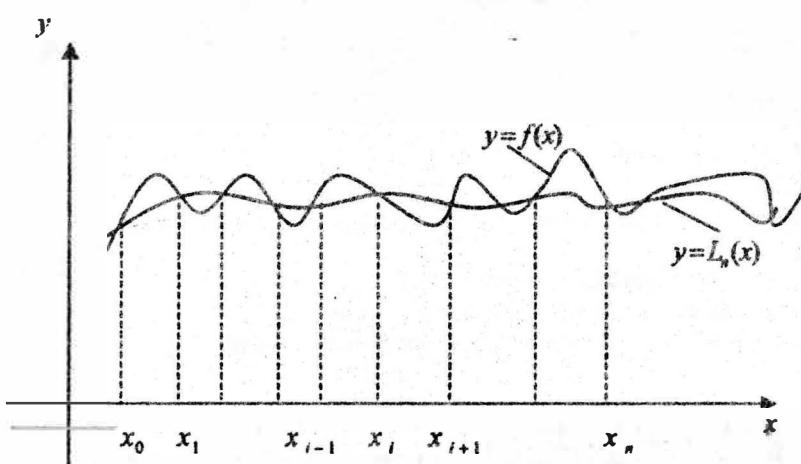


Fig. 19

Dacă nu se precizează clasa de funcții, căreia trebuie să-i aparțină funcția $F(x)$, atunci problema formulată în aşa mod admite o infinitate de

soluții: prin sistemul de puncte (x_i, y_i) , $i=0, 1, \dots, n$ se pot trasa o infinitate de curbe.

Există numeroase procedee de interpolare pentru găsirea unor valori intermediare ale lui $f(x)$ pentru $x \neq x_i$, $i=0, 1, \dots, n$. De foarte multe ori pentru aproximarea funcțiilor prin interpolare se utilizează polinoamele algebrice

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Aceasta se datorează faptului că funcția $f(x)$ poate fi aproximată foarte bine cu ajutorul curbelor a căror reprezentare analitică sunt polinoame (teorema lui Weierstrass). Pe de altă parte, valoarea polinomului se calculează ușor cu ajutorul schemei lui Horner și nu apar dificultăți la integrarea sau derivarea polinoamelor. Pentru ca un polinom $P_n(x)$ să interpolateze funcția dată, trebuie ca valorile sale în nodurile x_0, x_1, \dots, x_n să coincidă cu valorile funcției, adică:

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i=0, 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

5.2 Interpolarea algebrică

Sistemul de ecuații (5.1) este un sistem liniar de $n+1$ necunoscute a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 , care poate fi scris în modul următor:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + \dots + a_{n-1} x_0^{n-1} + a_n x_0^n &= y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_{n-1} x_1^{n-1} + a_n x_1^n &= y_1 \\ \vdots &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \dots + a_{n-1} x_n^{n-1} + a_n x_n^n &= y_n. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Pentru ca acest sistem să fie compatibil definit este necesar și suficient ca determinantul lui să fie diferit de zero. Însă determinantul

$$D(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$$

este determinantul Vandermonde. Se poate arăta că acest determinant este nenul dacă valorile x_i sunt distințte.

Rezolvând sistemul de ecuații (5.2), determinăm în mod unic coeficienții polinomiali a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 . Prin urmare, interpolarea funcției

$f(x)$ după valorile ei în nodurile de interpolare este posibilă și, mai mult, această reprezentare este unică.

În continuare vom exemplifica această metodă de interpolare pentru cel mai simplu caz - *interpolarea liniară*.

Să considerăm un interval elementar $[x_i, x_{i+1}] \subset [a, b]$ și vom approxima funcția $f(x)$ pe acest interval prin forma liniară:

$$P_1(x) = a \cdot x + b.$$

Atunci sistemul de ecuații (5.2) devine

$$\begin{cases} ax_i + b = y_i \\ ax_{i+1} + b = y_{i+1} \end{cases}$$

Determinantul acestui sistem este

$$D(x_i, x_{i+1}) = \begin{vmatrix} x_i & 1 \\ x_{i+1} & 1 \end{vmatrix} = x_i - x_{i+1} \neq 0.$$

De aici obținem valorile coeficienților polinomiali

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{x_i - x_{i+1}} \begin{vmatrix} y_i & 1 \\ y_{i+1} & 1 \end{vmatrix} = \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \quad b = \frac{1}{x_i - x_{i+1}} \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{x_i - x_{i+1}}. \end{aligned}$$

Deci funcția de aproximare liniară pentru $f(x)$ pe intervalul dat este

$$P_1(x) = \frac{y_i - y_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot x + \frac{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i}{x_i - x_{i+1}}.$$

Regrupând termenii, obținem

$$P_1(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot y_i + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i+1}} \cdot y_{i+1}. \quad (5.3)$$

Exemplu. Să se determine valoarea funcției y în punctul $x = 2.75$ prin interpolare liniară, dacă suportul de interpolare este dat prin tabelul

x	1.5	2.5	3.5	4.5
y	8	13	25	27

R e z o l v a r e . Utilizând formula (5.3) (aici $x_i = 2.5, x_{i+1} = 3.5, y_i = 13, y_{i+1} = 25$), construim polinomul de interpolare

$$P_1(x) = \frac{x - 3.5}{2.5 - 3.5} \cdot 13 + \frac{2.5 - x}{2.5 - 3.5} \cdot 25 = 12x - 17.$$

Atunci $y(2.75) \approx 12 \cdot 2.75 - 17 = 16$.

5.3. Polinomul Lagrange

Acest polinom de interpolare se utilizează pe larg atunci cind discretizarea intervalului $[a, b]$ de interpolare în subdomenii elementare este neuniformă, adică intervalele au o lungime diferită.

Să considerăm $n + 1$ noduri $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$ și valorile unei funcții $f(x)$ în aceste puncte, și anume

$$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n.$$

Vom construi un polinom $L_n(x)$ de un grad nu mai mare decât n , care ia în nodurile x_i aceleasi valori ca și funcția $f(x)$. Altfel spus în noduri au loc egalitățile

$$L_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

La început vom examena următoarea problemă auxiliară: să se determine polinomul $p_n(x)$ (fig. 20), astfel încât să fie satisfăcute relațiile

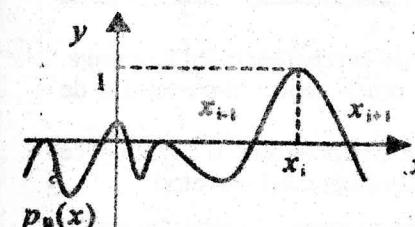


Fig.20

$$p_n(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

De aici imediat rezultă că acest polinom trebuie să aibă forma

$$p_i(x) = C_i(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n), \quad (5.4)$$

unde C_i sunt niște constante necunoscute.

Din ecuația $p_i(x) = 1$ putem determina valorile acestor constante, și anume

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Substituind această constantă în (5.4) obținem

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Se observă că gradul acestui polinom este n .

Revenind la problema inițială, care constă în construirea polinomului de interpolare, obținem

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i p_i(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

În alt mod această formulă se va scrie

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \left(y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \quad (5.5)$$

Polinomul $L_n(x)$ se numește *polinom de interpolare al lui Lagrange*. Se poate arăta că reprezentarea (5.5) este unică pentru suportul dat de interpolare.

Exemplu. Să se calculeze polinomul de interpolare al lui Lagrange ce aproximează funcția definită cu ajutorul următorului tabel de valori:

x	-1	0	2
y	-8	-1	1

R e z o l v a r e. Putem construi polinomul de gradul doi și anume:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= -8 \cdot \frac{(x - 0)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 2)} + (-1) \cdot \frac{(x + 1)(x - 0)}{(0 + 1)(0 - 2)} + 1 \cdot \frac{(x + 1)(x - 0)}{(2 + 1)(2 - 1)} = \\ &= -2x^2 + 5x - 1. \end{aligned}$$

Valoarile polinomului de interpolare al lui Lagrange în nodurile de interpolare coincid valorile funcției $f(x)$ în aceste puncte. Pentru celelalte puncte funcția

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

reprezintă eroarea care se comite în calculul lui $f(x)$ prin formula $f(x) \approx L_n(x)$. Dacă funcția $f(x)$ este continuă împreună cu primele sale $n+1$ derivate, atunci:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \omega_{n+1}(x), \quad (5.6)$$

unde $\omega_{n+1} = (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_n)$, iar ξ este un punct din intervalul (x_0, x_n) .

În multe cazuri concrete de interpolare a funcției $f(x)$ nu este necesară determinarea formei analitice a polinomului Lagrange, ci doar calculul valorii funcției într-un punct dat, diferit de nodurile de interpolare, eroarea calculelor fiind cunoscută. În așa situații importante pentru aplicații se va utiliza *schemă lui Aitken*. Procedura de calcul constă în faptul, că începând cu două puncte de interpolare, treptat în calcule se includ noduri noi până se obține precizia dorită.

Algoritmul schemei Aitken presupune efectuarea următorilor pași. Pe intervalul $[x_0, x_1]$ se aplică polinomul Lagrange de interpolare liniară:

$$L_{01}(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1}.$$

Trecând la intervalul $[x_1, x_2]$ obținem

$$L_{12}(x) = y_1 \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + y_2 \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1}.$$

În mod similar, pe intervalul $[x_0, x_2]$ avem

$$L_{02}(x) = y_0 \cdot \frac{x-x_2}{x_0-x_2} + y_2 \cdot \frac{x-x_0}{x_2-x_0} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}.$$

Ușor se poate verifica că $L_{01}(x_0) = y_0$, $L_{01}(x_1) = y_1$ și $L_{02}(x_2) = y_2$. În mod analog pot fi construite funcțiile $L_{12}(x)$, $L_{13}(x)$, ...

Să considerăm funcția

$$L_{012}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0 - x \\ L_{12}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0}.$$

Această funcție este un polinom de gradul doi și de fapt nu este altceva decât polinomul Lagrange, care ia în nodurile x_0, x_1, x_2 valorile y_0, y_1, y_2 , respectiv.

Generalizând cele spuse, se poate conchide că funcția

$$L_{01...n}(x) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01...n-1}(x) & x_0 - x \\ L_{12...n-1}(x) & x_n - x \end{vmatrix}}{x_n - x_0}$$

este polinomul Lagrange care primește în punctele $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ valorile $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Calculele după schema Aitken de obicei sunt efectuate cu ajutorul tabelului de mai jos.

x_i	y_i	$x_{i-1} - x$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$
x_0	y_0	$x_0 - x$			
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$		
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$	
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$

Folosind formula (5.3) se obține egalitatea aproximativă

$$R_m(x) \approx L_{m+1}(x) - L_m(x).$$

Ultima relație poate fi utilizată la calculul funcției $f(x)$ într-un punct dat $x \neq x_i$, $i=0, 1, \dots, n$ cu exactitatea dorită $\varepsilon > 0$. Pentru aceasta, se calculează succesiv polinoamele $L_{01}(x), L_{12}(x), \dots, L_{1n}(x), \dots$, folosind schema lui Aitken. De asemenea se determină și mărimile

$$\varepsilon_1 = |L_{012}(x) - L_{01}(x)|, \dots, \varepsilon_m = |L_{12\dots m}(x) - L_{01\dots m-1}(x)|.$$

Dacă pentru un indice m are loc inegalitatea $\varepsilon_m < \varepsilon$, atunci calculele se opresc, deoarece avem calculată valoarea a funcției $f(x)$ (egală cu $L_{01\dots m}(x)$) cu eroarea dată. În caz contrar ($\varepsilon_m \geq \varepsilon, \forall m$) se determină cel mai mic m pentru care

$$\varepsilon_m = \min_{1 \leq i \leq m-1} \{\varepsilon_i\}$$

și se consideră $f(x) \approx L_m(x)$.

