Résolution de Polynômes du Troisième Degré

par Karl-Stephan BACZKOWSKI

Introduction :

Cet exercice propose une approche graduelle et détaillée pour la résolution de polynômes du troisième degré à coefficients réels : $ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Les équations cubiques sont connues des Grecs, Chinois, Egyptiens et Babyloniens depuis l'antiquité. Mais ça n'est qu'au XVI$^{\text{ème}}$ siècle que les mathématiciens italiens **del Ferro**, **Tartaglia**, **Cardano** et **Bombelli** parviennent successivement à fournir des solutions formelles au problème. C'est notamment à cette occasion que furent introduits les nombres complexes en mathématique.
La démarche abordée ici permet de redécouvrir la méthode de Tartaglia-Cardano en se ramenant à une forme simplifiée d'équation : $x^3 + px + q = 0$.

N.B : Le discriminant d'une équation cubique peut avoir une définition différente selon les ouvrages (formes fractionnée ou complète, signes opposés…). Ici sera préférée une expression plus esthétique rendant le calcul des solutions plus facile.

Sources :

- https://www.youtube.com/watch?v=N-KXStupwsc
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Équation_cubique
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_Cardan
- https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation

Prérequis :

- Etude graphique et analytique des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- Formule du binôme de Newton
- Notions de trigonométrie (fonctions trigonométriques et réciproques)
- Opérations algébriques sur $\mathbb{R}$ (puissances fractionnaires, quantités conjuguées)
- Opérations algébriques sur $\mathbb{C}$ (forme trigonométrique, racines n$^{\text{ième}}$ complexes)
- Résolution analytique de trinômes du 2$^{\text{nd}}$ degré dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

Intitulé :

On considère l'équation linéaire du troisième degré définie sur $\mathbb{C}$:

$$(E) : ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad \text{où } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3$$

<u>Remarque</u> : On peut simplifier cette équation en posant :

$$(E) : x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad \text{avec } A = \frac{b}{a}, B = \frac{c}{a}, C = \frac{d}{a}$$

A) Etude analytique d'une fonction polynomiale de degré 3

Soit la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. En déduire l'abscisse x_P du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
Autrement dit, trouver le réel x_P tel que $f''(x_P) = 0$.

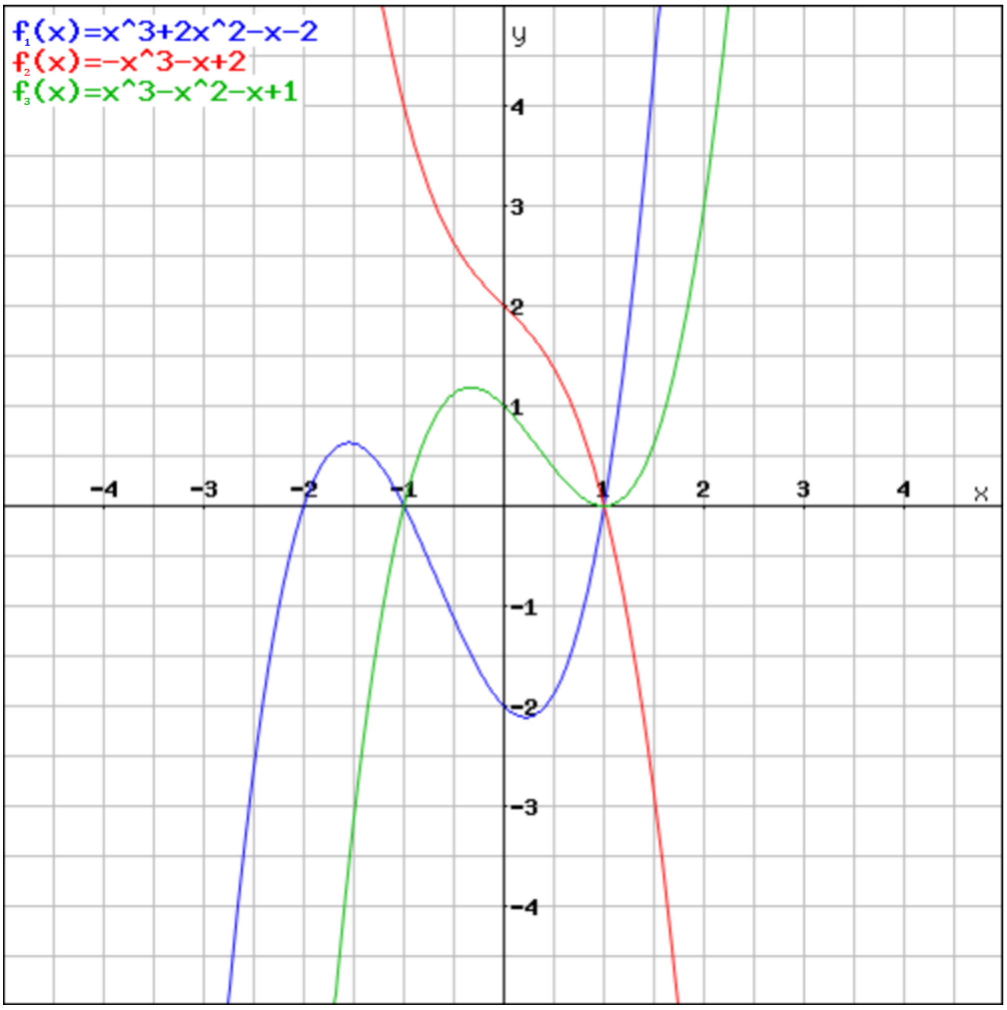
Etant une fonction polynôme, f est dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad \text{et} \qquad f''(x) = 6ax + 2b$$

