Capitolul I

SERII NUMERICE

Definiţie. *Fie* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *un șir de numere reale. Se numeşte* ***serie numerică*** *o expresie de forma* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *Se notează:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *se numesc* ***termeni*** *ai seriei, iar* a_n *se numeşte* ***termen general*** *sau* ***termen de rang n*** *al seriei.*

Suma $\sum_{k=1}^{n} a_k$ a primilor n termeni ai seriei se numeşte **sumă parţială de rang** n a acestei serii şi se notează cu S_n. Astfel:

$S_1 = a_1,$

$S_2 = a_1 + a_2,$

$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$

$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

Definiţie. *Dacă șirul* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *al sumelor parţiale ale seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergent și* $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, *atunci se spune că seria este* ***convergentă****, iar numărul S se numeşte* **suma** *acestei serii. Se notează:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Dacă șirul $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *este divergent, atunci se spune că seria dată este* ***divergentă****.*

Expresia $R_n = S - S_n$ *se numește* **restul** *seriei.*

Exemplu. Să se calculeze suma seriei (dacă există): **1.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$; **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Soluție: **1.** Conform formulei pentru suma primilor n termeni ai progresiei geometrice,

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Atunci $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2 = S.$

Am obținut că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$

2. $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$

Atunci $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 = S$. Astfel am obținut că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ este convergentă și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Seria geometrică $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ este convergentă către suma $S = \frac{a}{1-q}$ numai dacă $|q| < 1$.

Teoremă. (criteriul necesar de convergenţă) *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă, atunci* $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Consecință. *Dacă* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*

Exemplu. Să se cerceteze convergenţa seriei cu termenul general

1. $a_n = \frac{n-1}{n}$; **2.** $a_n = n^2 \arcsin \frac{n^2}{2n^4+1}$.

Soluție: **1.** Întrucât $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1 \neq 0$, seria dată este divergentă.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \arcsin \frac{n^2}{2n^4+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \frac{\arcsin\frac{n^2}{2n^4+1}}{\frac{n^2}{2n^4+1}} \cdot \frac{n^2}{2n^4+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \frac{n^2}{2n^4+1} = \frac{1}{2} \neq 0,$

seria dată este divergentă.

Seria armonică generalizată (seria Dirichlet) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ **este divergentă pentru** $\alpha \leq 1$ **și este convergentă pentru** $\alpha > 1$.

SERII CU TERMENI POZITIVI. CRITERII DE CONVERGENȚĂ

Definiţie. *Seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *unde* $a_n > 0, n = 1,2,\ldots$, *se numeşte* ***serie cu termeni pozitivi***.

Teoremă. *O serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale este mărginit.*

Teoremă. (criteriul de comparaţie cu inegalități) *Fie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *și* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *două serii cu termeni pozitivi. Fie că există un rang N astfel încât* $a_n \leq b_n$ *pentru orice* $n \geq N$.

a) *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *este convergentă, atunci este convergentă şi seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*;*
b) *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă, atunci este divergentă şi seria* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Exemplu. Să se cerceteze convergenţa seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$.

Soluție: Întrucât pentru $n \geq 2$ avem $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \geq \frac{1}{n} > 0$, din divergenţa seriei armonice $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ rezultă divergenţa seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$.

Teoremă. (criteriul de comparaţie la limită) *Fie că pentru seriile cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *există* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$. *Dacă:*

a) $0 < K < +\infty$, *atunci seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *au aceeaşi natură de convergenţă;*
b) $K = 0$ *şi seria* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *este convergentă, atunci este convergentă şi seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*;*
c) $K = +\infty$ *şi seria* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *este divergentă, atunci este divergentă şi seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Dacă $K = 1$**, vom spune că termenii** a_n **și** b_n **sunt echivalenţi când** $n \to +\infty$**. Se notează** $a_n \sim b_n$**.**

Exemplu. Să se cerceteze convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\sqrt{n}+1}{3n^3+n+1}$.

Soluție: Notăm cu a_n termenul general al seriei date şi cu b_n termenul general al seriei Dirichlet cu $\alpha = 3/2$. Întrucât $K = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2n\sqrt{n}+1}{3n^3+n+1} : \frac{1}{n^{3/2}}\right) = \frac{2}{3}$ din convergenţa seriei Dirichlet cu $\alpha = 3/2 > 1$ rezultă convergenţa seriei date.

Teoremă. (criteriul d'Alembert) *Fie că pentru seria cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *există limita* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

a) *Dacă* $l < 1$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă;*

b) *Dacă* $l > 1$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*

Exemplu. Să se cerceteze convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4+1}$.

Soluție: $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^4+1} : \frac{3^n}{n^4+1}\right) = 3 > 1$, de unde rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^4+1}$ este divergentă.

Teoremă. (criteriul radical Cauchy) *Fie că pentru seria cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *există limita* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

a) *Dacă* $l < 1$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă;*
b) *Dacă* $l > 1$, *atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este divergentă.*

Exemplu. Să se cerceteze convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{7n+2}\right)^{2n}$.

Soluție: Întrucât $l = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n-1}{7n+2}\right)^{2n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3n-1}{7n+2}\right)^2 =$
$= \frac{9}{49} < 1$, seria dată este convergentă.

Teoremă. (criteriul integral Cauchy). *Fie seria cu termeni pozitivi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *și fie* f *o funcţie nenegativă continuă şi descrescătoare pe* $[1, +\infty)$, *care verifică condiţia* $f(n) = a_n$, $n = 1,2, \ldots$ *Fie* $l_n = \int_1^n f(x)dx$, $n = 1,2, \ldots$ *Atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă atunci și numai atunci când este convergent șirul* $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$.

SERII CU TERMENI DE SEMNE ALTERNANTE. CRITERIUL LEIBNIZ

Definiţie. *O serie în care oricare doi termeni vecini au semne diferite se numeşte **serie cu termeni de semne alternante** sau **serie alternantă**.*

Teoremă. (criteriul Leibniz) *Dacă termenii seriei alternante* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$ *verifică condiţiile:*

1. $c_1 \geq c_2 \geq \ldots \geq c_n \geq \ldots$, *adică șirul* $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ *este monoton descrescător;*
2. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$,

atunci această serie este convergentă şi suma S a seriei nu întrece primul termen, adică $S \leq c_1$.

Exemplu. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este convergentă, deoarece sunt verificate ambele condiții ale criteriului Leibniz:
$c_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = c_{n+1}$, $n = 1,2, \ldots$, şi $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Definiție. *Seria cu termeni arbitrari* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, *se numește **absolut convergentă** dacă este convergentă seria* $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Teoremă. *Convergența absolută a unei serii implică convergența acestei serii.*

Definiţie. *Dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *este convergentă, iar seria* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *este divergentă, atunci seria* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se numeşte **semiconvergentă**.*

SERII DE PUTERI

Definiţie. *Fie* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *un şir de numere reale. Se numeşte* ***serie de puteri*** *o serie de funcții de forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

unde x *este o variabilă reală.*

Despre seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se spune că este **centrată în punctul $x = 0$**. Printr-o schimbare de variabilă $x = y - y_0$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ia forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (y - y_0)^{\,n}$, care se numește serie de puteri **centrată în punctul y_0.** Este evident că prin schimbarea de variabilă de la o serie centrată în orice punct se poate trece la o serie centrată în origine, deaceea în continuare vom restrânge teoria generală la cazul seriilor centrate în origine.

Teoremă (Abel). *Dacă seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este convergentă într-un punct* $x_0 \neq 0$, *atunci ea este absolut convergentă în orice punct* x, *care verifică condiția* $|x| < |x_0|$. *Mai mult, seria* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este uniform convergentă pe* $[-r, r] \subset (-|x_0|, |x_0|\,), \forall\, r > 0$.

Dacă însă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este divergentă într-un punct* x_1, *atunci ea este divergentă şi în orice punct* x, *care verifică condiția* $|x| > |x_1|$.

Din teorema Abel rezultă că există un număr pozitiv R, astfel încât seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă în orice $x \in (-R, R)$ şi este divergentă în orice $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$. În acest caz intervalul $(-R, R)$ se numeşte **interval de convergenţă**, iar numărul R se numeşte **rază de convergenţă** a seriei de puteri.

În cazul în care seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă numai în $x = 0$, se spune că raza de convergenţă a seriei este egală cu zero. Dacă însă această serie este convergentă în orice x real, atunci se spune că raza de convergenţă este $+\infty$, iar intervalul de convergenţă este $(-\infty, +\infty)$.

Raza de convergenţă a seriei poate fi determinată după una dintre formulele: $\boldsymbol{R} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{\boldsymbol{a_n}}{\boldsymbol{a_{n+1}}}\right|$ sau $\boldsymbol{R} = \frac{\mathbf{1}}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\boldsymbol{a_n}|}}$.

Notă. Determinarea domeniului de convergență al unei serii de puteri presupune determinarea intervalului de convergență și studierea convergenței seriei la capetele intervalului de convergență.

Exemplu. Să se determine raza, intervalul şi domeniul de convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}$.

Soluție: Determinăm raza de convergenţă

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n} = 2.$$

Intervalul de convergenţă este $(-2,2)$.

Pentru a determina domeniul de convergenţă trebuie să cercetăm convergenţa seriei în extremităţile -2 şi 2 ale intervalului de convergenţă.

Pentru $x = -2$ obținem seria alternantă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, care este convergentă, conform criteriului Leibniz.

Pentru $x = 2$ obținem seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, care este divergentă.

Astfel am obţinut că domeniul de convergenţă al seriei date este $[-2,2)$.

Teoremă. *Dacă seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *are raza de convergenţă* $R > 0$, *atunci suma acestei serii este o funcţie continuă pe segmentul* $[-r, r]$, *oricare ar fi* $r \in (0, R)$.

Teoremă. *Dacă seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *are raza de convergenţă* $R > 0$ *şi suma ei este* $S(x)$, *atunci această serie poate fi integrată termen cu termen pe oricare segment* $[a, b] \subset [-R, R]$.

Teoremă. *Dacă seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *are raza de convergenţă* $R > 0$, *atunci ea poate fi derivată termen cu termen pe segmentul* $[-r, r]$, *oricare ar fi* $r \in (0, R)$. *Seria obținută este de asemenea convergentă.*

SERII TAYLOR

Fie funcția f definită în punctul $x = x_0$, care posedă derivate până la ordinul $n + 1$ inclusiv într-o vecinătate a punctului $x = x_0$.

Atunci $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$, unde $R_n(x)$ se numește **rest.** Una dintre reprezentările lui $R_n(x)$ este $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, unde ζ este un punct situat între a și x, numită **forma Lagrange a restului.** Formula $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$ se numește **formula Taylor** a funcției f în punctul $x = x_0$.

În cazul particular $x_0 = 0$ obținem $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$
numită **formulă Maclaurin.**

Dacă funcţia f posedă derivate de orice ordin în $x = x_0$ și $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, atunci trecând la limită, când $n \to +\infty$ în egalitatea $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$, obţinem

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

numită **serie Taylor** a funcţiei f în vecinătatea punctului $x = x_0$.

În cazul când $x_0 = 0$ obţinem **seria Maclaurin:**

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Serile Taylor ale unor funcții elementare în $x_0 = 0$

$\boldsymbol{e^x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty).$

$\mathbf{sin}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty, +\infty).$

$\mathbf{cos}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty).$

$(1 + x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n , x \in (-1, 1).$

$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n , x \in (-1, 1).$

$\mathbf{ln}(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} , x \in (-1, 1).$

Pentru cazul când $x \to 1, x < 1$ obținem $\mathbf{ln}\, 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

$\mathbf{arctg}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in (-1, 1);$ $\qquad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

$\mathbf{arcsin}x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot(2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} , x \in (-1, 1).$

$\mathbf{arccos}\boldsymbol{x} = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, x \in (-1, 1).$

$\mathbf{sh}\boldsymbol{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty, +\infty);$

$\mathbf{ch}\boldsymbol{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty).$

<u>Problema 1.</u> Să se arate că seria dată este convergentă și să se calculeze suma ei:

1. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{2}{n^2-14n+48}$.
2. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{18}{n^2-13n+40}$.
3. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{4}{n^2-12n+35}$.
4. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{36}{n^2-11n+28}$.
5. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{6}{n^2-10n+24}$.
6. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{54}{n^2-9n+18}$.
7. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{8}{n^2-8n+15}$.
8. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{72}{n^2-7n+10}$.
9. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{10}{n^2-6n+8}$.
10. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{90}{n^2-5n+4}$.
11. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{12}{n^2-4n+3}$.
12. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{18}{n^2-n-2}$.
13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{n^2+4n+3}$.
14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2+8n+3}$.
15. $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{30}{n^2-14n+48}$.
16. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{54}{n^2-11n+28}$.
17. $\sum_{n=9}^{\infty} \frac{36}{n^2-12n+35}$.
18. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{72}{n^2-9n+18}$.
19. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{12}{n^2-10n+24}$.
20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+21n-8}$.
21. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{60}{n^2-8n+15}$.
22. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{36}{n^2-5n+4}$.
23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+12n-5}$.
24. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{54}{n^2+n-2}$.
25. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{6}{n^2-4n+3}$.
26. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{18}{n^2-n-2}$.
27. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{24}{n^2+4n+3}$.
28. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{36}{n^2+n-2}$.
29. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{72}{n^2+6n+8}$.
30. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{54}{n^2+5n+4}$.
31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{16n^2-8n-3}$.
32. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2+8n-15}$.
33. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2+6n-8}$.
34. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2-9}$.
35. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^2-5n-6}$.
36. $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{48}{n^2-6n+8}$.
37. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2+4n-3}$.
38. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2-8n-15}$.
39. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+3n-20}$.
40. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2-12n-5}$.
41. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{36}{n^2+7n+10}$.
42. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+13n+42}$.
43. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2-7n-12}$.
44. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{49n^2-70n-24}$.
45. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{18}{n^2-7n+10}$.
46. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$.
47. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{36}{n^2+7n+10}$.
48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+15n+56}$.
49. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+7n+12}$.
50. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2+16n+15}$.

