Integrale curbilinii de speţa I. Definiţii. Proprietăţi

Fie arcul L de curbă cu capetele A şi B şi fie $f(x,y)$ o funcţie continuă definită pe L. Divizăm arcul AB de punctele $A_0 = A, A_1, ..., a_{n-1}, A_n = B$. Considerăm pe arcul $A_i A_{i+1}$ punctul arbitrar M_i. Notăm lungimea arcului $A_i A_{i+1}$ cu Δl_i, formăm suma $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i y_i)\Delta l_i$. şi notăm $\lambda = \max \Delta l_i$.

Definiţie: Dacă limita sumei σ_n există, este finită şi nu depinde de modul de divizare al arcului L, nici de modul de alegere a punctelor $M_i(x_i, y_i)$, atunci valoare ei se numeşte **integrală curbilinie de speţa I a funcţiei** $f(x,y)$ **pe arcul** L. Se notează cu $\int_L f(x,y)dl$. Deci,

$$\int_L f(x,y)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i)\Delta l_i .$$

Notă. În mod analog poate fi definită integrala curbilinie a unei funcţii $f(x,y,z)$ definite pe un arc L de curbă spaţială. Atunci, $\int_L f(x,y,z)dl = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i, z_i)\Delta l_i$.

Proprietăţi ale integralei curbilinii de speţa I

1. Integrala curblinie de speţa I nu depinde de direcţia integrării, adică $\int_{AB} f(M)dl = \int_{BA} f(M)dl$.
2. $\int_L [f_1(M) \pm f_2(M)]dl = \int_L f_1(M)dl \pm \int_L f_2(M)dl$.
3. $\int_L c\cdot f(M)dl = c\cdot\int_L f(M)dl$, unde c este constantă.
4. Dacă drumul de integrare L este divizat în porţiunile $L_1, L_2, ..., L_n$, atunci $\int_L f(M)dl = \int_{L_1} f(M)dl + ... + \int_{L_n} f(M)dl$.

Calcularea integralei curbilinii de speţa I

1. Dacă în planul OXY curba L este dată de ecuaţia $y = y(x)$, unde $x\in[a,b]$, iar funcţiile $y(x)$ şi $y'(x)$ sunt continui pe segmentul $[a,b]$, atunci $dl = \sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$ şi $\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}dx$.

2. Dacă arcul L este definit parametric: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t\in[t_1, t_2]$ atunci

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt .$$

3. Dacă arcul L este dat de ecuaţia $\rho=\rho(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$ în coordonatele polare, atunci

$$dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\theta \text{ şi } \int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_\alpha^\beta f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\theta$$

4. Dacă arcul L este o curbă spaţială şi definită parametric: $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t),\ t\in[t_1,t_2] \\ z=z(t) \end{cases}$ atunci

$$\int\limits_L f(x,y,z)dl=\int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}dt$$

Integrale curbilinii de speţa II. Definiţii. Proprietăţi

Fie dat un arc L de curbă neîntrerupt, mărginit de punctele A şi B şi funcţiile $P(x,y)$ şi $Q(x,y)$ continui pe L. Divizăm arcul L în direcţia de la A spre B de punctele $M_0=A, M_1, M_2, ..., M_n=B$. Notăm $\overline{M_iM_{i+1}}$ cu $\overline{\Delta l_i}$. Punem $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$, $\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$. Formăm suma $\sigma_n=\sum_{i=0}^{n-1}\left[P(x_i,y_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i)\Delta y_i\right]$.

Dacă limita acestei sume, când $\Delta x_i,\Delta y_i\to 0$, există, este finită şi nu depinde de modul de divizare a arcului L, valoarea ei se numeşte **integrală curbilinie de speţa II.** Se notează, $\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$. Deci,

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\lim_{\Delta x_i,\Delta y_i\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\left(P(x_i,y_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i)\Delta y_i\right)$$

Dacă L este un arc de curbă spaţial, analog poate fi introdusă noţiunea de integrală curbilinie a funcţiilor $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

Proprietăţi ale integralei curbilinii de speţa II

1. Dacă drumul de integrare va fi de la B la A, atunci integrala curbilinie îşi va schimba semnul, adică: $\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=-\int\limits_{(BA)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$

2. Dacă drumul de integrare L este divizat în porţiunile $L_1, L_2, ..., L_n$, atunci $\int\limits_L=\int\limits_{L_1}+...+\int\limits_{L_n}$

Calcularea integralei curbilinii de speţa II

1. Dacă L este definit de funcţia $y=y(x)$, $x\in[a,b]$, continuă împreună cu derivata sa pe $[a,b]$, atunci: $\int\limits_L Pdx+Qdy=\int_a^b P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)dx$

2. Dacă arcul de curbă L este dat de ecuaţiile parametrice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, atunci avem: $\int_L Pdx + Qdy = \int_{t_1}^{t_2} P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)dt$

Teoremă: Dacă domeniul D, închis şi mărginit, poate fi descompus într-un număr finit de domenii regulate, iar funcțiile $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sunt continui pe acest domeniu, atunci are loc **formula lui Green** $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$,

L este frontiera lui D parcursă în sens pozitiv.

<u>Problema 1.</u> Să se calculeze integrala curbilinie.

1. $\int_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, unde L_{AB} – arcul parabolei $y = x^2$ de la punctul *A(-1, 1)* până la punctul *B(1, 1)*.

2. $\int_{L_{AB}} \frac{x^2dy - y^2dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, unde L_{AB} – arcul astroidei $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ parcursă din punctul *A(2, 0)* spre punctul *B(0, 2)*.

3. $\int_{L_{OA}} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, unde L_{OA} – arcul parabolei cubice $y = x^3$ parcursă din punctul *O(0, 0)* spre punctul *A(1, 1)*.

4. $\oint_L (x + 2y)dx + (x - y)dy$, unde L – circumferința $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ parcursă în sens pozitiv.

5. $\oint_L (x^2y - x)dx + (y^2x - 2y)dy$, unde L – conturul elipsei $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ parcursă în sens pozitiv.

6. $\oint_{L_{AB}} (xy - 1)dx + x^2ydy$, unde L_{AB} – conturul elipsei $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ parcursă din punctul *A(1, 0)* până în punctul *B(0, 2)*.

7. $\int_{L_{OBA}} 2xydx - x^2dy$, unde L_{OBA} – linia frântă *OBA*, cu *O(0, 0)*, *B(2, 0)*, *A(2, 1)*.

8. $\int_{L_{AB}} (x^2 - y^2)dx + xydy$, unde L_{AB} – segmentul de dreaptă *AB*, cu *A(1, 1)*, *B(3, 4)*.

9. $\int_{L_{AB}} \cos ydx - \sin xdy$, unde L_{AB} – segmentul de dreaptă *AB*, cu *A(2π, -2π)*, *B(-2π, 2π)*.

10. $\int_{L_{AB}} \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, unde L_{AB} – segmentul de dreaptă *AB*, *A(1, 2)*, *B(3, 6)*.

11. $\int_{L_{AB}} xydx + (y - x)dy$, unde L_{AB} – arcul parabolei cubice $y = x^3$ de la punctul *A(0, 0)* până la punctul *B(1, 1)*.

12. $\int\limits_{L_{ABC}} \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x+y^2\right)dy$, unde L_{ABC} – linia frântă *ABC, A(1, 2), B(3, 2), C(3, 5).*

13. $\int\limits_{L_{OB}} xy^2dx+yz^2dy-x^2zdz$, unde L_{OB} – segmentul de dreaptă *OB, O(0, 0, 0), B(-2, 4, 5).*

14. $\int\limits_{L_{OA}} ydx+xdy$, unde L_{OA} – circumferința $x=R\cos t,\ y=R\sin t$, parcursă de la punctul *O(R, 0)* până la punctul *A(0, R).*

15. $\int\limits_{L_{OA}} xydx+\left(y-x\right)dy$, unde L_{OA} – arcul parabolei $y^2=x$ parcursă din punctul *O(0, 0)* până la punctul *A(1, 1).*

16. $\int\limits_{L_{AB}} xdx+ydy+\left(x-y+1\right)dz$, unde L_{AB} – segmentul de dreaptă *AB, A(1, 1, 1), B(2, 3, 4).*

17. $\int\limits_{L_{AB}} \left(xy-1\right)dx+x^2ydy$, unde L_{AB} – arcul parabolei $y^2=4-4x$ parcursă din punctul *A(1, 0)* până la punctul *B(0, 2).*

18. $\int\limits_{L_{OB}} xydx+\left(y-x\right)dy$, unde L_{OB} – arcul parabolei $y=x^2$ de la punctul *O(0, 0)* până la punctul *B(1, 1).*

19. $\int\limits_{L_{AB}} xdy+ydx$, unde L_{AB} – arcul astroidei $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t$ de la punctul *A(2, 0)* până la punctul
B(0, 2).