Point d'inflexion : $f''(x_P) = 0 \Leftrightarrow 6ax_P + 2b = 0 \Leftrightarrow x_P = \frac{-b}{3a}$

2) Soient les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$ telles que : $\begin{cases} f_1(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \\ f_2(x) = -x^3 - x + 2 \\ f_3(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \end{cases}$

Représenter graphiquement f_1, f_2, f_3 et commenter leur nombre de racines.



On estime graphiquement que les fonction f_1, f_2, f_3 admettent chacune respectivement 3, 2 et 1 racines distinctes.

Par soucis de simplification, on décide de noter $X = x + \frac{b}{3a}$

3) Montrer que l'équation simplifiée $(E) : x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$

peut s'écrire sous la forme $(E^*) : X^3 + pX + q = 0$

en précisant l'expression de p et q en fonction de a, b, c, d.

Rappel sur la formule du binôme de Newton : $(x+k)^3 = x^3 + 3kx^2 + 3k^2x + k^3$.

On peut décider de partir de (E) pour retrouver (E^*), ou inversement.

$$(E) \Leftrightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0 \Leftrightarrow \left(X - \frac{b}{3a}\right)^3 + \frac{b}{a}\left(X - \frac{b}{3a}\right)^2 + \frac{c}{a}\left(X - \frac{b}{3a}\right) + \frac{d}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 - \frac{b}{a}X^2 + \frac{b^2}{3a^2}X - \frac{b^3}{27a^3} + \frac{b}{a}X^2 - \frac{2b^2}{3a^2}X + \frac{b^3}{9a^3} + \frac{c}{a}X - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}\right)X + \left(\frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow X^3 + pX + q = 0 \Leftrightarrow (E^*) \qquad \text{en posant : } p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \text{ et } q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}$$

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = x^3 + px + q$
On note $\mathcal{C}_\varphi$ la courbe représentative de φ.

4) *a.* Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.

La fonction polynomiale φ est dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = 3x^2 + p \qquad \text{et} \qquad \varphi''(x) = 6x$$

***b.* Donner les coordonnées (x_P, y_P) du point d'inflexion P de la courbe $\mathcal{C}_\varphi$.**

Résoudre : $\varphi''^{(x_P)} = 0 \Leftrightarrow 6x_P = 0 \Leftrightarrow x_P = 0$ et on a : $\varphi(x_P) = \varphi(0) = q$

La courbe $\mathcal{C}_\varphi$ admet un seul point d'inflexion en $P(0, q)$.

***c.* Donner la pente de la tangente à $\mathcal{C}_\varphi$ au point $P(x_P, y_P)$.**

C'est la dérivée de φ en x_P : $\varphi'(x_P) = \varphi'(0) = p$

***d.* Monter que la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ est symétrique par rapport à P.**

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, les points $M\big(x_P - x, \varphi(x_P - x)\big)$ et $N\big(x_P + x, \varphi(x_P + x)\big)$ de la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ forment un segment dont le milieu est P.