Exemplu rezolvat

Să se arate că seria dată este convergentă și să se calculeze suma seriei: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{16n^2-8n-3}$.

Rezolvare: $16n^2-8n-3=16\left(n-\frac{3}{4}\right)\left(n+\frac{1}{4}\right)=(4n-3)(4n+1)$.

Descompunem termenul general: $a_n=\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{A}{4n-3}+\frac{B}{4n+1}$,

$1=A(4n+1)+B(4n-3)$, $1=(4A+4B)n+(A-3B)$,

$\begin{cases}4A+4B=0\\ A-3B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{4}\\ B=-\frac{1}{4}\end{cases}$. Deci, $a_n=\frac{1/4}{4n-3}-\frac{1/4}{4n+1}$.

Aflăm suma primilor n termeni ai seriei:

$$S_n=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right).$$

Determinăm suma seriei numerice: $S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right)=\frac{1}{4}$, deci seria este convergentă și suma este $S=\frac{1}{4}$.

Problema 2. Utilizând criteriul lui D'Alembert să se stabilească natura seriei:

1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n)!}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}\left(n^3+1\right)}{(n+1)!}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n n!}{(2n)!}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{2^n(3n+5)}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}arctg\frac{5}{n}$.

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}tg\frac{1}{5^n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n\left(n^2-1\right)}{n!}$.

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n^2}{(n+2)!}$.

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$;

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!}{(3n)!}$.

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3^n(n+1)!}$.

16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n+1}{2^n(n-1)!}$.

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{\left(3^n+1\right)(2n)!}$.

18. $\sum_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$.

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$.

20. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)!}{(2n)!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n(n+2)!}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{7\cdot9\cdot11\cdot\ldots\cdot(2n+5)}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^n+3}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$.

28. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n-1)!}$. **29.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\sqrt[3]{n}}{3^n+2}$. **30.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n n!}{n^n}$.

31. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\sqrt{n}+1}{3^n(n-1)!}$. **32.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(2n+1)}{(n)!}$. **33.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}\left(n^2+3n+1\right)}{(n+1)!}$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{11^n(3n-2)n!}{(2n)!}$. **35.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{5^n(6n+15)}$. **36.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+7}{n!}tg\frac{2}{5^n}$.

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\arcsin\frac{1}{n}$. **38.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^n}{5^n n!}$. **39.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}\sin\frac{1}{7^n}$.

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\left(n^2+4n-1\right)}{n!}$. **41.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n n^3}{(3n+2)!}$. **42.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n!)^2}$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{3n}}{(2n+1)!}$. **44.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n+1)!}{(4n)!}$. **45.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{7^n(2n+1)!}$.

46. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{3^n(n+1)!}$. **47.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{\left(2^n-1\right)(2n)!}$. **48.** $\sum_{n=2}^{\infty}n!\,tg\frac{\pi}{2^n}$.

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)!}{3^n(n+1)^n}$. **50.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\sqrt[5]{n^4}}{(2n+1)!}$.

Exemplu rezolvat

Utilizând criteriul lui D'Alembert să se stabilească natura seriei $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$.

Rezolvare: $a_n=\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$, $a_{n+1}=\frac{7^{3(n+1)}}{(2(n+1)-5)!}=\frac{7^{3n+3}}{(2n-3)!}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7^{3n+3}}{(2n-3)!}\cdot\frac{(2n-5)!}{7^{3n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{7^3}{(2n-4)(2n-3)}=0<1$, deci seria este convergentă.

Problema 3. Utilizând criteriul Cauchy (radical), să se stabilească natura seriei:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$. **2.** $\sum_{n=1}^{\infty}n^4\left(\frac{2n}{3n+5}\right)^{n}$. **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{n^2+1}\right)^{n^2}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$. **5.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$. **6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^{n^2}$.

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+2}{3n+1}\right)^{n}\cdot n^3$. **8.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$. **9.** $\sum_{n=1}^{\infty}n\arcsin^n\frac{\pi}{4n}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$. **11.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\frac{n}{5^n}$. **12.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}$.

13. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{n}$. **14.** $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}$. **15.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$.

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$. **17.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{n^n}$. **18.** $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin^n\frac{\pi}{2n}$.

19. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^3}{(\ln n)^n}$. **20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{n^3}$. **21.** $\sum_{n=1}^{\infty}n^3 arctg^n\frac{\pi}{3n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^5}{(2n+1)^n}$. **23.** $\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}e^{-n}$. **24.** $\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}$. **26.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}$. **27.** $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$. **29.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{n+2}}{5^n}$. **30.** $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}$.

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{n^2}$. **32.** $\sum_{n=1}^{\infty}n^5\left(\frac{3n}{4n+7}\right)^{n}$. **33.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{2n^2-1}\right)^{n^2}$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{7^n}$. **35.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n^3}\right)^{3n}$. **36.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{4n-3}{8n+1}\right)^{n}$.

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{4n+7}\right)^{n}\cdot n^5$. **38.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{5n+8}\right)^{n^2}$. **39.** $\sum_{n=1}^{\infty}n\,\mathrm{arc}\,tg^n\frac{\pi}{4n}$.

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-1}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{3^n}$. **41.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{n}\frac{n}{3^n}$. **42.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{5^n}$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty}n^3\left(\frac{4n+2}{7n-1}\right)^{n}$. **44.** $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-3}\right)^{n^2}\cdot 3^n$. **45.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{5n+1}\right)^{2n}$.

46. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8n-1}{27n+1}\right)^{\frac{n}{3}}$. **47.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{(n+1)^n}$. **48.** $\sum_{n=1}^{\infty}n^3 tg^n\frac{\pi}{4n}$.

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(\ln(n+1))^n}$. **50.** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^{n^3}$.

Exemplu rezolvat

Utilizând criteriul Cauchy (radical), să se stabilească natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}$.

Rezolvare: Conform criteriului radical Cauchy avem:

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}\cdot 3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{3n^n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1$, deci seria este convergentă.

Problema 4. Să se demonstreze că:

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$. **2.** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0$. **3.** $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{n^n}=0$.

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^n}{(2n-1)!}=0$. **5.** $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{2n^2!}=0$. **6.** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{2^{n^2}}=0.$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n!}=0.$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}=0.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n+1)!}=0.$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{n^n}=0.$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(2n-1)!}=0.$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n!}{2^{n^2}}=0.$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n)!^3}=0.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{(2n)!}=0.$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{3n}}{n!}=0.$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{n^n}=0.$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n-1)!}=0.$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!!}{n^n}=0.$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)^n}{(2n+1)!}=0.$

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(4n)!}{2^{n^2}}=0.$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{\left[(n+1)!\right]^2}=0.$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^{n^2}}=0.$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{2^{n^2}}=0.$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)!}{n^n}=0.$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n+3)!}=0.$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+3)!!}{n^n}=0.$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5n)^n}{(2n+1)!}=0.$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(5n)!}{2^{n^2}}=0.$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{\left[(n+2)!\right]^2}=0.$

31. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(2n)!!}=0.$

32. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{3^{n^2}}=0.$

33. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{5^{n^2}}=0.$

34. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{2n}}{n!}=0.$

35. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n!}=0.$

36. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=0.$

37. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{2^n\,(2n)!}=0.$

38. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{3^n\,n!}=0.$

39. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n!}{(2n+1)!}=0.$

40. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\left(n^3+1\right)}{(n+1)!}=0.$

41. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+2)!}=0.$

42. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}=0.$

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n}{(n+2)!4^n}=0.$

44. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{7^{n^2}}=0.$

45. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{n^n}=0.$

46. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n/2}}{n!}=0.$

47. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{5^n\,(n+3)!}=0.$

48. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^3}{(2n)!}=0.$

49. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n!}=0.$

50. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)!}=0.$

Exemplu rezolvat

Să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$

Rezolvare: Cercetăm la convergență seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ conform criteriului D'Alembert: $a_n=\frac{n!}{n^n}$,

$a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1,$$

deci seria este convergentă. Conform criteriului necesar de convergență rezultă că $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

Problema5. Să se calculeze suma seriei cu exactitatea α.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^2},\ \alpha=0,01.$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!},\ \alpha=0,01.$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3},\ \alpha=0,001.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)},\ \alpha=0,001.$ **5.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)},\ \alpha=0,01.$ **6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+2)!},\ \alpha=0,0001.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n},\ \alpha=0,1.$ **8.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{3^n},\ \alpha=0,1.$ **9.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3},\ \alpha=0,0001.$

10. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n,\ \alpha=0,01.$ **11.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!},\ \alpha=0,001.$ **12.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!},\ \alpha=0,0001.$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{7^n},\ \alpha=0,0001.$ **14.** $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n,\ \alpha=0,1.$ **15.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!},\ \alpha=0,001.$

16. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n!},\ \alpha=0,01.$ **17.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!2n},\ \alpha=0,00001.$ **18.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n)!n!},\ \alpha=0,001.$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n n!},\ \alpha=0,001.$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!},\ \alpha=0,0001.$ **21.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!n!},\ \alpha=0,00001.$

22. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(n+1)},\ \alpha=0,001.$ **23.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)},\ \alpha=0,001.$ **24.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3},\ \alpha=0,01.$

25. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n+1)^n},\ \alpha=0,001.$ **26.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n},\ \alpha=0,001.$ **27.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1},\ \alpha=0,01.$

28. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n^2(n+3)},\ \alpha=0,01.$ **29.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n^3+1)^2},\ \alpha=0,001.$ **30.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2+n^3},\ \alpha=0,01.$

31. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(1+n^3)^2},\ \alpha=0,001.$ **32.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}},\ \alpha=0,01.$ **33.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},\ \alpha=0,01.$

34. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(n)^n},\ \alpha=0,001.$ **35.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2},\ \alpha=0,01.$ **36.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{3^n},\ \alpha=0,001.$

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(3n-2)!},\ \alpha=0,0001.$ **38.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n},\ \alpha=0,01.$ **39.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+5)^n},\ \alpha=0,0001.$

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-1)!}, \alpha=0{,}001.$ **41.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^4}, \alpha=0{,}001.$ **42.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(n+2)}, \alpha=0{,}001.$

43. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \alpha=0{,}1.$ **44.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6^n(2n+5)^2}, \alpha=0{,}001.$ **45.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}, \alpha=0{,}1.$

46. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}, \alpha=0{,}001.$ **47.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}, \alpha=0{,}01.$

48. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+5}{3^n}, \alpha=0{,}01.$ **49.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n^2+1}, \alpha=0{,}01.$ **50.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+7}\right)^n, \alpha=0{,}01.$

Exemplu rezolvat

Să se calculeze suma seriei cu exactitatea α: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}, \alpha=0{,}1.$

Rezolvare: Cercetăm dacă seria alternantă $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}$ este convergentă, folosind criteriului Leibniz. Avem: $a_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=0$ și șirul $\{a_n\}$ este monoton descrescător. Deci seria este convergentă. Termenul al cincilea al seriei este mai mic decât 0,1. Astfel, pentru calcularea sumei seriei vom calcula suma primilor patru termeni:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4\sqrt{5}}\approx 0{,}4733.$$

Problema 6. Să se determine raza de convergență, intervalul și domeniul de convergență ale seriei date:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\sqrt{n}}.$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n3^n}.$ **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{n+1}.$

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-3)^n}{\sqrt{n}}.$ **5.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\sqrt{3n-1}}.$ **6.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{10^n n}.$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-5)^n}{n+2}.$ **8.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^3 3^n}.$ **9.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-2)^n}{n^2+1}.$

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2 5^n}.$ **11.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n^2\sqrt{n}}.$ **12.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n5^n}.$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-2)^n}{n+3}.$ **14.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x-4)^n}{n\sqrt{n}}.$ **15.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{4^n\sqrt{2n+1}}.$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{6^n n}.$ **17.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-3)^n}{n+5}.$ **18.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{n^3 5^n}.$

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{n^3+2}.$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 6^n}.$ **21.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^3\sqrt{n}}.$

22. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n4^n}.$ **23.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+1)^n}{n^2+3}.$ **24.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+2)^n}{n\sqrt{n}}.$

25. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^n\sqrt{4n+1}}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n n^2}$.

27. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+4)^n}{n^3+5}$.

28. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^3 4^n}$.

29. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{n^2+3}$.

30. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{n^3 7^n}$).

31. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$.

32. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 5^n}$.

33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x+1)^n}{2n^2+1}$.

34. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+5)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$.

35. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{5^n\sqrt{2n+3}}$.

36. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{8^n n^3}$.

37. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(x+4)^n}{n^3+2n}$.

38. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n^4 7^n}$.

39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-2)^n}{n^2+1}$.

40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{5^n n\sqrt{n}}$.

41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^3\sqrt{n}}$.

42. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{\sqrt[4]{n^3}}$.

43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(x+8)^n}{n+3}$.

44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(x+2)^n}{n\sqrt{n}}$.

45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{5^n\sqrt{3n+4}}$.

46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{3^n\sqrt[5]{n^4}}$.

47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(x+5)^n}{n+5}$.

48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n^2 25^{n/2}}$.

49. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x+4)^n}{2n^3+1}$.

50. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(x+2)^n}{n^2 3^n}$.

Exemplu rezolvat

Să se determine raza de convergență, intervalul și domeniul de convergență ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n+1}}$.

<u>**Rezolvare**</u>: Aflăm raza de convergență: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\sqrt{n+2}}{2^n\sqrt{n+1}}=2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}=2$.

Deci $|x-2|<2\Leftrightarrow x\in(0;4)$ - intervalul de convergență.

Pentru $x=0$, obținem seria $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, care este divergentă deoarece termenii ei sunt mai mari decât termenii seriei armonice.

Pentru $x=4$, obținem seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, care este convergentă conform criteriului Leibniz.

Prin urmare, domeniul de convergență al seriei date este $(0;4]$.

<u>**Problema7.**</u> Să se calculeze integrala cu exactitatea 0,001.