20. $\int\limits_{L_{AB}} \left(xy-x\right)dx+\frac{1}{2}x^2dy$, unde L_{AB} – arcul parabolei $y^2=4x$ de la punctul *A(0, 0)* până la punctul *B(1, 2).*

21. $\int\limits_{L_{AB}} \left(xy-1\right)dx+x^2ydy$, unde L_{AB} – segmentul de dreaptă *AB, A(1, 0), B(0, 2).*

22. $\int\limits_{L_{AB}} xdx+ydy+\left(x-y+1\right)dz$, unde L_{AB} – arcul curbei $x=\cos t,\ y=\sin t, z=2t$, *A(1, 0, 0), B(1, 0, 4*π*).*

23. $\int\limits_{L_{AB}} \frac{y}{x}dx+xdy$, unde L_{AB} – arcul $y=\ln x$ de la punctul
A(1, 0) până la punctul *B(e, 1).*

24. $\oint\limits_{L} ydx-xdy$, unde L_{AB} – arcul elipsei $x=3\cos t,\ y=2\sin t$ parcursă în sens pozitiv.

25. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx+x^2dy$, unde L_{OA} – arcul parabolei $y=\frac{x^2}{4}$ parcurs din punctul *O(0, 0)* până la punctul *A(2, 1).*

26. $\int\limits_{L_{AB}} \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$, unde L_{AB} – linia frântă $y=\left|x\right|$ parcursă din punctul *A(-1, 1)* până la punctul *B(2, 2).*

27. $\int\limits_{L_{OA}} 2xydx+x^2dy+zdz$, unde L_{OA} – segmentul de dreaptă, care unește punctele *O(0, 0, 0)* și *A(2, 1, -1).*

28. $\oint_L xdy - ydx$, unde L – conturul triunghiului cu vârfurile *A(-1, 0), B(1, 0), C(0, 1)* parcurs în sens pozitiv.

29. $\int_{L_{ACB}} \left(x^2 + y\right)dx + \left(x + y^2\right)dy$, unde L_{ACB} – frânta *ACB*, cu *A(2, 0), C(5, 0), B(5, 3).*

30. $\oint_L \left(x^2 + y\right)dx + \left(y^2 + x\right)dy$, unde L – arcul elipsei $x = 2\cos t,\ y = 3\sin t$ parcurs în sens pozitiv.

31. $\int_{L_{AB}} \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$, unde L_{AB} – segmentul de dreaptă *AB*, care unește punctele *A(-1, 1), B(3, 2).*

32. $\int_{L_{OB}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, unde L_{OB} – arcul parabolei $y = x^2$ parcurs de la punctul *O(0, 0)* până la punctul *B(1, 1).*

33. $\int_{L_{AB}} xydx + yzdy + zxdz$, unde L_{AB} – curba $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = 1,\ t \in \left[0, 2\pi\right]$.

34. $\int_{L_{OA}} \left(xy - x\right)dx + \frac{x^2}{y}dy$, unde $\mathrm{L_{OA}}$ – arcul parabolei $y = 2\sqrt{x}$ parcurs de la punctul *O(0, 0)* până la punctul *A(1, 2).*

35. $\oint_L xdy$, unde L – conturul triunghiului obținut între dreptele $x = 2,\ y = x, y = 0$ parcurs în sens pozitiv.

36. $\int_L xdx + xydy$, unde L – arcul de sus al circumferinței $x^2 + y^2 = 2x$ parcurs în sens pozitiv.

37. $\oint_L \left(x^2 - y\right)dx$, unde L – conturul dreptunghiului format de dreptele $x = 0,\ y = 0, x = 1, y = 2$ parcurs în sens pozitiv.

38. $\int_{L_{OB}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, unde L_{OB} – arcul parabolei $y = x^2$ parcurs de la punctul *O(0, 0)* până la punctul *B(1, 1).*

39. $\int_{L_{OB}} 4x\sin^2 ydx + y\cos 2xdy$, unde L_{OB} – segmentul de dreaptă *OB*, care unește punctele *O(-1, 1), B(3, 2).*

40. $\oint_L ydx - xdy$, unde L – arcul elipsei $x = 6\cos t,\ y = 4\sin t$ parcurs în sens pozitiv.

41. $\int_{L_{OA}} 2xzdx - y^2dz$, unde L_{OA} – arcul parabolei $z = \frac{x^2}{4}$ parcurs de la punctul *O(0,0,0)* până la punctul *A(2,0,1).*

42. $\int_{L_{AB}} \left(x - \frac{1}{y}\right)dy$, unde L_{AB} – arcul parabolei $y = x^2$ parcurs de la punctul *A(1, 1)* până la punctul *B(2, 4).*

43. $\int_{L_{AB}} \cos zdx - \sin xdz$, unde L_{AB} – segmentul de dreaptă *AB* care unește punctul *A(2,0,-2)* cu punctul *B(-2,0,2).*

44. $\int\limits_{L_{OA}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, unde L_{OA} – arcul parabolei $y = 2\sqrt{x}$ parcurs de la punctul *O(0, 0)* până la punctul *A(1, 2)*.

45. $\int\limits_{L_{OA}} \left(xy - y^2\right)dx + xdy$, unde L_{OA} – arcul parabolei $y = 2x^2$ parcurs de la punctul *O(0, 0)* până la punctul *A(2, 3)*.

46. $\oint\limits_{L} (x+y)\,dx + (x-y)\,dy$, unde *L* – circumferința $x^2 + y^2 = 16$ parcursă în sens pozitiv.

47. $\int\limits_{L_{AB}} 2y\sin 2x dx - \cos 2x dy$, unde L_{AB} – segmentul de dreaptă *AB*, cu $A\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ și $B\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$.

48. $\int\limits_{L_{AB}} xydx + x^2zdy + xyzdz,$ unde L_{AB} – curba $x = e^t,\ y = e^{-t},\ z = t^2,,\ t \in [0,1]$.

49. $\int\limits_{L} \sqrt{1-x^2}dx + xdy,,$ unde L este elipsa $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ situată în cadranele 1 și 4. Conturul este parcurs în sens pozitiv.

50. $\int\limits_{L} xye^x dx + (x-1)e^x dy,$ unde L este segmentul de dreaptă ce unește punctele *A(0, 2)* și *B(1, 2)*.

Exemplu rezolvat

Să se calculeze integrala curbilinie.

$\int\limits_{L} x^2ydy - xy^2dx,$ dacă conturul L este mărginit de curba $x = \sqrt{\cos t},\ y = \sqrt{\sin t},\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

<u>Rezolvare:</u>

$$\int\limits_{L} x^2ydy - xy^2dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\cos t \cdot \sqrt{\sin t} \cdot \frac{\cos t}{2\sqrt{\sin t}} - \sin t\sqrt{\cos t} \cdot \frac{(-\sin t)}{2\sqrt{\cos t}}\right]dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt = \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{4}.$$

SERIA ABSTRACTĂ FOURIER

Funcției periodică $f(x)$ cu perioada 2π poate fi descompusă în serie Fourier $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, unde $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$

$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\, dx$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx = b_m \cdot \pi \Rightarrow b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\, dx$

Teoremă (teorema Dirichlet) Dacă $f(x)$ periodică, cu perioada 2π, este monotonă pe porțiuni și mărginită pe $[-\pi, \pi]$, atunci seria Fourier asociată funcției $f(x)$, converge în toate punctele segmentului $[-\pi, \pi]$. În punctele în care funcția $f(x)$ este continuă, suma $S(x)$ a seriei obținute este egală cu valoarea funcției f în punctul respectiv. În punctele de discontinuitate a funcției $f(x)$ suma seriei este egală cu media aritmetică a limitelor laterale în punctele respective. Adică, dacă $x = c$ este punct de discontinuitate, atunci: $S(c) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}$.

Dacă $f(x)$ este o funcție **pară** și admite dezvoltare în serie Fourier, atunci produsul $f(x)\cdot \sin kx$ este o funcție impară, iar produsul $f(x)\cdot \cos kx$ este o funcție pară și au loc relațiile: $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,\ a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\, dx,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx = 0$ Astfel, în seria Fourier a unei **funcții pare** figurează numai **cosinusuri**.

Dacă $f(x)$ este o funcție **impară** și admite dezvoltare în serie Fourier, atunci produsul $f(x)\cdot \sin kx$ este o funcție pară, iar produsul $f(x)\cdot \cos kx$ este o funcție impară și au loc relațiile: $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx = 0,\ b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\, dx$

Astfel în seria Fourier a unei **funcții impare** figurează numai **sinusuri.**

Problema 2. Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x)$ pe intervalul dat cu perioada T.

1. $f(x) = \begin{cases} 0, & \pi \le x < 0 \\ \frac{x}{2} + 1, & 0 \le x \le \pi,\ T = 2\pi \end{cases}$. **2.** $f(x) = 2x,\ x \in [-1,1],\ T = 2.$

3. $f(x) = \begin{cases} 7 - 3x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 < x \le \pi,\ T = 2\pi \end{cases}$. **4.** $f(x) = x,\ x \in [1,3],\ T = 2.$

5. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ 3 - 8x, & 0 \le x \le \pi,\ T = 2\pi \end{cases}$. **6.** $f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1,\ T = 2\pi \end{cases}$.