Exemplu. Fiind cunoscute valorile funcției $y = \sin x$ pentru $x = 0, \pi/6, \pi/4, \pi/3$, să se determine după schema Aitken valoarea $\sin \pi/5$ și să se estimateze eroarea calculelor.

R e z o l v a r e. Pentru cazul nostru $x = 0.6283$ și atunci, conform formulelor de mai sus, avem:

$$L_{01}(0.6283) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = \frac{1}{0.5236} \begin{vmatrix} 0 & -0.6283 \\ 0.5 & -0.1047 \end{vmatrix} = 0.5999,$$

$$L_{12}(0.6283) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_1} = \frac{1}{0.2618} \begin{vmatrix} 0.5 & -0.1047 \\ 0.707 & 0.1571 \end{vmatrix} = 0.5828,$$

$$L_{02}(0.6283) = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_3 - x_2} = \frac{1}{0.2618} \begin{vmatrix} 0.707 & 0.157 \\ 0.866 & 0.4189 \end{vmatrix} = 0.6116,$$

$$L_{012}(0.6283) = \frac{\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0 - x \\ L_{12}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}}{x_2 - x_0} = \frac{1}{0.7854} \begin{vmatrix} 0.5999 & -0.6283 \\ 0.5828 & 0.1571 \end{vmatrix} = 0.5861,$$

$$L_{12}(0.6283) = \frac{\begin{vmatrix} L_{12}(x) & x_1 - x \\ L_{23}(x) & x_3 - x \end{vmatrix}}{x_1 - x_0} = \frac{1}{0.5236} \cdot \begin{vmatrix} 0.5828 & -0.1047 \\ 0.6116 & 0.4189 \end{vmatrix} = 0.5885,$$

$$L_{012}(0.6283) = \frac{\begin{vmatrix} L_{012}(x) & x_0 - x \\ L_{123}(x) & x_3 - x \end{vmatrix}}{x_3 - x_0} = \frac{1}{1.0471} \cdot \begin{vmatrix} 0.5861 & -0.6283 \\ 0.5861 & 0.4189 \end{vmatrix} = 0.5876.$$

Fiind cunoscute toate valorile acestor funcții în punctul dat, putem forma tabelul:

x_i	y_i	$x_{i-1} - x$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$
0.000	0.000	-0.6283			
0.5236	0.500	-0.1047	0.5999		
0.7854	0.7071	0.1571	0.5827	0.5861	
1.0471	0.8662	0.4189	0.6116	0.5885	0.5876

Din tabel se observă că primele două cifre ale numerelor L_{012} și L_{0123} coincid, deci $\sin \pi / 5 = 0.587$, eroarea calculelor fiind egală cu $\epsilon = 0.1 \cdot 10^{-3}$.

Un procedeu efectiv de calcul ale valorii unui polinom îl constituie *schemă lui Horner*. Pentru stabilirea schemei lui Horner, polinomul $P_n(x)$ se transcrie astfel:

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + \dots + x(a_{n-1} + x a_n) \dots)).$$

Deci putem afla valoarea acestui polinom în punctul x , calculând succesiv mărimele

$$b_n = a_n$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + x b_n = a_{n-1} + x a_n$$

$$b_{n-2} = a_{n-2} + x b_{n-1} = a_{n-2} + x(a_{n-1} + x a_n)$$

.....

$$b_0 = P_n(x) = a_0 + x(a_1 + \dots + x(a_{n-1} + x a_n) \dots)).$$

Această schemă necesită cel mult $2n$ operații aritmetice.

Mai jos este prezentată o procedură de calcul, care pe baza unui tabel dat de valori ale unei funcții determină coeficienții polinomului de interpolare Lagrange și valoarea acestui polinom într-un punct dat.

```
{
*****n+1-numarul de noduri de interpolare; X - tabloul absciselor nodurilor;
Y - tabloul valorilor functiei care se interpoleaza in noduri; A - tabloul
coeficientilor polinomului de interpolare Lagrange; x1 - punctul in care se
efectueaza interpolarea; y1-valoarea calculata a polinomului in punctul dat
x1; (C - tablou cu n+1 componente)
*****}
```

```

Procedure Lagrange(n:Integer;X,Y:Tab;x1:Real;Var A:Tab;
Var y1:Real);
Var i,j,k:integer; r:Real;
C,B:Tab;
Begin
C[0]:=1;
For i:=0 To n Do
Begin
C[i+1]:=C[i];
For j:=i Downto 1 Do
C[j]:=C[j-1]-C[j]*X[i];
C[0]:=C[0]*X[i];
End;
For i:=0 To n do A[i]:=0;
B[n]:=C[n+1];
For i:=0 To n Do
Begin
r:=1;
For j:=0 To i Do
If j=i Then r:=r*(X[i]-X[j]);
For k:=n-1 Downto 0 Do
B[k]:=C[k+1]+X[i]*B[k+1];
For k:=0 To n Do
A[k]:=A[k]+Y[i]*B[k]/r;
End;
Y1:=A[n];
For i:=1 To n Do
y1:=x1*y1+A[n-i];
End;
```

5.4. Formulele de interpolare Newton

Să considerăm problema de interpolare în cazul în care nodurile sunt echidistante, adică

$$x_{i+1} - x_i = h = \text{const.}$$

Diferențe finite ale funcției $y = f(x)$ se numesc mărimele

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0, \quad y_2 - y_1 = \Delta y_1, \quad \dots, \quad y_n - y_{n-1} = \Delta y_{n-1}$$

diferențe de ordinul 1

$$y_1 - y_0 = \Delta^2 y_0, \quad y_2 - y_1 = \Delta^2 y_1, \quad \dots, \quad y_n - y_{n-1} = \Delta^2 y_{n-1}$$

diferențe de ordinul 2

$$\Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0 = \Delta^n y_0, \quad \Delta^{n-1} y_2 - \Delta^{n-1} y_1 = \Delta^n y_1, \quad \dots$$

diferențe de ordinul n .

Substituind succesiv, obținem

$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0, \quad \dots,$$

$$\Delta^n y_0 = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i y_{n-i}.$$

Din aceste relații rezultă formulele:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0,$$

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0,$$

$$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \quad (5.7)$$

$$y_n = (1 + \Delta)^n \cdot y_0 = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^n y_0.$$

Pentru simplificarea calculelor, în care sunt implicate diferențele finite, se formează tabelul diferențelor finite:

x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
x_3	y_3	Δy_3			
x_4	y_4				

Introducând notația $q = \frac{x - x_0}{h}$ ($0 < q < 1$), relația (5.7) devine

$$N_{1,n}(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (5.8)$$

Relația (5.8) se numește *prima formulă Newton de interpolare*.

Se observă că în formula (5.8) participă numai valorile din prima linie a tabelului diferențelor finite.

Eroarea formulei (5.8) este determinată de funcția

$$R_n(x) = h^{n+1} \cdot \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n).$$

Formula a doua de interpolare Newton se va obține, dacă se va face substituția $q = \frac{x - x_n}{h}$ ($0 < q < 1$). Astfel, obținem polinomul

$$N_{2,q}(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \\ + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (5.9)$$

Eroarea polinomului al doilea de interpolare Newton se determină cu ajutorul funcției

$$R_n(x) = h^{n+1} \cdot \frac{q(q+1)\dots(q+n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_n).$$

Utilizarea polinoamelor Newton se va efectua în următorul mod. Dacă punctul de interpolare aparține extremității din stânga a tabelului de interpolare, atunci se recomandă aplicarea primei formule de interpolare, în caz contrar, o eroare mai mică vor avea calculele după formula a doua.

5.5. Aplicații

Interpolarea numerică și-a găsit o largă utilizare nu numai în problemele în care se cere a calcula valorile funcției în puncte diferite de nodurile de interpolare. În multe aplicații, mai ales în cele legate cu măsurările, este necesar a verifica exactitatea tabelului obținut. Această problemă se poate rezolva cu ajutorul interpolării, calculând diferențele finite de diferit ordin și efectuând o analiză a comportării lor.

Să examinăm tabelul de mai jos, în care sunt înscrise rezultatele măsurărilor unui parametru și diferențele finite de ordinul unu și doi.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
40	1237		
		56	
50	1293		-18
		38	
60	1331		26

		64	
70	1395		142
		206	
80	1601		118
		224	
90	1825		

Se observă că diferențele finite de ordinul doi au o comportare haotică, ceea ce ne face să conchidem că în procesul de interpolare nu are sens să includem mai mult de două puncte. Totodată, cercetând valorile diferențelor finite de ordinul doi, se poate afirma că pentru majoritatea valorilor lui x , sunt corecte primele două cifre, în timp ce pentru un punct numai prima cifră este corectă, eroarea întâmplătoare a măsurării fiind considerabilă.

O altă aplicație interpolarea o are în metodele multigrid. Aceste metode sunt destinate rezolvării unor probleme de mare importanță din domeniul energeticii, structurilor aerodinamice, ingineriei chimice etc.

Modelele matematice ale proceselor din domeniile menționate mai sus conțin sisteme de ecuații liniare sau neliniare algebrice de mari dimensiuni, obținute în urma discretizării problemei în cauză, dificil de rezolvat prin metode directe sau iterative, însă care au proprietăți specifice. Ideea metodei multigrid constă în rezolvarea unor sisteme de ecuații de dimensiuni esențial mai mici prin metode tradiționale, soluția sistemului inițial fiind determinată prin interpolarea rezultatelor obținute.

Vom mai menționa încă o aplicare a acestei metode de aproximare a funcțiilor în problema inversă a interpolării, care constă în determinarea cu ajutorul suportului de interpolare a funcției $y = f(x)$ pentru valoarea dată a variabilei dependente y , valoarea respectivă a variabilei x . Altfel spus, problema constă în calculul valorilor funcției inverse $x = \phi(y)$. Deosebirea dintre problema directă de interpolare și cea inversă constă în faptu că chiar și în cazul în care în problema directă pasul de interpolare este constant, în problema inversă el este variabil.

Interpolarea inversă poate fi aplicată cu succes și la rezolvarea ecuațiilor neliniare.

Exemplu. Să se determine prin metoda interpolării inverse soluția ecuației $e^x - 3 \cdot x = 0$.

R e z o l v a r e. Prin metoda grafică se poate constata că ecuația are două rădăcini, care se află în intervalele $(0.5, 0.65)$ și $(1.40, 1.60)$. Vom determina rădăcina din intervalul al doilea. Mărimea pasului de interpolare îl vom lua egal cu 0.05 și la interpolare se va utiliza schema Aitken. Rezultatele calculelor sunt date în tabelul care urmează.

x_i	y_i	$L_{i-1,i}(0)$	$L_{i-2,i-1,i}(0)$
1.45	0.086882		
1.55	0.061471	1.508562	
1.50	-0.018311	1.511475	1.512135
1.60	-0.153034	1.510687	1.512137

Deoarece ultimele două aproximări ale soluției practic coincid, se poate considera ca rădăcină aproximativă numărul $\xi = 1.51213$, eroarea calculelor fiind egală cu 10^{-5} .

LUCRAREA DE LABORATOR NR. 4

I. Scopul lucrării

Pentru funcția $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ se cunosc valorile $y_i = f(x_i)$, $i=0, 1, \dots, n$ în punctele distincte $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$.

1) Să se construiască polinomul de interpolare Lagrange $L_n(x)$ ce aproximează funcția dată.