1. $\int_0^{0,1}e^{-6x^2}dx.$

2. $\int_0^{0,1}\sin\left(100x^2\right)dx.$

3. $\int_0^{1}\cos x^2dx.$

4. $\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

5. $\int_0^{0,1}\frac{1-e^{-2x}}{x}dx.$

6. $\int_0^{1}\frac{\ln\left(1+x/5\right)}{x}dx.$

7. $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$ **8.** $\int_0^{0,2} e^{-3x^2}dx.$ **9.** $\int_0^{0,2} \sin\left(25x^2\right)dx.$

10. $\int_0^{0,5} \cos\left(4x^2\right)dx.$ **11.** $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}.$ **12.** $\int_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x}dx.$

13. $\int_0^{0,4} \frac{\ln\left(1+x/2\right)}{x}dx.$ **14.** $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}.$ **15.** $\int_0^{0,3} e^{-2x^2}dx.$

16. $\int_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx.$ **17.** $\int_0^{0,2} \cos\left(25x^2\right)dx.$ **18.** $\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}.$

19. $\int_0^{0,4} \frac{1-e^{-x/2}}{x}dx.$ **20.** $\int_0^{0,1} \frac{\ln\left(1+2x\right)}{x}dx.$ **21.** $\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}.$

22. $\int_0^{0,4} e^{-3x^2/4}dx.$ **23.** $\int_0^{0,5} \sin\left(4x^2\right)dx.$ **24.** $\int_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx.$

25. $\int_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}.$ **26.** $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$ **27.** $\int_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}.$

28. $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}.$ **29.** $\int_0^{0,5} e^{-3x^2/25}dx.$ **30.** $\int_0^{1} \sin x^2 dx.$

31. $\int_0^{0,1} \cos\left(100x^2\right)dx.$ **32.** $\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x}dx.$ **33.** $\int_0^{0.5} x^2\cos 3x dx.$

34. $\int_0^{0.5} \ln\left(1+x^2\right)dx.$ **35.** $\int_0^{0,4} \sqrt{x}e^{-x/4}dx.$ **36.** $\int_0^{0,8} \frac{1-\cos x}{x}dx.$

37. $\int_0^{0,5} \frac{arctgx^2}{x^2}dx.$ **38.** $\int_0^{0,8} \frac{1-\cos x}{x}dx.$ **39.** $\int_0^{0,1} \frac{\ln\left(1+x\right)}{x}dx.$

40. $\int_0^{1} \cos\sqrt[3]{x}dx.$ **41.** $\int_0^{1} \sqrt{x}\sin x dx.$ **42.** $\int_0^{2,5} \frac{e^{-2x^2}}{\sqrt{x}}dx.$

43. $\int_0^{1} \cos\frac{x^2}{4}dx.$ **44.** $\int_0^{0.5} x^2\sin 5x dx.$ **45.** $\int_0^{0,5} e^{-x^2/10}dx.$

46. $\int_0^{0,2} \sqrt{x}e^{-x}dx.$ **47.** $\int_0^{0.5} \ln\left(1+x^3\right)dx.$ **48.** $\int_0^{0.5} \sqrt{1+x^2}dx.$

49. $\int_0^{1} x^2\sin x dx.$ **50.** $\int_0^{0,5} \frac{x-arctgx}{x^2}dx.$

Exemplu rezolvat

Să se calculeze integrala cu exactitatea 0,0001: $\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx.$

Rezolvare: În seria Mac-Laurent pentru funcția $\cos x$, vom înlocui x cu $\sqrt{x}$. Obținem

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \frac{x^4}{8!} - \ldots \quad (x \geq 0).$$

Integrând, vom obține

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx = \left(x - \frac{x^2}{2!2} + \frac{x^3}{4!3} - \frac{x^4}{6!4} + \frac{x^5}{8!5} - \ldots \right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{2!2} + \frac{1}{4!3} - - \frac{1}{6!4} + \frac{1}{8!5} - \cdots$$

Termenul al cincilea al seriei este mai mic decât 0,0001. Astfel, pentru calcularea integralei vom calcula suma primilor patru termeni: $\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} - \frac{1}{2880} \approx 0,7635$.

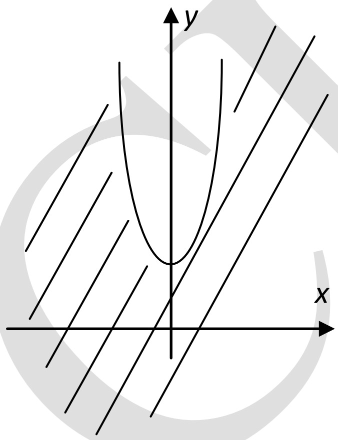
Capitolul II

FUNCŢII DE DOUĂ ŞI MAI MULTE VARIABILE.

Definiţie. Dacă fiecărei perechi de numere reale $(x;y)$ din mulțimea $D \subseteq R^2$ i se pune în corespondență un număr real z binedeterminat (după o lege careva f), atunci vom spune că pe mulțimea D este definită **funcția de două variabile** $z = f(x,y)$. Mărimile variabile x și y se numesc **argumenţi**, iar z - **funcție** de aceşti argumenţi. Mulțimea $D = D(f)$ se numeşte **domeniu de definiție.**

Domeniul de definiţie al unei funcţii de două variabile are **ilustrare geometrică**. Fie că în plan este fixat un sistem cartezian rectangular de coordonate. Fiecărei perechi de numere (x,y) îi corespunde punctul $M(x,y)$ al planului xOy. Astfel, domeniul de definiţie al unei funcţii $z = f(x,y)$ este reprezentat de o mulţime de puncte din planul xOy. Această mulţime de asemenea se numeşte **domeniu de definiţie** al funcţiei.

Pentru funcţia $z = \ln(x^2 - 3y + 6)$ domeniul de definiţie rezultă din condiția $x^2 - 3y + 6 > 0$ sau $y < \frac{x^2}{3} + 2$. Deci, $D(f)$ este mulțimea punctelor planului xOy de pe parabola $y = \frac{x^2}{3} + 2$ şi din exteriorul ei.



Definiţie. Se numeşte **derivată parţială** a funcţiei $z = f(x,y)$ **în raport cu x** valoarea limitei $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x}$, cu condiţia că această limită există.

Se notează cu $f'_x(x,y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x.

Analog se defineşte **derivata parţială** a funcţiei $z = f(x,y)$ **în raport cu y**: $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ $= \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$.

Derivatele de mai sus se numesc **derivate parţiale de ordinul întâi** ale funcţiei $z = f(x,y)$.

Remarcă. Din definiţia derivatelor parţiale rezultă că la calcularea derivatei parţiale în raport cu x, variabila y se consideră constantă, iar atunci când se calculează derivata parţială în raport cu variabila y, constantă se consideră variabila x. Acest fapt ne permite să folosim regulile şi formulele de derivare ale funcţiei de o singură variabilă.

Exemplu. Derivatele parţiale ale funcţiei $f(x,y) = x^3 - 3x^2y + 2xy^2 + y^3$ sunt: $f'_x(x,y) = 3x^2 - 6xy + 2y^2$, $f'_y(x,y) = -3x^2 + 4xy + 3y^2$.

Exemplu. Derivatele parţiale ale funcţiei $f(x,y) = x^y$.

Rezolvare. Avem $f'_x(x,y) = yx^{y-1}$, $f'_y(x,y) == x^y lnx$.

În mod similar sunt definite derivatele parţiale de ordinul întâi pentru funcţia de *n* variabile.

Diferenţiala totală de ordinul întâi a funcţiei $z = f(x,y)$ în punctul $M(x,y)$ este $\boldsymbol{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}$**.**

Ecuaţia planului tangent la suprafaţa $\boldsymbol{S: z = f(x,y)}$ în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$, unde $z_0 = f(x_0, y_0)$, este $\boldsymbol{z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$

Ecuaţia normalei la suprafaţa $\boldsymbol{S: z = f(x,y)}$ în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ este $\boldsymbol{\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}}$**.**

Dacă suprafaţa S este dată de ecuaţia $F(x,y,z) = 0$ atunci:

Ecuaţia planului tangent la S în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$, este $\boldsymbol{F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0}$

Ecuaţia normalei la suprafaţă în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$: $\boldsymbol{\frac{x-x_0}{F'_x(P_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(P_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(P_0)}}$.

Definiţie. Punctul $M_0(x_0, y_0)$ se numeşte punct de **maxim** (**minim**) **local** al funcţiei $z = f(x,y)$ definită pe un domeniu $D \in R^2$, iar $M_0(x_0, y_0)$ un punct interior al domeniului *D*, dacă există o vecinătate *V* a lui $M_0(x_0, y_0)$, astfel încât pentru orice $M(x,y)$ din $V \bigcap D(f)$ avem că $f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$ $(f(x_0, y_0) \geq f(x,y))$.

Punctele de maxim şi cele de minim local se numesc **puncte de extrem local**. Valorile funcţiei în punctele de maxim şi cele de minim local se numesc **maximele**, respectiv, **minimele funcţiei**. Minimele şi maximele funcţiei se mai numesc **extreme ale funcţiei**.

Definiţie. Punctul $M_0(x_0, y_0)$ în care derivatele parţiale se anulează simultan, se numeşte **punct staţionar**.

Fie funcţia $z = f(x,y)$ şi $M_0(x_0, y_0)$ un punct staționar, în care există derivatele parțiale de ordinul doi continui.

Notăm: $A = f''_{xx}(x_0, y_0), B = f''_{xy}(x_0, y_0),\ C = f''_{yy}(x_0, y_0),\ \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$.

Teoremă. Fie că funcţia $z = f(x,y)$ are derivate parţiale pînă la ordinul 3, inclusiv, continui în careva domeniu ce conţine punctul staţionar $M_0(x_0, y_0)$.

1) Dacă $A > 0, \Delta > 0$, atunci M_0 este **punct de minim**.

2) Dacă $A < 0, \Delta > 0$, atunci M_0 este **punct de maxim.**

3) Dacă $\Delta < 0$, atunci M_0 nu este punct de extrem (este **punct "şa"**).

4) Dacă $\Delta = 0$, nu putem afirma nimic despre M_0 (este nevoie de un studiu suplimentar).

<u>Problema1.</u> Să se determine domeniul de definiție al funcției date și ilustrarea geometrică a domeniului de definiție:

1. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 + y}$. **2.** $f(x,y) = \ln(6 - x^2 + y^2)$.

3. $f(x,y) = \sqrt{xy} + \sqrt{x - y}$. **4.** $f(x,y) = \sqrt{-2x + y^2 + 4}$.

5. $f(x,y) = \ln(\cos y) + \ln x$. **6.** $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$.

7. $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\sqrt{x-y}.$ **8.** $f(x,y)=\dfrac{4x-3y+2}{x-y}.$

9. $f(x,y)=\ln(y-x).$ **10.** $f(x,y)=\ln\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$

11. $f(x,y)=\arcsin\left(5-x^2-y^2\right).$ **12.** $f(x,y)=\arcsin\left(\dfrac{x}{y^2}\right).$

13. $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{y}.$ **14.** $f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}.$

15. $f(x,y)=\arccos(1-y).$ **16.** $f(x,y)=\arcsin(x-y).$

17. $f(x,y)=\sqrt{y^2-x^2}.$ **18.** $f(x,y)=\ln\left(4-x^2-y^2\right).$

19. $f(x,y)=2/\left(6-x^2-y^2\right).$ **20.** $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-5}.$

21. $f(x,y)=\arccos(x+y).$ **22.** $f(x,y)=3x+y/(2-x+y).$

23. $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}.$ **24.** $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2-3\right).$

25. $f(x,y)=\sqrt{2x^2-y^2}.$ **26.** $f(x,y)=4xy/(x-3y+1).$

27. $f(x,y)=\sqrt{xy}/\left(x^2+y^2\right).$ **28.** $f(x,y)=\arcsin(x/y).$

29. $f(x,y)=\ln\left(y^2-x^2\right).$ **30.** $f(x,y)=x^2y/(3+x-y).$

31. $f(x,y)=\arccos(x+2y).$ **32.** $f(x,y)=\arcsin(2x-y).$

33. $f(x,y)=\ln\left(9-x^2-y^2\right).$ **34.** $f(x,y)=\sqrt{3-x^2-y^2}.$

35. $f(x,y)=1/\sqrt{x^2+y^2-5}.$ **36.** $f(x,y)=4x+y/(2x-5y).$

37. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{3x-2y}}{x^2+y^2+4}$ **38.** $f(x,y)=5/\left(4-x^2-y^2\right).$

39. $f(x,y)=\ln(2x-y).$ **40.** $f(x,y)=7x^2y/(x-4y).$

41. $f(x,y)=\sqrt{1-x-y}.$ **42.** $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$

43. $f(x,y)=1/\sqrt{x^2+y^2-6}.$ **44.** $f(x,y)=4xy/\sqrt{x^2-y^2}.$

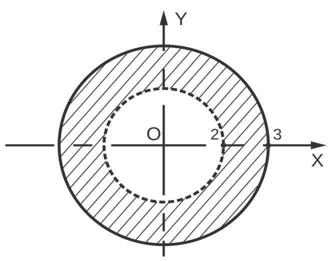
45. $f(x,y)=3xy/(2x-5y).$ **46.** $f(x,y)=x^2+2xy-y^2.$

47. $f(x,y)=\ln\left(y-x^2+2x\right).$ **48.** $f(x,y)=x+y^2-\sqrt{x}\,.$

49. $f(x,y)=\sqrt{-x^2-y^2}\,.$ **50.** $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{3x-y-3}.$

Exemplu rezolvat: Să se determine domeniul de definiție al funcției date și ilustrarea geometrică a domeniului de definiție:

$$f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}+\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2-4}}\ .$$



Rezolvare: (Vezi figura).