7. $f(x) = \begin{cases} 2x - 11, & -\pi \le x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \pi,\ T = 2\pi \end{cases}$. **8.** $f(x) = e^x,\ x \in [-2,2],\ T = 4.$

9. $f(x) = \begin{cases} 7x - 1, & -\pi \le x \le 0 \\ 0, & 0 < x \le \pi,\ T = 2\pi \end{cases}$. **10.** $f(x) = 10 - x, x \in [5,15], T = 10.$

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ 6x - 5, & 0 \le x \le \pi,\ T = 2\pi \end{cases}$. **12.** $f(x) = 5x - 1,\ x \in [-5,5],\ T = 10.$

13. $f(x)=\begin{cases}2x-1, -\pi\le x\le 0\\ 0, \qquad 0<x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$. **14.** $f(x)=1+x,\ x\in[-1,1],\ T=2.$

15. $f(x)=\begin{cases}5-x, -\pi\le x\le 0\\ 0, \qquad 0<x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$. **16.** $f(x)=2x+3,\ x\in[-1,3],\ T=4.$

17. $f(x)=\begin{cases}0, \quad -\pi\le x<0\\ 4x-3, 0\le x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$. **18.** $f(x)=1-|x|,\ x\in[-3,3],\ T=6.$

19. $f(x)=\begin{cases}2x+3, -\pi\le x\le 0\\ 0, \qquad 0<x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$. **20.** $f(x)=|x|-3,\ x\in[-4,4],\ T=8.$

21. $f(x)=\begin{cases}x-2, -\pi\le x\le 0\\ 0, \qquad 0<x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$. **22.** $f(x)=\begin{cases}-0,5, \ -6\le x<0\\ 1, \qquad 0\le x\le 6,\ T=12\end{cases}$.

23. $f(x)=\begin{cases}1, \quad -\pi\le x<0\\ \dfrac{x}{2}+1, 0\le x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$. **24.** $f(x)=4x-3,\ x\in[-5,5],\ T=10.$

25. $f(x)=\begin{cases}0, \quad -\pi\le x<0\\ 3-x, 0\le x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$. **26.** $f(x)=\begin{cases}1, \quad 1\le x<2\\ -1, 2\le x\le 3,\ T=2\end{cases}$.

27. $f(x)=\begin{cases}-0, -2\le x\le 0\\ 2, \quad 0<x\le 2,\ T=4\end{cases}$. **28.** $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},\ x\in[-\pi,\pi],\ T=2\pi.$

29. $f(x)=|1-x|,\ x\in[-2,2],\ T=4.$ **30.** $f(x)=\begin{cases}1, \quad -\pi\le x<0\\ 3x+1, 0\le x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$.

31. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+2,\ \pi\le x<0\\ 0, \qquad 0\le x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$. **32.** $f(x)=3x,\ x\in[-2,2],\ T=4.$

33. $f(x)=\begin{cases}6-2x, -\pi\le x<0\\ 0, \qquad 0<x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$. **34.** $f(x)=3,\ x\in[-1,1],\ T=2.$

35. $f(x)=\begin{cases}0, \quad -\pi\le x\le 0\\ 3-5x, 0\le x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$. **36.** $f(x)=\begin{cases}1, -1\le x<0\\ x, \ 0\le x<1,\ T=2\end{cases}$.

37. $f(x)=\begin{cases}x-9, -\pi\le x\le 0\\ 0, \qquad 0<x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$. **38.** $f(x)=e^x,\ x\in[-1,1],\ T=2.$

39. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}-3, -\pi\le x\le 0\\ 0, \qquad 0<x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$. **40.** $f(x)=\begin{cases}0, \quad -\pi\le x<0\\ 2-4x, 0\le x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$.

41. $f(x)=5-x,\ x\in[-3,3],\ T=6.$ **42.** $f(x)=\begin{cases}0, \quad -\pi\le x<0\\ 6x+4, 0\le x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$.

43. $f(x)=2x-1,\ x\in[-4,4],\ T=8.$ **44.** $f(x)=\begin{cases}3x+4, -\pi\le x\le 0\\ 0, \qquad 0<x\le\pi, T=2\pi\end{cases}$.

45. $f(x)=4+x,\ x\in[-2,2],\ T=4.$ **46.** $f(x)=\begin{cases}1, \quad -\pi\le x<0\\ 3x+1, 0\le x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$.

47. $f(x)=\begin{cases}2x-11, -\pi\le x\le 0\\ 0, \qquad 0<x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$. **48.** $f(x)=\begin{cases}7-3x, -\pi\le x\le 0\\ 0, \qquad 0<x\le\pi,\ T=2\pi\end{cases}$.

49. $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 1-4x, 0\le x\le\pi, & T=2\pi\end{cases}$. **50.** $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ 4-2x, 0\le x\le\pi, & T=2\pi\end{cases}$.

Exemplu rezolvat

Să se dezvolte în serie Fourier funcția $f(x)$ pe intervalul dat cu perioada T:

$$f(x)=\begin{cases}2x-2, -\pi\le x\le 0\\ 0, \qquad 0<x\le\pi, \; T=2\pi\end{cases}.$$

Rezolvare: $a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(2x-1)\,dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}0dx=\frac{1}{\pi}\left(x^2-x\right)\Big|_{-\pi}^{0}$

$=-\frac{1}{\pi}\left(\pi^2+\pi\right)=-\pi-1;$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(2x-1)\cos nx dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}0\cos nx dx=\begin{vmatrix}u=2x-1, du=2dx\\ dv=\cos nx dx, v=\frac{1}{n}\sin nx\end{vmatrix}=$$

$$\frac{1}{\pi}\frac{(2x-1)\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{2}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0}\sin nx dx=\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{2}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)=$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}, n=2k-1\\ 0 \qquad\qquad, n=2k\end{cases}, \; k\in N^*.$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(2x-1)\sin nx dx+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}0\cdot\sin nx dx=$$

$$=\begin{vmatrix}2x-1=u, \; du=2dx\\ dv=\sin nx, v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{vmatrix}=-\frac{1}{\pi}\frac{(2x-1)}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{\pi n}\int\limits_{-\pi}^{0}\cos nx dx=$$

$$=\frac{1}{n\pi}-\frac{1}{n\pi}(2\pi+1)\cos n\pi+\frac{2}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0}=\frac{1}{n\pi}-\frac{(2\pi+1)(-1)^n}{n\pi}.$$

Obținem:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=$$

$$=-\frac{\pi+1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\pi}+\frac{(2\pi-1)\cos n\pi}{\pi n}\right)\sin nx+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\right)\cos(2k-1)x.$$

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL I

Definiție. Se numește **ecuație diferențială de ordinul I**, ecuația de forma $F(x,y,y')=0$, unde x este variabila independentă, $y=y(x)$ – funcția necunoscută, y' – derivata ei, F - o funcție definită pe careva domeniu $G\subseteq R^3$. Uneori ecuația diferențială are forma $y'=f(x,y)$ sau $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

Definiție. Se numește **problemă Cauchy** a ecuației diferențiale $y'=f(x,y)$, problema găsirii soluției ecuației diferențiale, care verifică condițiile inițiale $y(x_0)=y_0$.

Teoremă (de existență și unicitate a problemei Cauchy): Fie ecuaţia $y'=f(x,y)$. Dacă funcțiile $f(x,y)$ și și $f_y'(x,y)$ sunt continui în careva domeniu $D\subset R^3$, $(x_0,y_0)\in D$, atunci în careva vecinătate $|x-x_0|<\delta$ a punctului x_0 există o singură soluție $y=y(x)$, care satisface condiția inițială $y(x_0)=y_0$.

Definiție. Se numește **soluție generală** a ecuației diferențiale $y'=f(x,y)$ în careva domeniu D de existență și unicitate a soluției problemei Cauchy funcția $y=y(x,C)$ ce depinde de x, iar C este parametru astfel încât

1) $y(x,C)$ verifică ecuația pentru orice $C\in R$;

2) oricare ar fi condiția inițială $y(x_0)=y_0$, $(x_0,y_0)\in D$, se poate de găsit o valoare C_0 a lui C astfel încât soluția $y=y(x,C_0)$ să verifice condiția inițială, adică $y(x_0,C_0)=y_0$.

Uneori, în procesul găsirii soluției generale a ecuației diferențiale, obținem o relație de forma $\Phi(x,y,C)=0$, care nu-i rezolvată în raport cu y și care se numește **integrală generală** a ecuației.

Definiție. Se numește **soluție particulară** a ecuației diferențiale, orice soluție $y=y(x,C_0)$, care se obține din cea generală pentru careva valoare C_0 a constantei C. Analog, $\Phi(x,y,C_0)=0$ se numește **integrală particulară**.

