

*Facultatea Calculatoare, Informatică și Microelectronică
Departamentul Informatică și Ingineria Sistemelor*

**Conf. univ. , dr. Ștefan BUZURNIUC
Conf. univ., dr. Vasile MORARU**

**M E T O D E Ș I M O D E L E
D E C A L C U L**

*Modulul I Metode numerice
Îndrumar de laborator*

**Chișinău, U.T.M.
2020**

LUCRĂRILE DE LABORATOR NR.1 ȘI NR.2

REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR ALGEBRICE ȘI TRANSCENDENTE

1.Scopul lucrărilor

- 1) Să se separe toate rădăcinile reale ale ecuației $f(x)=0$ unde $y=f(x)$ este o funcție reală de variabilă reală.
- 2) Să se determine o rădăcină reală a ecuației date cu ajutorul metodei înjumătățirii intervalului cu o eroare mai mică decât $\varepsilon=10^{-2}$.
- 3) Să se precizeze rădăcina obținută cu exactitatea $\varepsilon=10^{-6}$ utilizând
 - metoda aproximațiilor succesive
 - metoda tangentelor (Newton)
 - metoda secantelor.
- 4) Să se compare rezultatele luând în considerație numărul de iterații, evaluările pentru funcții și derivată.

2.Probleme date spre rezolvare

Nr.	$f(x)$	Nr.	$f(x)$
1	a) $\cos(x)+x-1$ b) $x^3-30x-41$	5	a) $2-x-\ln(x)$ b) $x^3+29x+34$
2	a) $\ln(x+1)-4x$ b) $x^3-25x+19$	6	a) $2x-e^{-x}$ b) $x^3-26x+43$
3	a) e^x+3x b) $x^3-23x-42$	7	a) $\lg(1+x)+x-1,5$ b) $x^3+25x-37$
4	a) $\sqrt{x+1}-\frac{1}{x}$ b) $x^3+34x+23$	8	a) $(2-x)*e^x-0,5$ b) $x^3-12x+3$

Nr.	$f(x)$	Nr.	$f(x)$
9	a) $(x+3)^3 - \cos(x)$ b) $x^3 + 13x - 1$	18	a) $2^x + 3x - 0,5$ b) $x^3 - 37x - 52$
10	a) $e^{-x} \cdot \sin(x) + 1$ b) $x^3 + 9x - 3$	19	a) $\cos(x) + 2x - 0,5$ b) $x^3 - 26x + 43$
11	a) $x^2 - \ln(x+1)$ b) $x^3 + 12x + 4$	20	a) $2^x - 1$ b) $x^3 - 14x - 31$
12	a) $x^3 - \cos(x)$ b) $x^3 + 14x - 6$	21	a) $\lg(x+2x) + x - 2$ b) $x^3 - 25x + 2$
13	a) $(x+1)^3 + \ln(x)$ b) $x^3 + 23x + 1$	22	a) $2^x - 2x$ b) $x^3 - 15x + 14$
14	a) $2(x-1)^2 - e^x$ b) $x^3 + 20x - 41$	23	a) $\lg(2x+3) + 2x - 1$ b) $x^3 + 7x - 2$
15	a) $x^2 - \sin(x)$ b) $x^3 - 25x + 47$	24	a) $1 - x^2 - 2e^x$ b) $x^3 - 25x + 11$
16	a) $2^x - (x+1)^2$ b) $x^3 - 21x - 37$	25	a) $\sqrt{\lg(x+2)} - x$ b) $x^3 - 25x + 11$
17	a) $x^2 + 4 \cdot \sin(x)$ b) $x^3 - 18x + 43$	26	a) $\cos(x) + 3x + 1$ b) $x^3 - 20x + 14$

3.Descrierea metodelor

Rezolvarea ecuației $f(x)=0$ implică parcurgerea a două etape importante:

- *separarea rădăcinilor*, care constă în determinarea unui interval $[a, b]$ în care este situată o rădăcină reală a ecuației;

- *calculul aproximativ* ai fiecărei rădăcini și evaluarea erorii care s-a comis considerând că separarea deja s-a efectuat.

3.1 Separarea rădăcinilor

Separarea rădăcinilor se poate face prin diferite metode. Cele mai des utilizate în practică sunt următoarele două metode de separare:

- a) *Metoda grafică*. Adeseori ecuația $f(x)=0$ poate fi pusă sub forma echivalentă $\varphi(x)=g(x)$. Rădăcinile ultimei ecuații sunt abscisele punctelor de intersecție ale curbelor $y=\varphi(x)$ și $y=g(x)$.

De exemplu ecuația

$$2^x - \cos(x) - 0.5 = 0$$

se poate pune sub forma echivalentă

$$2^x - 0.5 = \cos(x).$$

Atunci rădăcinile ei sunt abscisele punctelor de intersecție ale curbelor $y=2^x-0.5$ și $y=\cos(x)$ (vezi fig.1)

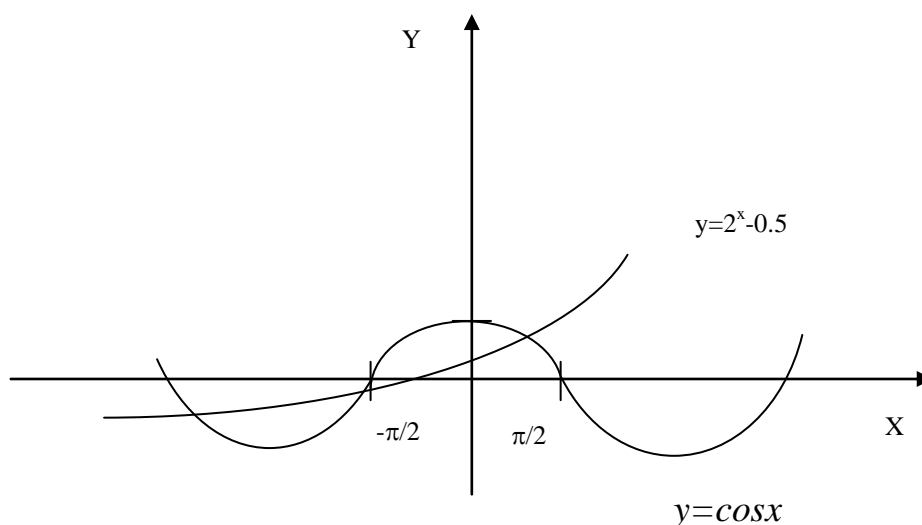


FIGURA 1

Astfel ecuația dată are două rădăcini reale $r_1 \in (-\pi/2, 0)$ și $r_2 \in (0, \pi/2)$.

- b) *Metoda șirului lui Rolle*. Se știe din cursul de analiză matematică că între două rădăcini reale consecutive ale derivatei funcției $y=f(x)$ există cel mult o rădăcină

reală a ecuației $f(x)=0$. De asemenea între două rădăcini consecutive ale ecuației $f(x)=0$ există cel puțin o rădăcină a ecuației $f'(x)=0$.

Fie $a < x_1 < x_2 < \dots < x_k < b$ rădăcinile ecuației $f'(x)=0$, așezate în ordine crescătoare. Șirul $f(a), f(x_1), \dots, f(x_k), f(b)$ se numește șirul lui Rolle. Ecuația $f(x)=0$ are atâtea rădăcini reale câte alternanțe de semn prezintă șirul lui Rolle.

Exemplu:

Fie ecuația

$$F(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$$

Derivata

$$F'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4x + 3 = 4x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = (x^2 - 1)(4x - 3)$$

se anulează pentru $x = -1$, $x = \frac{3}{4}$, $x = 1$.

Șirul lui Rolle este următorul:

x	-2	-1	3/4	1	2
y	7	-6	-1,98	-2	3

Prin urmare avem două alternanții de semn, deci ecuația dată are pe intervalul $(-2, 2)$ două rădăcini reale $r \in (-2, -1)$ și $r \in (1, 2)$.

3.2 Calculul rădăcinii reale prin metoda înjumătățirii intervalului

Fie ecuația $f(x)=0$ unde funcția $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$, are o singură rădăcină reală în acest interval și $f(a) \cdot f(b) < 0$. Calculăm $c = \frac{(a+b)}{2}$ jumătatea intervalului $[a, b]$. Dacă $f(c)=0$, atunci c este chiar rădăcina căutată. Dacă nu, atunci rădăcina reală se găsește într-unul din intervalele $[a, c]$ sau $[c, b]$, acolo unde funcția ia valori de semne contrare la capetele intervalului. Fie acesta notat din nou cu $[a, b]$, unde:

$$A = \begin{cases} c, \text{sign}f(a) = \text{sign}f(c) \\ c, \text{sign}f(a) \neq \text{sign}f(c) \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} c, \text{signf}(b) = \text{signf}(c) \\ b, \text{signf}(b) \neq \text{signf}(c) \end{cases}$$

Fie $\varepsilon > 0$ marginea superioară a erorii absolute, care se admite. Dacă $|b - a| < 2\varepsilon$, atunci c aproximează rădăcina r cu eroarea dorită deoarece $|c - r| < \varepsilon$.

Observație. În programele de calculator operația de înjumătățire se recomandă de scris astfel:

$$c = a + \frac{(b - a)}{2},$$

deoarece formula $c = \frac{(a + b)}{2}$, ne poate scoate în afara intervalului $[a, b]$.