.

$$D(z):\begin{cases}9-x^2-y^2\geq 0\\ x^2+y^2-4>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2\leq 3^2\\ x^2+y^2>2^2\end{cases},$$

<u>Problema 2:</u> Să se determine derivatele parțiale și diferențiala totală ale funcției:

1. $z=\ln\left(y^2-e^{-x}\right)$; **2.** $z=\arcsin\sqrt{xy}$; **3.** $z=\operatorname{arctg}\left(x^2+y^2\right)$

4. $z=\cos\left(x^3-2xy\right)$; **5.** $z=\sin\sqrt{y/x^3}$; **6.** $z=\operatorname{tg}\left(x^3+y^2\right)$;

7. $z=\operatorname{ctg}\sqrt{xy^3}$; **8.** $z=e^{-x^2+y^2}$; **9.** $z=\ln\left(3x^2-y^4\right)$;

10. $z=\arccos(y/x)$; **11.** $z=\operatorname{arcctg}\left(xy^2\right)$; **12.** $z=\cos\sqrt{x^2+y^2}$

13. $z=\sin\sqrt{x-y^3}$; **14.** $z=\operatorname{tg}\left(x^3y^4\right)$; **15.** $z=\operatorname{ctg}(3x-2y)$;

16. $z=e^{2x^2-y^5}$; **17.** $z=\ln\left(\sqrt{xy}-1\right)$; **18.** $z=\arcsin\left(2x^3y\right)$

19. $z=\operatorname{arctg}\left(x^2/y^3\right)$; **20.** $z=\cos\left(x-\sqrt{xy^3}\right)$; **21.** $z=\sin\dfrac{x+y}{x-y}$;

22. $z=\operatorname{tg}\dfrac{2x-y^2}{x}$; **23.** $z=\operatorname{ctg}\sqrt{\dfrac{x}{x-y}}$; **24.** $z=e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$;

25. $z=\ln\left(3x^2-y^2\right)$; **26.** $z=\arccos\left(x-y^2\right)$; **27.** $z=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^3}{y}$;

28. $z=\cos\dfrac{x-y}{x^2+y^2}$; **29.** $z=\sin\sqrt{\dfrac{y}{x+y}}$; **30.** $z=e^{-\left(x^3+y^3\right)}$;

31. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; **32**. $z=e^{-\sqrt[3]{x^2+5y^2}}$; **33.** $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

34. $z=\arccos\left(x^2/y\right)$; **35.** $z=\arcsin(x/2y)$; **36.** $z=\ln\left(e^{2x}+e^y\right)$;

37. $z=\sqrt{x^2+y^2+3xy}$; **38.** $z=\dfrac{x}{y}-\dfrac{3y}{x}$; **39.** $z=4e^{y-2x+2}$;

40. $z=\operatorname{arc\,tg}\left((x^2+2y)/y\right)$; **41.** $z=\operatorname{arcc\,tg}\sqrt{x^2+y^2}$; **42.** $z=e^{\cos\left(x^2-y^2\right)}$;

43. $z=\ln\dfrac{xy}{x^3+y^3}$; **44.** $z=\ln\operatorname{tg}(x/y)$; **45.** $z=\operatorname{arc\,tg}(xy)+e^{x+y}$;

46. $z=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-y^2}$; **47.** $z=e^{\operatorname{tg}\left(x^2+y^2\right)}$; **48.** $z=\ln\dfrac{xy}{x^2+y}$;

49. $z=\ln(\operatorname{ctg}(y/x))$; **50.** $z=\operatorname{arc\,tg}(x+y)+e^{-2xy}$.

Exemplu rezolvat: Să se determine derivatele parțiale și diferențiala totală ale funcției $z=\arcsin\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Rezolvare: Deoarece $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$, avem

$$z'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} = -\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}};$$

$$z'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Diferențiala totală a funcției este: $dz = z'_x dx + z'_y \mathrm{dy} = -\frac{y}{x\sqrt{x^2-y^2}}dx + \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}dy.$

Problema 3. Să se scrie ecuația planului tangent și a normalei la suprafața S în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

1. $S: x^2+y^2+z^2+6z-4x+8=0,\ M_0(2, 1, -1).$

2. $S: x^2+z^2-4y^2=2xy,\ M_0(-2, 1, 2).$

3. $S: x^2+y^2+z^2-xy+3z=7,\ M_0(1, 2, 1).$

4. $S: x^2+y^2+z^2+6y+4x=8,\ M_0(-1, 1, 2).$

5. $S: 2x^2-y^2+z^2-4z+y=13,\ M_0(2, 1, -1).$

6. $S: x^2+y^2+z^2-6y+4z+4=0,\ M_0(2, 1, -1).$

7. $S: x^2+z^2-5yz+3y=46,\ M_0(1, 2, -3).$

8. $S: x^2+y^2-xz-yz=0,\ M_0(0, 2, 2).$

9. $S: x^2+y^2+2yz-z^2+y-2z=2,\ M_0(1, 1, 1).$

10. $S: y^2-z^2+x^2-2xz+2x=z,\ M_0(1, 1, 1).$

11. $S: z=x^2+y^2-2xy+2x-y,\ M_0(-1, -1, -1).$

12. $S: z=y^2-x^2+2xy-3y,\ M_0(1, -1, 1).$

13. $S: z=x^2-y^2-2xy-x-2y,\ M_0(-1, 1, 1).$

14. $S: x^2-2y^2+z^2+xz-4y=13,\ M_0(3, 1, 2).$

15. $S: 4y^2-z^2+4xy-xz+3z=9,\ M_0(1, -2, 1).$

16. $S: z=x^2+y^2-3xy-x+y+2,\ M_0(2, 1, 0).$

17. $S: 2x^2-y^2+2z^2+xy+xz=3,\ M_0(1, 2, 1).$

18. $S: x^2-y^2+z^2-4x+2y=14,\ M_0(3, 1, 4).$

19. $S: x^2+y^2-z^2+xz+4y=4,\ M_0(1, 1, 2).$

20. $S: x^2-y^2-z^2+xz+4x=-5,\ M_0(-2, 1, 0).$

21. $S: x^2+y^2-xz+yz-3x=11,\ M_0(1, 4, -1).$

22. $S: x^2+2y^2+z^2-4xz=8,\ M_0(0, 2, 0).$

23. $S: x^2-y^2-2z^2-2y=0,\ M_0(-1, -1, 1).$

24. $S: x^2+y^2-3z^2+xy=-2z,\ M_0(1,\ 0,\ 1).$

25. $S: 2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0,\ M_0(1,\ -1,\ 1).$

26. $S: x^2+y^2-z^2+6xy-z=8,\ M_0(1,\ 1,\ 0).$

27. $S: z=2x^2-3y^2+4x-2y+10,\ M_0(-1,\ 1,\ 3).$

28. $S: z=x^2+y^2-4xy+3x-15,\ M_0(-1,\ 3,\ 4).$

29. $S: z=x^2+2y^2+4xy-5y-10,\ M_0(-7,\ 1,\ 8).$

30. $S: z=2x^2-3y^2+xy+3x+1,\ M_0(1,\ -1,\ 2).$

31. $S: 4x^2-y^2+z^2+xz+4=5,\ M_0(-1,\ 1,\ 0).$

32. $S: x^2-y^2+3z^2-xy=3z,\ M_0(1,\ -1,\ 1).$

33. $S: 2x^2+y^2+z^2+6z+4x-8=1,\ M_0(3,\ 1,\ -1).$

34. $S: x^2-y^2+2z^2+xy+xz=2,\ M_0(1,\ -2,\ 1).$

35. $S: z=2x^2+3y^2-4x-y+8,\ M_0(-1,\ 1,\ 0).$

36. $S: z=3x^2-y^2+xy+4x+1,\ M_0(1,\ 1,\ -2).$

37. $S: x^2+y^2+xz-3x=0,\ M_0(-1,\ 4,\ 0).$

38. $S: z=3x^2+2y^2+xy-2,\ M_0(3,\ 1,\ -4).$

39. $S: y^2-2z^2+3xy-xz+3z=10,\ M_0(0,\ 2,\ 1).$

40. $S: x^2-y^2+2z^2+xy=-2,\ M_0(1,\ 0,\ 1).$

41. $S: x^2+y^2-3z^2-xz=-4,\ M_0(1,\ 0,\ 1).$

42. $S: 3x^2+y^2-xz+yz=0,\ M_0(0,\ 2,\ 3).$

43. $S: z=5x^2-2y^2+xy-y+10,\ M_0(-6,\ 1,\ 7).$

44. $S: x^2+y^2+6xy-y+z=2,\ M_0(1,\ -1,\ 1).$

45. $S: x^2+4y^2-3z^2+xy-5=2z,\ M_0(2,\ -2,\ 1).$

46. $S: x^2-3y^2-3z^2+2xy-5=0, M_0(-2,,2,3).$

47. $S: x^2-y^2-2z^2-5=2y, M_0(0,-1,1).$

48. $S: z=x^2+4y^2+xy-31, M_0(3,-1,2).$

49. $S: x^2+2y^2+xy-7=2z, M_0(1,2,-1).$

50. $S: z=2x^2+3y^2-3z^2+4xy-15, M_0(-2,-2,1).$

Exemplu rezolvat: Să se scrie ecuația planului tangent și a normalei la suprafața $S: x^2z-xyz+y^2-x-3=0$ în punctul $M_0(-2;3;-0,8)$.

<u>Rezolvare:</u> Fie $F(x,y,z)=x^2z-xyz+y^2-x-3$. Calculăm valorile derivatelor parțiale în M_0. Avem $F'_x=2xz-yz-1$, $F'_x(M_0)=4,6$; $F'_y=-xz+2y$, $F'_y(M_0)=4,4$; $F'_z=x^2-xy$,

$F_z'(M_0) = 10$. Ecuația planului tangent: $4,6(x+2)+4,4(y-3)+10(z+0,8)=0 \Leftrightarrow$

$4,6x+4,4y+10z+4=0$. Ecuația normalei la suprfață în M_0: $\dfrac{x+2}{4,6}=\dfrac{y-3}{4,4}=\dfrac{z+0,8}{10}$.

Problema 4. Să se găsească derivatele parțiale de ordinul doi. Să se demonstreze că $z''_{xy} = z''_{yx}$:

1. $z = 2x^3y - 4xy^5$; **2.** $z = x^2y\sin x - 3y$; **3.** $z = \text{arctg}x + \sqrt{y}$;

4. $z = \arcsin(xy) - 3xy^2$; **5.** $z = 5xy^4 + 2x^2y^7$; **6.** $z = \cos(x^2 - y^2) + x^3$;

7. $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$; **8.** $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$; **9.** $z = \arcsin(x+y)$;

10. $z = \text{arc tg}(2x - y)$; **11.** $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$; **12.** $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$;

13. $z = e^{x+y-4}$; **14.** $z = \cos(3x + y) - x^2$; **15.** $z = \text{ctg}(y/x)$;

16. $z = \text{tg}\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)$; **17.** $z = xy^4 - 3x^2y + 1$; **18.** $z = \ln(x + xy - y^2)$;

19. $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3$; **20.** $z = \sqrt{3x^2 - 2y^2 + 5}$; **21.** $z = \arcsin[(x+y)/x]$;

22. $z = \text{arcctg}(x - y)$; **23.** $z = \sqrt{3x^2 - y^2 + x}$; **24.** $z = y^2 - 3xy - x^4$;

25. $z = \arccos(x + y)$; **26.** $z = \ln(y^2 - x^2 + 3)$; **27.** $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$;

28. $z = 7x - x^3y^2 + y^4$; **29.** $z = e^{y-x}$; **30.** $z = \text{arctg}(2x - y)$;

31. $z = \text{arctg}\sqrt{x/y}$; **32.** $z = \text{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$; **33.** $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$;

34. $z = \ln(xy + \ln xy)$; **35.** $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; **36.** $z = (x^3 + y^3 - xy^2)^3$;

37. $z = \text{arcctg}(x/y)$; **38.** $z = \arcsin\sqrt{xy^2}$; **39.** $z = \sqrt{(x^2 + y^2)/(x^2 - y^2)}$;

40. $z = \sqrt{xy} + \sqrt{x - y}$; **41.** $z = \sqrt[3]{(x^2 - y^3)^2}$; **42.** $z = \ln^2(x^2 + y^2)$;

43. $z = \ln(e^x + e^{-y})$; **44.** $z = \sqrt{x + y^2 + 3}$; **45.** $z = \ln(e^{-x} + e^{-2y})$;

46. $z = \text{tg}(xy^2)$; **47.** $z = \ln(3x^2 + y^3)$; **48.** $z = \ln(3x^2 - 4y^2)$;

49. $z = \arccos(x + 2y)$; **50.** $z = \cos(x^2y - 7)$.

Exemplu rezolvat: Să se găsească derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției $z = e^x(\sin y + \cos x)$. Să se demonstreze că $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Rezolvare: Avem:

$z'_x = e^x(\sin y + \cos x) + e^x(-\sin x) = e^x(\sin y + \cos x - \sin x)$, $z'_y = e^x \cos y$,

$z''_{xx} = e^x(\sin y + \cos x - \sin x) + e^x(-\sin x - \cos x) = e^x(\sin y - 2\sin x)$, $z''_{xy} = e^x \cos y$,

$z''_{yx} = e^x \cos y$, $z''_{yy} = -e^x \sin y$. Deci, $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Problema5. Să se cerceteze la extrem funcția:

1. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$. **2.** $z = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$.

3. $z = xy^2(1-x-y)$.

4. $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$.

5. $z = \dfrac{x^2}{2} + 2xy + \dfrac{y^2}{2} - 4x - 5y$.

6. $z = xy(x+y-1)$.

7. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$

8. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

9. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$

10. $z = 2xy - 4x - 2y + 5$.

11. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

12. $z = -\dfrac{2x^3}{3} + 2xy - y^2 - 1.$

13. $z = x^3 - 6xy + y^2 - 39x + 18y + 20$.

14. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

15. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

16. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$

17. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$

18. $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$

19. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$

20. $z = x^2 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20.$

21. $z = x^3 + y^3 - 3xy.$

22. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$

23. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$

24. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$

25. $z = 4(x-y) - x^2 - y^2.$

26. $z = 6(x-y) - 3x^2 - 3y^2.$

27. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$

28. $z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10.$

29. $z = (x-5)^2 + y^2 + 1.$

30. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2.$

31. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$

32. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2.$

33. $z = xy(12 - x - y).$

34. $z = xy - x^2 - y^2 + 9.$

35. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$

36. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$

37. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$

38. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

39. $z = xy(6 - x - y).$

40. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y.$

41. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$

42. $z = (x-1)^2 + 2y^2.$

43. $z = xy - 3x^2 - 2y^2.$

44. $z = x^2 + 3(y+2)^2$.