Comme $x_P = 0$, on a $M(-x, -x^3 - px + q)$ et $N(x, x^3 + px + q)$.

$\frac{x_M + x_N}{2} = \frac{-x+x}{2} = 0 = x_P$ et $\frac{y_M + y_N}{2} = \frac{q+q}{2} = q = y_P$ P est bien le milieu de $[MN]$.

5) *a.* Déterminer les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction φ

On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R} : \varphi'(x) = 3x^2 + p$

On va distinguer les cas où $p > 0$, $p = 0$ et $p < 0$.

Si $p > 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) > 0$ $\quad\rightarrow \varphi$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $p = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^*, \varphi'(x) > 0$ et $\varphi'(0) = 0$ $\quad\rightarrow \varphi$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Si $p < 0$, alors $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + p > 0 \Leftrightarrow x^2 > \frac{-p}{3} \Leftrightarrow x < -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ ou $x > \sqrt{\frac{-p}{3}}$

$\rightarrow \varphi$ est strictement croissante sur $\left]-\infty, -\sqrt{\frac{-p}{3}}\right]$, strictement décroissante sur $\left[-\sqrt{\frac{-p}{3}}, \sqrt{\frac{-p}{3}}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\sqrt{\frac{-p}{3}}, +\infty\right[$.

Si $p \geq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$		$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	q	$\nearrow$	$+\infty$

Si $p < 0$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{-p}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{-p}{3}}$		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$			$-$			$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(x_1)$	$\searrow$	q	$\searrow$	$\varphi(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

b. **Si $p \geq 0$, combien de racines réelles la fonction φ admet-elle ?**

La fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
D'après le théorème de la bijection, elle admet strictement une racine.

c. **Si $p < 0$, montrer que φ admet un maximum local et un minimum local, respectivement en x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$ (préciser l'expression de x_1 et x_2).**
Calculer $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$.

On pose $x_1 = -\sqrt{\frac{-p}{3}}$ et $x_2 = \sqrt{\frac{-p}{3}}$. D'après les variations de φ sur $\mathbb{R}$, on en déduit que φ admet un maximum local en x_1 et un minimum local en x_2

$$\varphi(x_1) = \left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) + q \qquad \varphi(x_2) = \left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\sqrt{\frac{-p}{3}} + q$$

$$\varphi(x_1) = -\left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} - p\left(\frac{-p}{3}\right)^{1/2} + q \qquad \varphi(x_2) = \left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} + p\left(\frac{-p}{3}\right)^{1/2} + q$$

$$\varphi(x_1) = \left(\frac{p}{3} - p\right)\left(\frac{-p}{3}\right)^{1/2} + q \qquad \varphi(x_2) = \left(\frac{-p}{3} + p\right)\left(\frac{-p}{3}\right)^{1/2} + q$$

$$\varphi(x_1) = \frac{-2p}{3}\left(\frac{-p}{3}\right)^{1/2} + q \qquad \varphi(x_2) = \frac{2p}{3}\left(\frac{-p}{3}\right)^{1/2} + q$$

$$\varphi(x_1) = 2\left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} + q \qquad \varphi(x_2) = -2\left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} + q$$

Supposons un instant que $p < 0$.

6) *a.* **Si $q < 0$, quel est le signe de $\varphi(x_2)$?**
Déterminer une condition sur p et q sous laquelle $\varphi(x_1) > 0$.

Si $q < 0$, comme on a $\left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} > 0$, alors $\varphi(x_2) < 0$

$\varphi(x_1) > 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} > -q \Leftrightarrow \left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} > \frac{-q}{2} > 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{-p}{3}\right)^{3} > \left(\frac{-q}{2}\right)^{2}$ car $x \longmapsto x^2$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\Leftrightarrow -\left(\frac{p}{3}\right)^{3} > \left(\frac{q}{2}\right)^{2} \Leftrightarrow \left(\frac{q}{2}\right)^{2} + \left(\frac{p}{3}\right)^{3} < 0$

b. **Si $q > 0$, quel est le signe de $\varphi(x_1)$?**
Déterminer une condition sur p et q sous laquelle $\varphi(x_2) < 0$.