Se prezintă mai jos o subrutină de calcul după metoda înjumătățirii intervalului

```
PROCEDURE BISECT (A,B,EPS:REAL;
                  VAR X, FX:REAL;
                  VAR K:INTEGER;
                  F:FUNCT;);
VAR
  C,D:REAL;
BEGIN
  C:=A;
  IF F(A)<0 THEN C:=B;
  D:=A+B-C;
  K:=0;
  REPEAT
    X:=C+0.5*(D-C);
    INC(K);
    FX:=F(X);
    IF FX=0 THEN EXIT;
    IF FX>0 THEN C:=X ELSE D:=X;
  UNTIL (ABS(C-D)<EPS);
END;
```

3.3 Metoda aproximațiilor succesive

Ecuția $f(x)=0$ o punem sub forma echivalentă $x=\varphi(x)$. Plecând de la o valoare inițială arbitrară x_0 generăm șirul x_k după regula: $x_{k+1}=\varphi(x_k)$, $k=0,1,2,\dots$, adică $x_2=\varphi(x_0)$, $x_3=\varphi(x_1)$, $\dots, x_k=\varphi(x_{k-1})$, \dots

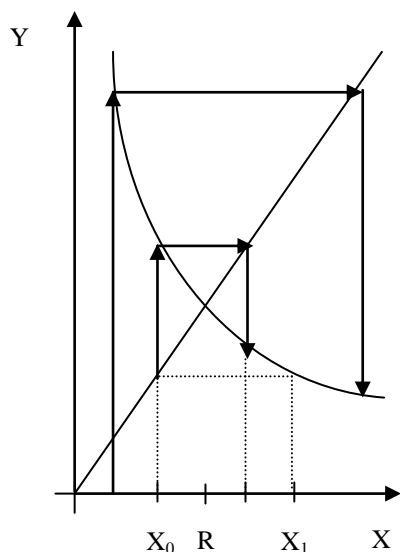


FIGURA 2

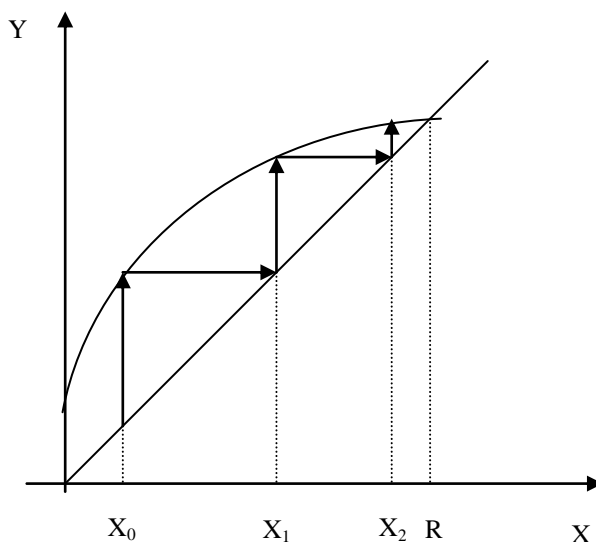


FIGURA 3

Din punct de vedere geometric, rădăcina reală r este abscisa punctului de intersecție a curbei $y=\varphi(x)$ cu dreapta $y=x$. Modul cum șirul aproximațiilor succesive $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ conduce spre soluția exactă este ilustrat în fig.2 și fig.3 (în funcție de forma curbei $y=\varphi(x)$).

O condiție suficientă de convergență este dată de următoarea:

Teoremă. Fie funcția $\varphi(x)$ definită pe intervalul $[a, b]$ și $\varphi(x) \in [a, b]$ pentru orice $x \in [a, b]$. Dacă funcția φ e derivabilă și derivata sa φ' va satisface inegalitatea $|\varphi'(x)| < a < 1$, oricare ar fi $x \in [a, b]$ atunci ecuația $x = \varphi(x)$ are în $[a, b]$ o singură rădăcină reală r , putem forma șirul de iterare $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$ după regula $x_{k+1} = \varphi(x_k)$, astfel încât $x_k \in [a, b]$ pentru $k=0, 1, 2, \dots$ și acest șir converge către rădăcina r . În plus, eroarea este evaluată prin

$$|x_k - r| \leq \frac{a}{1-a} |x_k - x_{k-1}| \leq \frac{a^k}{1-a} |x_1 - x_0|, \quad \forall k \geq 1.$$

Dacă $-1 < \varphi'(x) < 0$, atunci $|x_k - r| \leq |x_k - x_{k-1}|, \quad \forall k \geq 1$

Exemplu: Fie dată ecuația $x^3 - 2x - 9 = 0$. Prin metoda grafică se stabilește că ecuația admite o singură rădăcină reală în intervalul $(2, 3)$. Rescriem ecuația sub formă echivalentă

$$x = \sqrt[3]{2x+9}$$

Pentru a verifica condiția de convergență, calculăm derivata

$$\varphi'(x) = \frac{2}{3} * \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+9)^2}}$$

Condiția de convergență $|\varphi'(x)| < 1$ este îndeplinită pentru intervalul (2,3) și deci șirul de iterare

$$x_{k+1} = \sqrt[3]{2x+9}, \quad k=0,1,2,3\dots$$

cu valoarea inițială (de start) $x_0 \in (2,3)$ converge către rădăcina exactă $r \in (2,3)$. Pentru determinarea rădăcinei aproximative x cu eroarea $\varepsilon > 0$ procesul de calcul îl vom opri când

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} * |x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$$

Acest criteriu pentru determinarea calculelor necesită aprecierea parametrului subunitar α , care nu se cunoaște, în mod general. Subrutina care realizează metoda aproximațiilor succesive în limbajul Turbo Pascal este următoarea:

```
PROCEDURE SITER (VAR X0:REAL; EPS:REAL;
                  F:FUNCT; VAR K:INTERGER);
VAR
    X,Y:REAL;
BEGIN
    K:=0;
    X:=X0;
    REPEAT
        Y:=F(X);
        X:=Y;
        INC(K);
    UNTIL ABS(Y-X)<EPS;
END;
```

3.4. Metoda lui Newton (tangentelor)

Fie ecuația algebrică sau transcendentă $f(x)=0$ care admite o singură rădăcină reală r în intervalul $[a, b]$. Presupunem în plus că derivatele $f'(x)$ și $f''(x)$ păstrează un semn constant pe intervalul $[a, b]$.

Metoda lui Newton este definită de următoarea formulă:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,2,3... \quad (1)$$

unde x_0 este aproximația inițială a rădăcinii din intervalul $[a, b]$. Punctul x_{k+1} este abscisa punctului de intersecție a tangentei dusă la curba $y=f(x)$ în punctul x_k cu axa OX. De aceea această metodă se mai numește metoda tangențelor.

Teoremă. Fie funcția $f(x)$ definită și de două ori derivabilă pe intervalul $[a, b]$. Presupunem că există $m>0$, $M<\infty$ astfel încât

$$|f'(x)| \geq m > 0, \quad |f''(x)| < M < \infty \quad \forall x \in [a, b]$$

și $r \in [a, b]$ este rădăcina ecuației $f(x)=0$. Atunci șirul de iterare determinat de relația (1) converge către r dacă aproximația inițială x_0 este aleasă într-o vecinătate a rădăcinii r . Eroarea este estimată de relația

$$|x_k - r| \leq C * |x_k - x_{k-1}|^2, \quad C = \frac{M}{2m}, \quad k=1,2...$$

Metoda lui Newton este un caz particular al metodei aproximațiilor succesive cu funcția

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Următoarea procedură realizează rezolvarea unei ecuații neliniare cu o singură necunoscută prin metoda lui Newton:

```
PROCEDURE NEWTON (VAR X0:REAL; N:INTEGER; EPS:REAL;
                  VAR IER,K:INTEGER; F,F1:FUNCT;);
LABEL 1;
VAR
  DELO,DEL,XS,XN,Y:REAL;
BEGIN
  DELO:=1E+30;
  XS:=X0; K:=0;
  1: Y:=F1(XS);
  XN:=(XS-F(XS))/Y;
  DEL:=ABS(XN-XS);
  IF DEL<EPS THEN
    BEGIN
      X0:=XN;
      IER:=0; EXIT;
    END
  ELSE
    BEGIN
      IF DEL<=DELO THEN
        BEGIN
          IF K>N THEN
```

```

                                BEGIN
                                IER:=2; EXIT;
                                END;
END
                                ELSE
                                INC(K); XS:=XN; DEL0:=DEL;
                                GOTO 1;
                                END
                                ELSE
                                BEGIN
                                IER:=1; EXIT;
                                END;
END;

```

3.5. Metoda secantelor

Metoda secantelor se deduce din metoda lui Newton înlocuind derivata

$$f'(x) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Obținem

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) * \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (2)$$

Pentru startul iterațiilor în metoda secantelor avem nevoie de două aproximații inițiale x_0 și x_1 . Valoarea x_{k+1} este abscisa punctului de intersecție dintre secanta care trece prin punctele $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ și $(x_k, f(x_k))$ și OX; de aici și denumirea metodei. La fiecare pas nou în metoda secantei se calculează o singură valoare nouă pentru funcția f . Formula (2) se mai poate pune sub forma

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_kf(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})},$$

care nu se recomandă la programare deoarece, dacă $f(x_k) * f(x_{k-1}) > 0$ și $x_k \approx x_{k-1}$, atunci poate avea loc o neutralizare a termenilor.

4. Indicații metodice

Rezolvarea ecuației $f(x)=0$ la calculatorul electronic va decurge după cum urmează:

- 1) Se vor separa rădăcinile reale ale ecuației date.
- 2) Se va defini o procedură *FUNCTION F(X)* pentru calculul funcției $f(x)$.
- 3) Se va prezenta ecuația $f(x)$ sub forma echivalentă $x=\varphi(x)$, alegînd funcția $\varphi(x)$ în mod special, că să se satisfacă condiția suficientă de convergență:

$$|\varphi'(x)| \leq \alpha < 1$$

- 4) Se va defini o procedură *FUNCTION FI(X)* pentru calculul funcției $\varphi(x)$.
- 5) Se va defini o procedură *FUNCTION F1(X)* care calculează derivata $f'(x)$.
- 6) Se va scrie un program principal care va utiliza procedurile *BISECT*, *SITER*, *NEWTON* și *SECANT*. Apelurile acestor proceduri se vor face cu ajutorul instrucțiunii *CALL*. Procedurile *F*, *FI* și *F1* se vor descrie cu ajutorul instrucțiunii *EXTERNAL*.
- 7) Se va rezolva ecuația la calculator și se va afișa soluția sau un mesaj de eroare în caz că metoda nu converge.
- 8) Se va alcătui un raport.

LUCRĂRILE DE LABORATOR NR.3 ȘI NR.4

REZOLVAREA NUMERICĂ A SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

1. Scopul lucrărilor

- 1) Să se rezolve sistemul de ecuații lineare $Ax=b$, utilizând
 - Metoda eliminării lui Gauss;
 - Metoda lui Cholesky (metoda rădăcinii pătrate);
 - Metoda iterativă a lui Jacobi cu o eroare $\varepsilon=10^{-3}$;
 - Metoda iterativă a lui Gauss-Seidel cu o eroare $\varepsilon=10^{-3}$ și $\varepsilon=10^{-5}$.

- 2) Să se determine numărul de iterații necesare pentru aproximarea soluției sistemului cu eroarea dată ε . Să se compare rezultatele.