Definiție. Orice soluție a ecuației diferențiale $y'=f(x,y)$, care nu se obține din soluția generală și în fiecare punct al căreia nu se respectă unicitatea soluției, se numește **soluție singulară** a acestei ecuații.

Definiție. Se numește ecuație diferenţială cu **variabile separabile** ecuația de forma: $M_1(x)\cdot N_1(y)dx+M_2(x)\cdot N_2(y)dy=0$ sau $y'=f(x)\cdot g(y)$.

În domeniul în care $M_2(x)$ și $N_1(y)$ sunt nenule, putem scrie: $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx=-\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$ – o ecuație cu variabile separate. Atunci $\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx=-\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy$.

Definiție. Ecuația diferențială $y'=f(x,y)$ se numește **omogenă**, dacă funcția $f(x,y)$ este omogenă de gradul zero, adică $f(tx,ty)=f(x,y)$.

Dacă $y'=f(x,y)$ este o ecuație diferențială omogenă, atunci putem nota $\frac{y}{x}=u=u(x)$. Ecuația capătă forma: $u'x+u=f(1,u)$ sau $u'=f(1,u)-u$ – o ecuație cu variabile separabile.

Notă: Uneori ecuația omogenă mai este scrisă sub forma $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, unde $P(x,y)$ și $Q(x,y)$ sunt funcții omogene de același ordin, adică $P(tx,ty)=t^nP(x,y)$ și

$Q(tx,ty)=t^nQ(x,y)$. În acest caz, avem $\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, iar funcția $f(x,y)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ este omogenă de grad zero.

Fie ecuația $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ cu $c_1^2+c_2^2>0$ (dacă $c_1=c_2=0$, atunci ecuația este deja omogenă).

Dacă $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$, facem schimbul de variabile $x=x_1+h,\ y=y_1+k$, unde (h,k) este soluție a sistemului $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}$, care duce la ecuația omogenă $y_1'=f\left(\frac{a_1x_1+b_1y_1}{a_2x_2+b_2y_2}\right)$.

Dacă $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, atunci $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\lambda$ și $a_2=\lambda a_1, b_2=\lambda b_1$. Obținem: $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)}\right)=\varphi(a_1x+b_1y)$.

Cu ajutorul notației $a_1x+b_1y=z$, care implică relația $z'=a_1+b_1y'$, obținem o ecuație cu variabile separabile $z'=a_1+b_1\varphi(z)$.

Definiție. Se numește **ecuație liniară de ordinul I** ecuația liniară față de funcția necunoscută y și derivata ei: $y'+p(x)\cdot y=q(x)$.

Una din metodele de rezolvare ale ecuațiilor liniare este metoda Bernoulli, se caută soluția sub forma $y=u(x)\cdot v(x)=u\cdot v$. Atunci $y'=u'v+uv'$. Înlocuind în ecuație, obținem: $u'v+uv'+p(x)\cdot uv=q(x)\Leftrightarrow u'v+u(v'+p(x)\cdot v)=q(x)$. Alegem (!) funcția $v(x)$ (concretă), astfel încât expresia dintre paranteze să se transforme în zero, adică $v'+p(x)\cdot v=0$ – o ecuație liniară omogenă cu soluția $v=e^{-\int p(x)dx}$. Atunci $u'v=q(x)$ și $u'=q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$ și separînd variabilele, găsim $u(x)$ și respectiv y.

Altă metodă de rezolvare a ecuațiilor liniare este **metoda Lagrange** (metoda **variației constantei**). Fie $y_0=C\cdot e^{-\int p(x)dx}$ soluția generală a ecuației omogene $y'+p(x)y=0$, asociate ecuației liniare neomogene $y'+p(x)y=q(x)$. Mai departe, considerăm C ca funcție de x, adică $C(x)$. Atunci $y=C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$. Vom înlocui această funcție în ecuația inițială, de unde vom găsi $C(x)$.

Definiție. Se numește **ecuație Bernoulli**, ecuația de forma: $y'+p(x)\cdot y=q(x)\cdot y^\alpha, \alpha\in R\setminus\{0,1\}$.

Ecuația Bernoulli poate fi rezolvată prin trei metode:

a) **metoda Bernoulli**: se caută soluția sub forma $y=u\cdot v$;

b) **metoda Lagrange** (de variație a constantei);

c) se face **substituția** $z=y^{1-\alpha}$, care ne duce la o ecuație liniară față de z' și z.

Definiție. Ecuația diferențială de forma $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$, unde partea stângă a ecuaţiei reprezintă diferențiala totală a unei funcții $u(x,y)$, definită pe un domeniu $D\subset R^2$, se numește **ecuație cu diferențiale totale** (exactă). În acest caz soluția generală a ecuației va avea formă implicită $u(x,y)=C$, unde C este o constantă arbitrară.

Teoremă. Dacă ecuația $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ este o ecuație cu diferențiale totale și $P(x,y),\ Q(x,y)$ au derivate parțiale pe domeniul simplu conex D cu $P'_y,\ Q'_x$ continui, atunci are loc egalitatea $P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)$. Și invers, dacă $P'_y(x,y)=Q'_x(x,y)$, atunci avem o ecuație în diferențiale totale. Integrala generală a ecuației este $\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy=C$ sau $\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy=C$.

ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDIN SUPERIOR. GENERALITĂŢI

Definiţie. Se numeşte **ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul *n*** o ecuaţie diferenţială de forma $F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$, unde x este variabila independentă, $y=y(x)$ este funcţia necunoscută şi F este o funcţie continuă în careva domeniu G din spaţiul $\mathbf{R}^{n+2}$, sau $y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$.

Definiţie. Se numeşte **problemă Cauchy** pentru ecuaţia $y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ problema care constă în determinarea soluţiei acestei ecuaţii, care satisface **condiţiile iniţiale** $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$.

Teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei problemei Cauchy. Dacă funcţia $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ şi derivatele ei parţiale în raport cu variabilele $y,y',...,y^{(n-1)}$ sunt continue într-un domeniu $D\subset\mathbf{R}^{n+1}$ care conţine punctul $(x_0,y_0,y'_0,...,y_0^{(n-1)})$, atunci există un interval (a,b) care conţine punctul x_0 şi o singură funcţie $y(x)$ continuu derivabilă pe (a,b) care verifică ecuaţia $y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$.

Definiţie. Se numeşte **soluţie generală** a ecuaţiei diferenţiale funcţia $y=y(x,C_1,C_2,...,C_n)$ care satisface condiţiile:

1) $y(x,C_1,C_2,...,C_n)$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale $y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ pentru orice valori ale constantelor $C_1,C_2,...,C_n$;

2) pentru orice $(x_0,y_0,y'_0,...,y_0^{(n-1)})\in D$ există aşa valori $C_1^{(0)},C_2^{(0)},...,C_n^{(0)}$ ale constantelor $C_1,C_2,...,C_n$, astfel încât funcţia $y(x,C_1^{(0)},...,C_n^{(0)})$ este soluţie a problemei Cauchy respective.

Definiţie. Se numeşte **soluţie particulară** a ecuaţiei diferenţiale $y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ orice soluţie a acestei ecuaţii care se obţine din soluţia generală pentru valori concrete ale constantelor $C_1,C_2,...,C_n$.

ECUAŢII DIFERENŢIALE CARE PERMIT MICŞORAREA ORDINULUI

1. Ecuaţii diferenţiale de forma $y^{(n)}=f(x)$. Această ecuaţie poate fi rezolvată prin n integrări. La fiecare integrare se rezolvă o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi.

2. Ecuaţii diferenţiale care nu conţin în mod explicit funcţia necunoscută. Ecuaţiile de acest tip au forma $F(x,y^{(k)},...,y^{(n)})=0$. Ele pot fi reduse la ecuaţii diferenţială de ordinul $n-k$ cu ajutorul substituţiei $y^{(k)}=p(x)$.

3. **Ecuaţii diferenţiale care nu conţin în mod explicit variabila independentă**. Fie ecuaţia diferenţială de forma $F(y, y', y'') = 0$, unde $y = y(x)$ este funcţia necunoscută de variabila x, care nu se conţine explicit în această ecuaţie. Această ecuaţie poate fi redusă la o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi folosind substituţia $y' = p(y)$.

ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE OMOGENE DE ORDIN SUPERIOR.

Definiţie. Se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară de ordinul** n ecuaţia de forma

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x),$$

unde x este variabila independentă, $f(x), p_0(x), p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$ sunt funcţii continue pe careva interval I, $y = y(x)$ este funcţia necunoscută care trebuie determinată, iar $y', \ldots, y^{(n)}$ sunt derivatele ei.

Dacă $f(x) = 0, \forall x \in I$, atunci ecuaţia se numeşte **omogenă** sau fără termen liber, dacă însă $f(x)$ nu este identic egală cu zero pe intervalul I, atunci ea se numeşte **neomogenă** sau cu termen liber.