2) Să se calculeze valoarea funcției $f(x)$ într-un punct $x = \xi$ utilizând polinomul de interpolare Lagrange $L_n(x)$.

3) Să se aproximeze valoarea funcției $f(x)$ pentru $x = \xi$ cu eroarea $\varepsilon = 10^{-4}$ (sau cu cea mai bună exactitate posibilă), calculând polinomul de interpolare Lagrange $L_m(x)$ pentru $m < n$.

4) Să se compare și să se explice rezultatele obținute.

2. Probleme propuse spre rezolvare

1.

x	4.253	5.786	6.876	7.011	8.343	9.256	9.987
y	2.4678	3.3260	4.6534	5.5134	6.4752	7.3765	8.5737

Punctul $x = \xi$ este: a) 4.2643; b) 5.7500; c) 6.4578; d) 7.2500.

2.

x	1.345	1.379	1.405	1.562	1.765	1.854	1.987
y	1.2648	1.1216	1.2689	1.2567	1.2456	1.2434	1.4537

Punctul $x = \xi$ este: a) 1.3625; b) 1.7520; c) 1.8800; d) 1.9505.

3.

x	0.125	0.243	0.367	0.498	0.597	0.701	0.867
y	3.4561	4.9845	5.1439	3.9301	1.7895	-1.234	-2.983

Punctul $x = \xi$ este: a) 0.183; b) 0.3012; c) 0.4563; d) 0.6500.

Ca urmare a lucrarilor de laborator, se poate constata că:

- polinomul de interpolare Lagrange este un polinom de gradul cel mai mare;
- polinomul de interpolare Lagrange este un polinom de gradul cel mai mic;
- polinomul de interpolare Lagrange este un polinom de gradul cel mai mediu;
- polinomul de interpolare Lagrange este un polinom de gradul cel mai mic.

Definiția de polinom de interpolare Lagrange este o generalizare a polinomului de interpolare Lagrange de gradul cel mai mic. Aceasta este o generalizare a polinomului de interpolare Lagrange de gradul cel mai mediu. Aceasta este o generalizare a polinomului de interpolare Lagrange de gradul cel mai mare.

6. CALCULUL NUMERIC AL INTEGRALELOR

Problema calculării unei integrale definite apare în diferite aplicații practice. Fiind cunoscută primitiva $F(x)$ a funcției de integrat $f(x)$, se poate determina valoarea integralei definite după formula Newton-Leibnitz:

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

adică integrala este numeric egală cu creșterea funcției $F(x)$ pe intervalul $[a, b]$.

În problemele reale evaluarea integralei definite prin această metodă este dificilă sau adesea imposibilă din următoarele cauze: a) funcția de integrat $f(x)$ nu permite determinarea primitivei cu ajutorul unor funcții elementare; b) valorile funcției $f(x)$ sunt cunoscute doar pentru un șir finit de puncte $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, adică funcția este prezentată sub forma unui tabel.

În așa situații se recurge la *integrarea numerică*, ideea căreia constă în înlocuirea integralei printr-o sumă finită

$$I_n = \sum_{i=0}^n A_i \cdot f(x_i).$$

În funcție de modul după care se formează aceste sume, se obțin diferite metode de integrare numerică (metoda dreptunghiurilor, metodele trapezelor sau parabolelor, s.a.).

Metoda de integrare numerică se consideră convergentă dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n - I| = 0.$$

6.1. Formula dreptunghiurilor și formula trapezelor

Să considerăm funcția $f(x)$, continuă împreună cu derivatele sale de ordinul întâi și doi pe intervalul $[a, b]$. Vom pune problema calculării aproximative a integralei definite

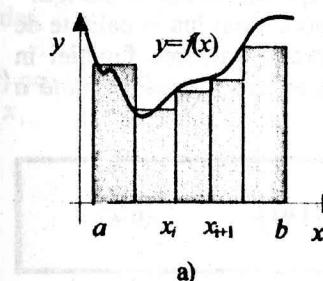
$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Din interpretarea geometrică a integralei definite se știe că această integrală numeric este egală cu aria trapezului curbiniu, mărginit de graficul funcției $y = f(x)$, axa Ox și dreptele $x = a$, $x = b$. Prin urmare, dacă vom approxima acest trapez curbiniu cu ajutorul unor figuri geometrice, aria cărora este mai simplu de calculat, se vor putea construi formule de calcul numeric al

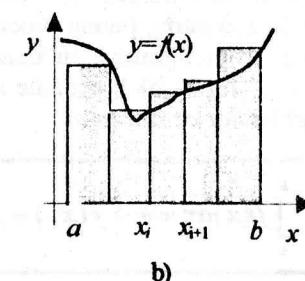
integralei. În acest scop vom diviza intervalul $[a, b]$ în n subintervale egale cu ajutorul punctelor

$$a = x_0, x_1 = x_0 + h, x_2 = x_0 + 2 \cdot h, \dots, x_n = x_0 + n \cdot h = b.$$

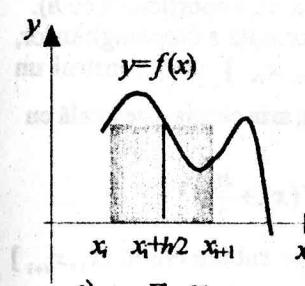
Aici $h = (b - a) / n$ este pasul de integrare.



a)



b)



c) Fig. 21

Vom aproxima trapezul curbiniu cu baza pe subintervalul $[x_i, x_{i+1}]$ cu un dreptunghi. Este clar că dacă pasul h este destul de mic, atunci aria acestui dreptunghi poate fi considerată ca o aproximare a integralei

În funcție de modul de construire a dreptunghiului de aproximare, pot fi scrise diferite formule de calcul numeric al integralei I . Astfel, dacă în calitate de înălțime a dreptunghiului cu baza pe intervalul va fi luată ordonata funcției în punctul x_i (fig. 21 a)), atunci aria acestui dreptunghi este egală cu

$$S_i = (x_{i+1} - x_i) \cdot f(x_i) = h \cdot f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Ca urmare, aria trapezului curbiniu de pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ poate fi considerată aproximativ egală cu suma ariilor dreptunghiurilor elementare, adică

$$S = S_0 + S_1 + \dots + S_{n-1} = h \cdot (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})).$$

De aici rezultă relația

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot [f(a) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]. \quad (6.1)$$

Această formulă se numește *formula sumată a dreptunghiurilor de stânga*. Pe de altă parte, putem proceda și în alt mod. Vom lua în calitate de înălțime a dreptunghiului cu baza pe subintervalul valoarea funcției în punctul x_{i+1} (fig. 21, b), ceea ce ne permite să scriem *formula sumată a dreptunghiurilor de dreapta*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(b)]. \quad (6.2)$$

După cum se observă, formulele (6.1) și (6.2) sunt foarte simple și pot fi programate ușor, dar eroarea lor este destul de mare (proporțională cu h).

În aplicații cel mai des este utilizată o altă formulă a dreptunghiurilor, care rezultă din următoarele. Pe subintervalul $[x_i, x_{i+1}]$ vom construi un dreptunghi cu înălțimea $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ (fig. 21, c)), aria căruia este egală cu

$$S_i = h \cdot f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) = h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}).$$

Atunci valoarea aproximativă a integralei pe subintervalul $[x_i, x_{i+1}]$ este egală cu

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}),$$

de unde urmează relația

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot [f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + \dots + f(x_{n-1/2})], \quad (6.3)$$

care se numește *formula sumată a metodei dreptunghiurilor* (sau a metodei mediilor).

Aici $f(x_{i-1/2}) = f(x_i - h/2)$.

Se poate arăta că eroarea formulei (6.3) este proporțională cu h^2 , mai precis

$$\int_a^b f(x)dx = h \cdot [f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + \dots + f(x_{n-1/2})] + h^2 \cdot \frac{b-a}{24} \cdot f''(\xi),$$

unde $\xi \in [a, b]$

Formula trapezelor constă în a aproxima pe intervalul dat $[a, b]$ funcția $f(x)$ printr-un polinom de interpolare Lagrange de gradul unu cu nodurile x_i și x_{i+1}

$$\int_a^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_1(x)dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \cdot (f(x_{i+1}) + f(x_i)).$$

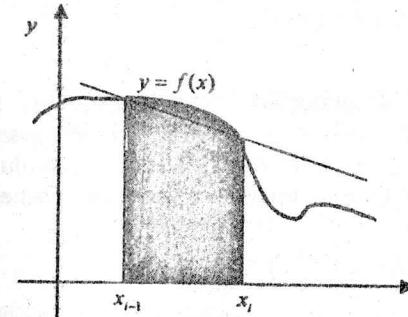


Fig. 22.

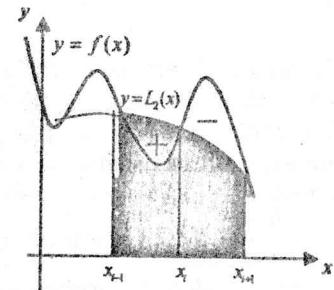


Fig. 23.

Interpretarea geometrică a acestei metode constă în înlocuirea trapezului curbliniu, mărginit de curba $y = f(x)$, dreptele $x = x_i$, $y = 0$ și $x = x_{i+1}$ printr-un trapez curbliniu (fig. 22).

Să considerăm o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu noduri echidistante $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Folosind proprietatea de aditivitate a integralei față de interval, vom scrie

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \cdot (f(x_{i+1}) + f(x_i))$$

șau

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right], \quad (6.4)$$

unde $h = (b-a)/n$ este pasul rețelei de noduri.

Formula (6.4) poartă denumirea de *formula trapezelor sumată*. Această formulă poate fi scrisă și în alt mod:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} \cdot [y_0 + 2 \cdot (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n].$$

Eroarea pe care o implică aproximarea integralei cu ajutorul formulei trapezelor se calculează după formula:

$$R_n(x) = -h^2 \cdot \frac{b-a}{12} \cdot f''(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (6.5)$$

Comparând erorile metodelor dreptunghiurilor și trapezelor, se observă că dacă derivata își păstrează semnul pe intervalul de integrare, atunci eroarea metodei dreptunghiurilor este după valoarea absolută aproximativ de două ori mai mică decât eroarea metodei trapezelor, semnele fiind opuse:

$$h^2 \cdot \frac{b-a}{24} \cdot f''(\xi), \quad \xi \in [a, b] \text{ și } -h^2 \cdot \frac{b-a}{12} \cdot f''(\bar{\xi}), \quad \bar{\xi} \in [a, b]$$

Din aceste considerente se poate obține o relație cu ajutorul căreia calculul integralei definite devine mai exact.

Fie I_d valoarea numerică a integralei I , obținută după formula trapezelor, iar I_s – după metoda dreptunghiurilor. Atunci relația

$$\int_a^b f(x) dx \approx (2I_d + I_s)/3$$

permite calculul integralei definite cu o precizie mai bună.

Funcția care realizează calculul unei integrale definite cu ajutorul formulei trapezelor în limbajul Turbo Pascal poate fi scrisă în modul următor:

{ ****
 [a,b]- intervalul de integrare; n - numarul de divizari a intervalului; f=f(x) numele functiei de sub semnul integralei lei (tip real) }

{ ****

```
Function Trapez(a,b:Real; n:integer):Real;
Var x,h,y:Real;
i:Integer;
Begin
  h:=(b-a)/n;
  y:=0;
  x:=a;
  For i:=1 To n-1 Do
    Begin
      x:=x+h;
      y:=y+f(x)
    End;
  Trapez:=h*(y+(f(a)+f(b))/2)
End;
```

6.2. Formula lui Simpson (metoda parabolelor)

Formula lui Simpson se obține prin integrarea polinomului de interpolare al funcției $f(x)$ cu nodurile x_{i-1} , x_i și x_{i+1} .