2. Probleme date spre rezolvare

$$1. A = \begin{pmatrix} 3.4 & 0.7 & 0.2 & -0.2 \\ 0.7 & 5.1 & 0.3 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 3.8 & -0.4 \\ -0.2 & 0.5 & -0.4 & 4.7 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 5.1 \\ 4.2 \\ 5.3 \\ 5.4 \end{pmatrix},$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 7.1 & 0.9 & -0.5 & 0.6 \\ 0.9 & 12.1 & 1.3 & -1.1 \\ -0.5 & 1.3 & 6.5 & 0.4 \\ 0.6 & -1.1 & 0.4 & 10.8 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1.9 \\ 7.8 \\ -11.7 \\ 8.6 \end{pmatrix},$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 8.1 & -0.9 & 0.6 & 0.8 \\ -0.9 & 14.3 & 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.3 & 7.9 & -0.4 \\ 0.8 & 0.7 & -0.4 & 10.6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7.2 \\ 10.3 \\ -11.9 \\ 9.2 \end{pmatrix},$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 23.6 & 1.5 & -0.9 & -0.8 \\ 1.5 & 14.6 & 0.7 & 0.2 \\ -0.9 & 0.7 & 11.3 & -0.6 \\ -0.8 & 0.2 & -0.6 & 9.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1.2 \\ 0.9 \\ 4.7 \\ -1.2 \end{pmatrix},$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 8.7 & 1.1 & -0.5 & 0.4 \\ 1.1 & 9.6 & 1.2 & 0.4 \\ -0.5 & 1.2 & 14.1 & 1.3 \\ 0.4 & 0.4 & 1.3 & 13.6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10.2 \\ -4.3 \\ 8.6 \\ 0.9 \end{pmatrix},$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 12.11 & -1.3 & 0.8 & 0.7 \\ -1.3 & 20.1 & 2.2 & -1.3 \\ 0.8 & 2.2 & 11.3 & 1.6 \\ 0.7 & -1.3 & 1.6 & 16.2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 13.1 \\ 20.2 \\ -11.1 \\ 11.9 \end{pmatrix},$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 6.1 & -1.9 & 0.4 & 0.2 \\ -1.9 & 14.3 & 1.8 & 1.4 \\ 0.4 & 1.8 & 12.7 & -0.6 \\ 0.2 & 1.4 & -0.6 & 13.1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 7.1 \\ 10.2 \\ -7.2 \\ 8.6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{8. A} = \begin{pmatrix} 9.2 & 1.1 & 0.6 & -0.6 \\ 1.1 & 15.3 & -1.2 & 0.3 \\ 0.6 & -1.2 & 9.6 & 0.7 \\ -0.6 & 0.3 & 0.7 & 12.6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10.1 \\ -18.3 \\ 10.7 \\ 10.1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{9. A} = \begin{pmatrix} 8.6 & -1.1 & -0.5 & 0.4 \\ -1.1 & 10.2 & -1.2 & 0.7 \\ 0.5 & -1.2 & 11.4 & 0.9 \\ 0.4 & 0.7 & 0.9 & 11.2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 13.2 \\ -9.8 \\ 7.7 \\ 10.1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{10. A} = \begin{pmatrix} 11.2 & 1.5 & -1.3 & 0.2 \\ 1.5 & 12.1 & -0.9 & 0.4 \\ -1.3 & -0.9 & 11.7 & 1.2 \\ 0.2 & 0.4 & 1.2 & 14.2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -11.4 \\ 9.7 \\ 8.3 \\ 1.2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{11. A} = \begin{pmatrix} 10.3 & -0.9 & 0.4 & -0.6 \\ -0.9 & 12.8 & 1.2 & 0.2 \\ 0.4 & 1.2 & 9.7 & 0.1 \\ -0.6 & 0.2 & 0.1 & 13.6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 0.9 \\ -3.6 \\ 2.8 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{12. A} = \begin{pmatrix} 5.9 & 0.9 & -1.8 & 0.7 \\ -0.9 & 11.2 & 1.2 & 0.4 \\ -1.8 & 1.2 & 9.6 & 0.5 \\ 0.7 & 0.4 & 0.5 & 7.8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 9.1 \\ -4.8 \\ 6.7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{13. A} = \begin{pmatrix} 8.7 & -1.2 & 0.8 & 0.7 \\ -1.2 & 9.6 & -1.2 & 0.8 \\ 0.8 & -1.2 & 8.8 & 0.9 \\ 0.7 & 0.8 & 0.9 & 11.3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2.7 \\ 8.9 \\ 7.2 \\ 6.4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{14. A} = \begin{pmatrix} 10.2 & 1.7 & -0.8 & 0.4 \\ 1.7 & 12.6 & 1.2 & 0.3 \\ -0.8 & 1.2 & 11.7 & -1.2 \\ 0.4 & 0.3 & -1.2 & 20.6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12.6 \\ 13.9 \\ -4.7 \\ 20.6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{15. A} = \begin{pmatrix} 11.3 & -0.2 & 1.3 & -0.4 \\ -0.2 & 17.6 & 2.1 & 0.7 \\ 1.3 & 2.1 & 20.3 & 1.2 \\ -0.4 & 0.7 & 1.2 & 19.4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20.3 \\ -14.6 \\ 8.9 \\ 11.3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{16. A} = \begin{pmatrix} 13.7 & 1.2 & 0.9 & 0.5 \\ 1.2 & 20.1 & 0.8 & -0.4 \\ 0.9 & 0.8 & 11.6 & 1.2 \\ 0.5 & -0.4 & 1.2 & 12.8 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14.2 \\ 11.2 \\ -7.9 \\ 12.7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{17. A} = \begin{pmatrix} 19.2 & -0.9 & 0.8 & 0.7 \\ -0.9 & 13.9 & 1.2 & 0.6 \\ 0.8 & 1.2 & 20.1 & 0.4 \\ 0.7 & 0.6 & 0.4 & 11.5 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -13.2 \\ 9.2 \\ 8.6 \\ 14.7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{18. A} = \begin{pmatrix} 17.7 & 0.3 & 1.4 & 0.9 \\ 0.3 & 20.1 & -0.8 & -1.2 \\ 1.4 & -0.8 & 21.9 & 0.8 \\ 0.9 & -1.2 & 0.8 & 17.6 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11.2 \\ -20.3 \\ 14.4 \\ 17.9 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{19. A} = \begin{pmatrix} 16.3 & 0.9 & 1.2 & 1.4 \\ 0.9 & 21.1 & 0.9 & 0.8 \\ 1.2 & 0.9 & 17.3 & -0.4 \\ 1.4 & 0.8 & -0.4 & 15.9 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 21.3 \\ 11.4 \\ -17.9 \\ 20.6 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{20. A} = \begin{pmatrix} 13.2 & 1.2 & 0.9 & 0.7 \\ 1.2 & 14.3 & 0.8 & -0.9 \\ 0.9 & 0.8 & 15.6 & 1.8 \\ 0.7 & -0.9 & 1.8 & 21.1 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4.2 \\ 5.6 \\ -5.1 \\ 5.9 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{21. A} = \begin{pmatrix} 14.4 & -0.9 & 1.2 & 0.4 \\ -0.9 & 20.6 & 0.8 & 0.9 \\ 1.2 & 0.8 & 19.6 & 1.3 \\ 0.4 & 0.4 & 1.3 & 17.6 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11.2 \\ -20.1 \\ 13.9 \\ 10.7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{22. A} = \begin{pmatrix} 12.6 & 1.8 & -0.5 & 0.9 \\ 1.8 & 13.7 & 0.8 & 0.7 \\ -0.5 & 0.8 & 11.6 & -0.8 \\ 0.9 & 0.7 & -0.8 & 20.1 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 12.3 \\ -11.4 \\ 10.8 \\ 11.7 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{23. A} = \begin{pmatrix} 15.1 & -0.9 & 1.2 & 0.4 \\ -0.9 & 14.6 & 0.8 & 0.7 \\ 1.2 & 0.8 & 17.6 & -0.6 \\ 0.4 & 0.7 & -0.6 & 21.3 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9.2 \\ 8.7 \\ -10.6 \\ 9.7 \end{pmatrix},$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 11.2 & -0.8 & 1.1 & 0.6 \\ -0.8 & 12.6 & 0.9 & 0.7 \\ 1.1 & 0.9 & 14.6 & 1.4 \\ 0.6 & 0.7 & 1.4 & 15.9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 13.2 \\ -9.6 \\ 12.3 \\ 8.7 \end{pmatrix},$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 9.8 & 0.8 & 1.1 & -0.6 \\ 0.8 & 10.2 & 1.3 & 0.4 \\ 1.1 & 1.3 & 11.4 & -0.6 \\ -0.6 & 0.4 & -0.6 & 20.2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12.2 \\ 8.7 \\ -6.9 \\ 13.7 \end{pmatrix},$$

26.

$$27. A = \begin{pmatrix} 8.7 & 0.4 & 0.6 & 0.5 \\ 0.4 & 9.2 & -0.4 & 0.8 \\ 0.6 & -0.4 & 11.4 & 1.4 \\ 0.5 & 0.8 & 1.4 & 12.6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 11.8 \\ 10.6 \\ 13.9 \\ -14.2 \end{pmatrix},$$

3. Descrierea metodelor

Metodele numerice de rezolvare a sistemelor de ecuații lineare sunt de două tipuri: metode directe și metode iterative.

Metodele directe constau în transformarea sistemului $Ax=b$ într-un sistem echivalent pentru care rezolvarea este cu mult mai simplă. În metodele directe soluția exactă se obține după un număr finit de operații aritmetice elementare (adunare, scădere, înmulțire, împărțire și rădăcina pătrată) și acest număr de operații este de ordinul n^3 . Subliniem că soluția exactă se obține în cazurile (ideale) în care erorile de rotunjire sunt absente. La fiecare operație elementară efectuată de calculator avem o eroare de rotunjire și prin urmare erorile directe în caz general furnizează doar o soluție aproximativă. Metodele directe se utilizează pentru rezolvarea sistemelor nu prea “mari”, de dimensiune $n=200$.

Rezolvarea sistemelor de ecuații lineare printr-o metodă iterativă înseamnă construirea unui șir de vectori $x^{(k)}$, $k=0,1,2,\dots$ (pornind de la un vector $x^{(0)}$ ales arbitrar) convergent către soluția sistemului considerat. În metodele iterative, de obicei, o iterație necesită efectuarea unui număr de ordinul n^2 operații aritmetice. De aceea metodele iterative se utilizează pentru rezolvarea sistemelor “mari”, de dimensiune $n>100$ (în cazul asigurării unei viteze sporite de convergență pentru o alegere a aproximării inițiale adecvate). Trunchierea șirului $\{x^{(k)}\}$ are loc la un indice m , astfel încât $x^{(m)}$ constituie o aproximație satisfăcătoare a soluției căutate x^* (de exemplu, $|x^{(m)} - x^*| < \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$ este eroarea admisă).