Deci ecuaţia diferenţială omogenă de ordinul n

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$$

se numeşte ecuaţie omogenă **asociată** ecuaţiei neomogene.

Pentru sistemul de funcţii $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ care au derivate până la ordinul $n-1$ inclusiv, $W(x) = W[y_1, y_2, \ldots, y_n].= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$. se numeşte **wronskian** al funcţiilor $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$.

Teorema. Dacă funcţiile $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ sunt soluţii ale ecuaţiei omogene $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$, atunci ele sunt liniar independente pe intervalul I atunci şi numai atunci când $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0, \forall x \in I$.

Definiţie. Se numeşte **sistem fundamental de soluţii** al ecuaţiei omogene $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$ orice sistem liniar independent de n soluţii ale acestei ecuaţii.

Astfel, sistemul de soluţii $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ al ecuaţiei omogene care verifică relaţia $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0, \forall x \in I$, este sistem fundamental de soluţii al acestei ecuaţii.

Teorema (structura soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene) Dacă $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ este un sistem fundamental de soluţii pe intervalul I a ecuaţiei omogene $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$, atunci soluţia generală a acestei ecuaţii are forma $y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x), x \in I$, unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sunt constante arbitrare.

Definiţie. Se numeşte **ecuaţie diferenţială liniară omogenă de ordinul** n *cu* **coeficienţi constanţi** ecuaţia de forma $y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+p_1y'+p_0y=0$, $x\in(-\infty,+\infty)$. unde $p_0, p_1,\ldots,p_{n-1}$ sunt constante reale.

Funcţia $y=e^{kx}$ este soluţie a ecuaţiei $y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+p_1y'+p_0y=0$ atunci şi numai atunci când numărul k este rădăcină a ecuaţiei $k^n+p_{n-1}k^{n-1}+\ldots+p_1k+p_0=0$, numită **ecuaţie caracteristică** a ecuaţiei diferenţiale $y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+p_1y'+p_0y=0$. Gradul ecuaţiei caracteristice este n şi prin urmare ea are (ţinând cont de multiplicitate) n rădăcini reale sau (şi) complexe $k_1,k_2,\ldots,k_n$ Aceste rădăcini determină n funcţii de forma : $e^{k_1x},e^{k_2x},\ldots,e^{k_nx}$, care sunt soluţii particulare ale ecuaţiei omogene date. Examinăm câteva cazuri posibile.

Cazul 1. Fie că toate **rădăcinile** ecuaţiei caracteristice sunt numere **reale şi diferite. Soluţia generală a acestei ecuaţii** este $y(x)=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}+\ldots+C_ne^{k_nx}$

Cazul 2. Fie că toate **rădăcinile** ecuaţiei caracteristice sunt numere **reale** , iar k_j este o **rădăcină reală de multiplicitatea** $m>1$ a ecuaţiei caracteristice . Atunci în sistemul de funcţii $e^{k_1x},e^{k_2x},\ldots,e^{k_nx}$ m soluţii coincid şi în locul lor în sistemul fundamental de soluţii se iau funcţiile $e^{k_jx},xe^{k_jx},\ldots,x^{m-1}e^{k_jx}$, care (poate fi demonstrat) sunt soluţii ale ecuaţiei omogene.

Cazul 3. Fie că **ecuaţia caracteristică are o rădăcină complexă** simplă (de multiplicitatea 1) $k_j=\alpha+\beta i,\beta\neq 0$. Atunci printre rădăcinile ecuaţiei caracteristice se găseşte şi conjugata ei: rădăcina complexă simplă $k_s=\alpha-\beta i$. În acest caz soluţiile $e^{(\alpha+\beta i)x},e^{(\alpha-\beta i)x}$ sunt înlocuite cu $e^{\alpha x}\cos\beta x$ şi $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Cazul 4. Dacă ecuaţia caracteristică are rădăcina complexă $k_j=\alpha+i\beta$ de multiplicitatea m, atunci ea are şi rădăcina $\bar{k}_j=\alpha-i\beta$ de aceeaşi multiplicitate. În acest caz sistemul de soluţii conţine m soluţii complexe egale de forma $e^{(\alpha+i\beta)x}$ şi tot atâtea soluţii de forma $e^{(\alpha-i\beta)x}$ În locul lor în sistemul fundamental de soluţii se iau soluţiile

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Fie ecuaţia de ordinul doi $y''+py'+qy=0$, unde p şi q sunt constante reale. Ecuaţia caracteristică a acestei ecuaţii este $k^2+pk+q=0$.

1) Dacă ecuaţia caracteristică are **două rădăcini reale şi diferite** k_1 şi k_2, atunci sistemul fundamental de soluţii este e^{k_1x}, e^{k_2x} iar soluţia generală $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$

2) Dacă $k_1=k_2$, atunci sistemul fundamental de soluţii este e^{k_1x}, xe^{k_1x} iar soluţia generală are forma $y=C_1e^{k_1x}+C_2xe^{k_2x}$

3) Dacă $k_1=\alpha+i\beta,\ k_2=\alpha-i\beta,\ \beta\neq 0,$ atunci sistemul fundamental de soluţii este $e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,$ iar soluţia generală este $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$

Teoremă (Structura soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene) Soluţia generală a ecuaţiei neomogene $y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_1(x)y'+p_0(x)y=f(x)$ este egală cu suma unei soluţii particulare a ei şi a soluţiei generale a ecuaţiei omogene asociate ei $y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0$.

Dacă notăm soluţia generală a ecuaţiei neomogene cu $y_n(x)$, soluţia particulară a ecuaţiei neomogene cu $y_p(x)$ şi soluţia generală a ecuaţiei omogene cu $y_o(x)$. Atunci putem scrie $y_n(x) = y_p(x) + y_0(x)$.

DETERMINAREA UNEI SOLUŢII PARTICULARE A ECUAŢIEI NEOMOGENE. METODA LAGRANGE.

Cazul $n = 2$. Fie ecuaţia diferenţială liniară neomogenă de ordinul doi $y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x)$. Fie că sistemul fundamental de soluţii al ecuaţiei omogene este $y_1(x),\ y_2(x)$. Soluţia generală a acestei ecuaţii are forma $y_o(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$.

Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene are forma $y_0(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, unde $C_1(x)$ şi $C_2(x)$ sunt funcţii continuu derivabile pe careva interval care se determină din sistemul $\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_2'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$.

METODA COEFICIENȚILOR NEDETERMINAȚI

Fie că termenul liber $f(x)$ al ecuației $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = f(x),\ x \in I$, are forma $f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, unde $P(x)$ și $Q(x)$ sunt polinoame de variabilă x. Vom spune în acest caz, că $f(x)$ are formă **specială**.

1) Dacă $k_0 = \alpha + \beta i$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice $k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots + p_1 k + p_0 = 0$, atunci o soluție particulară e ecuației neomogene poate fi găsită în forma $y_p(x) = U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, unde $U(x)$ și $V(x)$ sunt polinoame de grade, egale celui mai mare dintre gradele polinoamelor $P(x)$ și $Q(x)$. Coeficienții acestor polinoame se determină prin metoda coeficienților indeterminați, înlocuind $y_p(x) = U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ în ecuația $y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_1 y' + p_0 y = f(x),\ x \in I$.

2) Dacă $k_0 = \alpha + \beta i$ este rădăcină de multiplicitatea m a ecuației caracteristice, atunci o soluție particulară a ecuației neomogene poate fi căutată în forma $y_p(x) = x^m\left[U(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + V(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right]$.

Problema 1. Să se afle soluțiile sau integralele generale ale următoarelor ecuațiilor diferențiale rezolvabile în cuadraturi:

1. a) $xy' = y - xy$, b) $y^2 dx = (xy - x^2)dy$, c) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

2. a) $y'\sin x = y\ln y$, b) $xy' = y\left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)$, c) $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$.

3. a) $yy'\frac{1}{x}+e^{y}=0$ b) $y'=\frac{x-y}{x+y}$, c) $\left(x^2-1\right)y'-xy=x^3-x$.

4. a) $y'=2^{x-3y}$, b) $y'=e^{y/x}+y/x$, c) $y'+(1-2x)y/x^2=1$.

5. a) $3^{x^2+y}dy+xdx=0$, b) $x\cos\left(y/x\right)\left(ydx+xdy\right)=x^2\cdot\sin\left(y/x\right)dx$, c) $y'-2xy=1-x^2$.

6. a) $\left(1+y^2\right)dx-\sqrt{x}dy=0$, b) $(x+2y)dx+xdy=0$, c) $y'+y\cos x=\cos x$.

7. a) $y'=(2y+1)\operatorname{tg}x$, b) $xdy-ydx=ydy$, c) $y'+\frac{3}{x}y=x^3+x$.

8. a) $y'\sin x=y\cos x+2\cos x$, b) $\left(2x-y\right)dx+\left(x+y\right)dy=0$, c) $\left(1-x^2\right)y'+xy=1$.