45. $z = 2(x+y) - x^2 - y^2.$

Exemplu rezolvat: Să se cerceteze la extrem funcția: $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Rezolvare: Determinăm punctele staționare: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}.$

Rezolvând acest sistem obținem punctele: $M_1(0,0)$ și $M(1,1)$. Găsim: $z''_{xx} = 6x,\ z''_{xy} = -3,\ z''_{yy} = 6y.$

1) În punctul $M_1(0,0)$ avem $A = z''_{xx}(0,0) = 0,\ B = z''_{xy}(0,0) = -3, C = z''_{yy}(0,0) = 0,$ mărimea $\Delta = -9 < 0$, adică în punctul M_1 nu există extrem.

2) În punctul $M_2(1,1)$ avem $A = z''_{xx}(1,1) = 6,\ B = z''_{xy}(1,1) = -3,\ C = z''_{yy}(1,1) = 6$, mărimea $\Delta = 27 > 0$ și $A = 6 > 0$; deci, în acest punct funcția își atinge minimul local: $z_{min} = -1$.

Problema 6. Să se afle cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției $z = f(x, y)$ în domeniul mărginit și închis $\bar{D}$:

1. $z = 3x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x - 3y + 1, \bar{D}: x = 3,\ y = 1,\ y - x - 3 = 0$;

2. $z = 2x^2 + 6xy - 3y^2 + 5x + 2y - 3, \bar{D}: x = -2,\ y = 0,\ x + y - 2 = 0$

3. $z = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 2x + 3y - 5, \bar{D}: y = 2x,\ y = 6,\ x = 1$;

4. $z = -2x^2 + 5xy + 4y^2 + 2x - 5y + 1, \bar{D}: x = 1,\ y = -1,\ x + y - 4 = 0$

5. $z = -5x^2 + 10xy + 3y^2 - 4x + 6y + 4$; $\bar{D}: x = -1,\ y = 1,\ x + y - 3 = 0$;

6. $z = 3x^2 - 7xy - 2y^2 - 4x + 7y - 2, \bar{D}: x = 3,\ y = 1,\ y - x - 2 = 0$;

7. $z = -3x^2 - 6xy + 2y^2 + 3x - 8y + 1, \bar{D}: x = 1,\ y = -1,\ x + y - 4 = 0$

8. $z = -x^2 + 8xy + 4y^2 - 4x + 8y - 1, \bar{D}: x = 1,\ y = 3,\ x + y - 6 = 0$;

9. $z = 4x^2 - 5xy + 7y^2 - 6x + 4y + 2, \bar{D}: y = \frac{x}{2},\ y = 3,\ x = 2$;

10. $z = -x^2 - 3xy + 6y^2 - 3x + 4y - 2, \bar{D}: y = \frac{x}{2},\ x = 4,\ y = 0$;

11. $z = 3x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x - 3y + 1, \bar{D}: x = 3,\ y = 0,\ y - x - 3 = 0$;

12. $z = 2x^2 + 6xy - 3y^2 + 5x + 2y - 3, \bar{D}: x = -1,\ y = 0,\ x + y - 2 = 0$;

13. $z = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 2x + 3y - 5, \bar{D}: y = \frac{x}{2},\ y = 3,\ x = 1$;

14. $z = -2x^2 + 5xy + 4y^2 + 2x - 5y + 1, \bar{D}: x = 2,\ y = -1,\ x + y - 4 = 0$;

15. $\begin{matrix} z = -5x^2 + 10xy + 3y^2 - 4x + 6y + 4, \\ \bar{D}: x = -1,\ y = 1,\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{matrix}$;

16. $z = 3x^2 - 7xy - 2y^2 - 4x + 7y - 2, \bar{D}: x = 4,\ y = 1,\ y - x - 2 = 0$;

17. $z = -3x^2 - 6xy + 2y^2 + 3x - 8y + 1, \bar{D}: x = 1,\ y = 2,\ x + y - 5 = 0$;

18. $z = -x^2 + 8xy + 4y^2 - 4x + 8y - 1, \bar{D}: x = -1,\ y = 2,\ x + y - 6 = 0$

19. $z = 4x^2 - 5xy + 7y^2 - 6x + 4y + 2, \bar{D}: y = \frac{x}{2},\ y = 5,\ x = 4$;

20. $z = -x^2 - 3xy + 6y^2 - 3x + 4y - 2, \bar{D}: y = -\frac{x}{4},\ x = -4,\ y = 0$;

21. $z = 3x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x - 3y + 1, \bar{D}: x = 2,\ y = -1,\ y - x - 3 = 0$;

22. $z = 2x^2 + 6xy - 3y^2 + 5x + 2y - 3, \bar{D}: x = -2,\ y = 0,\ x + y - 2 = 0$;

23. $z = 3x^2 - 4xy + 2y^2 - 2x + 3y - 5, \bar{D}: y = -2x,\ y = 4,\ x = 2$;

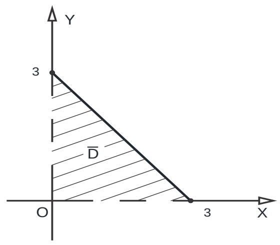
24. $z = -2x^2 + 5xy + 4y^2 + 2x - 5y + 1, \bar{D}: x = 1,\ y = 3,\ x - y - 4 = 0$

25. $z = -5x^2 + 10xy + 3y^2 - x + 6y + 4, \bar{D}: x = -1,\ y = 4,\ x - y - 3 = 0$;

26. $z = 3x^2 - 7xy - 2y^2 - 4x + 7y - 2, \bar{D}: x = 3,\ y = 1,\ 2y - 3x - 6 = 0$;

27. $z=-3x^2-xy+2y^2+3x-y+1, \overline{D}: x=1,\ y=-1, 3x+4y-12=0$;
28. $z=-x^2+8xy+4y^2-4x+8y-1$; $\overline{D}: (x=1,\ y=5,\ x+y-6=0)$.
29. $z=4x^2-5xy+7y^2-6x+4y+2, \overline{D}: y=-\dfrac{x}{2},\ y=3,\ x=-2$;
30. $z=-x^2-3xy+6y^2-3x+4y-2, \overline{D}: y=-\dfrac{x}{3},\ x=3,\ y=0$;
31. $z=3x^2+2xy-4y^2+2x-3y+1, \overline{D}: x=3,\ y=1,\ y+x+3=0$;
32. $z=2x^2+6xy-3y^2+5x+2y-3, \overline{D}: x=2,\ y=0,\ x+y+2=0$
33. $z=3x^2-4xy+2y^2-2x+3y-5, \overline{D}: y=-2x,\ y=2,\ x=1$;
34. $z=-2x^2+5xy+4y^2+2x-5y+1, \overline{D}: x=1,\ y=3, 2x-y-4=0$;
35. $z=-5x^2+6xy+3y^2-4x+6y+4, \overline{D}: x=-1,\ y=2,\ x+y+3=0$;
36. $z=3x^2-7xy-2y^2-4x+7y-2, \overline{D}: x=-4,\ y=3,\ y-x-2=0$;
37. $z=3x^2-6xy+2y^2+3x-8y+1, \overline{D}: x=1,\ y=4, 2x+7y-14=0$;
38. $z=-x^2+8xy+4y^2-4x+8y-1, \overline{D}: x=1,\ y=-2,\ x+y+6=0$
39. $z=4x^2-5xy+7y^2-6x+4y+2, \overline{D}: y=-\dfrac{x}{2},\ y=2,\ x=1$;
40. $z=-x^2-3xy+6y^2-3x+4y-2, \overline{D}: y=-\dfrac{x}{4},\ x=4,\ y=1$;
41. $z=-3x^2+4xy-6y^2+2x-5y+2, \overline{D}: x=3,\ y=1, 2y-3x-6=0$;
42. $z=3x^2-xy+8y^2-5x+3y-2, \overline{D}: x=-4,\ y=-2,\ x+y+2=0$;
43. $z=3x^2-4xy+2y^2-2x+3y-5, \overline{D}: y=-2x,\ y=4,\ x=2$;
44. $z=-x^2+3xy+2y^2+2x-7y+1, \overline{D}: x=2,\ y=3,\ x+y=0$;
45. $z=-3x^2+2xy+5y^2-x+6y+4, \overline{D}: x=3,\ y=1, -3x+y-3=0$.
46. $z=2x^3-xy^2+y^2, \overline{D}: x=0,\ x=1,\ y=0, y=6$;
47. $z=4(x-y)-x^2-y^2, \overline{D}: x+2y=4,\ x-2y=4,\ x=0$;
48. $z=x^2+xy-2, \overline{D}: y=4x^2-4,\ y=0$;
49. $z=x^3-3xy+y^3, \overline{D}: x=0, x=2,\ y=-1,\ y=2$;
50. $z=4-2x^2-y^2, \overline{D}: y=0, y=\sqrt{1-x^2}$.

Exemplu rezolvat:
Să se afle cea mai mare și cea mai mică valori ale funcției $z=x^2-2y^2+4xy-6x+5$ în domeniul mărginit și închis $\overline{D}: x=0,\ y=0,\ x+y=3$
<u>Rezolvare:</u>
1) Construim domeniul $\overline{D}$:



2) Găsim punctele critice, ce aparțin domeniului $\overline{D}$.

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y-6=0 \\ -4y+4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow M_0(1,1).$$

$f(M_0)=1^2-2\cdot 1^2+4\cdot 1\cdot 1-6\cdot 1+5=2$.

3) Cercetăm funcția pe frontiera domeniului $\overline{D}$.

Pe segmentul $OA: x=0,\ 0\le y\le 3$.

$z_{OA}(y)=-2y^2+5$, $z'_{OA}(y)=-4y=0$, adică $y=0$ și primim punctul $O(0,0)$. $z|_{O(0;0)}=5$, $z|_{A(0;3)}=-13$.

Pe segmentul $OB: 0\le x\le 3,\ y=0$.

$z_{OB}(x)=x^2-6x+5$, $z'_{OB}(x)=2x-6=0$, adică $x=3$ și primim punctul $B(3,0)$. $z|_{B(3;0)}=-4$

Pe segmentul $AB: 0\le x\le 3,\ y=3-x$.

$$z_{AB}(x)=x^2-2(3-x)^2+4x(3-x)-6x+5=x^2-18+12x-2x^2+$$
$$+12x-4x^2-6x+5=-5x^2+18x-13.$$

$z'_{AB}(x)=-10x+18=0$.

Primim $x=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$; $y=3-\frac{9}{5}=\frac{6}{5}$, adică punctul $M_1\left(\frac{9}{5},\frac{6}{5}\right)$.

$$z(M_1)=-5\frac{81}{25}+18\frac{9}{5}-13=\frac{81}{5}+\frac{162}{5}-13=-\frac{4}{5}.$$

În capetele segmentului AB valorile funcției deja sunt găsite.

4) Comparând toate valorile obținute, obținem:

$Sup_{\overline{D}}z = z|_{O(0,0)} = 5,\ Inf_{\overline{D}}z = z|_{A(0,3)} = -13.$

Capitolul III

INTEGRALE IMPROPRII DE SPEŢA I
(CU LIMITE INFINITE).

Definiţie. *Fie funcția* f *definită pe intervalul* $[a;+\infty)$ *și integrabilă în sens Riemann pe orice segment* $[a;A]$, $A>a$. *Simbolul* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *se numește* ***integrală improprie de speţa I*** *a funcției* f *pe* $[a;+\infty)$ (*integrală improprie cu limita superioară infinită*).
Dacă există și este finită $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$, *atunci integrala improprie* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *se numește* ***convergentă***, *funcția* f *se numește* ***integrabilă*** **(în sens impropriu sau generalizat)** *pe* $[a;+\infty)$, *iar valoarea integralei improprii este, prin definiție, egală cu valoarea acestei limite. În caz contrar* (*dacă limita nu există sau există, dar nu este finită*) *integrala improprie* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *se numește* ***divergentă.***

Deci, prin definiție: $\boldsymbol{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx}$.

Exemplu. Integrala $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ este convergentă, deoarece $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{1}{x^2}dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^A = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{A}+1\right) = 1.$

Integrala improprie $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx$ însă, este divergentă, deoarece

$$\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{1}{x}dx = \lim_{A\to+\infty}(\ln|x|)|_1^A = \lim_{A\to+\infty}\ln A = +\infty.$$

În mod similar se definește și **integrala improprie cu limita inferioară infinită**: $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{B\to-\infty}\int_B^b f(x)dx}$.

Integrala improprie cu ambele limite infinite se definește astfel: $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx}$, unde $c\in\mathbb{R}$.

Exemplu. $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1} = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_2^A\frac{dx}{x^2-1} = \lim\limits_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)\Big|_2^A = \frac{1}{2}\lim\limits_{A\to+\infty}\left(\ln\left|\frac{A-1}{A+1}\right| - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln 3$, deci $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1}$ este convergentă.

Exemplu. $\int_0^{\infty}\cos(2x)\,dx$ este divergentă întrucât

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\cos(2x)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)\Big|_0^A = \frac{1}{2}\lim_{A\to+\infty}(\sin(2A)) \text{ nu există.}$$

Notă. $\boldsymbol{\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}}$ **este divergentă pentru** $\boldsymbol{\alpha\le 1}$ **și convergentă pentru** $\boldsymbol{\alpha}>1$.

Proprietăți ale integralelor improprii de speța I

1. Formula lui Newton – Leibniz. Dacă funcția f este continuă pe $[a;+\infty)$ și F este o primitivă a ei, atunci $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)|_a^{+\infty} = F(+\infty)-F(a)$, unde $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

2. Liniaritatea. Dacă integralele improprii $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ și $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ sunt convergente, atunci pentru $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ și integrala $\int_a^{+\infty}(\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx$ este convergentă și are loc:
$\int_a^{+\infty}\big(\alpha f(x)+\beta g(x)\big)\,dx = \alpha\int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \beta\int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$

3. Integrarea prin părți. Dacă u și v sunt funcții derivabile și continue împreună cu derivatele lor pe $[a;+\infty)$, atunci

$\int_a^{+\infty} u(x)dv(x) = u(x)v(x)|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v(x)du(x)$, unde $u(x)v(x)|_a^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty}(u(x)\cdot v(x)) - u(a)\cdot v(a)$,

în presupunerea că doi dintre cei trei termeni ai egalității de mai sus sunt convergenți.