3.1 Metoda eliminării a lui Gauss

Metoda eliminării a lui Gauss constă în a aduce sistemul inițial la un sistem echivalent avînd matricea coeficienților superior triunghiulară. Transformarea sistemului dat într-un sistem de formă triunghiulară fără ca să se modifice soluția sistemului se realizează cu ajutorul următoarelor trei operații de bază:

- 1) rearanjarea ecuațiilor (schimbarea a două ecuații între ele);
- 2) înmulțirea unei ecuații cu o constantă (diferită de zero);
- 3) scăderea unei ecuații din alta și înlocuirea celei de-a doua cu rezultatul scăderii.

Fie dat sistemul de ecuații lineare:

$$Ax=b \quad (1)$$

unde $A=(a_{ij})_n$, $x, b \in R^n$, $\det A \neq 0$.

Să presupunem că $a_{11} \neq 0$; dacă $a_{11} \neq 0$ se aduce elementul nenul din prima coloană pe locul $(1,1)$, permutînd ecuațiile respective ale sistemului. Primul pas constă în eliminarea necunoscutei x_1 din ecuațiile sistemului începînd cu a doua, multiplicînd ecuația întâia cu raportul

$$\mu_{i1} = \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}}, \quad i=2,3,\dots,n$$

și scăzînd rezultatul obținut din ecuația i pentru $\forall i \geq 2$.

Obținem în acest fel sistemul echivalent:

$$A^{(2)}x=b^{(2)} \quad (2)$$

cu coeficienții

$$\begin{aligned} \alpha_{1j}^{(2)} &= \alpha_{1j}^{(1)}, & j=1,2,\dots,n; \\ \alpha_{i1}^{(2)} &= 0, & i=2,3,\dots,n; \\ \alpha_{ij}^{(2)} &= \alpha_{ij}^{(1)} - \mu_{i1} \alpha_{1j}^{(1)}, & i,j=2,3,\dots,n; \\ b_1^{(2)} &= b_1^{(1)}, & b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \mu_{i1} b_1^{(1)}, & i=2,3,\dots,n; \end{aligned}$$

Mai sus s-a notat $\alpha_{ij}^{(1)} = a_{ij}$; $i,j=1,2,\dots,n$ și $b_i^{(1)} = b_i$; $i=1,2,\dots,n$. Prima ecuație a sistemului (2) coincide cu prima ecuație a sistemului (1).

În continuare se repetă procedeul de mai sus pentru eliminarea necunoscutei x_2 din sistemul (2) ș.a.m.d. La pasul k se obține sistemul:

$$A^{(k)}x=b^{(k)}$$

unde

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(1)} & \alpha_{12}^{(1)} & \dots & \alpha_{1,k-1}^{(1)} & \alpha_{1k}^{(1)} & \dots & \alpha_{1n}^{(1)} \\ 0 & \alpha_{22}^{(2)} & \dots & \alpha_{2,k-1}^{(2)} & \alpha_{2k}^{(2)} & \dots & \alpha_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & \alpha_{k-1,k-1}^{(k-1)} & \dots & \alpha_{k-1,k}^{(k-1)} & \dots & \alpha_{k-1,n}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{kk}^{(k)} & \dots & \alpha_{kn}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{nk}^{(k)} & \dots & \alpha_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \quad b^{(k)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ b_{k-1}^{(k-1)} \\ b_k^{(k)} \\ b_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

Elementele $\alpha_{ij}^{(k)}$ ale lui $A^{(k)}$ și $b_i^{(k)}$ ale lui $b^{(k)}$ se calculează recursiv prin formulele:

$$\alpha_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \alpha_{ij}^{(k-1)}, i \leq k-1 \\ 0, i \geq k, k \leq k-1 \\ \alpha_{ij}^{(k-1)} - \mu_{i,k} * \alpha_{k-1}^{(k-1)}, i \geq k, j \geq k \end{cases}$$

$$\text{unde } \mu_{i,k-1} = \frac{\alpha_{i,k-1}^{(k-1)}}{\alpha_{k-1,k-1}^{(k-1)}},$$

$$\text{iar } b_i^{(k)} = \begin{cases} b_i^{(k-1)}, \text{ pentru } \forall i \leq k-1 \\ b_i^{(k-1)} - \mu_{i,k-1} * b_{k-1}^{(k-1)}, \text{ pentru } \forall i \geq k \end{cases},$$

După n pași necunoscuta x_{n-1} va fi eliminată din ultima ecuație, obținându-se un sistem cu matricea superior triunghiulară

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \dots + a_{1k}^{(1)}x_k + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \dots + a_{2k}^{(2)}x_k + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)} \\ \dots \\ a_{kk}^{(k)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k)}x_n = b_k^{(k)} \\ \dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n = b_n^{(n)} \end{cases}$$

Acest sistem se rezolvă începînd cu ultima ecuație cu ajutorul procesului de eliminare inversă care se poate descrie astfel:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n^{(n)}}{\alpha_{nn}^{(n)}}, \\ x_{n-1} &= \frac{b_{n-1}^{(n-1)} - a_{n-1,n}^{(n-1)} * x_n}{\alpha_{n-1,n-1}^{(n-1)}}, \\ x_k &= \frac{b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k)} * x_j}{\alpha_{kk}^{(k)}}, \end{aligned}$$

Metoda lui Gauss prezentată mai sus presupune că elementele pivot trebuie să fie diferite de zero. Dacă la efectuarea pasului k elementul $\alpha_{kk}=0$, atunci cel puțin unul din celelalte elemente din coloana k și din liniile $k+1, k+2, \dots, n$ este nenul; în caz contrar matricea A ar fi singulară ($\det A=0$). Permutînd ecuațiile sistemului putem aduce pe locul (k,k) elementul nenul și, deci, este posibil să reluăm eliminarea. Dacă un element pivot este exact egal cu zero, din motive de stabilitate numerică, trebuie să efectuăm rearanjarea ecuațiilor.

Mai jos se dă subrutina de calcul care realizează metoda realizării lui Gauss cu pivotarea parțială: la pasul k pivotul se ia egal cu primul element maxim în modul din coloana k subdiagonală a lui $A^{(k)}$:

$$\left| a_{rk}^{(k)} \right| = \max_{k \leq i \leq n} \left| a_{ik}^{(k)} \right|$$

și se permută liniile k și r

```

PROCEDURE GAUSS (A:MATR; VAR B:VECT; N:BYTE);
{ PROCEDURA IN CARE SE REALIZEAZA ALGORITMUL DE CALCUL }
VAR
I,J,L,M,K:BYTE;
T:REAL;
LABEL L_7, L_11;
BEGIN
{ PRIMA PARTE A ALGORITMULUI }
FOR L:=1 TO N DO BEGIN
M:=L+1;
J:=L;
FOR I:=L TO N DO
IF A[I,L]>A[J,L] THEN J:=I;
I:=L;
IF A[J,L]=0 THEN BEGIN WRITELN ('N-ARE SOLUTII'); HALT; END;
IF L=N THEN GOTO L_11;
IF J=L THEN GOTO L_7;
FOR K:=L TO N DO BEGIN
T:=A[L,K];
A[L,K]:=A[J,K];
A[J,K]:=T;
END;

T:=B[L];
B[L]:=B[J];
B[J]:=T;
INC(I);
REPEAT
IF A[I,L]=0 THEN BEGIN INC(I); CONTINUE; END;
T:=A[I,L]/A[L,L];
B[I]:=B[I]-T/B[L];
FOR K:=M TO N DO A[I,K]:=A[I,K]-T*A[L,K];
L_7;
INC(I);
UNTIL I>N;
END;

REPEAT
M:=L;
DEC(L);
FOR I:=L TO N DO B[I]:=B[I]-A[I,M]*B[M];
L_11;
B[L]:=B[L]/A[L,L];
UNTIL (L-1)<=0;

END;

```

Schema logică a lui Gauss este prezentată în figura 4.

3.2. Metoda lui Cholesky (metoda rădăcinii pătrate)

Metoda lui Cholesky de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare se mai numește *metoda rădăcinii pătrate* și constă în descompunerea sistemului $Ax=b$ în sistemele triunghiulare:

$$L^T y = b, Lx = y.$$

Matricea L se alege astfel, încât $A = L^T * L$. Elementele l_{ij} ale matricei inferior triunghiulare L pot fi calculate în felul următor: se determină prima coloană a matricei L

$$L_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{L_{11}}, \quad i=2,3,\dots,n;$$

După ce s-au obținut primele $(k-1)$ coloane ale matricei L se calculează coloana k

$$L_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}, \quad l_{ik} = \frac{(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} * l_{kj})}{L_{kk}}, \quad i=k+1, \dots, n$$

În această metodă se presupune că matricea A este o matrice simetrică și pozitiv definită.

3.3. Metodele iterative de rezolvarea sistemelor de ecuații liniare.

Metodele iterative se construiesc utilizând desfacerea matricei A definită prin

$$A = S - T$$

Atunci sistemul (1) este bivalent cu sistemul:

$$Sx = Tx + b, \quad (3)$$

sau

$$x = Qx + d, \quad (4)$$

unde $Q = S^{-1} * T$, $d = S^{-1} * b$. Prin urmare putem construi șirul $\{x^{(k)}\}$, utilizând relația recurentă

$$S * x^{(k+1)} = T * x^{(k)} + b, \quad k=0,1,2,\dots, \quad (5) \quad \text{sau}$$

$$x^{(k+1)} = Q * x^{(k)} + d \quad (6)$$

unde $x^{(0)} \in R^n$ este o aproximație inițială a soluției x^* .

Pentru a reduce sistemul (1) la o formă (3) sau (4), potrivită pentru iterație, desfacerea matricei A trebuie să satisfacă condițiile:

a) Sistemul (6) are o soluție unică $x^{(k+1)}$ și se rezolvă ușor. De aceea matricea S se alege de o formă simplă și este inversabilă. Ea poate fi diagonală sau triunghiulară.

b) Șirul $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ converge către soluția exactă x^* oricare ar fi $x^{(0)} \in R^n$.