Aveam

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x) dx = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{6} \cdot (f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Geometric ideea acestei metode constă în înlocuirea curbei $y = f(x)$ pe intervalul $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ printr-un segment de parabolă (de aici și denumirea metodei), care trece prin punctele (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) și (x_{i+1}, y_{i+1}) (fig. 23).

De aici obținem formula lui Simpson sumată

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \cdot [f(x_0) + f(x_n) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_2) + \dots + 4f(x_{n-1})] \quad (6.6)$$

unde n este un număr par, iar $h = (b-a)/n$.

Luând în considerație notația $y_i = f(x_i)$ și condiția că n este un număr par ($n=2m$), formula (6.6) devine

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot [y_0 + y_{2m} + 4 \cdot (y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2 \cdot (y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})].$$

Eroarea formulei poate fi calculată astfel:

$$R_n(x) = -\frac{(b-a)^4}{180n^4} \cdot f^{(IV)}(\xi), \xi \in [a,b]$$

Funcția care realizează metoda lui Simpson în limbajul Pascal este prezentată mai jos.

```
{*****
{[a,b]- intervalul de integrare; n=2*m - numarul de divizari ale intervalului;
f=f(x) numele functiei de sub semnul integra lei (tip real)
} }
```

```
{*****
Function Simpson(a,b:Real;m:Integer):Real;
Var x,h,y:Real;
i:Integer;
Begin
h:=(b-a)/(2*m);
y:=0;
x:=a;
For i:=1 To m Do
Begin
y:=y+f(x)+4*f(x+h)+f(x+2*h);
x:=x+2*h;
End;
Simpson:=y*h/3
End;
```

6.3. Regula lui Runge

Dacă aplicăm repetat una dintre formulele de calcul numeric al integralelor, înjumătățind în același timp intervalul de lungimea h , putem îmbunătăți eficiența acestor formule de integrare numerică.

Într-adevăr, să presupunem că se folosește formula lui Simpson pentru care eroarea este proporțională cu h^4 . Două aplicații succesive ale formulei lui Simpson cu intervalele h și $h/2$ conduc la erorile:

$$\epsilon_h = ch^4, \quad \epsilon_{h/2} = c \cdot \frac{h^4}{2^4},$$

de unde

$$\epsilon_{h/2} = c \cdot \frac{\epsilon_h}{2^4} = \frac{\epsilon_h}{16}.$$

Să notăm cu I valoarea exactă a integralei $\int_a^b f(x)dx$, iar cu I_h și $I_{h/2}$ valoarea calculată cu ajutorul formulei lui Simpson cu pasul h , respectiv $h/2$. Atunci avem:

$$I = I_h + \epsilon_h = I_{h/2} + \epsilon_{h/2} \quad (6.7)$$

sau

$$I_h + 16\epsilon_{h/2} \approx I_{h/2} + \epsilon_{h/2}.$$

De aici rezultă că $\epsilon_{h/2} \approx (I_{h/2} - I_h)/15$ și, prin urmare, pentru formula lui Simpson putem scrie

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{h/2} + (I_{h/2} - I_h)/15. \quad (6.8)$$

În mod analog, pentru formula trapezelor avem:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{h/2} + (I_{h/2} - I_h)/3. \quad (6.9)$$

Din cele spuse mai sus rezultă că, lucrând cu două valori succesive I_h și $I_{h/2}$, se obține o a treia valoare ce aproximează pe I mai bine. Aceasta și stă la baza regulii lui Runge, care permite calculul numeric al integralei cu eroarea dorită $\epsilon > 0$.

Regula lui Runge constă în următoarele:

- se alege un număr întreg $k > 1$;
- se împarte intervalul $[a, b]$ în 2^k părți egale și se calculează integrala dată cu ajutorul uneia din formulele de cuadratură numerică. Valoarea obținută o notăm prin I_k ;

- se împarte intervalul $[a, b]$ în 2^{k+1} părți egale și se aplică respectiv formula de cuadratură numerică, care ne dă o valoare pe care o notăm prin $I_{h/2}$;

- dacă în cazul aplicării formulei trapezelor,

$$|I_h - I_{h/2}| < 3 \cdot \varepsilon \quad (6.10)$$

sau

$$|I_h - I_{h/2}| < 15 \cdot \varepsilon \quad (6.11)$$

în cazul formulei Simpson, atunci calculele se opresc. Formula (6.10), respectiv formula (6.11), ne dă valoarea aproximativă a integralei date cu eroarea cerută ε .

- dacă inegalitatea (6.10), respectiv (6.11), nu se îndeplinește, atunci se ia $I_h = I_{h/2}$, $k = k+1$ și calculele se reiau.

LUCRAREA DE LABORATOR NR. 5

1. Scopul lucrării

1) Să se calculeze integrala definită

$$\int_a^b f(x) dx$$

cu ajutorul formulei trapezelor, respectiv formulei Simpson, divizând intervalul de integrare $[a, b]$ în $2m$ părți egale.

2) Să se aplique regula lui Runge pentru calculul integralei date prin :

- formula trapezelor cu o eroare mai mică decât $\varepsilon = 10^{-3}$;
- formula Simpson cu o eroare mai mică decât $\varepsilon = 10^{-3}$.

3) Să se compare rezultatele, luând în considerație numărul de divizări ale intervalului de integrare $[a, b]$ și evaluările pentru funcția integrată $f(x)$.

Probleme propuse spre rezolvare

$$1. \int_{0.5}^{1.5} \frac{\sin(x^2 + 1)}{x+1} dx. \quad 2. \int_{1.2}^2 \frac{\cos(x^2 + 1)}{x+1} dx. \quad 3. \int_{0.8}^{2.4} \frac{\lg(x^2 / 8)}{x+2} dx.$$

$$4. \int_{0.5}^{1.5} \frac{\sin x}{x^2} dx. \quad 5. \int_{2.0}^4 \frac{\ln(x^2 + 15)}{x-1} dx. \quad 6. \int_{1.8}^{3.6} \frac{\lg(x^2 + 1)}{x+5} dx.$$

$$7. \int_{0.5}^{1.5} \sqrt{x^3} \cos x dx. \quad 8. \int_{0.8}^{2.8} \frac{\cos(e^{2x} + 1) + 2x}{x+1} dx. \quad 9. \int_{0.2}^{1.4} \frac{\ln(\lg^2 x + 1)}{x+2} dx.$$

$$10. \int_{1.5}^{2.5} \frac{x + \sin(x^2 + 1)}{\cos x + e^x} dx. \quad 11. \int_{1.7}^{3.1} x e^{-\sin x} dx. \quad 12. \int_{1.0}^{2.5} \ln(\sin x + 5e^x) dx.$$

13. Să se determine după metoda Simpson valoarea aproximativă a integralei $\int_a^\beta f(x) dx$, $a, \beta \in [a, b]$, dacă funcția de sub semnul integralei este definită prin tabelul:

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	0.00000	0.7	0.67780	1.4	0.92229
0.1	0.11246	0.8	0.74210	1.5	0.93611
0.2	0.22270	0.9	0.79691	1.6	0.93229
0.3	0.32863	1.0	0.84270	1.7	0.94301
0.4	0.42839	1.1	0.88021	1.8	0.95035
0.5	0.52056	1.2	0.91031	1.9	0.95179
0.6	0.60380	1.3	0.91401	2.0	0.95324

7. INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

7.1. Problema Cauchy

Ecuație diferențială de ordinul n se numește ecuația în care pe lângă variabila independentă x , intervine funcția necunoscută $y(x)$ cu valori reale și derivatele ei succesive y' , y'' , ..., $y^{(n)}$.

Soluție sau integrală a unei ecuații diferențiale se numește funcția reală $y = \varphi(x)$ care transformă ecuația diferențială într-o identitate.

Graficul soluției $y = \varphi(x)$ se numește *curbă integrală* a ecuației diferențiale.

Soluție generală a ecuației diferențiale de ordinul întâi

$$y' = f(x, y)$$

în domeniul D se numește funcția $y = \varphi(x, C)$, care satisfac următoarele condiții: a) este soluția ecuației diferențiale pentru orice constantă arbitrară C ; b) pentru orice punct $(x_0, y_0) \in D$, astfel încât $y_0 = y(x_0)$, există o singură constantă $C = C_0$ care satisfac relația $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Problema care se pune în legătură cu ecuațiile diferențiale constă în determinarea tuturor soluțiilor ecuației date.

Problema Cauchy pentru ecuația diferențială de ordinul n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (7.1)$$

constă în determinarea funcției $y = y(x)$, care satisfac ecuația (7.1) și condițiile inițiale

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{01}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}, \quad (7.2)$$

unde $x_0, y_0, y_{01}, \dots, y_{0,n-1}$ se consideră valori cunoscute.

Rezolvarea problemei Cauchy implică cunoașterea soluției generale a ecuației diferențiale (7.1). Condițiile de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy sunt următoarele:

Teorema Caushy. Dacă funcția $f(x, y)$ este continuă și mărginită pe domeniul D din planul xOy împreună cu derivata sa parțială $f'_y(x, y)$ atunci

ecuația $y' = f(x, y)$ are pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ o soluție $y = y(x)$ și numai una singură, astfel încât $y_0 = y(x_0)$.

Modelele matematice ale multor procese în tehnică și în alte domenii conțin sisteme de ecuații diferențiale ordinare de forma

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases} \quad (7.3)$$

În sistemul (7.3) variabila t este variabila independentă, iar funcțiile $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i=1, 2, \dots, n$, sunt funcții cunoscute. Pentru sistemul (7.3) problema Cauchy permite determinarea funcțiilor $y_i(t)$ care satisfac toate ecuațiile sistemului și condițiile inițiale

$$y_1(t_0) = y_{10}, \quad y_2(t_0) = y_{20}, \quad \dots, \quad y_n(t_0) = y_{n0} \quad (7.4)$$

În cazul în care se poate construi soluția generală a ecuației (7.1) sau sistemului (7.3), problema se reduce la determinarea constantelor de integrare care satisfac relațiile (7.2), respectiv (7.4).

În majoritatea cazurilor, determinarea soluției pentru problema Cauchy este imposibilă, ceea ce impune construirea soluției aproximative.

Metodele aproximative în dependență de modul în care se obține soluția problemei Cauchy pot fi împărțite în două grupe:

- a) metode analitice, care oferă soluția sub formă unei expresii analitice;
- b) metode numerice, care permit obținerea soluției aproximative sub formă unui tabel de valori ale soluției într-un sir de puncte.

7.2. Metoda seriilor de puteri (metoda derivării succese)

Această metodă este o metodă analitică.

Vom considera problema Cauchy (7.1)-(7.2), presupunând că pentru ecuația (7.1) se îndeplinește condițiile de existență și de unicitate a soluției.

Fie că soluția particulară $y = y(x)$ a ecuației (7.1) permite dezvoltarea ei în serie Taylor în jurul punctului $x = x_0$:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \quad (7.5)$$

Datorită condițiilor inițiale (7.2), valorile $y^{(i)}, i=0,1,\dots,n-1$ ale funcției $y(x)$ și derivatele acesteia în punctul $x = x_0$ sunt cunoscute. Pe de altă parte din ecuația (7.1) se poate determina $y^{(n)}(x_0)$. Ceilalți coeficienți din dezvoltarea Taylor (7.5) se vor calcula prin diferențierea succesivă a ecuației (7.1), substituind în ultima valorile cunoscute deja ale derivatelor de ordin superior în punctul $x = x_0$.