9. a) $\ln\cos(y)dx+x\operatorname{tg}ydy=0$, b) $y-xy'=x+yy'$, c) $y'-y=x^2e^x$.

10. a) $1+(1+y')e^y=0$, b) $\left(x^2-2y^2\right)dx+2xydy=0$, c) $y'-2y/x=x^3+1$.

11. a) $\left(x^2y^3+5x^2\right)dx+\left(y^2x^3+5y^2\right)dy=0$, b) $\left(x^2-y^2\right)dx+2xydy=0$ c) $y'-y/x=x\cos x$.

12. a) $e^{2x+y}dy=xdx$, b) $\left(x^2+y^2\right)dx+xydy=0$, c) $y'+\frac{4x}{x^2+1}y=\frac{1}{x^2+1}$.

13. a) $y'=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$, b) $ydy+(x-2y)dx=0$, c) $y'+x^2y=x^2$.

14. a) $\sin x\operatorname{tg}y=y'/\sin x$, b) $xy'\ln\left(y/x\right)=x+y\ln\left(y/x\right)$, c) $y'+y=e^{-x}\cos x$.

15. a) $3e^x\operatorname{tg}ydx=\left(1-e^x\right)\sec^2 ydy$, b) $\left(x^2-xy\right)dy+y^2dx=0$, c) $x^2y'+3xy=2$.

16. a) $\left(x^2-x^2y\right)y'+y^2+xy^2=0$, b) $\left(x-y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx+x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy=0$, c) $y'-\frac{1}{x}y=x\sin x$.

17. a) $\left(1+e^x\right)ydy-e^xdx=0$, b) $xdy+ydx+y^2(xdy-ydx)=0$, c) $y'+2y/x=x^3+2x$.

18. a) $y'=e^{2x}\frac{1}{\ln y}$, b) $(x-y)ydx-x^2dy=0$, c) $y'+\frac{1}{x}y=\frac{1}{x}\cos x$.

19. a) $5^{y^2-x^2}=yy'/x$, b) $(x+y)dx+(y-x)dy=0$, c) $\left(1-x^2\right)y'+xy=1$.

20. a) $x+xy+y'(y+xy)=0$, b) $(x+y)dx+(y-x)dy=0$, c) $xy'+y=\sin x$.

21. a) $\operatorname{tg}ydx-x\ln xdy=0$, b) $y'=e^{y/x}+y/x+1$, c) $y'+y=xe^{-x}$.

22. a) $e^x\sin ydx+\operatorname{tg}ydy=0$, b) $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0$, c) $xy'-2y+x^2=0$.

23. a) $y'\cos x\ln y=y$, b) $xy+y^2=\left(2x^2+xy\right)y'$, c) $y'+y=x\cdot e^{-x}$.

24. a) $\sqrt{1-x^2}dy+\sqrt{1-y^2}dx=0$, b) $xy'=y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$, c) $xy'-3y=x^2$.

25. a) $y=y'\ln y$, b) $\left(y^2-xy\right)dx+\left(x^2-2xy\right)dy=0$, c) $x^2y'=2xy+3$.

26. a) $\left(e^{3x}+1\right)dy+ye^{3x}dx=0$, b) $(2x-y)dx+(x+y)dy=0$, c) $xy'-2y=x^3+x$.

27. a) $6xdx-2ydy=2yx^2dy-3xy^2dx$, b) $(2x+y)dy-(x+2y)dx=0$, c) $\left(1+x\right)y'-y=\left(1+x\right)^2$.

28. a) $(e^x+2)y'=e^xy$, b) $(x+y)dx-xdy=0$, c) $y'+y\operatorname{tg}x=\cos x$.

29. a) $x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$, b) $2xydx+\left(x^2-y^2\right)dy=0$, c) $y'-\frac{5x^4}{1+x^5}y=1+x^5$.

30. a) $\sqrt{4+y^2}dx-\left(y+x^2y\right)dy=0$, b) $\left(4xy+x^2\right)dy-2y^2dx=0$, c) $\left(1+x^4\right)y'+4x^3y=1$.

31. a) $xy'=y-xy$, b) $y^2dx=\left(2xy+x^2\right)dy$, c) $y'-2xy=xe^{x^2}$.

32. a) $y'\sin x = y\ln y$, b) $xy' = y\left(1-\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)$, c) $y' + yctgx = \frac{1}{\sin x}$.

33. a) $yy'\frac{1}{x} + e^{-y} = 0$ b) $y' = \frac{2x+y}{2x-y}$, c) $\left(x^2+1\right)y' - xy = x^3 + x$.

34. a) $y' = 2^{x-3y}$, b) $xy' = xe^{-y/x} + y$, c) $y' - y = e^x\sqrt{y}$.

35. a) $3^{-x^2+y}dy + xdx = 0$, b) $(x^2+\sin y)dx + (2 + x\cos y)dy = 0$, c) $y' - 2xy = 1 + x^2$.

36. a) $\left(1-y^2\right)dx - \sqrt{x}dy = 0$, b) $\left(x-2y\right)dx - xdy = 0$, c) $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin 2x$.

37. a) $y' = \left(3y-2\right)ctgx$, b) $xdy - ydx = 2ydy$, c) $y' + \frac{2}{x}y = x^2 - x$.

38. a) $y'\sin^2 x = y\cos x - 3\cos x$, b) $\left(2x+y\right)dx + \left(x-y\right)dy = 0$, c) $\left(1+x^2\right)y' + xy = 1$.

39. a) $\ln\cos ydx - x\operatorname{tg} ydy = 0$, b) $y + xy' = x - yy'$, c) $y' + y = x^2e^{-x}$.

40. a) $1+\left(1+y'\right)e^{-2y} = 0$, b) $\left(x^2+2y^2\right)dx - 2xydy = 0$, c) $y' - 3y/x = x^2 + 1$.

41. a) $\left(x^2y^3 - 5x^2\right)dx + \left(y^2x^3 + 8y^2\right)dy = 0$, b) $\left(2x^2 - y^2\right)dx - 2xydy = 0$, c)
$y' - 2y/x = x^2\cos x$.

42. a) $e^{-2x+3y}dy = xdx$, b) $\left(x^2 - 2xy\right)dx + xydy = 0$, c) $y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{x}{x^2+1}$.

43. a) $y' = ctgx\operatorname{tg} y$, b) $ydy + \left(3x+2y\right)dx = 0$, c) $y' + xy = x^2$.

44. a) $cox\cdot\operatorname{tg} y = y'/\cos x$, b) $xyy' = 2x^2 + y^2$, c) $y' + y = e^{-x}\sin 2x$.

45. a) $3e^{-x}ctgydx = \left(1-e^{-x}\right)\cos ec^2 ydy$, b) $\left(y^2 - xy\right)dy + x^2dx = 0$, c) $x^2y' - 3xy = \frac{2}{x}$.

46. a) $\left(x^2 + x^2y\right)y' + y^2 - xy^2 = 0$, b) $\left(x - y\cdot\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right)dx + x\cdot sin\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$, c)
$y' - \frac{1}{x}y = x^2\sin x$.

47. a) $\left(1+e^{2x}\right)ydy - e^{2x}dx = 0$, b) $xdy - ydx + y^2\left(xdy + ydx\right) = 0$, c) $y' + 2y/x = x^2 - 3x$.

48. a) $y' = e^{-2x}\cdot\frac{1}{\ln y}$, b) $\left(x+y\right)ydx - x^2dy = 0$, c) $y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^2}\sin x$.

49. a) $3^{y^2+x^2} = yy'/x$, b) $\left(x-y\right)dx + \left(y+x\right)dy = 0$, c) $\left(1+x^2\right)y' + 2xy = 1$.

50. a) $x - xy + y'\left(y - xy\right) = 0$, b) $\left(2x+y\right)dx + \left(y-2x\right)dy = 0$, c) $xy' + y = \cos x$.

Exemplu rezolvat

Să se afle soluțiile sau integralele generale ale următoarelor ecuațiilor diferențiale rezolvabile în cuadraturi:

a) $\left(xy^2 + x\right)ydx + \left(y - x^2y\right)dy = 0$, b) $y' = \frac{y-x}{x+y}$, c) $y' + y = \frac{e^{-x}}{1-x}$, $y\left(0\right) = \ln 5$.

<u>Rezolvare:</u> a) Transformăm ecuația dată: $y\left(1-x^2\right)dy = -x\left(y^2+1\right)dx$.

Această ecuație este cu variabile separabile. Separăm variabilele: $\frac{y}{y^2+1}dy = -\frac{x}{1-x^2}dx$.