Presupunem că elementele diagonale $\alpha_{ii} \neq 0$, $i=1,2,\dots,n$. Atunci în calitate de matrice S se poate lua matricea diagonală atașată matricei A :

$$S = \text{diag}(\alpha_{11}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{nn}).$$

Avem

$$S^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\alpha_{11}}, \frac{1}{\alpha_{22}}, \dots, \frac{1}{\alpha_{nn}}\right)$$

În acest caz sistemul (3) devine:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} * x_j), \quad i=1,2,\dots,n$$

Procesul iterativ (6) este definit prin:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} * x_j^{(k)}), \quad i=1,2,\dots,n$$

Astfel obținem o metodă de rezolvare a sistemului liniar (1) numită metoda lui Jacobi.

În metoda lui Jacobi este necesar de-a păstra în memoria calculatorului toate componentele vectorului $x^{(k)}$ atît timp cît se calculează vectorul $x^{(k+1)}$. Putem modifica metoda lui Jacobi, astfel încît la pasul $(k+1)$ să folosim în calculul componentei $x_i^{(k+1)}$, valorile deja calculate la același pas: $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}$. Această modificare a metodei lui Jacobi se numește *metoda Gauss-Seidel*, iar șirul iterativ (7) devine

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} * x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^n a_{ij} * x_j^{(k)}), \quad i=1,2,\dots,n$$

```

PROCEDURE SEIDEL(A:MATR; B:VECT; VAR X:VECT; N:INTEGER; EPS:REAL; VAR NI:INTEGER;);
VAR
  I,J:INTEGER;
  S,SL,Y:REAL;
BEGIN
  NI:=0;
  FOR I:=1 TO N DO BEGIN
    X[I]:=A[I,I];
    B[I]:=B[I]/X[I];
    FOR J:=1 TO N DO
      A[I,J]:=-A[I,J]/X[J];
    X[I]:=B[I];
    A[I,I]:=0;
  END;
  REPEAT
    S:=0; SL:=0;
    FOR I:=1 TO N DO BEGIN
      Y:=0;
      FOR J:=1 TO N DO Y:=Y+A[I,J]*X[J];
      Y:=Y+B[I];
      S:=S+SQR(X[I]-Y);
      SL:=SL+Y*Y;
      X[I]:=Y;
    END;
    S:=SQR(S);
    SL:=SQR(SL);
    S:=S/SL;
    INC(NI);
    IF NI>25 THEN EXIT;
  UNTIL S<EPS;
END;
```

LUCRAREA DE LABORATOR NR.5

INTERPOLAREA FUNCȚIILOR CU AJUTORUL POLINOMULUI LAGRANGE

1. Scopul lucrării

Pentru funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se cunosc valorile $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ în nodurile distincte $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, adică $y_i = f(x_i)$, $i=0, 1, 2, \dots, n$.

- 1) Să se construiască polinomul de interpolare Lagrange $L_n(x)$ ce aproximează funcția dată.
- 2) Să se calculeze valoarea funcției $f(x)$ într-un punct $x=a$ utilizând polinomul de interpolare Lagrange $L_n(x)$.
- 3) Să se aproximeze valoarea funcției $f(x)$ pentru $x=a$ cu eroarea $\varepsilon = 10^{-4}$ (sau cu cea mai bună exactitate posibilă), calculînd polinomul de interpolare Lagrange $L_m(x)$, unde $m < n$.
- 4) Să se compare și să se explice rezultatele obținute în 2) și 3).

3. Probleme date spre rezolvare

1. $\alpha = 0.106$,

x	0.101	0.117	0.122	0.136	0.220	0.326	0.429
y	1.26483	2.27645	3.29147	4.28143	3.27648	2.26438	1.26438

2. $\alpha = 0.115$,

x	0.150	0.163	0.187	0.262	0.364	0.466	0.469
y	6.61659	8.39468	9.27893	8.19345	6.23476	6.25132	6.31472

3. $\alpha = 0.185$,

x	1.383	1.357	1.390	1.394	1.396	1.400	1.404
y	9.05421	8.76431	7.11326	6.87628	7.36734	8.10234	9.21361

4. $\alpha = 30.703$,

x	0.702	0.704	0.707	0.709	0.712	0.716	0.719
y	5.61345	6.90012	7.23468	8.14153	7.13476	6.23897	5.37213

5. $\alpha = 1.417$,

x	1.415	1.418	1.420	1.424	1.430	1.434	1.437
y	3.76831	2.17946	1.37197	0.43672	-0.9763	-1.6798	-2.3712

6. $\alpha = 1.418$,

x	1.415	1.418	1.420	1.424	1.430	1.434	1.437
y	3.76831	2.17946	1.37197	0.43672	-0.9763	-1.6798	-2.3712

7. $\alpha = 0.204$,

x	0.104	0.205	0.310	0.401	0.507	0.618	0.721
y	4.96713	6.81134	8.76712	10.1614	9.12347	7.26493	5.37149

		7		7			
	8. $\alpha = 0,2009$,						
x	1.833	2.045	3.164	4.461	5.705	6.816	7.127
y	3.45678	5.34671	8.01235	7.70981	4.32678	2.45670	0.32145
	9. $\alpha = 0,997$,						
x	2.056	3.321	4.453	5.671	6.054	7.987	8.785
y	-9.3456	-8.4560	-7.6781	-5.1257	-6.5762	-8.4398	-9.9876
	10. $\alpha = -0,532$,						
x	-1.432	-0.675	1.439	2.567	3.486	4.910	5.763
y	7.67103	5.45321	3.76129	0.56741	-1.5630	0.76884	2.56793
	11. $\alpha = 9,096$,						
x	8.765	9.658	10.008	11.876	12.967	13.098	14.598
y	1.36754	9.21765	7.87692	9.56423	10.4537	11.9078	8.78911
					1	5	
	12. $\alpha = -1,997$,						
x	-2.341	-1.675	-0.876	0.875	1.997	2.876	3.642
y	12.7654	10.1326	7.12698	8.5693	9.67549	11.3498	13.3498
	1	7				7	6
	13. $\alpha = 0,203$,						
x	0.125	0.243	0.367	0.498	0.597	0.701	0.867
y	-1.4532	-0.5987	0.65498	1.23468	0.56793	-0.1236	-1.4598
	14. $\alpha = -0,999$,						
x	-1.104	-0.986	0.465	1.235	2.476	3.789	4.987
y	4.13567	2.29876	0.01238	-2.4587	-1.1154	0.56478	2.17854
	15. $\alpha = 6,208$,						
x	5.477	6.457	7.908	8.765	9.790	10.456	11.367
y	-4.2457	-2.1289	-0.0987	-1.5674	-2.0567	-3.1087	-4.9874
	16. $\alpha = 2,076$,						
x	1.123	2.456	3.654	4.987	5.897	7.432	8.876
y	13.4567	11.7865	8.67543	7.89765	5.76901	5.76901	8.14329
	3	4					
	17. $\alpha = -7,032$,						
x	-7.675	-6.976	-4.678	-2.567	-0.143	1.987	3.654
y	3.45612	4.98457	5.14388	3.93012	1.78901	-1.2349	-2.9806
	18. $\alpha = 0,265$						
x	0.176	0.349	0.598	0.768	0.956	1.987	3.432
y	3.45612	4.98457	5.14388	3.93012	1.78901	-1.2349	-2.9806
	19. $\alpha = 5,068$,						
x	4.253	5.786	6.876	8.011	9.543	10.564	11.987
y	-2.1786	-1.0067	0.7684	1.98762	3.77664	0.45673	-1.4589

20. $\alpha = 0,465,$							
x	-0.123	0.765	2.654	4.987	6.087	8.123	10.328
y	9.23657	7.87654	5.14568	6.98341	8.96542	10.4507	12.6543
						1	2
21. $\alpha = 5,143,$							
x	4.675	5.987	7.453	8.769	9.801	11.762	13.097
y	-2.4567	-8.8776	-4.0765	0.00543	-3.6579	-5.1287	-7.0108
22. $\alpha = -5,026,$							
X	-5.354	-4.218	-3.497	-2.198	-1.765	0.876	1.675
Y	9.14352	6.87601	3.76501	0.76591	2.67981	4.90912	6.45671
23. $\alpha = 1,276,$							
x	0.765	1.867	3.987	5.601	7.043	9.231	10.987
y	2.87611	4.18432	1.09673	-1.4587	-3.5729	0.9876	2.87644
24. $\alpha = 3,132,$							
x	2.675	3.879	4.567	5.967	7.176	8.654	9.765
y	1.90876	0.00165	-1.6754	-3.4657	1.76542	3.98021	5.76599
25. $\alpha = 0,321,$							
x	0.187	0.276	0.401	0.575	0.687	0.811	0.989
y	1.54381	-2.3219	-4.0165	-1.0765	1.43257	3.89762	5.98451

4. Descrierea problemei de interpolare

Fie dată funcția $y=f(x)$ dată sub forma unei table de valori:

x	x_0	x_1	...	x_n
y	y_0	y_1	...	y_n

unde $y_i=f(x_i), \quad i=0,1,\dots,n$

Există numeroase procedee de interpolare pentru găsirea unor valori intermediare ale lui $f(x)$ pentru $x \neq x_i, \quad i=0,1,\dots,n$. De foarte multe ori pentru aproximarea funcțiilor prin interpolare se utilizează polinoamele algebrice

$$P_n(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Aceasta se datorează faptului că funcția $f(x)$ poate fi aproximată foarte bine cu ajutorul curbelor a căror reprezentare analitică sunt polinoame (teorema lui Weierstrass). Pe de altă parte, valoarea polinomului se calculează ușor (cu ajutorul schemei lui Horner) nu apar dificultăți și la integrarea sau derivarea polinoamelor. Pentru ca un polinom $P_n(x)$ de grad $\leq n$ să interpoaleze funcția dată, trebuie ca valorile sale în nodurile $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ să coincidă cu valorile funcției, adică:

$$P_n(x) = y_i, \quad i=0,1,\dots,n \quad (1)$$

Se demonstrează că condițiile de interpolare (1) determină un polinom unic, care se poate exprima sub forma

$$L_n = \sum_{i=0}^n \left(y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

Polinomul $L_n(x)$ se numește polinomul de interpolare al lui Lagrange.