În mod similar se poate determina soluția problemei Cauchy (7.3)-(7.4).

Exemplu. Să se determine primii 5 termeni ai dezvoltării în serie a soluției $y(x)$ pentru ecuația:

$$y''(1+y) = (y')^2 + y',$$

cu condițiile inițiale $y(0) = y'(0) = 2$.

R e z o l v a r e . Vom căuta soluția sub forma seriei de puteri:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (7.6)$$

Calculăm derivatele funcției în acest punct:

$$y''(x_0) = \left[\frac{y'}{1+y} (1+y') \right]_{x=0} = 2, \quad (7.7)$$

$$y'''(x_0) = \left[\frac{y'}{1+y} (1+y') \right]_{x=0} = \frac{y'y''}{1+y} + (1+y') \frac{(1+y)y'' - (y')^2}{(1+y)^2}; y'''(0) = 2.$$

Așadar, soluția aproximativă se poate scrie sub forma:

$$y(x) \approx 2 + 2x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2}{4!}x^4$$

sau

$$y(x) \approx 2 + 2x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4.$$

7.3. Metoda Euler

Această metodă este o metodă numerică care permite determinarea soluției aproximative $y(x)$ a problemei Cauchy sub forma unui tabel de valori. Ideea metodei se bazează pe dezvoltarea funcției în seria Taylor în vecinătățile unui sir de puncte, numite noduri, $x = x_i, i=0,1,\dots,n-1$ și din care se elimină termenii seriei ce conțin derivatele de ordin mai mare decât unu.

Să considerăm problema Cauchy pentru ecuația diferențială de ordinul unu:

$$y' = f(x, y) \quad (7.8)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (7.9)$$

Să luăm un pas de discretizare destul de mic h , și să construim un sir de puncte (noduri) echidistanțate $x_i = x_0 + i \cdot h, i=0,1,\dots,n-1$. Soluția aproximativă a problemei (6.6)-(6.7) se obține conform algoritmului

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.10)$$

Geometric metoda Euler constă în înlocuirea curbei $y = y(x)$ prin linia poligonală $M_0 M_1 M_2$ (fig.24) în modul următor: tangenta la curba integrală $f(x) = 0$ în punctul $M_0(x_0, y_0)$ are coeficientul unghiular egal cu $k = y'_0 = f(x_0, y_0)$.

Punctele M_1 și M_2 se obțin în urma executării a doi pași după algoritmul (7.10) al metodei Euler. Abaterile punctelor M_1 și M_2 de la curba integrală 0 sunt cauzate de eroarea metodei. După fiecare pas, de fapt, trece pe o altă curbă integrală. Astfel, segmentul $M_1 M_2$ este de acum un segment al tangentei dusă prin punctul $M_1(x_1, y_1)$ la curba integrală 1. Deci sensul geometric al metodei constă în înlocuirea curbei integrale 0, care trece prin punctul (x_0, y_0) , printr-o linie poligonală, numită *frânta lui Euler*. Metoda lui Euler este o metodă directă, care folosește informația legată de un

singur pas (cel precedent) al algoritmului, adică din acest punct de vedere, este o metodă unipas.

Eroarea metodei se constituie din două componente: a) eroarea legată de trunchierea seriei Taylor; b) eroarea rotunjirii. Deoarece aceste erori se adună pas cu pas, eroarea soluției într-un punct x , aflat la o distanță l de la punctul x_0 , poate fi destul de mare. Din acest punct de vedere, metoda Euler este o metodă de ordinul 1 de exactitate.

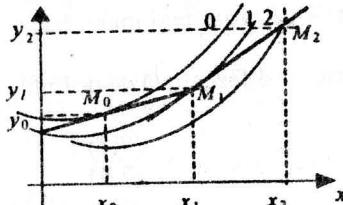


Fig. 24.

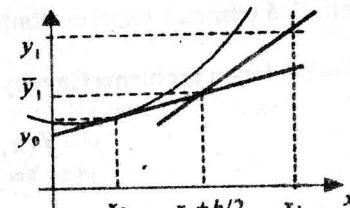


Fig. 25

Fie funcția $f(x,y)$ satisfacă în dreptunghiul $\{|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ condițiile

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq N \cdot |y_1 - y_2|,$$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f \right| \leq M \quad (N, M - \text{const}).$$

Atunci eroarea metodei se estimează în modul următor:

$$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2n} \cdot [(1 + hN)^n - 1],$$

unde $y(x_n)$ - soluția exactă, iar y_n - soluția numerică în punctul $x = x_n$, obținută la pasul n . Această estimare este o estimare teoretică, care se utilizează rar. În practică se procedează în felul următor: se determină soluția după metoda Euler cu pasul h , iar apoi cu pasul $h/2$. Atunci eroarea poate fi estimată conform relației:

$$|y(x_n) - y^*| \approx |y_n - y_{h/2}^*|,$$

aici y_n^* este soluția numerică în punctul $x = x_n$ pentru pasul egal cu $h/2$.

7.4. Metoda Euler modificată

După cum s-a observat, eroarea metodei este considerabilă. Ea poate fi intră-cîrtva micșorată dacă se va folosi un pas de discretizare destul de mic. Aceasta din urmă cere eforturi de calcul considerabile. De aceea au fost propuse mai multe modificări ale metodei Euler în scopul ridicării ordinului preciziei. Una dintre aceste modificări constă în precizarea iterațională a soluției.

Fie că este cunoscută soluția y_i numerică a problemei (7.8)-(7.9). Considerând această soluție ca o aproximare inițială, determinăm următoarea aproximare:

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.11)$$

Folosind această valoare, se obține algoritmul modificat Euler.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})], \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.12)$$

Sensul geometric al metodei poate fi urmărit în figura 25.

7.5. Metoda Runge – Kutta

Această metodă este de asemenea o metodă directă de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare. Ideea metodei constă în construirea unei formule de calcul a soluției problemei Cauchy în punctele x_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) de tipul

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \varphi(x_i, y_i, h), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (7.13)$$

în care funcția $\varphi(x_i, y_i, h)$ ar aproxima segmentul seriei Taylor (7.5) în jurul punctului x_i , cu exactitatea $O(h^{p+1})$ și totodată, să nu conțină derivatele funcției $f(x, y)$. De mentionat că metoda Runge – Kutta de ordinul 1 ($p=1$) este de fapt metoda lui Euler.

Vom exemplifica pentru cazul metodei Runge – Kutta de ordinul 2 modul în care poate fi obținută formula de recurență. În acest scop vom presupune că funcția $\varphi(x, y, h)$ are forma

$$\varphi(x, y, h) = Af(x, y) + Bf(x + \alpha h, y + \beta h), \quad (7.14)$$

în care A, B, α, β sunt niște constante temporar necunoscute. Pentru a le calcula, vom dezvolta termenul al doilea din partea dreaptă a expresiei (7.14) în seria Taylor în vecinătatea punctului (x_i, y_i) , păstrând numai primii trei termeni (exactitatea de aproximare $O(h^2)$). Obținem:

$$\varphi(x, y, h) = Af(x_i, y_i) + \left[h \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} h \beta f(x_i, y_i) + O(h^2) \right].$$

Pe de altă parte, soluția $y(x)$ a problemei (7.8)–(7.9), fiind dezvoltată în seria Taylor cu exactitatea $O(h^2)$, este

$$y_{i+1} = y_i + h \left[f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} \left(f_x(x_i, y_i) + f_y(x_i, y_i) \cdot f(x_i, y_i) \right) \right] + O(h^2).$$

Comparând ultimele două formule, obținem un sistem de ecuații pentru calculul coeficienților necunoscute.

$$A + B = 1; \quad \alpha \cdot \beta = \frac{1}{2}; \quad B \cdot \beta = \frac{1}{2}$$

Sistemul dat cu trei ecuații conține patru necunoscute și este un sistem nedeterminat, soluția căruia este

$$A = 1 - \lambda; \quad B = \lambda; \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2\lambda}$$

și care depinde de parametrul λ . În particular, pentru, $\lambda = 1/2$ se obține formula Runge – Kutta de ordinul doi

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (k_1^{(0)} + k_2^{(0)}) \\ k_1^{(0)} = f(x_i, y_i); \quad k_2^{(0)} = f(x_i + h, y_i + hk_1^{(0)}) \end{cases} \quad (7.15)$$

Într-un mod similar poate fi obținută schema de calcul al metodei Runge – Kutta de orice ordin p . În particular, metoda Runge – Kutta de ordinul patru constă în aplicarea algoritmului:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \\ \Delta y_i = \frac{1}{6} \cdot (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}) \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (7.16)$$

Aici au fost utilizate notațiile

$$k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i); \quad k_2^{(i)} = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_1^{(i)}/2);$$

$$k_3^{(i)} = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_2^{(i)}/2); \quad k_4^{(i)} = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}).$$

Mărimele k_1, k_2, k_3, k_4 au următoarea interpretare geometrică. Fie curba M_0CM_1 (fig. 26) este soluția problemei Cauchy (7.8), (7.9). Punctul C se află la intersecția curbei integrale cu dreapta $x = x_0 + h/2$. Punctele B și P sunt punctele de intersecție a tangentei dusă la curbă în punctul M_0 cu dreptele $x = x_0 + h/2$ și $x = x_0 + h$ respectiv. Atunci k_1/h este egal cu coeficientul unghiular al tangentei dusă la curba integrală în punctul M_0 . Punctul B are coordonatele $x = x_0 + h/2, y = y_0 + k_1/2$. Ca urmare k_2 este coeficientul unghiular al tangentei la curba integrală care trece prin punctul B , iar segmentul BF se află pe această tangentă.

Trasăm prin punctul M_0 o dreaptă paralelă cu segmentul BF . Atunci punctul A va avea coordonatele $x = x_0 + h/2, y = y_0 + k_2/2, k_3/h$ fiind coeficientul unghiular al tangentei la curba integrală care trece prin punctul A . Punctul S este punctul de intersecție al acestei tangente cu dreapta $x = x_0 + h$.

În continuare vom construi o dreaptă prin punctul M_0 paralelă la segmentul AS . Punctul $N(x_0 + h, y_0 + k_3)$ este punctul de intersectie al acestei drepte cu dreapta $x = x_0 + h$. Se observă că k_2/h este coeficientul unghiular al tangentei la curba integrală care trece prin punctul N .

Pasul h poate fi schimbat de la punct la punct. Pentru a verifica corectitudinea alegerii pasului h , se poate calcula mărimea

$$\theta = \left| \frac{k_2^{(0)} - k_3^{(0)}}{k_1^{(0)} - k_2^{(0)}} \right|,$$

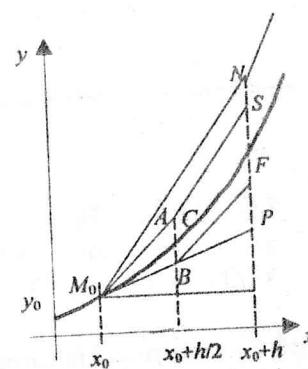


Fig. 26

eroarea metodei este determinată de relația

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{1}{15} |y_n^* - y_n|.$$

Exemplu. Să se determine pe intervalul $[0.5, 1.5]$ cu pasul 0.1 soluția problemei Cauchy $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} (y \ln x - 1)$, $y(0.5) = 1239383$.

R e z o l v a r e. Rezultatele soluționării problemei date prin metoda Euler, Euler modificat și Runge-Kutta sunt prezentate în tabelul ce urmează.

În același tabel se indică și valorile soluției exacte ($y = 1/(x + \ln x + 1)$) în punctele respective. Se observă că cele mai bune rezultate au fost obținute după aplicarea algoritmului Runge-Kutta.