Si $q > 0$, comme on a $\left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} > 0$, alors $\varphi(x_1) > 0$

$\varphi(x_2) < 0 \Leftrightarrow q < 2\left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} \Leftrightarrow \left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} > \frac{q}{2} > 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{-p}{3}\right)^{3} > \left(\frac{q}{2}\right)^{2}$ car $x \longmapsto x^2$ strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\Leftrightarrow -\left(\frac{p}{3}\right)^{3} > \left(\frac{q}{2}\right)^{2} \Leftrightarrow \left(\frac{q}{2}\right)^{2} + \left(\frac{p}{3}\right)^{3} < 0$

c. **A l'aide des variations de φ sur $\mathbb{R}$, conclure sur le nombre de solutions réelles de l'équation $(E^*) : x^3 + px + q = 0$, en fonction du signe de la quantité $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$.**

Lorsque $p < 0$, on peut déduire des variations de φ sur $\mathbb{R}$:

- si $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$ ont le même signe, alors φ n'admet qu' 1 seule racine
- si $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$ ont des signes opposés, alors φ admet 3 racines distinctes
- si $\varphi(x_1)$ ou $\varphi(x_2)$ est nul, alors φ admet 2 racines distinctes

Lorsque $p \geq 0$, on rappelle que φ admet strictement 1 seule racine.
Remarque : la quantité Δ est alors positive ou nulle.

Finalement, avec les réponses 6*a* et 6*b*, on peut conclure que :

- si $\Delta < 0$, (E^*) admet 3 solutions réelles distinctes
- si $\Delta > 0$, (E^*) admet 1 seule solution réelle
- si $\Delta = 0$, (E^*) admet 2 solutions réelles distinctes si $p \neq 0$ et $q \neq 0$,
  mais seulement 1 seule solution si $p = q = 0$

Dans la suite de l'exercice, on nommera « discriminant » la quantité $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

B) Formule de Tartaglia-Cardano

Considérons l'équation (E^*) définie sur $\mathbb{C}$:

$$(E^*) : \ x^3 + px + q = 0 \qquad \text{avec } (p,q) \in \mathbb{R}^2$$

On souhaite définir deux complexes u et v tels que $x = u + v$ et que l'on puisse injecter dans (E^*) en utilisant la propriété suivante :

$$(\mathcal{H}) : (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0$$

Ainsi, résoudre (E^*) sur $\mathbb{C}$ revient donc à résoudre le système double : $(\mathcal{S}) : \begin{cases} 3uv = -p & (1) \\ u^3 + v^3 = -q & (2) \end{cases}$

Cas réel : Supposons dans un premier temps que $\Delta > 0$.

7) Par rôle symétrique de u et v, montrer que l'on peut écrire :

$$u^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{et} \qquad v^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Aide : Écrire une équation de second degré à partit du système $(\mathcal{S})$.

On rappelle que les racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont solutions du système $\begin{cases} z_1.z_2 = \frac{c}{a} \\ z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \end{cases}$

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} 3uv = -p \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 = -q \end{cases}$$

Donc u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré $(\mathcal{E}) : \ z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$

Son discriminant $\delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3 = 4 \times \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = 4\Delta$ est strictement positif.

On en déduit que $(\mathcal{E})$ admet 2 solutions réelles de la forme :

$$\frac{-q \pm \sqrt{\delta}}{2} = \frac{-q \pm 2\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

8) *a.* Déterminer u_0 la racine cubique réelle de u^3, ainsi que la racine réelle v_0 associée.

Instinctivement, on peut proposer les valeurs ci-dessous et s'assurer qu'elles vérifient (1) et (2).

$$u_0 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad \text{et} \qquad v_0 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$(1) : 3u_0v_0 = 3\sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)\left(\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)} \qquad \text{or } (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$= 3\sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]} = 3\sqrt[3]{\left(\frac{-p}{3}\right)^3} = 3\,\frac{-p}{3} = -p \qquad (2) : \text{trivial}$$

***b.* En déduire la solution réelle de l'équation (E^*)**

$$x = u_0 + v_0 = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Remarque : On sait d'après 6*c* que c'est l'unique solution réelle.