Exemplu. Să se calculeze polinomul de interpolare a lui Lagrange ce aproximează funcția definită cu ajutorul următorului tabel de valori:

X	-1	0	2
Y	-8	-1	1

Putem construi polinomul de gradul doi și anume:

$$L_2 = -8 \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} + (-1) \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} + 1 \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} = -2x^2 + 5x - 1.$$

Polinomul de interpolare a lui Lagrange coincide cu funcția $f(x)$ în nodurile de interpolare. Pentru celelalte puncte cantitatea

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

reprezintă eroarea care se comite în calculul lui $f(x)$ prin formula $f(x) \approx L_n(x)$. Dacă funcția $f(x)$ este continuă împreună cu primele $n+1$ derivate, atunci:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x),$$

unde $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, iar ξ este un punct din intervalul $[x_0, x_1]$. Cu ajutorul formulei (2) se obține egalitatea aproximativă

$$R_m(x) \approx L_{m+1}(x) - L_m(x)$$

Ultima relație poate fi utilizată la calculul funcției $f(x)$ într-un punct dat $x \neq x_i$ cu exactitatea dorită $\varepsilon > 0$. Pentru aceasta se calculează succesiv polinoamele $L_1(x), L_2(x), \dots, L_m(x)$, folosind schema lui Aitken; de asemenea se determină și mărimile

$$\varepsilon_1 = |L_2(x) - L_1(x)|, \quad \varepsilon_2 = |L_3(x) - L_2(x)|, \dots, \varepsilon_m = |L_{m+1}(x) - L_m(x)|, \dots$$

Dacă pentru un indice m , $m < n$ are loc inegalitatea $\varepsilon_m < \varepsilon$, atunci STOP; avem calculată valoarea funcției $f(x)$ (egală cu $L_m(x)$) cu eroarea dată. În caz contrar ($\varepsilon_m \geq \varepsilon$, $\forall m$) se determină cel mai mic m pentru care

$$\varepsilon_m = \min_{1 \leq i \leq n-1} \{\varepsilon_i\}$$

și se consideră $f(x) \approx L_m(x)$.

Un procedeu efectiv de calcul a valorii unui polinom îl constituie schema lui Horner. Pentru stabilirea schemei lui Horner se transcrie polinomul $P_m(x)$ astfel:

$$P_n(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + xa_n) \dots))$$

Deci putem afla valoarea acestui polinom în punctul x , calculînd succesiv mărimile

$$B_n = a_n$$

$$B_{n-1}=a_{n-1}+xb_n=a_{n-1}+xa_n$$

$$B_{n-2}=a_{n-2}+xb_{n-1}=a_{n-2}+x(a_{n-1}+xa_n)$$

.....

$$B=a_0+xb_1=a+x(a_1+a_2+x(a_{n-1}+xa_n)\dots)=P_n(x).$$

Această schemă necesită cel mult $2n$ operații aritmetice .

Mai jos se prezintă o subrutină de calcul, care pe baza unei tabele de valori a unei funcții dă coeficienții polinomului de interpolare Lagrange și valoarea acestui polinom într-un punct dat.

```

PROCEDURE LAGRANGE (N: INTEGER; X,Y:MASIV; VAR X1,Y1:REAL; VAR A: MASIV;);
BEGIN
  FOR I:=1 TO N DO
    FOR J:=1 TO N DO
      BEGIN
        B[I,J]:=0;
        C[I,J]:=0;
      END;
    END;
  N1:=N-1;
  FOR I:=1 TO N-1 DO
    BEGIN
      I1:=I+1;
      R:=X[I,1]-X[I1];
      B[1,I]:=(Y[I]*X[I1]-Y[I1]*X[I])/R;
      B[2,I]:=(Y[I,1]-Y[I1])/R;
      END;
      N2:=N-2;
      FOR K:=1 TO N2 DO
        BEGIN
          N3:=N-K-1;
          FOR I:=1 TO N3 DO
            BEGIN
              I2:=I+K+1;
              R:=X[I,2]-X[I1];
              I1:=I+1;
              C[1,I]:=(B[I,I]*X[I,2]-B[I,I1]*X[I])/R;
              K1:=K+1;
              FOR J:=1 TO K1 DO
                BEGIN
                  J1:=J+1;
                  C[J1,I]:=(B[J1,I]*X[I2]-B[J1,I1]*X[I]-B[J,I]+B[J,J1])/R;
                END;
              END;
            END;
            K2:=K+2;
            FOR I:=1 TO K2 DO BEGIN
              N4:=N-4;
              FOR J:=1 TO N4 DO
                BEGIN
                  B[I,J]:=C[I,J];
                  C[I,J]:=0;
                END;
              END;
            END;
            FOR I:=1 TO N DO A[I]:=B[I,1];
            Y:=A[N];
            FOR I:=1 TO N1 DO Y1:=X1*Y1+A[N-I];
          END;

```

LUCRAREA DE LABORATOR NR.6

CALCULUL NUMERIC AL INTEGRALELOR

1.Scopul lucrării

1) Să se calculeze integrala definită

$$\int_a^b f(x)dx$$

cu ajutorul formulei trapezelor, respectiv formulei Simpson, divizînd intervalul de integrare $[a, b]$ în opt părți egale.

2) Să se aplice regula lui Runge pentru calculul integralei date cu :

- formula trapezelor cu o eroare mai mică decât $\varepsilon=10^{-3}$;

- formula Simpson cu o eroare mai mică decât $\varepsilon=10^{-5}$.

3) Să se compare rezultatele, luând în considerație numărul de divizări al intervalului de integrare $[a, b]$ și evaluările pentru funcția integrată $f(x)$.

2. Probleme date spre rezolvare

1. $\int_{2.5}^{3.3} \frac{\sin(x^2 + 1)}{x + 1} dx$

2. $\int_{1.2}^2 \frac{\cos(x^2)}{x + 1} dx$

3. $\int_{0.8}^{1.7} \frac{tg(x^2)}{x + 2} dx$

4. $\int_{0.6}^{1.4} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx$

5. $\int_{1.3}^{2.5} \frac{\ln(x^2 + 0.7)}{x - 1} dx$

6. $\int_{0.4}^{1.2} x^2 * \lg x dx$

7. $\int_{0.2}^1 \frac{\sin(x)}{x} dx$

8. $\int_{0.18}^{0.98} \frac{\cos(x)}{x + 2} dx$

9. $\int_{1.2}^{2.7} \frac{tg(x^2)}{x^2 + 1} dx$

10. $\int_2^{3.5} \sqrt{x} * \cos(x^2) dx$

11. $\int_{2.5}^{3.3} \sqrt{x} * \sin(x^2) dx$

12. $\int_{2.3}^{2.5} \frac{\lg(x^2 + 3)}{x - 1} dx$

13. $\int_{0.2}^1 \frac{tg(x^2 + 0.5)}{1 + 2x^2} dx$

14. $\int_{0.8}^{1.6} x^2 * \sin(x - 0.5) dx$

15. $\int_{1.2}^2 x * e^{-x^2} dx$

16. $\int_{0.4}^{1.2} x * e^{\cos(x)} dx$

17. $\int_{1.5}^{2.3} x^2 * tg\left(\frac{x}{2}\right) dx$

18. $\int_{-1}^0 4 * x * e^{x^2} dx$

19. $\int_0^1 \frac{3x^2 + \sin(x)}{x^2} dx$

20. $\int_{1.2}^2 \frac{x^2 * \ln(x)}{x + 1} dx$

21. $\int_{1.6}^{3.2} \frac{x}{2} * \lg\left(\frac{x^2}{2}\right) dx$

$$22. \int_{1.2}^{2.6} \left(\frac{x}{3} + 1 \right) * \sin\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

$$23. \int_{1.2}^{2.8} \frac{\ln(x^2 + 1)}{3x - 1} dx$$

$$24. \int_{1.7}^{2.5} e^{\sin(x^2)} dx$$

$$25. \int_{0.5}^{1.6} \frac{x^2 + 0.7}{4 + \sin(x)} dx$$

$$26. \int_{-0.8}^{1.4} \frac{1 + \sin(x^2)}{5 + x^2} dx$$

3. Descrierea metodelor

Integrarea numerică este utilizată când expresia funcției de sub semnul integralei este foarte complicată și este dificil (sau chiar imposibil) a găsi o funcție primitivă. Una din cele mai simple metode de calcul aproximativ al integralei

$$\int_a^b f(x) dx$$

constă în înlocuirea funcției $f(x)$ printr-un polinom de interpolare $P_n(x)$ apoi integrarea acestui polinom, adică

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b P_n(x) dx$$

3.1. Formula trapezelor

Formula trapezelor constă în a aproxima pe intervalul dat $[a, b]$ funcția $f(x)$ printr-un polinom de interpolare Lagrange de gradul unu cu nodurile $x_0=a$ și $x_n=b$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_1(x) dx = \frac{(b-a)}{2} (f(a) + f(b))$$

Fie o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu noduri echidistante $a=x_0 < x_1 < \dots < x_n=b$ folosind proprietatea de aditivitate a integralei față de interval, putem scrie

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x_{k+1} - x_k}{2} (f(x_k) + f(x_{k+1}))$$

sau

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})) \right], \quad (1)$$

unde $h = \frac{(b-a)}{2}$ este pasul rețelei de noduri.

Formula (1) poartă denumirea de *formula trapezelor sumată*.

Eroarea pe care o implică aproximarea integralei cu formula trapezelor este:

$$R_n(f) = -\frac{(b-a)}{12n^2} f'(\xi), \quad \xi \in [a, b].$$

Următoarea subrutină realizează calculul unei integralei definite cu ajutorul formulei trapezelor.

```
PROCEDURE TRAPEZ (F:FUNCT; A,B:REAL; N:WORD; VAR Y:REAL;);
VAR
H,X:REAL;
I:WORD;
BEGIN
H:=(B-A)/N;
Y:=0;
X:=A;
FOR I:=1 TO N-1 DO BEGIN
        X:=X+H;
        Y:=Y+F(X);
    END;
Y:=H*(Y-0.5*(F(A)+F(C)));
END;
```

3.2. Formula lui Simpson

Formula lui Simpson se obține prin integrarea polinomului de interpolare al funcției $f(x)$ cu nodurile

$$x_0=a, \quad x_1=\frac{b+a}{2}, \quad x_2=b.$$

Avem

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_2(x)dx = \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b))$$

Formula lui Simpson sumată are forma

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

unde n este un număr par, iar $h = \frac{(b-a)}{n}$.

Restul la formula lui Simpson este:

$$R_n(f) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(IV)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]$$

Subrutina metodei lui Simpson poate fi urmărită mai jos.

```
PROCEDURE SIMPSON (F:FUNCT; A,B:REAL; N:WORD; VAR Y:REAL;);
VAR
H,X:REAL;
I:WORD;
BEGIN
H:=(B-A)/N;
Y:=0;
X:=A;
FOR I:=2 TO N DO BEGIN
    Y:=Y+F(X)+4*F(X+H)+F(X+2*H);
    X:=X+2*H;
END;
Y:=Y*H/3;
END.
```

3.3. Regula lui Runge

Dacă aplicăm repetat una din formulele de calcul numeric al integralelor, înjumătățind în același timp interval h , putem îmbunătăți eficiența acestor formule.