4. Schimbarea de variabilă. Dacă funcția f este continuă pe $[a;+\infty)$, iar φ este continuă, derivabilă, strict monotonă pe $[\alpha;\beta)$ și $a = \varphi(\alpha) < \varphi(t) < \lim\limits_{\substack{t\to\beta\\ t<\beta}}\varphi(t) = +\infty$, atunci

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$

Funcția $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ poate fi nemărginită pe $[\alpha;\beta)$, iar β poate fi atât finit cât și infinit.

Exemplu. $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, dv = \frac{dx}{x^2} \\ du = \frac{dx}{x^2+1}, v = -\frac{1}{x}\end{matrix}\right| = -\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x(x^2+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) + \frac{\operatorname{arctg} 1}{1} + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx = \frac{\pi}{4} + \lim_{A\to+\infty}\left(\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Big|_1^{A} =$

$= \frac{\pi}{4} + \lim\limits_{A\to+\infty}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big|_1^{A} = \frac{\pi}{4} + \lim\limits_{A\to+\infty}\ln\frac{A}{\sqrt{A^2+1}} + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}.$

Exemplu. $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left|\begin{matrix} t = \sqrt{\ln x} \\ \ln x = t^2 \\ \frac{1}{x}dx = 2tdt \\ t\in[1;+\infty)\end{matrix}\right| = \int_1^{+\infty}\frac{2tdt}{t} = \lim_{A\to+\infty} 2t|_1^{A} = +\infty.$ Astfel integrala $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ este divergentă.

Definiție. *Fie funcția $f\colon[a;b)\to\mathbb{R}$. Punctul $x = b$ se numește* **punct singular** *pentru funcția f, dacă funcția f este nemărginită pe $[a;b)$, dar este mărginită pe orice interval de forma $[a;b-\varepsilon]$, unde $0 < \varepsilon < b - a$.*

Definiție. *Fie b un punct singular pentru funcția $f\colon[a;b)\to\mathbb{R}$ și fie f integrabilă în sens Riemann pe orice segment $[a;b-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < b - a$. Simbolul $\int_a^b f(x)\,dx$ se numește* ***integrală improprie de speţa II*** *a funcției f pe $[a;b)$ (integrală improprie cu limita superioară punct singular). Dacă există și este finită $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, atunci integrala improprie $\int_a^b f(x)\,dx$ se numește* ***convergentă****, funcția f se numește integrabilă pe $[a;b)$, iar valoarea integralei improprii prin definiție este egală cu valoarea acestei limite. În caz contrar integrala improprie se numește* ***divergentă.***

Deci, prin definiție: $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx}.$

În mod similar se definește integrala improprie cu limita inferioară punct singular, adică dacă a este punct singular pentru funcția $f\colon(a,b]\to\mathbb{R}$, care este integrabilă Riemann pe orice segment $[a+\varepsilon;\ b]$, $0 < \varepsilon < b - a$ definim: $\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0\\ \varepsilon>0}}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx}.$

Dacă avem un punct singular c în interiorul segmentului $[a;b]$, atunci definim: $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon_1\to0\\ \varepsilon_1>0}}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim\limits_{\substack{\varepsilon_2\to0\\ \varepsilon_2>0}}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx}.$

Exemplu. Să se cerceteze convergenţa integralei $\int_0^1 \ln x\,dx$.

Soluție: Pentru funcția $f(x) = \ln x$, $x = 0$ este un punct singular. Atunci

$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \ln x\, dx = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (x\ln x - x)|_\varepsilon^1 = \; -1 - \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (\varepsilon \ln\varepsilon - \varepsilon) = -1 - \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = -1 +$ $+ \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -1 + 0 = -1.$ La calcularea limitei de mai sus am utilizat regula L'Hospital. Astfel, integrala improprie $\int_0^1 \ln x\, dx$ este convergentă.

Notă. Integrala $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ **este convergentă pentru $\alpha < 1$ și este divergentă pentru $\alpha \geq 1$.**

Pentru integralele improprii de speţa II au loc proprietăţi, formule şi metode de calcul similare cazului integralelor improprii de speţa I.

INTEGRALA DUBLĂ

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu închis și mărginit de arie S. Numim **diviziune** a domeniului D o mulțime finită Δ de submulțimi ale lui D, fiecare două dintre care nu au puncte interioare comune și reuniunea cărora este D, adică

$\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_n | intD_i \cap intD_k = \emptyset,\ \ \bigcup_{i=1}^n D_i = D\}$.

Mulțimile $D_i, i = 1,2,\dots,n$, se numesc elementele diviziunii.

Fie în domeniul D este definită funcția mărginită f. Considerăm o diviziune $\Delta = \{D_1, \dots, D_n\}$ a domeniului D. Fie ΔS_i aria domeniului D_i, $i = 1,2,\dots,n$. În fiecare domeniu D_i considerăm un punct arbitrar $P_i(x_i, y_i)$.

Alcătuim suma $\sigma_f(D_i, P_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)\, \Delta S_i$, numită **sumă integrală Riemann** a funcției f, corespunzătoare diviziunii Δ a domeniului D și modului de alegere a punctelor $P_i(x_i, y_i) \in D_i$, $i = 1,2,\dots,n$. Fie λ_i diametrul mulțimii D_i. Notăm cu $\lambda = \max_{1\le i\le n} \lambda_i$.

Definiție. *Nimărul I se numește **limita sumelor integrale** $\sigma_f(D_i, P_i)$ atunci când $\lambda \to 0$, dacă $\lim\limits_{\lambda\to 0} \sigma_f(D_i, P_i) = I$ pentru orice diviziune $\Delta = \{D_1, \dots, D_n\}$ a domeniului D și orice mod de alegere a punctelor $P_i(x_i, y_i) \in D_i$, $i = 1,2,\dots,n$. Dacă această limită există și este finită, atunci funcția f se numește integrabilă pe domeniul D, iar valoarea limitei se numește **integrala dublă a funcției f pe domeniul D**. Se notează: $\iint_D f(x,y)dS$ sau $\iint_D f(x,y)dxdy$ unde dS, respectiv, $dxdy$ este **element de arie**, iar D este **domeniu de integrare**.*

Teoremă. *Orice funcție continuă pe un domeniu închis și mărginit D este integrabilă pe D.*

Proprietăți ale integralei duble:

1. Dacă funcţia f este integrabilă pe domeniul D, iar c este o constantă, atunci și funcția $c \cdot f$ este integrabilă pe domeniul D și $\iint_D c \cdot f(x,y)dxdy = c \iint_D f(x,y)dxdy$.
2. Dacă funcțiile f și g sunt integrabile pe domeniul D, atunci și funcțiile $f \pm g$ sunt integrabile pe domeniul D și $\iint_D (f \pm g)\, dxdy = \iint_D f dxdy \pm \iint_D g dxdy$.
3. Dacă $\{D_1, D_2\}$ este o diviziune a domeniului D și f este integrabilă pe fiecare dintre domeniile D_1 și D_2, atunci f este integrabilă pe domeniul D și

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

Aplicații ale integralei duble:

1. **Aria domeniului** D **se calculează după formula** $A_D = \iint_D dxdy$..

2. **Volumul corpului cilindric**, mărginit de suprafața $z = f(x,y) \geq 0$, planul $z = 0$ și suprafața cilindrică cu generatoarele paralele axei Oz, iar directoarea - frontiera domeniului D, este: $V = \iint_D f(x,y)dxdy$.
3. Fie o placă neomogenă a cărei densitate pe domeniul D este $\rho(x,y)$. Atunci **masa plăcii** este: $m = \iint_D \rho(x,y)dxdy$.

Fie funcțiile continue φ_1, $\varphi_2: [a,b] \to \mathbb{R}$, astfel încât $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \forall x \in [a,b]$. Domeniul plan D, mărginit de: $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, se numeşte **regulat în direcţia axei Oy** .

În mod similar, se defineşte **domeniul regulat în direcţia axei Ox,** adică mărginit de curbele: $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, unde $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$, pentru orice $y \in [c,d]$, ψ_1 şi ψ_2 sunt continue pe $[c,d]$.

Fie D un domeniu regulat în direcţia axei Oy. Fie că există integrala $I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, pentru orice x fixat din $[a,b]$ și există integrala $I_D = \int_a^b I(x)\,dx$, atunci $I_D = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$ se numește **integrală iterată** a funcţiei f pe domeniul D. În această expresie mai întâi se calculează integrala din paranteze, în raport cu y (x fiind considerată constantă). Deseori I_D se scrie sub forma: $I_D = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy$.

Prin raționamente similare se definește și integrala iterată $\int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)dy$ pe un domeniu regulat în direcţia axei Ox, scrisă și sub forma $\int_c^d dy\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\right)$.

Exemplu.

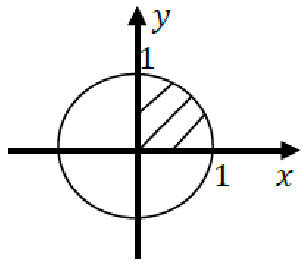
$$\int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2}dy = \int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\right)\Big|_{1/x}^{x} dx = -\int_1^2 x^2\left(\frac{1}{x} - x\right)dx = \int_1^2 (x^3 - x)dx = \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{9}{4}$$

Teoremă. *Fie funcția f definită, mărginită și integrabilă pe domeniul D regulat în direcția axei Oy. Dacă pentru orice $x \in [a,b]$ există integrala $I(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, atunci există și integrala $\int_a^b I(x)dx$ și $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.*

Exemplu. Să se calculeze integrala dublă:

$$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}dxdy, D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, \ \ y \geq 0.$$

Soluție: Reprezentăm în planul cartezian domeniul D



Domeniul D este regulat în direcția axei Oy,

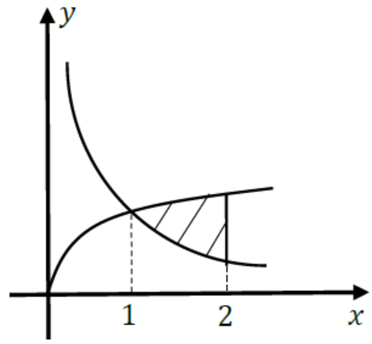
$$\iint_D \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}}dxdy = \int_0^1 xdx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy =$$

$$= -\int_0^1 x\left(\sqrt{1-y^2}\,\Big|_0^{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = -\int_0^1 (x^2 - x)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Exemplu: Să se calculeze integrala dublă: $\iint_D y\ln x\,dxdy, D: xy = 1, y = \sqrt{x}, \ \ x = 2$.

Soluție: Reprezentăm domeniul D, regulat în direcția axei Oy.

Atunci:



$$\iint\limits_D y\ln x\, dxdy = \int_1^2 \ln x dx \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} ydy = \int_1^2 \ln x \left.\frac{y^2}{2}\right|_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_1^2 \ln x \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x^2}\right) dx = \ln x \left.\left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2x}\right)\right|_1^2 -$$

$$- \int_1^2 \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2x^2}\right) dx \; = \frac{5}{4}\ln 2 - \left.\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2x}\right)\right|_1^2 = \frac{5}{4}\ln 2 - \frac{5}{8}.$$

INTEGRALA TRIPLĂ

Se consideră în spaţiu domeniul mărginit şi închis V și funcția $f(x,y,z)$ definită pe V. Domeniul V se divizează în n domenii $V_1, V_2, \ldots, V_n$ de volume $\triangle V_1, \triangle V_2, \ldots, \triangle V_n$ respectiv. În fiecare domeniu V_i se consideră un punct arbitrar $P_i(x_i, y_i, z_i)$. Se formează suma integrală $\sigma_f(P_i, V_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \triangle V_i$.

Se notează cu λ cel mai mare dintre diametrele acestor părți și se consideră $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \triangle V_i$.

Dacă această limită există, este finită și nu depinde de diviziunea domeniului V şi de modul de alegere a punctelor P_i, atunci valoarea ei se numește **integrala triplă a funcţiei** f pe domeniul V și se notează cu $\iiint_V f(x,y,z)dv$ sau $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$, unde dv, respectiv $dxdydz$, este element de volum.

În cazul integralei triple sunt juste proprietăți similare integralei duble.

Un domeniu spațial mărginit şi închis V se numeşte **regulat în direcția axei** Oz, dacă:

a) Orice dreaptă paralelă axei Oz, dusă printr-un punct interior al domeniului V intersectează frontiera domeniului cel mult în două puncte;
b) Domeniul V se proiectează pe planul xOy într-un domeniu regulat D;
c) Orice parte a domeniului V, secționată de un plan paralel unuia dintre planele de coordonate, de asemenea posedă proprietățile a) și b).

Paralelipipedul dreptunghic, elipsoidul, tetraedrul sunt exemple de domenii spațiale regulate.

Fie domeniul V mărginit de jos de suprafața $z = z_1(x,y)$, iar de sus de suprafața $z = z_2(x,y)$. Considerăm că domeniul D este proiecția domeniului spațial V pe planul xOy și că D este mărginit de: $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x), \varphi_1(x) \le \varphi_2(x), x = a,\; x = b$. Atunci

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right) dy\right) dx \;\text{ sau }\; \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y)dz$$

se numește **integrală iterată triplă** a funcției f pe domeniul V.

Integrala triplă a funcției integrabile f pe domeniul spațial regulat V este egală cu integrala iterată a acestei funcții pe acest domeniu, adică

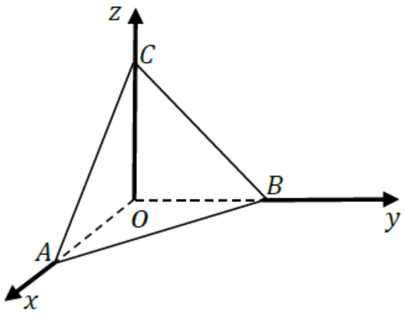
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz.$$

Exemplu: Să se calculeze integrala triplă $\iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$,

$$V\!: x = 0, \qquad y = 0, \quad z = 0, \qquad x + y + z = 1.$$

Soluție: Proiecţia domeniului V pe planul xOy este triunghiul AOB.