Integrăm ambele părți ale ultimei ecuații:

$$\int \frac{y}{y^2+1}dy = -\int \frac{x}{1-x^2}dx,\ \frac{1}{2}\ln\left|y^2+1\right| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + \frac{1}{2}\ln|C|,\ y^2+1 = C\left(x^2-1\right),$$
$$y^2 = C\left(x^2-1\right)-1.$$

Deci soluția generală a ecuației inițiale este $y = \pm\sqrt{C\left(x^2-1\right)-1}$.

b) Această ecuație este o ecuație omogenă de gradul întâi. Vom rezolva cu ajutorul substituției $y = xu(x)$. În continuare găsim:

$$y' = u'x + u,\ u'x + u = \frac{ux - x}{x + ux},\ u'x + u = \frac{u-1}{1+u},\ u'x = \frac{u-1}{1+u} - u,\ x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2+1}{1+u}.$$

S-a obținut o ecuație cu variabile separabile. O rezolvam:

$$\frac{u+1}{u^2+1}du = -\frac{dx}{x},\qquad \int \frac{u+1}{u^2+1}du = -\int \frac{dx}{x},\qquad \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}du + \int \frac{du}{u^2+1} = -\ln|x| + \ln|C|,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|u^2+1\right| + arctgu = \ln\left|\frac{C}{x}\right|,\ arctgu = \ln\left|\frac{C}{x\sqrt{u^2+1}}\right|,\quad arctg\frac{y}{x} = \ln\frac{|C|}{\sqrt{y^2+x^2}}.$$

c) Această ecuație este o ecuație liniară de gradul întâi. Vom rezolva cu ajutorul substituției $y = u(x)v(x)$. Avem:

$$y' = u'v + uv',\ u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1-x},\quad u'v + u\left(v'+v\right) = \frac{e^{-x}}{1-x}. \qquad (1)$$

Găsim funcția $v(x)$ din condiția $v' + v = 0$:

$$\frac{dv}{dx} = -v,\ \frac{dv}{v} = -dx,\ \int \frac{dv}{v} = -\int dx,\ \ln|v| = -x,\ v = e^{-x}.$$

Înlocuim expresia obținută pentru $v(x)$ în ecuația (1):

$$u'e^{-x} = \frac{e^{-x}}{1-x},\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-x},\ du = \frac{dx}{1-x},\ \int du = \int \frac{dx}{1-x},\ u = -\ln|1-x| + \ln|C|,\ u = \ln\left|\frac{C}{1-x}\right|.$$

Atunci $y = e^{-x}\ln\left|\frac{C}{1-x}\right|$

reprezintă soluția generală a ecuației inițiale. Găsim C folosind condiția inițială: $y(0) = \ln C = \ln 5,\ C = 5$.

Deci soluția particulară a ecuației inițiale este $y = e^{-x}\ln\frac{5}{|1-x|}$.

Problema 2. Să se integreze următoarea ecuație.

1. $\left(1-x^2\right)y'' - xy = 2$. **2.** $2xy'y'' = y'^2 - 1$. **3.** $x^3y'' + x^2y' = 1$. **4.** $y'' + y'tgx = \sin 2x$.

5. $y''x\ln x = y'$. **6.** $xy'' - y' = x^2e^x$. **7.** $y''x\ln x = 2y'$. **8.** $x^2y'' + xy' = 1$.

9. $y'' = -x/y$. **10.** $xy'' = y'$. **11.** $y'' = y' + x$. **12.** $xy'' = y' + x^2$.

13. $xy'' = y'\ln\left(y'/x\right)$. **14.** $xy'' + y' = \ln x$. **15.** $y''tgx = y' + 1$. **16.** $y'' + 2xy'^2 = 0$.

17. $2xy'y'' = y'^2 + 1$. **18.** $y'' + 4y' = 2x^2$. **19.** $y'' - 2y'ctgx = \sin^3 x$. **20.** $x^2y'' = y'^2$.

21. $xy'' - y' = 2x^2e^x$. **22.** $y'' + 4y' = \cos 2x$. **23.** $y'' + y' = \sin x$. **24.** $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$.

25. $2xy''y' = y'^2 - 4$. **26.** $y'''x\ln x = y''$. **27.** $y''ctgx + y' = 2$. **28.** $\left(1+x^2\right)y'' = 2xy$.

29. $y'' = y'e^y$. **30.** $y'^2 + 2yy'' = 0$. **31.** $y''tgy = 2y'^2$. **32.** $yy'' - y'^2 = y^4$.

33. $y''=-1/\left(2y^3\right)$. **34.** $yy''+y'^2=0$. **35.** $y''=1-y'^2$. **36.** $y''=2-y$.
37. $y''=1/y^3$. **38.** $yy''-2y'^2=0$. **39.** $y''=y'+y'^2$. **40.** $y''(1+y)=5y'^2$.
41. $1+y'^2=yy'$. **42.** $4y''^2=1+y'^2$. **43.** $y''(2y+3)-2y'^2=0$. **44.** $2y'^2=(y-1)y''$.
45. $yy''-y'^2=y^2\ln y$. **46.** $y^3y'y''+1=0$ **47.** $2y'^2=(y-1)y''$. **48.** $xy''=y'+x^2$.
49. $x(y''+1)+y'=0$. **50.** $y''ctgx+y'=2$.

Exemplu rezolvat

Să se integreze următoarea ecuație $(x-3)y''+y'=0$.

Rezolvare: După substituția $y'=p$, $y''=\dfrac{dp}{dx}$, ecuația data se transformă într-o ecuație de ordinul I: $(x-3)\dfrac{dp}{dx}+p=0$. Separând variabilele și integrand, avem:

$\dfrac{dp}{p}+\dfrac{dx}{x-3}=0$; $\ln|p|+\ln|x-3|=\ln|C|,\ C\neq 0$; $|p(x-3)|=|C|$; $p(x-3)=\pm C=C_1,\ C_1\in R$.

Înlocuind p prin $\dfrac{dy}{dx}$, obținem $(x-3)\dfrac{dy}{dx}=C_1$ și după integrarea ei găsim:

$dy=\dfrac{C_1dx}{x-3}$; $y=C_1\ln|x-3|+C_2$.

Problema 3. Să se afle sistemul fundamental de soluții și soluția generală ale următoarelor ecuații diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți.

1. a) $y''+2y'-3y=0$, b) $y''+9y'=0$, c) $4y''+4y'+y=0$.
2. a) $y''+2y'+y=0$, b) $y''-4y=0$, c) $y''+18y'=0$.
3. a) $y''+8y'+16y=0$, b) $y''+25y'=0$, c) $y''+16y=0$.
4. a) $y''-4y'+8y=0$, b) $y''-y=0$, c) $y''+16y'+64y=0$.
5. a) $y''-5y'+6y=0$, b) $y''+2y=0$, c) $4y''+12y'+9y=0$.
6. a) $y''+4y'+5y=0$, b) $y''+y'=0$, c) $y''+20y'+100y=0$.
7. a) $y''+10y'+25y=0$, b) $y''-3y'=0$, c) $y''+9y=0$.
8. a) $y''-9y'=0$, b) $y''+12y'+37y=0$, c) $y''+2y'+y=0$.
9. a) $y''-y'-6y=0$, b) $y''+16y=0$, c) $y''-14y'+49y=0$.
10. a) $y''+10y=0$, b) $y''+8y'+25y=0$, c) $y''+12y'+36y=0$.
11. a) $y''-3y'-4y=0$, b) $y''+7y=0$, c) $y''-16y'+64y=0$.
12. a) $y''-8y'+17y=0$, b) $y''-4y'=0$, c) $y''+10y'+25y=0$.
13. a) $y''-25y'=0$, b) $y''+6y'+25y=0$, c) $y''+8y'+16y=0$.
14. a) $y''-16y'+64y=0$, b) $y''+3y'=0$, c) $y''+4y=0$.
15. a) $y''+4y'+13y=0$, b) $y''-7y=0$, c) $4y''-4y'+y=0$.
16. a) $y''+12y'+36y=0$, b) $y''+5y'=0$, c) $y''-4y'+8y=0$.
17. a) $y''-14y'+49y=0$, b) $y''-16y=0$, c) $y''+12y=0$.
18. a) $y''+4y=0$, b) $y''-10y'+16y=0$, c) $y''-16y'+64y=0$.
19. a) $y''+8y'+12y=0$, b) $y''+7y=0$, c) $4y''-12y'+9y=0$.
20. a) $y''-6y'+8y=0$, b) $y''-y'=0$, c) $y''-20y'+100y=0$.
21. a) $y''-y'-y=0$, b) $y''+y=0$, c) $y''-2y'+y=0$.
22. a) $y''-4y'+5y=0$, b) $y''-25y'=0$, c) $y''+14y'+49y=0$.