Datele din acest tabel ne demonstrează fenomenul cumulării erorilor de la pas la pas în metoda Euler. Astfel, eroarea în punctul $x = 1.5$ atinge valoarea de 28.3%. Prin urmare, aplicarea metodei Euler pentru calculul soluției într-un număr mare de noduri nu poate fi recomandată. Această eroare a metodei poate fi redusă trecând la calculul cu valori mai mici ale pasului de discretizare h , însă atunci numărul de pași va crește semnificativ, ceea ce în final va micșora exactitatea soluției.

x_i	Metoda Euler	Metoda Euler modificată	Metoda Runge - Kutta	Soluția exactă
0.6	0.778562	0.918289	0.918024	0.918127
0.7	0.597195	0.744085	0.744332	0.744421
0.8	0.493709	0.633550	0.634097	0.634173
0.9	0.425196	0.556453	0.557148	0.557215
1.0	0.375836	0.499176	0.499940	0.500000
1.1	0.338252	0.454671	0.455461	0.455516
1.2	0.308493	0.418912	0.419708	0.419759
1.3	0.284232	0.389427	0.390217	0.390265
1.4	0.263998	0.364611	0.365389	0.365434
1.5	0.246816	0.343374	0.344136	0.344179

LUCRAREA DE LABORATOR NR. 6

1. Scopul lucrării

- 1) Să se determine soluția problemei Cauchy.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

$$y(a) = b$$

pe segmentul indicat $[a, b]$ prin metodele Euler, Euler modificat și Runge-Kutta cu pasul $h = 0.05$;

2) să se efectueze o analiză a rezultatelor obținute.

2. Probleme propuse spre rezolvare

1. $y' = 1 + 0.5y \sin x - 0.75y^2$, $y(0) = 0$; $a = 0$; $b = 1$.
2. $y' = e^x - 0.5y^2$, $y(0) = 0$; $a = 0$; $b = 1$.
3. $y' = x \ln y - y \ln x$, $y(1) = 0$; $a = 1$; $b = 2$.
4. $y' = 0.1 \cdot \sqrt[3]{y} + 0.2 \ln(x+y) - 0.1$, $y(-1) = 2$; $a = -1$; $b = 0$.
5. $y' = \cos y + \sqrt{y} + y^2$, $y(0) = 0$; $a = 0$; $b = 1$.
6. $y' = 1 - \sin(125x + y) + \frac{0.4}{2+x}$, $y(-1) = 0$; $a = -1$; $b = 0$.
7. $y' = \frac{\cos y}{125+x} - 0.25y^2$, $y(0) = 0$; $a = 0$; $b = 1$.
8. $y' = \frac{2.6}{1+x^2} - y^2$, $y(1) = 0.6$; $a = 1$; $b = 2$.
9. $y' = \frac{\cos(1.8x - 0.5)}{15+x^2}$, $y(0) = 0$; $a = 0$; $b = 1$.
10. $y' = e^{-1.2x} \cdot (x^2 + 18)$, $y(0) = 0$; $a = 0$; $b = 1$.
11. $y' = -\frac{y}{x} - 0.2y^2 \ln x$, $y(1) = 1$; $a = 1$; $b = 2$.
12. $y' = \frac{52}{\cos x} - y^3 x$, $y(0) = 1$; $a = 0$; $b = 1$.

8. CALCULUL VALORILOR ȘI VECTORILOR PROPRII ALE MATRICELOR

8.1. Descrierea problemei

Studierea multor procese și fenomene din tehnică, știință, dar și economie, conduce la construirea unor modele matematice, în care un rol deosebit îl au sisteme algebrice de ecuații liniare de forma

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n &= 0. \end{aligned} \quad (8.1)$$

Acest sistem, scris în formă matricială, devine $Ax - \lambda x = 0$ sau

$$(A - \lambda I)x = 0. \quad (8.2)$$

Sistemele de ecuații liniare de așa natură se numesc sisteme omogene. Se observă că sistemul (8.1) are o soluție trivială $x = 0$.

În aplicații se pune problema determinării a altor soluții, diferite de cea nulă. Deoarece sistemul (8.1) depinde de parametrul λ , se poate presupune că pentru unele valori ale acestui parametru sistemul va fi compatibil definit, iar pentru altele – compatibil nefinisit. Condiția necesară și suficientă pentru ca sistemul (8.1) să posedă soluții netriviale este ca rangul matricei A al sistemului să fie mai mic ca n . De aici rezultă că sistemul va avea soluții nenule dacă și numai dacă determinantul sistemului (8.1) va fi egal cu zero, adică

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (8.3)$$

sau

$$\left| \begin{array}{ccccc} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} - \lambda \end{array} \right| = 0.$$

Dezvoltând determinantul de mai sus, obținem un polinom de gradul n în raport cu parametrul λ . Într-adevăr, deoarece unul dintre termenii determinantului va fi format din produsul elementelor de pe diagonala principală, rezultă că termenul superior al polinomului va fi $(-1)\lambda^n$.

Polinomul obținut în rezultatul dezvoltării determinantului se numește *polinom caracteristic* și el se poate scrie în forma

$$D_n(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n). \quad (8.4)$$

Ecuția (8.3) se numește *ecuație caracteristică*, iar rădăcinile ei $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ pentru care sistemul (8.1) admite soluții netriviale și care pot fi atât reale cât și complexe, se numesc *valori proprii* sau *rădăcini caracteristice* ale matricei A . Numerele p_1, p_2, \dots, p_n se numesc coeficienții polinomului caracteristic.

Vectorul nul $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ se numește *vector propriu* al matricei A , asociat valorii proprii λ_0 , dacă are loc egalitatea:

$$Ax = \lambda_0 x.$$

Întrucât polinomul $D_n(\lambda)$ are cel mult n rădăcini distincte, matricea A de asemenea are cel mult n valori proprii distincte. Mulțimea tuturor valorilor proprii ale matricei A formează *spectrul* ei. Dacă una din valorile proprii ale matricei este egală cu zero, atunci matricea este degenerată și, reciproc, o matrice degenerată are o valoare proprie egală cu zero.

Multiplicitate algebraică a valorii proprii a matricei A se numește multiplicitatea rădăcinii λ_0 a ecuației caracteristice (8.3).

Valorile proprii ale unei matrice satisfac relațiile:

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det A, \quad (8.5)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } A, \quad (8.6)$$

unde numărul $\text{tr } A$ se numește *urma matricei*.

De menționat și alte proprietăți ale vectorilor și valorilor proprii. Astfel, dacă λ_0 este valoarea proprie a matricei A , atunci λ_0^k , ($k = 2, 3, \dots$) va fi valoarea proprie pentru matricea A^k . Vectorii proprii, asociati valorilor proprii respective, sunt determinati în rezultatul soluționării sistemului (8.1) pentru valoarile proprii date, iar dacă vectorul x_0 este vector propriu, atunci și orice vector αx_0 ($\alpha = \text{const}$) va fi deasemenea vector propriu pentru matricea dată.

Prin urmare, înlocuind în (8.1) succesiv numerele λ_i și rezolvând sistemul omogen de ecuații liniare obținut, se vor determina n vectori proprii. În procesul calculării valorilor și vectorilor proprii pentru matrice, apar două tipuri de probleme: a) determinarea tuturor valorilor proprii și a vectorilor

proprii asociati acestor valori proprii; b) determinarea uneia sau a cătorva valori și vectori proprii.

Prima problemă constă în dezvoltarea determinantului caracteristic într-un polinom de gradul n . Altfel spus problema constă în calculul coeficienților p_1, p_2, \dots, p_n ai polinomului caracteristic $D(\lambda)$, după ce se va rezolva ecuația caracteristică și, în sfârșit, se vor determina vectorii proprii.

Problema a doua se mărginește la determinarea uneia sau a mai multor valori proprii cu ajutorul unor metode iterative fără ca să fie construit polinomul caracteristic.

Metodele aplicate la rezolvarea primei probleme sunt *metode directe* în sensul că dacă ele sunt aplicate la matricele, elementele cărora sunt determinate exact, iar calculele se efectuează în mod precis, fără erori de rotunjire, atunci coeficienții polinomului caracteristic sunt determinați precis și vectorii proprii vor fi exprimați în funcție de valorile proprii cu ajutorul unor formule.

Metodele de rezolvare a celei de a doua probleme sunt *metode iterative*. În acest caz valorile proprii și coordonatele vectorilor proprii se obțin prin trecerea la limită în niște siruri special construite.

În procesul determinării valorilor și vectorilor proprii o importanță deosebită o au matricele similare.

Matricea pătrată B se numește *matrice similară* (matrice asemenea) matricei date A dacă există o matrice nedegenerată T astfel încât $B = TAT^{-1}$. Aceste matrice apar în procesul schimbării variabilelor. Astfel, dacă sistemul inițial de ecuații are forma

$$Ax = b,$$

atunci introducând notațiile $y = Tx$, $Tb = c$, obținem sistemul transformat

$$TAT^{-1}y = c.$$

Matricea sistemului de ecuații transformat devine egală cu TAT^{-1} .

O proprietate importantă a transformărilor de asemănare constă în faptul că ele păstrează valorile proprii ale matricei inițiale. Într-adevăr, avem:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det(TT^{-1}) \det(A - \lambda I) = \\ &= \det(T) \det(A - \lambda I) \det(T^{-1}) = \det(TAT^{-1} - \lambda I) \end{aligned}$$

Vectorii proprii, însă, în rezultatul unor transformări similare se schimbă.

Se pune întrebarea la ce formă "simplă" poate fi adusă matricea A în rezultatul transformării similare. Răspuns la această problemă este dat de următoarea teoremă.

Teorema 8.1. Matricea A este similară cu matricea diagonală dacă și numai dacă ea are exact n vectori proprii liniar independenți.

Această teoremă permite ca în rezultatul transformărilor similare să se treacă de la matricea A la matricea

$$\Lambda = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

pe diagonala principală a căreia se află valorile proprii ale matricei A repetate conform cu multiplicitățile lor, ceea ce face posibil calculul lor.

Din teorema 8.1 rezultă două consecințe importante.

Teorema 8.2. Dacă toate valorile proprii ale matricei A sunt distințe, atunci ea este similară unei matrice diagonale.

Teorema 8.3. Dacă matricea A cu elemente reale este simetrică atunci ea este similară unei matrice diagonale.

O altă posibilitate care simplifică procesul de calcul a valorilor proprii este aducerea matricei A la forma triunghiulară cu ajutorul unor transformări, de exemplu, utilizând metoda Gauss.

Exemplu. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ale matricei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

R e z o l v a r e. Deoarece matricea dată este de ordinul doi, calculul polinomului caracteristic nu prezintă o problemă dificilă, determinantalul caracteristic fiind posibil de dezvoltat în mod direct. Avem:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14.$$

Deci ecuația caracteristică este:

$\lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$,
soluțiile ei fiind $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -2$.

Trecem la determinarea vectorilor proprii $x^{(1)}$ și $x^{(2)}$.

Pentru valoarea proprie $\lambda_1 = 7$ obținem sistemul de ecuații omogene:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 \\ 7x_2 \end{pmatrix}$$

sau $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7x_1 \\ 5x_1 + 2x_2 = 7x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Deoarece ecuațiile sistemului sunt liniar dependente, ba chiar coincid, precăutăm una din ele și obținem $x_1 = x_2$. Alegem în mod arbitrar valoarea pentru x_2 , de exemplu, $x_2 = 1$ și atunci $x_1 = 1$. Astfel primul vector propriu devine:

$$x^{(1)} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

unde α_1 este o constantă arbitrară. În mod similar pentru a doua valoare proprie $\lambda_2 = -2$ obținem vectorul propriu

$$x^{(2)} = \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8.2. Metodele Leverrier și Faddeev

Metoda Leverrier se utilizează pentru determinarea coeficienților polinomului caracteristic asociat matricei patrate A și este bazată pe formulele newtoniene pentru sumele puterilor rădăcinilor ecuației algebrice.