Într-adevăr, să presupunem că se folosește formula lui Simpson pentru care eroarea este proporțională cu h . Două aplicații succesive ale formulei lui Simpson cu intervalele h și $\frac{h}{2}$ conduc la erorile:

$$\varepsilon_h = c * h^4, \quad \varepsilon_{h/2} = c * \left(\frac{h}{2}\right)^4$$

de unde

$$\varepsilon_{h/2} \approx \frac{\varepsilon_h}{2^4} = \frac{\varepsilon_h}{16}$$

Să notăm cu I valoarea exactă a integralei $\int_a^b f(x)dx$, iar cu I_h și $I_{h/2}$ valoarea calculată cu ajutorul formulei lui Simpson cu pasul h , respectiv $\left(\frac{h}{2}\right)$. Atunci avem:

$$I = I_h + \varepsilon_h = I_{h/2} + \varepsilon_{h/2},$$

sau

$$I_h + 16\varepsilon_{h/2} \approx I_{h/2} + \varepsilon_{h/2},$$

Se obține

$$\varepsilon_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{15}$$

Prin urmare

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{h/2} + \frac{I_{h/2} - I_h}{15} \quad (2)$$

În mod analog, pentru formula trapezelor avem:

$$\int_a^b f(x)dx \approx I_{h/2} + \frac{I_{h/2} - I_h}{3} \quad (3)$$

Din cele de mai sus rezultă că, lucrînd cu două valori succesive I_h și $I_{h/2}$ se obține o a treia ce aproximează pe I mai bine. Aceasta și stă la baza regulei lui Runge, care permite calculul numeric al integralei cu eroarea dorită $\varepsilon > 0$.

Regula lui Runge constă în următoarele:

- 1) Se alege un număr întreg $k > 1$.
- 2) Se împarte intervalul $[a, b]$ în 2^k părți egale și se calculează integrala dată cu ajutorul uneia din formulele de cuadratură numerică. Valoarea obținută o notăm prin I_h .
- 3) Se împarte intervalul $[a, b]$ în 2^{k+1} părți egale și se aplică respectiv formula de cuadratură numerică, care ne dă o valoare pe care o notăm prin $I_{h/2}$.
- 4) Dacă

$$|I_{h/2} - I_h| < 3\varepsilon \quad (4)$$

în cazul aplicării formulei trapezelor, sau

$$|I_{h/2} - I_h| < 15\varepsilon \quad (5)$$

în cazul formulei Simpson, atunci STOP. Formula (3), respectiv formula (2), ne dă valoarea aproximativă a integralei date cu eroarea cerută $\varepsilon > 0$.

5) Dacă inegalitatea (4), respectiv (5), nu se îndeplinește, atunci se ia $I_h = I_{h/2}$, $k = k + 1$ și se trece la pasul (3).

LUCRAREA DE LABORATOR NR.7

INTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

Probema Cauchy

Problema Cauchy pentru ecuația diferențială de ordinul n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', K, y^{n-1}) \quad (1)$$

constă în determinarea funcției $y=y(x)$, care satisface ecuația (1) și condițiile inițiale

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{01}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1} \quad (2),$$

unde $x_0, y_0, \dots, y_{0,n-1}$ se consideră numere cunoscute.

Modelele matematice a multor procese în tehnică conțin sisteme de ecuații diferențiale ordinare de forma

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, K, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, K, y_n) \\ \text{K K K K K K K K K K K} \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, K, y_n) \end{cases} \quad (3)$$

În sistemul (3) funcțiile $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ ($i = \overline{1, n}$) sunt cunoscute. Pentru sistemul (3) problema Cauchy permite determinarea funcțiilor $y_i(t)$ ($i = \overline{1, n}$) care satisfac toate ecuațiile sistemului și condițiile inițiale

$$y_1(t_0) = y_{10}; \quad y_2(t_0) = y_{20}; \quad \dots, \quad y_n(t_0) = y_{n0} \quad (4)$$

În cazul în care se poate construi soluția generală a ecuației (1) sau sistemului (3), problema se reduce la determinarea constantelor de integrare, care satisfac relațiile (2), respectiv (4).

În majoritatea cazurilor determinarea soluției pentru problema Cauchy este imposibilă ceea ce impune construirea soluției aproximative.

Metodele aproximative în dependență de modul în care se obține soluția problemei Cauchy pot fi împărțite în două grupe:

- a) metode analitice, care oferă soluția sub forma unei expresii analitice;
- b) metode numerice care permit obținerea soluției aproximative sub forma unui tabel de valori ale soluției într-un șir de puncte.

Metoda seriilor de puteri (metoda derivării succesive)

Această metodă este o metodă analitică.

Vom considera problema Cauchy (1)-(2), presupunând că pentru ecuația (1) se îndeplinesc condițiile de existență și unicitate a soluției.

Fie că soluția particulară $y=y(x)$ a ecuației (1) permite dezvoltarea ei în serie Taylor în jurul punctului $x=x_0$:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \Lambda + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \Lambda \quad (5)$$

Condițiile inițiale (2) permit ca valorile $y^{(i)}(x_0)$ ($i = \overline{0, n-1}$) să fie cunoscute. Pe de altă parte ecuația (1) se poate determina $y^{(n)}(x_0)$. Ceilalți coeficienți din dezvoltarea Taylor (5) se vor calcula prin diferențierea succesivă a ecuației (1), substituind în ultima valorile cunoscute deja a derivatelor de ordin superior în punctul $x=x_0$.

În mod similar se poate determina soluția problemei Cauchy (3)-(4).

Exemplu:

Să se determine primii 5 termeni ai dezvoltării în serie a soluției $y=y(x)$ pentru ecuația:

$$y''(1+y) = (y')^2 + y',$$

cu condițiile inițiale $y(0) = 2, y'(0) = 2$. Vom căuta soluția sub forma seriei de puteri:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \Lambda + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \Lambda \quad y''(0) = \left[\frac{y'}{1+y}(1+y') \right]_{x=0} = 2$$

Fie funcția $f(x,y)$ satisface în dreptunghiul $D = \{ |x-x_0| \leq a; |y-y_0| \leq b; \}$ condițiile

$$\begin{aligned} |f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)| &\leq N|y_1 - y_2| \\ \frac{df}{dx} &= \left| \frac{df}{dx} + f \frac{df}{dy} \right| \leq M \quad (N, M - \text{const}) \end{aligned}$$

Atunci eroarea metodei se estimează în modul următor:

$|y(x_n) - y_n| \leq \frac{hM}{2N} [(1+hN)^n - 1]$, unde $y(x_n)$ - soluția exactă, iar y_n soluția numerică în punctul $x=x_n$, obținută la pasul n . Această estimare este o estimare teoretică, care se utilizează rar. În practică se procedează în felul următor: se determină soluția după metoda Euler cu pasul h , iar apoi cu pasul $h/2$. Atunci eroarea poate fi estimată conform relației:

$|y(x_n) - y^*| \approx |y_n - y_n^*|$, (y_n^* soluția numerică în punctul $x=x_n$ pentru pasul egal cu $h/2$).

Metoda Euler modificată

După cum s-a văzut eroarea metodei este considerabilă, care poate fi întrucâtva micșorată dacă se va folosi un pas de discretizare destul de mic. Aceasta din urmă cere eforturi de calcul mari. De aceea au fost propuse mai multe modificări ale metodei Euler în scopul ridicării ordinului preciziei. Una din aceste modificări constă în precizarea iterațională a soluției.

Fie că este cunoscută soluția y_i numerică a problemei (6)-(7). Considerând această soluție ca o aproximație inițială, determinăm următoarea aproximație:

$$\overline{y_{i+1}} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (9)$$

$$y''' = \left(\frac{y'}{1+y}(y'+1) \right)' = \frac{y'y''}{1+y} + (1+y') \frac{(1+y)y'' - y'^2}{(1+y)^2}; y'''(0) = 2$$

$$y^{IV} = \frac{1}{(1+y)^3} [(1+y)((1+y)y'y''' + y''^2) - y'^2 y''] + (y''^2(1+y) - y'^2 y'')(1+y) + (1+y')((1+y)((1+y)y''' + y'y'' + 2y'y'') - 2y'((1+y)y'' - y'^2))]$$

$$y^{IV}(0) = 2$$

Așadar soluția aproximativă se poate scrie sub forma:

$$y(x) \approx 2 + 2x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{2}{4!}x^4, \text{ sau}$$

$$y(x) = 2 + 2x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4$$

Metoda Euler

Această metodă este o metodă numerică care permite determinarea soluției aproximative $y(x)$ a problemei Cauchy sub forma unui tabel de valori. Ideea metodei se bazează pe dezvoltarea funcției $y=y(x)$ în seria Taylor în vecinătățile unui șir de puncte, numite noduri, $x=x_i$ ($i=0,1,2,\dots$) și din care se elimină termenii seriei ce conțin derivatele de ordin mai superior ca unu.