23. a) $y''-4y'+13y=0$, b)) $y''-y'/4=0$, c) $y''+12y'+36y=0$.
24. a) $y''+2y'+y=0$, b) $y''-100y=0$, c) $y''-8y'+17y=0$.
25. a) $y''+16y=0$, b) $y''-4y'+13y=0$, c) $y''-10y'+25y=0$.
26. a) $y''+20y'+100y=0$, b) $y''+y=0$, c) $y''-y'-6y=0$.
27. a) $y''+3y'+9y/4=0$, b) $y''+18y'=0$, c) $y''-4y'+13y=0$.
28. a) $y''+2y'+y=0$, b) $y''-2y'+5y=0$, c) $y''-25y'=0$.
29. a) $y''+7y=0$, b) $y''+16y'+64y=0$, c) $y''+8y'+12y=0$.
30. a) $y''+y'+y/4=0$, b) $y''+9y=0$, c) $y''+8y'+25y=0$.
31. a) $y''+3y'-4y=0$, b) $y''+8y'=0$, c) $9y''-6y'+y=0$.
32. a) $y''-2y'+y=0$, b) $y''-9y=0$, c) $y''+12y'=0$.
33. a) $y''-8y'+16y=0$, b) $y''-25y'=0$, c) $y''+49y=0$.
34. a) $25y''-10y'+y=0$, b) $y''-7y=0$, c) $y''+6y'+18y=0$.
35. a) $y''-8y'+7y=0$, b) $y''+5y=0$, c) $4y''-12y'+9y=0$.
36. a) $y''+5y'+4y=0$, b) $3y''+y'=0$, c) $y''-20y'+100y=0$.
37. a) $y''+24y'+144y=0$, b) $2y''+3y'=0$, c) $y''+36y=0$.
38. a) $y''-14y'=0$, b) $y''-12y'+37y=0$, c) $3y''+2\sqrt{3}y'+y=0$.
39. a) $y''-y'-12y=0$, b) $9y''+16y=0$, c) $y''+14y'+49y=0$.
40. a) $2y''+10y=0$, b) $y''-8y'+25y=0$, c) $y''-12y'+36y=0$.
41. a) $y''-5y'-6y=0$, b) $y''+2y=0$, c) $y''+22y'+121y=0$.
42. a) $y''+8y'+17y=0$, b) $3y''+4y'=0$, c) $49y''+14y'+y=0$.
43. a) $y''+15y'=0$, b) $y''-8y'+25y=0$, c) $2y''+2\sqrt{2}y'+y=0$.
44. a) $y''+16y'+64y=0$, b) $5y''+3y'=0$, c) $y''+4y'+5y=0$.
45. a) $y''-4y'+13y=0$, b) $y''+7y=0$, c) $5y''-2\sqrt{5}y'+y=0$.
46. a) $y''-12y'+36y=0$, b) $2y''-5y'=0$, c) $y''+4y'+8y=0$.
47. a) $7y''-2\sqrt{7}y'+y=0$, b) $y''+16y=0$, c) $y''+7y'-8y=0$.
48. a) $y''+20y=0$, b) $y''-10y'-11y=0$, c) $8y''-4\sqrt{2}y'+y=0$.
49. a) $y''-8y'+12y=0$, b) $y''+18y=0$, c) $16y''-40y'+25y=0$.
50. a) $y''+6y'+8y=0$, b) $7y''-2y'=0$, c) $y''+20y'+100y=0$.

Exemplu rezolvat

Să se afle sistemul fundamental de soluții și soluția generală ale următoarelor ecuații diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți.
a) $4y''-11y'+6y=0$, b) $4y''+4y'+y=0$, c) $y''-2y'+37y=0$.

Rezolvare: a) Scriem ecuația caracteristică și o rezolvam.
$4\lambda^2-11\lambda+6=0$, rădăcinile $\lambda_1=3/4,\ \lambda_2=2$ - reale, distincte, deci soluția generală a ecuației este $y=C_1e^{-\frac{3}{4}x}+C_2e^{2x}$;

b) Scriem ecuația caracteristică și o rezolvam.
$4\lambda^2+4\lambda+1=0$, rădăcinile $\lambda_1=\lambda_2=-2$ - reale, ce coincid, deci soluția generală a ecuației este

$$y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x};$$

c) Scriem ecuația caracteristică și o rezolvam.
$\lambda^2-2\lambda+37=0$, rădăcinile $\lambda_{1,2}=1\pm 6i$ - complexe, conjugate, deci soluția generală a ecuației este $y=e^x\left(C_1\cos 6x+C_2\sin 6x\right)$.

Problema 4. Să se integreze ecuația liniară neomogenă cu coeficienți constanți.

1. $y''+y'=2x-1$. **2.** $y''-12y'+36y=14e^{6x}$.
3. $y''-3y'+2y=(34-12x)e^{-x}$. **4.** $y''-6y'+10y=51e^{-x}$.
5. $y''+6y'+10y=74e^{3x}$. **6.** $y''+6y'+9y=(48x+8)e^{x}$.
7. $y''+5y'=72e^{2x}$. **8.** $y''+8y'+25y=18e^{5x}$.
9. $y''-9y'+20y=126e^{-2x}$. **10.** $y''-9y'+20y=36+66x-36x^3$.
11. $y''+6y'+13y=-7x$. **12.** $y''-4y'+29y=10x+1$.
13. $y''+9y=9x^4+12x^2-27$. **14.** $y''-12y'+40y=2e^{6x}$.
15. $y''+2y'+y=6e^{-x}$. **16.** $y''+2y'+37y=37x^2-33x+74$.
17. $6y''-y'-y=3e^{2x}$. **18.** $2y''+7y'+3y=2x^2+1$.
19. $y''-8y'+17y=10e^{2x}$. **20.** $y''+y'-6y=(6x+1)e^{3x}$.
21. $y''-7y'+12y=3e^{4x}$. **22.** $y''-2y'=6+12x-24x^2$.
23. $y''-2y'=(4x+4)e^{2x}$. **24.** $y''-4y'=8-16x$.
25. $y''-2y'+y=4e^{x}$. **26.** $y''+4y'+4y=6e^{-2x}$.
27. $y''+3y'=10-6x$. **28.** $y''+4y'+5y=5x^2-32x+5$.
29. $y''+16y=80e^{2x}$. **30.** $y''+6y'+9y=72e^{3x}$.
31. $y''-y'=x^2-4x+1$. **32.** $y''+12y'+36y=3e^{-6x}$.
33. $y''+3y'+2y=(3-x)e^{-x}$. **34.** $y''-6y'+10y=51e^{-x}$.
35. $y''+6y'+10y=(3x+5)e^{2x}$. **36.** $y''+6y'+9y=(48x+8)e^{x}$.
37. $y''-2y'=7e^{-2x}$. **38.** $y''-8y'+25y=8e^{-3x}$.
39. $y''-9y'+20y=(2-2x)e^{-x}$. **40.** $y''-4y'+3y=1+6x-3x^3$.
41. $y''+6y'+13y=7\cos 2x$. **42.** $y''-4y'+29y=(10x+1)e^{3x}$.
43. $y''+4y=x^3-15x^2+4x-27$. **44.** $y''+12y'+40y=3e^{-5x}$.
45. $y''-2y'+y=(2-5x)e^{x}$. **46.** $y''-2y'+37y=7x^2-13x$.
47. $6y''+y'-y=5e^{4x}$. **48.** $2y''-7y'+3y=-x^2+3x+7$.
49. $y''+8y'+17y=(2-10x)e^{-2x}$. **50.** $y''-y'-6y=(2x-3)e^{3x}$.

Exemplu model

Să se integreze ecuația liniară neomogenă cu coeficienți constanți $y''-3y'-4y=6xe^{-x}$.

Rezolvare: Ecuația caracteristică $\lambda^2-3\lambda-4=0$ are rădăcinile $\lambda_1=4,\ \lambda_2=-1$. Deci soluția generală a ecuației omogene este $\bar{y}=C_1e^{4x}+C_2e^{-x}$.

După funcția $f(x)=6xe^{-x}$ din partea dreaptă a ecuației, găsim soluția particulară neomogenă sub forma $y^*=(Ax+B)xe^{-x}=\left(Ax^2+Bx\right)e^{-x}$. Pentru aflarea coeficienților *A* și *B*, aflăm:

$$y^{*\prime}=(2Ax+B)e^{-x}-\left(Ax^2+Bx\right)e^{-x}=\left(-Ax^2+2Ax-Bx+B\right)e^{-x},$$

$$y^{*\prime\prime}=(-2Ax+2A-B)e^{-x}-\left(-Ax^2+2Ax-Bx+B\right)e^{-x}=\left(Ax^2-4Ax+Bx+2A-2B\right)e^{-x}$$

Înlocuim expresiile obținute $y^{*\prime}$ și $y^{*\prime\prime}$ în ecuația inițială și împărțind ambele părți la e^{-x}, obținem:

$$Ax^2-4Ax+Bx+2A-2B-3\left(-Ax^2+2Ax-Bx+B\right)-4\left(Ax^2+Bx\right)=6x$$

Obținem sistemul: $\begin{cases} -10A = 6 \\ 2A - 5B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{3}{5} \\ B = -\dfrac{6}{25} \end{cases}$.

Deci $y^* = \left(-\frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{25}x\right)e^{-x}$ și soluția generală neomogenă este

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x} + \left(-\frac{3}{5}x^2 - \frac{6}{25}x\right)e^{-x}.$$