Să considerăm polinomul caracteristic al matricei $A = (a_{ij})_{nn}$

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n \quad (8.7)$$

și fie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ rădăcinile acestui polinom (fiecare rădăcină în acest set se repetă de atâtea ori cât este multiplicitatea ei).

Formăm sumele

$$S_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (8.8)$$

Pentru aceste sume pentru orice $k \leq n$ au loc relațiile de recurență
Newton

$$S_k + p_1 S_{k-1} + p_2 S_{k-2} + \dots + p_{k-1} S_1 = -kp_k. \quad (8.9)$$

De aici rezultă

$$\begin{aligned} p_1 &= -S_1 \\ p_2 &= -\frac{1}{2}(S_2 + p_1 S_1) \\ &\dots \\ p_n &= -\frac{1}{2}(S_n + p_1 S_{n-1} + \dots + p_{n-1} S_1). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Așa dar, fiind cunoscute sumele S_1, S_2, \dots, S_n putem pas cu pas să determinăm coeficienții p_1, p_2, \dots, p_n ai polinomului caracteristic.

Tinând cont că

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \text{tr } A \\ S_2 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(2)} = \text{tr } A^2 \\ &\dots \\ S_n &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^n = \sum_{i=1}^n a_{ii}^{(n)} = \text{tr } A^n \end{aligned} \quad (8.11)$$

Rămâne să calculăm matricele $A^2 = (a_{ij}^{(2)})$, $A^3 = (a_{ij}^{(3)})$, ..., $A^n = (a_{ij}^{(n)})$. Aceste matrice se calculează secvențial prin înmulțirea directă:

$$A^k = A^{k-1} \cdot A$$

O modificare a metodei Leverrier este *metoda Faddeev*. Algoritmul acestei variante a metodei Leverrier este următorul.

Fie matricea $C(\lambda)$ este matricea adjuncță pentru matricea $A - \lambda I$. Atunci

$$C(\lambda)(A - \lambda I) = D(\lambda)$$

unde $D(\lambda)$ este polinomul caracteristic.

Vom căuta matricea $C(\lambda)$ sub formă

$$C(\lambda) = C_0 \lambda^{n-1} + C_1 \lambda^{n-2} + \dots + C_{n-1}. \quad (8.12)$$

Aici C_i sunt matrice pătrate cu n linii și n coloane și care nu depind de parametrul λ .

Substituind (8.12) în formula (8.11) și comparând coeficienții, de pe lângă puterile lui λ din partea stângă și partea dreaptă a egalității, primim

$$\begin{aligned} -C_0 &= (-1)^n I \\ C_1 - C_0 A &= (-1)^{n-1} p_1 I \\ C_2 - C_1 A &= (-1)^{n-1} p_2 I \\ &\dots \\ C_{n-1} - C_{n-2} A &= (-1)^{n-1} p_{n-1} I \\ C_{n-1} A &= (-1)^n p_n I. \end{aligned} \quad (8.13)$$

De aici rezultă

$$C_0 = (-1)^{n-1} I \quad (8.14)$$

$$C_1 = C_0 A + (-1)^{n-1} p_1 I = (-1)^{n-1} (A + p_1 I). \quad (8.15)$$

Deoarece coeficientul $p_1 = \text{tr } A$ este cunoscut, se poate calcula matricea C_1 .

În continuare, înmulțind ambele părți ale relației a două din (8.13) cu A și calculând urmărele matricelor obținute, avem:

$$\text{tr } C_1 A = (-1)^{n-1} (\text{tr } A^2 + p_1 \text{tr } A) = (-1)^{n-1} (S_2 + p_1 S_1) = (-1)^n 2p_2.$$

Aici au fost folosite notațiile metodei Leverrier.

Ultima formulă permite calculul coeficientului p_2 . Din egalitatea a treia a formulelor (8.13) se determină matricea C_2 , după ce înmulțind-o cu A , obținem

$$\begin{aligned} \text{tr } C_2 A &= \text{tr } C_1 A^2 + (-1)^{n-1} p_2 \text{tr } A = \\ &= (-1)^{n-1} (S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1) = (-1)^n 3p_3. \end{aligned}$$

Continuând calculele în mod similar în final ultima egalitate (8.13) devine

$$\operatorname{tr} C_{n-1} A = (-1)^n p_n.$$

De menționat că metoda Faddev cere un volum cu mult mai mare de operații de calcul în comparație cu metoda Leverrier, însă utilizarea ei permite concomitent cu determinarea coeficienților polinomului caracteristic să fie calculate și alte caracteristici ale matricei A .

Astfel, în procesul calculelor se calculează determinantul matricei $\det A = (-1)^n p_n$, dar și matricea adjunctă, egală cu $(-1)^n C_{n-1}$.

Deoarece matricea adjunctă este cunoscută în continuare poate fi calculată matricea inversă

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (-1)^n C_{n-1}.$$

Pe de altă parte, dacă λ_1 este rădăcina polinomului caracteristic și $C(\lambda_1) \neq 0$, atunci coloanele matricei $C(\lambda_1)$ sunt vectorii proprii ai matricei A , deoarece pentru această valoare proprie obținem:

$$C(\lambda_1)(A - \lambda_1 I) = D(\lambda_1) = 0.$$

Această ultimă proprietate are loc atunci când λ_1 este o rădăcină de multiplicitatea unu. În cazul când λ_1 are o multiplicitate mai mare ca unu, calculele vectorilor proprii se complică, fiind nevoie de trecut la derivatele matricei $C(\lambda_1)$ după parametrul λ_1 .

Exemplu. Pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.2 & 1.0 \\ 5.0 & 1.0 & 5.0 \\ 1.0 & 0.2 & 1.0 \end{pmatrix}$$

să se obțină polinomul caracteristic și rădăcinile acestui polinom, respectiv valorile proprii ale ei.

R e z o l v a r e. Pentru a aplica metoda Leverrier construim matricele A^2 și A^3 . Avem:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.2 & 1.0 \\ 5.0 & 1.0 & 5.0 \\ 1.0 & 0.2 & 1.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 & 0.2 & 1.0 \\ 5.0 & 1.0 & 5.0 \\ 1.0 & 0.2 & 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0 & 0.6 & 3.0 \\ 15.0 & 3.0 & 15.0 \\ 3.0 & 0.6 & 3.0 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3.0 & 0.6 & 3.0 \\ 15.0 & 3.0 & 15.0 \\ 3.0 & 0.6 & 3.0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.0 & 0.2 & 1.0 \\ 5.0 & 1.0 & 5.0 \\ 1.0 & 0.2 & 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.0 & 1.8 & 9.0 \\ 45.0 & 9.0 & 45.0 \\ 9.0 & 1.8 & 9.0 \end{pmatrix}.$$

Aplicând formulele (8.11) calculăm sumele S_1, S_2 și S_3 :

$$S_1 = \operatorname{tr} A = 1 + 1 + 1 = 3,$$

$$S_2 = \operatorname{tr} A^2 = 3 + 3 + 3 = 9,$$

$$S_3 = \operatorname{tr} A^3 = 9 + 9 + 9 = 27.$$

De aici cu ajutorul relațiilor (8.10) determinăm coeficienții polinomului caracteristic:

$$p_1 = -S_1 = -3, \quad p_2 = -\frac{1}{2}(S_2 + p_1 S_1) = -\frac{1}{2}(9 - 3 \cdot 3) = 0,$$

$$p_3 = -\frac{1}{3}(S_3 + p_1 S_2 + p_2 S_1) = -\frac{1}{3}(27 - 3 \cdot 9 - 3 \cdot 0) = 0.$$

Prin urmare polinomul caracteristic va fi:

$$D(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 3),$$

iar valorile proprii ale matricei A sunt rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$ ale acestui polinom.

8.3. Metoda puterii

Această metodă este o metodă iterativă și este destinată rezolvării problemei parțiale a valorilor proprii deoarece permite calculul unei singuri valori proprii. Metoda puterii se aplică cu succes la determinarea valorilor proprii ale matricelor cu structuri speciale ca, de exemplu, la matricele rare (matrice de mari dimensiuni și cu un număr foarte redus de elemente nenule).

Să considerăm ecuația caracteristică $\det(A - \lambda I) = 0$ și să admitem că matricea A posedă un sistem de n vectori proprii liniar independenți

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}.$$

Fie că toate valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ale matricei sunt ordonate în ordine descrescătoare

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

și ne vom mărgini la cazul că valoarea proprie λ_1 este unică care după valoarea absolută depășește celelalte numere proprii. Altfel spus valoarea proprie este *dominantă*.

Alegem în mod arbitrar un vector nenul $y^{(0)}$. Așa cum sistemul de vectori $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ este liniar independent în \mathbb{R}^n , el formează o bază a acestui spațiu și prin urmare vectorul $y^{(0)}$ poate fi descompus după acest sistem, adică:

$$y^{(0)} = \sum_{j=1}^n \alpha_j x^{(j)}, \quad (8.16)$$

unde coeficienții α_j sunt niște constante.

Înmulțim relația (8.16) din stânga cu matricea A și obținem

$$Ay^{(0)} = \sum_{j=1}^n \alpha_j Ax^{(j)}. \quad (8.17)$$

Deoarece vectorul $x^{(j)}$ este vector propriu, rezultă $Ax^{(j)} = \lambda_j x^{(j)}$ și atunci

$$Ay^{(0)} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j x^{(j)}. \quad (8.18)$$

În mod similar, prelungind procesul iterativ, secvențial obținem setul de vectori

$$Ay^{(0)}, A^2 y^{(0)}, \dots, A^k y^{(0)}, \dots,$$

unde vectorul

$$y^{(k)} = A^k y^{(0)} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j^k x^{(j)} \quad (8.19)$$

este vectorul obținut la iterată cu numărul k .

Relația vectorială (8.19) o vom transcrie în componente în modul următor:

$$y_j^{(k)} = \beta_1 \lambda_1^k + \beta_2 \lambda_2^k + \dots + \beta_n \lambda_n^k, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (8.20)$$

Aici au fost introduse notațiile $y^{(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots, y_n^{(k)})$, $\beta_j = \alpha_j x^{(j)}$,

Dacă $|\lambda_1| > |\lambda_i|, i > 1$ și $\alpha_1 \neq 0$ atunci putem forma raportul

$$\frac{y_j^{(k+1)}}{y_j^{(k)}} = \frac{\beta_1 \lambda_1^{k+1} + \beta_2 \lambda_2^{k+1} + \dots + \beta_n \lambda_n^{k+1}}{\beta_1 \lambda_1^k + \beta_2 \lambda_2^k + \dots + \beta_n \lambda_n^k} =$$

$$= \lambda_1 \frac{1 + \gamma_2 \mu_2^{k+1} + \dots + \gamma_n \mu_n^{k+1}}{1 + \gamma_2 \mu_2^k + \dots + \gamma_n \mu_n^k},$$

unde

$$\gamma_j = \frac{\beta_j}{\beta_1}, \quad \mu_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_1}.$$

Luând în considerație faptul că $|\mu_i| < 1$ pentru orice $i > 1$, atunci când numărul iterațiilor k crește nemărginit, obținem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_j^{(k+1)}}{y_j^{(k)}} = \lambda_1. \quad (8.21)$$

Prin urmare putem considera că pentru un număr destul de mare k

$$\frac{y_j^{(k+1)}}{y_j^{(k)}} \approx \lambda_1 \quad (8.22)$$

Pe de altă parte din cele expuse mai sus rezultă regula de formare a vectorului propriu asociat valorii proprii λ_1 și anume:

$$x^{(0)} = \frac{1}{\alpha_1 \lambda_1^k} y^{(k+1)}. \quad (8.23)$$

Așa cum vectorul propriu se determină cu precizia unui factor constant se poate considera că vectorul propriu căutat va fi

$$x^{(0)} = C_k y^{(k+1)}$$

unde constanta C_k este un factor de scalare.