Ecuația dreptei AB este $x + y = 1$. Atunci



$$\iiint_V \frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Big|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right) dy = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{4}y +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{1+x+y}\right)\Big|_0^{1-x} dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1-x}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x}\right) dx =$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{1+x}\right) dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}x^2 - \ln|1+x|\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}.$$

Volumul unui corp este egal cu: $V = \iiint\limits_V dxdydz$

<u>Problema 1.</u> Să se calculeze integrala improprie și să se stabilească convergența.

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$. **2.** $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$. **3.** $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$.

4. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$. **5.** $\int_1^{+\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}$. **6.** $\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^4}$.

7. $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$. **8.** $\int_{-1}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+5}$. **9.** $\int_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

10. $\int_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$. **11.** $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5}$. **12.** $\int_{1/4}^{1} \frac{dx}{20x^2-9x+1}$.

13. $\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}$. **14.** $\int_0^{+\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}dx$. **15.** $\int_{-3/4}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

16. $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$. **17.** $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$. **18.** $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

19. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$. **20.** $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$. **21.** $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$.

22. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln\frac{3}{4}}$. **23.** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$. **24.** $\int_0^{+\infty} x\sin xdx$.

25. $\int_1^{+\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$. **26.** $\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{x^3-1} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx$. **27.** $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

28. $\int_0^{+\infty} e^{-3x}xdx$. **29.** $\int_0^{1/3} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2}dx$. **30.** $\int_4^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$.

31. $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+9}$. **32.** $\int_{-1}^{0} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. **33.** $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

34. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$. **35.** $\int_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$. **36.** $\int_1^{+\infty} \frac{arctgx}{x^2}dx$.

37. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^4}}$.

38. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{4-x^2}$.

39. $\int_{0}^{+\infty} 3^{-x} x dx$.

40. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}$.

41. $\int_{0}^{1} \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} dx$.

42. $\int_{3}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

43. $\int_{0}^{3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

44. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} dx$.

45. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

46. $\int_{0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx$.

47. $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$.

48. $\int_{1}^{2} \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$.

49. $\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3}$.

50. $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Exemplu rezolvat

Să se calculeze integrala improprie și să se stabilească convergența: a) $\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+9}$,

b) $\int_{-1}^{0} \frac{3\mathrm{x}^2+2}{\sqrt[3]{\mathrm{x}^2}} \mathrm{dx}$.

Rezolvare:

a) $\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{dx}{(x+2)^2+5} = \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{5}} \right) \Big|_{a}^{0} =$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{a\to-\infty} \left(arctg \frac{2}{\sqrt{5}} - arctg \frac{a+2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(arctg \frac{2}{\sqrt{5}} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\mathrm{arctg} \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{\pi}{2} \right)$ –

convergentă .

b) $\int_{-1}^{0} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \lim_{b\to 0-0} \int_{-1}^{0} \left(3x^{\frac{4}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \lim_{b\to 0-0} \left(\frac{9}{7} x^{\frac{7}{3}} + 6x^{\frac{1}{3}} \right) \Big|_{-1}^{b} =$

$= \lim_{b\to 0-0} \left(\frac{9}{7} b^{\frac{7}{3}} + 6b^{\frac{1}{3}} + \frac{9}{7} + 6 \right) = 0 + 0 + \frac{9}{7} + 6 = = 7\frac{2}{7}$ – convergentă.

<u>Problema 2.</u> Să se calculeze integrala dublă definită pe domeniul D.

1. $\iint_D (x^2+y) dxdy$, $D: y = x^2,\ x = y^2$.

2. $\iint_D y e^{xy/4} dxdy$, $D: y = \ln 2,\ x = 4,\ y = \ln 3,\ x = 8$.

3. $\iint_D (x+y) dxdy$, $D: y = x,\ x = y^2$.

4. $\iint_D x^2 y dxdy$, $D: y = 2-x,\ y = x,\ x \ge 0$.

5. $\iint_D \left(x^3 - 2y\right) dxdy$, $D: y = x^2 - 1,\ x \ge 0,\ y \le 0$.

6. $\iint_D (y - x)\, dxdy$, $D: y = x^2,\ y = x$.

7. $\iint_D (1 + y)\, dxdy$, $D: 5y = x,\ x = y^2$.

8. $\iint_D (x + y)\, dxdy$, $D: y = x^2 - 1,\ y = -x^2 + 1$.

9. $\iint_D x(y - 1)\, dxdy$, $D: y = 5x,\ y = x,\ x = 3$.

10. $\iint_D (x - 2)\, dxdy$, $D: y = x,\ y = \frac{1}{2}x,\ x = 2$.

11. $\iint_D \left(x - y^2\right) dxdy$, $D: y = x^2,\ y = 1$.

12. $\iint_D x^2 y\, dxdy$, $D: y = 2x^3,\ y = 0,\ x = 1$.

13. $\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$, $D: x = y^2,\ x = 1$.

14. $\iint_D xy\, dxdy$, $D: y = x^3,\ y = 0,\ x \le 2$.

15. $\iint_D (x + y)\, dxdy$, $D: y = x^3,\ y = 0,\ x = 3$.

16. $\iint_D x(2x + y)\, dxdy$, $D: y = 1 - x^2,\ y \ge 0$.

17. $\iint_D y(1 - x)\, dxdy$, $D: y = x,\ x = y^3$.

18. $\iint_D 2\mathrm{y}\cos(2\mathrm{xy})\,\mathrm{dxdy}$, $\mathrm{D}: \mathrm{y} = \frac{\pi}{4}, \mathrm{y} = \frac{\pi}{2}, \mathrm{x} = 1, \mathrm{x} = 2.$

19. $\iint_D x(y + 5)\, dxdy$, $D: y = x + 5,\ x + y + 5 = 0,\ x \le 0$.

20. $\iint_D (x - y)\, dxdy$, $D: y = x^2 - 1,\ y = 3$.

21. $\iint_D (x + 1)\, y^2 dxdy$, $D: y = 3x^2,\ y = 3$.

22. $\iint_D \left(x^2 - 2y\right) dxdy$, $D: y = x^2 - 4,\ x \ge 0,\ y \le 0$.

23. $\iint_D \left(x^3 + y\right) dxdy$, $D: x + y = 1,\ x + y = 2,\ x \le 1,\ x \ge 0$.

24. $\iint_D xy^3 dxdy$, $D: y = x^3,\ y = 4x,\ y \ge 0$.

25. $\iint_D y\left(1 + x^2\right) dxdy$ $D: y = x^3,\ y = 3x$.

26. $\iint\limits_D xydxdy\,, D:\ y=\sqrt{x},\ y=0,\ x+y=2$.

27. $\iint\limits_D \frac{y^2}{x^2}dxdy\,,\ D: y=x,\ xy=1,\ y=2$.

28. $\iint\limits_D \left(x^3+3y\right)dxdy\ D:\ x+y=1,\ y=x^2-1,\ x\ge 0$.

29. $\iint\limits_D y^2\left(1+2x\right)dxdy\,,\ D: x=2-y^2,\ x\ge 0$.

30. $\iint\limits_D e^y dxdy\,,\ D: y=\ln x,\ y=0,\ x=2$.

31. $\iint\limits_D x^2 ydxdy\,,\ D: y=2x^3,\ x=1, y=0$.

32. $\iint\limits_D ye^{xy/2}dxdy,\ D: y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=2, x=4$.

33. $\iint\limits_D y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy\,,\ D: y=\sqrt{\pi},\ x=0, y=\frac{x}{2}$.

34. $\iint\limits_D y^2 e^{-xy/8}dxdy,\ D: y=2,\ x=0, y=\frac{x}{2}$.

35. $\iint\limits_D y\cos\left(xy\right)dxdy,\ D: y=\pi/2,\ x=1, y=\pi, x=2$.

36. $\iint\limits_D \left(2x-3y\right)dxdy\,,\ D: y=-x,\ x=y^2$.

37. $\iint\limits_D y\sin\left(xy\right)dxdy,\ D: y=\pi/2,\ x=1, y=\pi, x=2$.

38. $\iint\limits_D xy^2dxdy\,,\ D: y=x^2,\ y=3x$.

39. $\iint\limits_D y^2\cos\frac{xy}{2}dxdy,\ D: y=\sqrt{\pi/2},\ x=0, y=\frac{x}{2}$.

40. $\iint\limits_D y^2\cos\left(xy\right)dxdy,\ D: y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ x=0, y=x$.

41. $\iint\limits_D 4e^{2xy}ydxdy,\ D: y=\ln 3,\ y=\ln 4, x=\frac{1}{2}, x=1$.

42. $\iint\limits_D x^2ydxdy\,,\ D:\ y=3-x,\ y=x,\ x\ge 0$.

43. $\iint\limits_D 4y^2\sin\left(xy\right)dxdy,\ D: y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ x=0, y=x$.

44. $\iint\limits_D \left(x^2-2xy+1\right)dxdy\,,\ D:\ y=x^2,\ x=y^2$.

45. $\iint\limits_D y\cos\left(2xy\right)dxdy\,,\ D: y=\frac{\pi}{2},\ x=1, y=\pi, x=\frac{1}{2}$.

46. $\iint\limits_D xy^3dxdy$, $D:\ y^2=1-x,\ x\geq 0$.

47. $\iint\limits_D 12y\sin(2xy)dxdy$, $D: y=\dfrac{\pi}{4}, y=\dfrac{\pi}{2}, x=2, x=3.$

48. $\iint\limits_D xy^2dxdy$, $D: y=x^2,\ y=2x$.

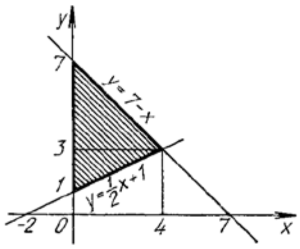
49. $\iint\limits_D 4y^2\sin(2xy)dxdy,\ D: y=\sqrt{2\pi},\ x=0, y=2x$.

50. $\iint\limits_D xy^2dxdy$, $D:\ y=x,\ y=0,\ x=1$.

Exemplu rezolvat

Să se calculeze integrala dublă $\iint\limits_D (x-2y)dxdy$, unde domeniul D este mărginit de liniile $x=0, y=7-x, y=\frac{1}{2}x+1.$

<u>Rezolvare:</u> Domeniul D, reprezentat în figură, este regulat în direcția axei Oy.



$$\iint\limits_D (x-2y)dxdy=\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x}(x-2y)dy=\int\limits_0^4\left(xy-y^2\right)\Big|_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x}dx=$$

$$=\int\limits_0^4\left(7x-x^2-49+14x-x^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^2+1\right)dx=$$

$$\int\limits_0^4\left(-\frac{9}{4}x^2+21x-48\right)dx==\left(-\frac{3}{4}x^3+\frac{21}{2}x^2-48x\right)\Big|_0^4=-72.$$

<u>Problema3.</u> Să se calculeze aria domeniului mărginit de liniile date.

1. $y=4-x^2, y=x^2-2x$.

2. $y=\sqrt{4-x^2}, y=0,\ x=0,\ x=1$.

3. $y=\sqrt{e^x-1},\ y=0,\ x=\ln 2$.

4. $y=\arccos x,\ y=0,\ x=0$.

5. $y=\cos x\sin^2 x,\ y=0,\ (0\leq x\leq \pi/2)$.

6. $y=x^2,\ y=-x$.

7. $y=\dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}},\ y=0,\ x=1,\ x=e^3$.

8. $y^2=4x,\ x^2=4y$.

9. $y=(x+1)^2,\ y^2=x+1$.

10. $y=2x-x^2+3,\ y=x^2-4x+3$.

11. $x=4-y^2,\ x=y^2-2y$.

12. $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x},\ x=4$.

13. $y=x\,arctgx,\ y=0,\ x=\sqrt{3}$.

14. $y=\dfrac{e^{1/x}}{x^2},\ y=0,\ x=2,\ x=1$.

15. $y^2=10x+25,\ y^2=-6x+9$.

16. $y=2-x,\ y^2=4x+4$.

17. $x=\sqrt{4-y^2},\ x=0,\ y=1$.

18. $y=(x-1)^2,\ y^2=x-1$.

19. $y^2=4x,\ x+y=3,\ y\geq 0$.

20. $y=6x^2,\ x+y=2,\ x\geq 0$.

21. $y^2=x+2,\ x=2$.

22. $x=-2y^2,\ x=1-3y^2,\ x\leq 0,\ y\geq 0$.

23. $y=x^2+1,\ x+y=3$.

24. $x=\sqrt{4-y^2},\ y=\sqrt{3x},\ x\geq 0$.

25. $y = x^2 + 2,\ x = 2,\ y = x,\ x \geq 0$.

26. $y = 4x^2,\ x^2 = 9y,\ y \leq 2$.

27. $x = y^2,\ x = \frac{3}{4}y^2 + 1$.

28. $y = \sqrt{2 - x^2},\ y = x^2$.

29. $y = x^2 + 4x,\ y = x + 4$.

30. $2y = \sqrt{x},\ x + y = 5,\ x \geq 0$.

31. $y = 2x - x^2,\ y = 2^x,\ x = 2,\ x = 0$.

32. $y = -2x^2 + 2,\ y \geq -6$.

33. $y^2 = 4x,\ x = 8/\left(y^2 + 4\right)$.

34. $y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 2x$.

35. $x = y^2 + 1,\ x + y = 3$.

36. $x^2 = 3y,\ y^2 = 3x$.

37. $x = \cos y,\ x \leq y + 1,\ x \geq 0$.

38. $x = 4 - y^2,\ x - y + 2 = 0$.

39. $x = \sqrt{2 - y^2},\ x = y^2$.

40. $y^2 = 4 - x,\ y = x + 2,\ y = 2,\ y = -2$

41. $y = x^2,\ y = \frac{3}{4}x^2 + 1$.

42. $x = y^2,\ y^2 = 4 - x$.

43. $x^2 = y,\ xy = 1,\ y = 2,\ x = 0$.

44. $y = 8/\left(x^2 + 4\right),\ x^2 = 4y$.

45. $y = \cos x,\ y \leq x + 1,\ y \geq 0$.

46. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1,\ y \leq \frac{1}{2}x,\ y \geq 0$.

47. $y = x^2 - 3x,\ 3x + y - 4 = 0$

48. $y = x^2,\ y = \frac{3}{4}x^2 + 1$.

49. $y = 4 - x^2,\ y = -\sqrt{4 - x^2}$.

50. $x^2 = 4y + 4,\ x^2 = -2y + 4$.

Exemplu rezolvat

Să se calculeze aria domeniului mărginit de liniile: $y = 2 - x^2,\ y = x$.

<u>Rezolvare:</u> Determinăm punctele de intersecție a parabolei cu dreapta (fig. 2), adică $x = 2 - x^2$, de unde $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = -2,\ x_2 = 1$. Obținem două puncte de intersecție $M_1(-2, -2)$, $M_2(1, 1)$. $D: -2 \leq x \leq 1,\ x \leq y \leq 2 - x^2$.

Rezultă că aria căutată va fi

$$S = \iint_D dxdy = \int_{-2}^{1} dx \int_{x}^{2-x^2} dy = \int_{-2}^{1} dx \cdot y\Big|_x^{2-x^2} = \int_{-2}^{1}\left(2 - x^2 - x\right)dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{9}{2} \text{ (un.p.)}$$

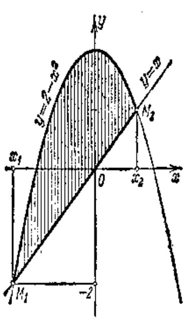


Fig. 2

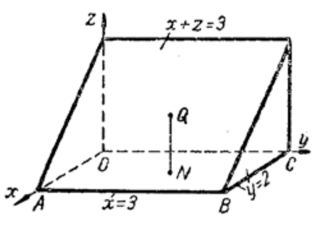


Fig. 3

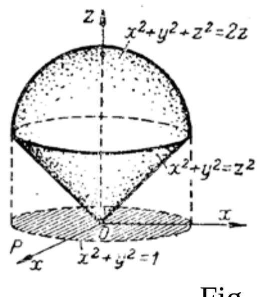


Fig. 4

Problema4. Să se calculeze integrala.

1. $\iiint_V xdxdydz;\ V: y=10x,\ y=0,\ x=1,\ z=xy,\ z=0$.

2. $\iiint_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4};\ V: \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

3. $\iiint_V (y^2+z^2)dxdydz;\ V: z=x+y, x+y=1,\ x=0, y=0, z=0$.

4. $\iiint_V (3x+4y)dxdydz;\ V: y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=5(x^2+y^2)$.

5. $\iiint_V \left(2x^2+3y+z\right)dxdydz;\ V: 2\le x\le 3, -1\le y\le 2, 0\le z\le 4$.

6. $\iiint_V (1+2x^3)dxdydz;\ V: y=9x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0$.

7. $\iiint_V (27+54y^3)dxdydz;\ V: y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0$.

8. $\iiint_V \left(3x^2+y^2\right)dxdydz;\ V: x+y=1,\ y=0, x=0, z=10y, z=0$.

9. $\iiint_V ydxdydz;\ V: y=15x,\ y=0,\ x=1,\ z=xy,\ z=0$.

10. $\iiint_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5};\ V: \frac{x}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

11. $\iiint_V (3x^2+y^2)dxdydz;\ V: z=10y, x+y=1, x=0, y=0, z=0$.

12. $\iiint_V (15x+30z)dxdydz; V: z=x^2+3y^2, z=0, y=x, y=0, x=1$

13. $\iiint_V (4+8z^3)dxdydz;\ V: y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0$.

14. $\iiint_V \frac{dxdydz}{(4x+3y+z+2)^6};\ V: x+y+z+1=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

15. $\iiint_V (1+2x^3)dxdydz;\ V: y=36x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0$.

16. $\iiint_V 21xzdxdydz;\ V: y=x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0$.

17. $\iiint_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^6};\ V: \frac{x}{10}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

18. $\iiint_V (x^2+3y^2)dxdydz;\ V: z=10x, x+y=1, x=0, y=0, z=0$.

19. $\iiint_V (60y+90z)dxdydz; V: y=x, y=0, x=1, z=x^2+y^2, z=0$

20. $\iiint\limits_V y^2 z\cos xyzdxdydz;\ V: y=2x,\ y=0,\ x=1,\ z=36,\ z=0$.

21. $\iiint\limits_V \left(\frac{10}{3}x+\frac{5}{3}\right)dxdydz;\ V: y=9x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0$.

22. $\iiint\limits_V (9+18z)dxdydz;\ V: y=4x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0$.

23. $\iiint\limits_V 3y^2 dxdydz;\ V: y=2x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0$.

24. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}\right)^4};\ V: \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

25. $\iiint\limits_V x^2 z\sin(xyz)dxdydz;\quad V: y=\pi,\ y=0,\ x=0,\ x=2,$

$z=1,\ z=0$.

26. $\iiint\limits_V x^2 dxdydz;\ V: z=10(x+3y),\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

27. $\iiint\limits_V (8y+2z)dxdydz;\ V: y=x, y=0, x=1, z=3x^2+2y^2, z=0$.

28. $\iiint\limits_V 63(1+2\sqrt{y})dxdydz;\ V: y=x,\ y=0,\ x=1,\ z=\sqrt{xy},\ z=0$.

29. $\iiint\limits_V (x+y)dxdydz;\ V: y=x,\ y=0,\quad x=1,$

$z=30x^2+60y^2, z=0$.

30. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)^5};\ V: \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

31. $\iiint\limits_V xyzdxdydz;\ V: y=x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0$.

32. $\iiint\limits_V x^2\sin(4\pi xy)dxdydz;\ V: z=8\pi,\ x=1, y=\frac{x}{2}, y=0, z=0$.

33. $\iiint\limits_V x^2\sin(\pi yx)dxdydz;\ V: y=2x,\ y=0,\ x=1,\ z=4\pi, z=0$.

34. $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(4x+3y+z-2)^5};\ V: x+y+z-1=0,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

35. $\iiint\limits_V (x^2+4y^2)dxdydz;\ V: z=20(2x+y),\ x+y=1,\quad x=0,$

$y=0,\ z=0$.

36. $\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz;\ V: x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

37. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\frac{\pi xy}{4}\right)dxdydz; V: y=-1, y=\frac{x}{2}, x=0, z=-\pi^2, z=0$

38. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{\left(1+\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{5}\right)^6};\ V: \dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{5}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

39. $\iiint\limits_V y^2 e^{-xy} dxdydz;\ V: y=-2,\ y=4x,\ x=0,\ z=0,\ z=1$.

40. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\dfrac{\pi xy}{2}\right) dxdydz; V: y=x, y=-1, x=0, z=2\pi^2, z=0$

41. $\iiint\limits_V x^2 z dxdydz;\ V: y=3x,\ y=0,\ x=2,\ z=xy,\ z=0$.

42. $\iiint\limits_V y^2 e^{xy/2} dxdydz;\ V: y=2,\ y=2x,\ x=0,\ z=-1,\ z=0$.

43. $\iiint\limits_V y^2 z\cos\left(\dfrac{xyz}{3}\right) dxdydz;\ V: y=1,\ y=0,\ x=0,\ x=3,$

$z=2\pi,\ z=0$.

44. $\iiint\limits_V x^2 z\sin\left(\dfrac{xyz}{2}\right) dxdydz; V: y=4,\ y=0,\ x=0,\ x=1,$

$z=\pi,\ z=0$.

45. $\iiint\limits_V y^2 dxdydz;\ V: z=10(3x+y),\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

46. $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^3 dxdydz;\ V: x^2+z^2=1,\ y=0,\ y=1$.

47. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(3x+2y+z+1)^4};\ V: x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

48. $\iiint\limits_V \left(5x+\dfrac{3z}{2}\right) dxdydz;\ V: y=x,\ y=0,\ x=1,$

$z=x^2+15y^2, z=0$.

49. $\iiint\limits_V 8y^2 z e^{2xyz} dxdydz;\ V: y=2, y=0,\ x=-1, x=0, z=1, z=0$.

50. $\iiint\limits_V 2y^2 e^{xy} dxdydz;\ V: y=x,\ y=1,\ x=0,\ z=0,\ z=1$.

Exemplu rezolvat

Să se calculeze integrala $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3};\ V: x+z=3,\quad y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

<u>Rezolvare</u>: Domeniul *V* este o prismă triunghiulară (fig. 3). Obținem:

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3} = \iint\limits_{D_{xOy}} \left.\frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2}\right|_0^{3-x} dxdy = = \frac{1}{2}\int_0^3 dx\int_0^2 \left[(x+y+1)^{-2}-(y+4)^{-2}\right] dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\left.\frac{1}{y+4}-\frac{1}{x+y+1}\right|_{y=0}^{y=2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{12}\right) dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|-\frac{x}{12}\right)\Bigg|_0^3=\frac{4\ln 2-1}{8}.$$

Problema 5. Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele.

1. $z=x^2+y^2,\ x+y=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

2. $z=2-\left(x^2+y^2\right),\ x+2y=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

3. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{16}=1,\ z=\sqrt{3}y,\ z=0,\ y\geq 0$.

4. $z=2x^2+3y^2,\ y=x^2,\ y=x,\ z\geq 0$.

5. $z=2x^2+y^2,\ y=3x, x=2,\ y\leq x,\ z\geq 0$.

6. $z=x,\ y=4, x=\sqrt{25-y^2},\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

7. $y=\sqrt{x},\ x+y+z=2, y=x,\ z\geq 0$.

8. $y=1-x^2,\ x+y+z=3, y\geq 0,\ z\geq 0$.

9. $z=2x^2+y^2,\ x+y=4,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

10. $z=4-x^2,\ x^2+y^2=4,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

11. $2z=y^2,\ 2x+3y-12=0,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

12. $z=x^2+5y^2,\ z=5$.

13. $z=x^2,\ x+y=6,\ y=2x,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

14. $z=3x^2+2y^2+1,\ y=x^2-1,\ y=1,\ z\geq 0$.

15. $3y=\sqrt{x},\ x+y+z=10, y=1,\ y\leq x,\ z=0$.

16. $z=2x^2+8y^2,\ z=4$.

17. $z=3x+2y+6,\ y=x^2,\ x=y^2,\ z=0$.

18. $x^2=1-y,\ x+y+z=3,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

19. $x=y^2,\ x+y+z=4,\ x=1,\ z=0$.

20. $z=2x^2+y^2,\ x+y=1,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

21. $y=x^2,\ z=2x+5y+10,\ y=4,\ z\geq 0$.

22. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-z^2=1,\ z=0,\ z=2$.

23. $y=1-z^2,\ y=-x,\ y\geq 0,\ z\geq 0$.

24. $x^2+y^2=4y,\ z^2=4-y,\ z\geq 0$.

25. $x^2+y^2=1,\ z=2-x^2-y^2,\ z\geq 0$.

26. $y=x^2,\ y+z=2,\ z=0$.

27. $x^2+y^2=4x,\ z^2=4-x,\ z\geq 0$.

28. $z=x^2+2y^2, y=x,\ x\geq 0,\ y=1,\ z\geq 0$.

29. $z=y^2,\ x+y=1,\ x\geq 0,\ z\geq 0$.

30. $z=4x^2+9y^2, z=6$.

31. $z = x^2,\ 3x + 2y = 12,\ y = 0,\ z = 0$.

32. $x = y^2,\ x + z = 1,\ z = 0$.

33. $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1, z = y, z = 0,\ y \ge 0$.

34. $z = x^2 + 4y^2, z = 2$.

35. $x^2 + y^2 = 9, z = y, z = 0,\ y \ge 0$.

36. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1,\ z = 2,\ z = 0$.

37. $\dfrac{x^2}{27} + \dfrac{y^2}{25} = 1, z = \dfrac{y}{\sqrt{3}}, z = 0,\ y \ge 0$.

38. $y^2 = x,\ x = 3,\ z = x,\ z \ge 0$.

39. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{196} = 1,\ z = 7,\ z = 0$.

40. $y^2 = 1 - x,\ x + y + z = 1, x = 0,\ z = 0$.

41. $y = 2x,\ x + y + z = 2,\ x \ge 0,\ z \ge 0$.

42. $z = x^2,\ x - 2y + 2 = 0,\ x + y - 7 = 0,\ z \ge 0$.

43. $z = 10 + x^2 + 2y^2,\ y = x,\ x = 1,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

44. $z = x^2 + 9y^2,\ z = 3$.

45. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{100} = 1,\ z = 5,\ z = 0$.

46. $z = y^2 - x^2,\ z = 0,\ y = 0,\ y = 3$.

47. $y^2 = 4x + 4,\ y^2 = -2x + 4,\ z = 0,\ z = 3$.

48. $y = 1 - x^2,\ y = -\sqrt{1 - x^2},\ z = 0,\ z = 6$.

49. $y^2 = x + 1,\ y^2 = 1 - x,\ x + y + z = 3,\ z = 0$.

50. $x + y = 4,\ z = 4\sqrt{y},\ x \ge 0,\ z \ge 0$.

Exemplu rezolvat: Să se calculeze volumul corpului mărginit de suprafețele: $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z^2$.

Rezolvare: Corpul mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ (cu centrul în punctul $(0;0;1)$) și conul $x^2 + y^2 = z^2$, este reprezentat în fig.4. Volumul este egal cu

$$V = \iiint\limits_V dxdydz = \iint\limits_{D_{xOy}} dxdy \int\limits_{z=z_k}^{z=z_c} dz = \iint\limits_{D_{xOy}} \left(z_c - z_k\right) dxdy,$$

unde V –domeniul spațial, D_{xOy} – proiecția lui V pe planul xOy; $z_k = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z_c = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Linia, ce mărginește domeniul D_{xOy}, este cercul $x^2 + y^2 = 1$. Trecând la coordonate polare, obținem: $V = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \left(z_c - z_k\right) dxdy = \iint\limits_{r\le 1} \left(1 + \sqrt{1-r^2} - r\right) r d\varphi dr =$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(r - r^2 + r\sqrt{1-r^2}\right) dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3} - \frac{\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \pi \text{ (un.c).}$$