Să considerăm problema Cauchy pentru ecuația diferențială de ordinul unu:

$$y' = f(x, y) \quad (6)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (7)$$

Să considerăm un pas de discretizare destul de mic h și construim un șir de puncte (noduri) echidistanțate $x_i = x_0 + ih$ ($i=0,1,2,\dots$). Soluția aproximativă a problemei (6)-(7) se obține conform algoritmului

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (i=0,1,2,\dots) \quad (8)$$

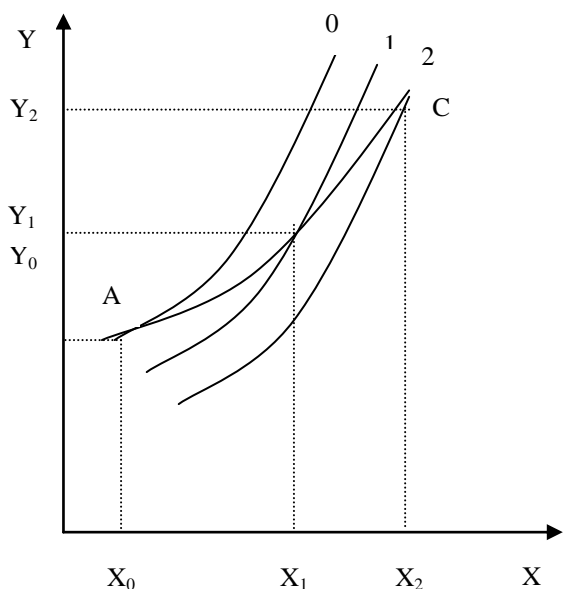


Figura 4

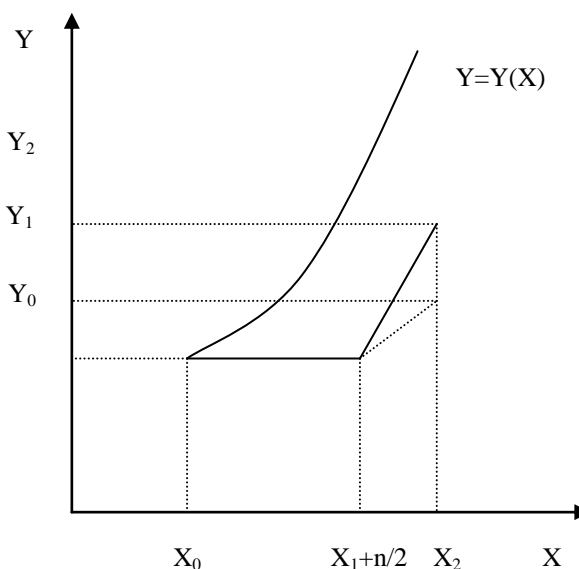


Figura 5

Geometric metoda Euler constă în înlocuirea curbei $y=y(x)$ prin linia poligonală ABC (fig.5) în modul următor: tangenta la curba integrală $y=0$ în punctul $A(x_0, y_0)$ are coeficientul unghiular $y'_0 = f'(x_0, y_0)$. Punctele B și C se obțin în rezultatul soluționării problemei Cauchy prin metoda Euler. După fiecare pas noi de fapt trecem pe o altă curbă integrală. Astfel segmentul BC este de acum un segment al tangentei dusă prin punctul $B(x_1, y_1)$ la curba integrală 1. Deci sensul geometric al metodei constă în înlocuirea curbei integrale O care trece prin punctul $A(x_0, y_0)$ printr-o linie poligonală, numită frînta lui Euler. Metoda lui Euler este o metodă directă, care folosește informația legată de o singur pas al algoritmului, adică din acest punct de vedere este o metodă unipas.

Eroarea metodei se constituie din două componente:

- a) eroarea legată de trunchierea seriei Taylor;
- b) eroarea rotunjirii.

Deoarece aceste erori se adună pas cu pas, eroarea soluției într-un punct \bar{x} , aflat la o distanță l de la punctul x_0 , poate fi destul de mare. Din acest punct de vedere, metoda Euler este o metodă de ordinul 1 de exactitate.

Folosind această valoare se obține algoritmul modificat Euler.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \overline{y_{i+1}})] \quad (10)$$

Sensul geometric al metodei rezultă din figura (5)

Metoda Runge – Kutta.

Această metodă este de asemenea o metodă directă de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare. Ideea metodei constă în construirea unei formule de calcul al valorilor soluției problemei Cauchy în punctele x_i ($i=0, 1, 2, \dots$) de tipul

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i, h) \quad (1)$$

în care funcția $\varphi(x_i, y_i, h)$ ar aproxima segmentul seriei Taylor (5) în jurul punctului x_i cu exactitatea $O(h^{p+1})$ și totodată să nu conțină derivatele funcției $f(x, y)$.

Trebuie de menționat că metoda Runge – Kutta de ordinul 1 ($p=1$) este de fapt metoda lui Euler.

Vom exemplifica pentru cazul metodei Runge – Kutta de ordinul 2 cum poate fi obținută formula de recurență.

Vom căuta funcția φ sub forma

$$\varphi(x,y,h)=Af(x,y)+Bf(x+\alpha h, y+\beta h) \quad (12)$$

în care A, B, α, β sunt niște constante temporar necunoscute. Pentru a le calcula vom dezvolta termenul al doilea din partea dreaptă a expresiei (12) în seria Taylor în împrejurimile punctului x_i , păstrînd numai primii trei termeni (exactitatea de aproximare $0(h^2)$). Obținem:

$$\varphi(x,y,h)=Af(x_i,y_i)+\left[\frac{\partial f(x_i,y_i)}{\partial x}h\alpha+\frac{\partial f(x_i,y_i)}{\partial y}h\beta f(x_i,y_i)+0(h^2)\right]$$

Pe de altă parte soluția $y(x)$ a problemei (6)-(7), fiind dezvoltată în seria Taylor cu exactitatea $0(h^2)$ este

$$y_{i+1}=y_i+h\left[f(x_i,y_i)+\frac{h}{2}(f'_x(x_i,y_i)+f'_y(x_i,y_i)f(x_i,y_i))\right]+0(h^2)$$

Comparînd ultimele două formule obținem un sistem de ecuații pentru calculul coeficienților necunoscuți.

$$A+B=1; \alpha B=1/2; \beta B=1/2.$$

Sistemul dat cu trei ecuații conține patru necunoscute și este un sistem nedeterminat, soluția căreia este

$$A=1-\lambda; B=\lambda; \alpha=\beta=\gamma/2\lambda; \quad (\lambda \neq 0).$$

și care depinde de paramentru λ . În particular pentru $\lambda=1/2$ se obține formula Runge – Kutta de ordinul 2

$$\begin{cases} y_{i+1}=y_i+\frac{h}{2}(k_1+k_2), unde(i=0,1,2) \\ k_1=f(x_i,y_i); k_2=f(x_i+h,y_i+h k_1) \end{cases} \quad (13)$$

Într-un mod similar poate fi obținută schema de calcul al metodei Runge – Kutta de orice ordin p . În particular metoda Runge – Kutta de ordinul patru constă în aplicarea algoritmului:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \\ \Delta y = \frac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}) \end{cases}, \quad i=0,1,2 \quad (14)$$

unde:

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= hf(x_i, y_i); \quad k_2^{(i)} = hf(x_i + h/2, y_i + k_1^{(i)}/2) \\ k_2^{(i)} &= hf(x_i + h/2, y_i + k_2^{(i)}/2); \quad k_3^{(i)} = hf(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}); \end{aligned}$$

Pasul h poate fi schimbat de la punct la punct. Pentru a verifica corectitudinea alegerii pasului h se poate calcula mărimea

$$\theta = \frac{|k_2^{(i)} - k_3^{(i)}|}{|k_1^{(i)} - k_2^{(i)}|}$$

care nu trebuie să depășească câteva sutimi, în caz contrar el trebuie micșorat.

Metoda Runge – Kutta are ordinul h^4 de exactitate pe întreg segmentul de calcul a soluției. Estimarea erorii metodei este destul de dificilă, însă această estimare poate fi efectuată după regula Runge în modul următor.

Fie $y(x_n)$ valoarea soluției exacte în punctul x_n , iar y_n^* , y_n – valorile aproximative ale soluției în acest punct, calculate cu pasul $h/2$ și h . Atunci eroarea metodei este determinată de relația

$$|y_n^* - y(x_n)| \approx \frac{1}{15} |y_n^* - y_n|$$

Probleme:

1. Să se determine soluțiile numerice ale ecuațiilor diferențiale pe segmentul $[a, b]$ prin metode Euler, Euler modificat Runge – Kutta cu pasul $h=0.05$. Să se efectueze o analiză a rezultatelor primite

1) $y' = 1 + 0.5y \sin x - 0.75y^2$, $y(0)=0$; $a=0$; $b=1$;

2) $y' = e^x - y^2$, $y(0)=0$; $a=0$; $b=1$;

3) $y' = x \ln y - y \ln x$, $y(1)=1$; $a=1$; $b=2$;

4) $y' = 0.1[\sqrt[3]{y} + \ln(x+y) - 1]$, $y(-1)=2$; $a=-1$; $b=0$;

$$5) y' = y^2 + \sqrt{y} + \cos y, \quad y(0)=0; a=0; b=1;$$

$$6) y' = 1 - \sin(1,25x+y) + 0.4/(2+x), \quad y(-1)=0; a=-1; b=0;$$

$$7) y' = \frac{\cos y}{1.25+x} - 0.25y^2, \quad y(0)=0; a=0; b=1;$$

$$8) y' = -y^2 + \frac{2,6}{1+x^2}, \quad y(1)=0.6; a=1; b=2;$$

$$9) y' = \frac{\cos(1.8x-0.5)}{1.5+x^2}, \quad y(0)=0; a=0; b=1;$$

$$10) y' = e^{-1.2x}(x^2+1.8), \quad x(0)=0; a=0; b=1;$$

$$11) y' = -\frac{y}{x} - 0.2y^2 \ln x, \quad y(1)=1; a=1; b=2;$$

$$12) y' = \frac{5.2}{\cos x} - y \operatorname{tg} x, \quad y(0)=1; a=0; b=1;$$

Bibliografie

1. Bucur C. M., Popcea C. A., Simion Gh. Gh. Matematici speciale. Calculul numeric. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983. – 232p.
2. Larionescu Dan. Metode numerice. Editura tehnică, București, 1989. – 224p.
3. Marinescu Gh., Rizzoli I., Ștefan C. Probleme de analiză numerică rezolvate cu calculatorul. Editura Academiei Republicii România, București, 1987.- 264p.
4. Șabac I. Gh., Cocîrlă P., Stănășilă O., Topală A. Matematici speciale. Vol.II Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983. –224p.
5. Toma M., Odăgescu I. Metode numerice și subrutine. Editura Tehnică, București, 1980. –215p.
6. Бахвалов И. С., Жидков И. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М. Наука, 1987. – 600 стр.
7. Волков Е. А. Численные методы. – М. Наука, 1987. – 256 стр.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы – М. Наука, 1978. – 612 стр.
9. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране. – М. Мир, 1977ю – 584 стр.
- 10.Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение. – М. Мир, 1984. – 264 стр.
- 11.Стренг Г. Линейная Алгебра и её применения. – М. Мир, 1980. – 454 стр.
- 12.Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М. Мир, 1980. – 279 стр.
- 13.Шун Т. Е. Прикладные численные методы в физике и технике. – М. Высшая школа, 1990. – 255 стр.

Cuprins

Rezolvarea numerică a ecuațiilor algebrice și transcendente.....	2
Rezolvarea numerică a sistemelor de ecuații liniare.....	12
Interpolarea funcțiilor cu ajutorul polinomului Lagrange.....	22
Calculul numeric al integralelor.....	27
Integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale.....	33
Bibliografie.....	40