De menționat că algoritmul dat poate fi aplicat și în cazul în care matricea A are câteva valori proprii dominante egale.

Convergența metodei puterii în mare măsură depinde de alegerea vectorului inițial $y^{(0)}$. De asemenea viteza de convergență este cu atât mai mare cu cât raportul $|\lambda_1|/|\lambda_2|$ este mai mic.

Exemplu. Să se determine prin metoda puterii cel mai mare după valoarea absolută număr propriu și vectorul propriu respectiv al matricei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

R e z o l v a r e. Conform algoritmului metodei puterei alegem în mod arbitrar aproximarea inițială pentru procesul iterativ. Fie, de exemplu,

$$y^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

În mod secvențial construim vectorii $Ay^{(0)}$, $A^2y^{(0)}$, ..., $A^ky^{(0)}$. Rezultatele calculelor sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Pentru simplificare au fost efectuate numai 6 iterații. După ultimul pas conform algoritmului rezultă:

$y^{(0)}$	$Ay^{(0)}$	$A^2y^{(0)}$	$A^3y^{(0)}$	$A^4y^{(0)}$	$A^5y^{(0)}$	$A^6y^{(0)}$
4	37	354	3258	29754	270378	2448954
-1	-13	-141	-1413	-13581	-127413	-1177821
6	50	426	3690	32346	285930	25422266

$$\lambda_1^{(0)} = \frac{y_1^{(6)}}{y_1^{(5)}} = \frac{2448954}{270378} = 9.0575, \quad \lambda_1^{(2)} = \frac{y_2^{(6)}}{y_2^{(5)}} = \frac{-1177821}{-127413} = 92441,$$

$$\lambda_1^{(3)} = \frac{y_3^{(6)}}{y_3^{(5)}} = \frac{25422266}{285930} = 8.8912.$$

În calitate de valoare proprie λ_1 poate fi luat oricare număr din acestea trei. În particular, un rezultat mai precis va fi media aritmetică:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_1^{(1)} + \lambda_1^{(2)} + \lambda_1^{(3)}}{3} = \frac{9.0575 + 92441 + 8.8912}{3} = 9.0642.$$

De menționat că pentru această matrice valoarea corectă a celui mai mare după valoarea absolută număr propriu este $\lambda_1 = 9$. În calitate de vector propriu, asociat valorii proprii λ_1 , poate fi luat vectorul

$$Ay^{(6)} = \begin{pmatrix} 2448954 \\ -1177821 \\ 25422266 \end{pmatrix}.$$

Normalizându-l, prin împărțirea lui, de exemplu, la numărul $\sqrt{(y_1^{(6)})^2 + (y_2^{(6)})^2 + (y_3^{(6)})^2}$, obținem vectorul:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0958 \\ -0.0461 \\ 0.9943 \end{pmatrix}.$$

Chiar acest exemplu simplu ne indică neajunsurile metodei. Așa, dacă $|\lambda_1| > 1$, componentele vectorilor $A^k y^{(0)}$ după valoarea absolută cresc exponential de la pas la pas, ceea ce poate provoca obținerea unor numere foarte mari în calculator ($|y_i^{(k)}| \rightarrow \infty$). Pe de altă parte, dacă $|\lambda_1| < 1$ valorile obținute pentru componentele acestor vectori sunt foarte mici și-și perd la un moment dat semnificația ($|y_i^{(k)}| \rightarrow 0$). De aceea se recomandă ca în procesul determinării valorii proprii prin metoda puterii de normalizat valorile obținute la fiecare iteratie.

Datorită convergenței foarte lente a metodei puterii, aceasta este aplicată numai la calculul primei valori proprii pentru matrice rarefiante (cu un număr foarte redus de elemente nenule).

8.4. Metoda Krâlov

Metoda are la bază proprietatea matricei pătrate de a anula polinomul său caracteristic. Conform identității Cayley-Hamilton orice matrice pătrată este rădăcina ecuației sale caracteristice.

Fie polinomul caracteristic al matricei A este:

$$D(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n. \quad (8.24)$$

Vom înlocui în (8.24) parametrul λ prin matricea A și obținem

$$A^n + p_1 A^{n-1} + \dots + p_n I = 0. \quad (8.25)$$

Să considerăm un vector arbitrar nenul $y^{(0)}$ și vom înmulți ambele părți ale egalității (8.25) din dreapta cu acest vector. Obținem:

$$A^n y^{(0)} + p_1 A^{n-1} y^{(0)} + \dots + p_n y^{(0)} = 0. \quad (8.26)$$

Dacă vom nota $Ay^{(k-1)} = y^{(k)}$ atunci egalitatea (8.26) devine:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y^{(0)} = 0.$$

de unde obținem

$$-y^{(n)} = p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y^{(0)}. \quad (8.27)$$

Trecând la componentele acestei egalități vectoriale, primim un sistem de ecuații liniare algebrice pentru determinarea coeficienților ecuației caracteristice și anume:

$$p_1 y_1^{(n-1)} + p_2 y_1^{(n-2)} + \dots + p_n y_1^{(0)} = -y_1^{(n)}$$

$$p_1 y_2^{(n-1)} + p_2 y_2^{(n-2)} + \dots + p_n y_2^{(0)} = -y_2^{(n)} \quad (8.28)$$

$$\dots$$

$$p_1 y_n^{(n-1)} + p_2 y_n^{(n-2)} + \dots + p_n y_n^{(0)} = -y_n^{(n)}$$

Coefficienții $y_i^{(k)}$, $i=1,2,\dots,n$ ai acestui sistem se calculează cu ajutorul formulelor:

$$y_i^{(0)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^{(0)}$$

$$y_i^{(1)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^{(1)}$$

$$\dots$$

$$y_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^{(n)}$$

În rezultatul rezolvării sistemului (8.28), de exemplu prin metoda Gauss, se determină coeficienții polinomului caracteristic p_i , $i=1,2,\dots,n$.

Fiind cunoscuți coeficienții polinomului caracteristic și rădăcinile acestuia, adică valorile proprii ale matricei, prin metoda Krâlov se pot determina și vectorii proprii, folosind relațiile:

$$x^{(k)} = y^{(n-1)} + q_{1,k} y^{(n-2)} + \dots + q_{n-1,k} y^{(0)}, \quad k=1,2,\dots,n, \quad (8.29)$$

unde coeficienții q_{ij} se calculează după formulele recurente:

$$q_{0,j} = 1, \quad q_{ij} = \lambda_j q_{i-1,j} + p_i, \quad i=1,2,\dots,n-1, \quad j=1,2,\dots,n \quad (8.30)$$

care rezultă din scema Horner.

LUCRAREA DE LABORATOR NR. 7

I. Scopul lucrării

1) Să se alcătuească o procedură în limbajul Turbo Pascal pentru determinarea coeficienților polinomului caracteristic, matricei inverse și a determinantului, după metoda Faddeev, pentru matricea dată A .

2) Folosind metoda puterii să se calculeze cu ajutorul unui program Turbo Pascal cea mai mare după valoarea absolută valoare proprie pentru matricea dată.

Variante ale matricelor A sunt date în condițiile lucrării de laborator nr.2.

Bibliografie

1. Bratianu C., Bostan V., Cojocia L., Negreanu G.P. *Metode numerice*. Bucureşti, Editura tehnică, 1996.
2. Iorga V., Jora B. *Programarea numerică*. Bucureşti, Editura Teora, 1996.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений*. тт. 1,2. Москва, Наука, 1966.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. *Основы вычислительной математики*. Москва, Наука, 1970.
5. Волков Е. А. *Численные методы*. Москва, Наука, 1987.
6. Buzurniuc Ş., Moraru V., Popescu A. *Metode numerice. Îndrumar de laborator*. Chişinău, Editura Universitatea tehnică, 1996.
7. Moraru V. *Metode numerice în algebra liniară*. Chişinău, Editura Universitatea tehnică, 1995.

C U P R I N S

PREFĂTĂ	3
1. ELEMENTE DE ANALIZĂ A ERORILOR	7
1.1. Surse de erori	7
1.2. Erori absolute și erori relative	7
1.3. Propagarea erorilor	9
1.4. Numere cu virgulă mobilă	12
2. REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR ALGEBRICE ȘI TRANSCENDENTE	14
2.1. Separarea rădăcinilor	14
2.2. Calculul rădăcinii reale prin metoda înjumătățirii intervalului	16
2.3. Metoda aproximățiilor succesive	17
2.4. Metoda lui Newton (tangente)	20
2.5. Metoda coardelor și metoda secantelor	24
Lucrarea de laborator nr. 1	28
3. REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE	30
3.1. Elemente de analiză matricială	30
3.2. Sisteme de ecuații liniare algebrice	32
3.3. Metoda eliminării a lui Gauss	33
3.4. Metoda lui Cholesky (metoda rădăcinii pătrate)	38
3.5. Metode iterative de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare. Metodele Jacobi și Gauss -Seidel	41
3.6. Inversarea matricelor. Metoda Jordan-Gauss	49
Lucrarea de laborator nr. 2	52
4. METODE NUMERICE PENTRU REZOLVAREA SISTEMELOR NELINIARE	54
4.1. Metoda Newton	54
4.2. Metoda aproximățiilor succesive (contractiei)	56
Lucrarea de laborator nr. 3	59
5. INTERPOLAREA FUNCȚIILOR	60
5.1. Descrierea problemei de interpolare	60
5.2. Interpolarea algebrică	61
5.3. Polinomul Lagrange	63
5.4. Formulele de interpolare Newton	70
5.5. Aplicații	72

Lucrarea de laborator nr. 4	74
6. CALCULUL NUMERIC AL INTEGRALELOR	76
6.1. Formula dreptunghiurilor și formula trapezelor	76
6.2. Formula lui Simpson (metoda parabolelor)	81
6.3. Regula lui Runge	83
Lucrarea de laborator nr. 5	84
7. INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE	86
7.1. Problema Cauchy	86
7.2. Metoda seriilor de puteri (metoda derivării succesive)	87
7.3. Metoda Euler	89
7.4. Metoda Euler modificată	91
7.5. Metoda Runge – Kutta	91
Lucrarea de laborator nr. 6	95
8. CALCULUL VALORILOR ȘI VECTORILOR PROPRII ALE MATRICELOR	97
8.1. Descrierea problemei	97
8.2. Metodele Leverrier și Faddeev	101
8.3. Metoda puterii	105
8.4. Metoda Králov	109
Lucrarea de laborator nr. 7	111
BIBLIOGRAFIE	112

Ştefan Buzurniu

Vasile Moraru

METODE NUMERICE

Material didactic

Bun de tipar 27.12.2000 Formatul hârtiei 60x84 1/16
 Hârtie offset. Tipar offset. Coli de tipar 7,25. Comanda nr. 120.
 Tirajul 300 ex.

Universitatea Tehnică a Moldovei.
 Chișinău, bd. Ștefan cel Mare și Sfânt, 168
 Sectia Redactare, Editare și Multiplicare a U. T. M.
 Chișinău, str. Studentilor, 11