***c.* En déduire la solution réelle de l'équation (E) lorsque la quantité suivante $D = 4 \times 27 \times a^4 \times \Delta = 27a^4d^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2$ est positive.**

On a montré en 3) que si x est solution de (E^*), alors $x - \frac{b}{3a}$ est solution de (E).

Il suffit d'exprimer p et q en fonction de a, b, c, d dans la formule 8*b* et soustraire $\frac{b}{3a}$:

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{d}{2a} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) + \sqrt{\left(-\frac{d}{2a} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$
$$+ \sqrt[3]{\left(-\frac{d}{2a} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) - \sqrt{\left(-\frac{d}{2a} + \frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}} - \frac{b}{3a}$$

Cas complexe :
- lorsque $\Delta > 0$

9) *a.* Déterminer sous forme trigonométrique (c'est-à-dire $z = re^{i\theta}$) les racines complexes u_k pour $u_k{}^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ ainsi que les racines complexes associées v_k.

On notera j le complexe défini tel que : $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ du coup : $\frac{1}{j} = \bar{j} = j^2 = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$

- si $p = 0$, alors $u^3 = \frac{-q}{2} + \left|\frac{q}{2}\right|$ et $v^3 = \frac{-q}{2} - \left|\frac{q}{2}\right|$. Selon le signe de q, l'une est nulle et l'autre vaut $-q$.

La première n'a pour racine complexe que 0. La deuxième possèdent 3 racines cubiques de la forme :

$$\sqrt[3]{-q}.e^{\frac{2ik\pi}{3}} = \sqrt[3]{-q}.j^k \qquad \text{avec } k \in \{0,1,2\}$$

- si $p \neq 0$, les racines cubiques de u^3 sont les complexes de la forme :

$$u_k = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.e^{\frac{2ik\pi}{3}} = u_0.j^k \qquad \text{avec } k \in \{0,1,2\}$$

On en déduit, par la relation (1), les valeurs associées v_k :

$$v_k = \frac{-p}{3u_k} = \frac{-p}{3u_0}.j^{-k} = v_0.\overline{j^k} \qquad \text{avec } k \in \{0,1,2\}$$

$$v_k = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.e^{\frac{-2ik\pi}{3}} \qquad \text{avec } k \in \{0,1,2\}$$

b. **Montrer alors que (E^*) admet 2 solutions complexes qui sont conjuguées l'une de l'autre.**

$\underline{k=0}$: $u_0+v_0=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{-q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ est la solution réelle de (E^*).

$\underline{k=1}$: $u_1+v_1=u_0.j+v_0.\bar{j}=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)u_0+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)v_0$

$=-\frac{1}{2}(u_0+v_0)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0-v_0)$ est complexe car $u_0\neq v_0$ (puisque $\Delta\neq 0$).

$\underline{k=2}$: $u_2+v_2=u_0.j^2+v_0.\overline{j^2}=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)u_0+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)v_0$

$=-\frac{1}{2}(u_0+v_0)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(u_0-v_0)$ est complexe car $u_0\neq v_0$ (puisque $\Delta\neq 0$).

Les solutions (u_1+v_1) et (u_2+v_2) sont bien complexes conjuguées l'une de l'autre.

- lorsque $\Delta=0$

10) *a.* Dans le cas où $p=q=0$, déterminer simplement l'unique solution triple de (E^*)

(E^*) : $x^3=0$ admet uniquement 0 comme solution.

b. **Dans le cas contraire (p et q sont tous deux non nuls), montrer que (E^*) admet une solution réelle simple et une solution réelle double, en donnant leur expression.**

$u^3=v^3=\frac{-q}{2}$ admettent des racines cubiques associées de la forme :

$$u_k=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}j^k \text{ et } v_k=\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}\overline{j^k} \qquad \text{avec } k\in\{0,1,2\}$$

$\underline{\text{Remarque}}$: $\Delta=0\Leftrightarrow-\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(\frac{q}{2}\right)^2\Leftrightarrow-1=\left(\frac{q}{2}\right)^2/\left(\frac{p}{3}\right)^3\Leftrightarrow\frac{-q}{2}=\left(\frac{q}{2}\right)^3/\left(\frac{p}{3}\right)^3=\left(\frac{3q}{2p}\right)^3$

$\underline{k=0}$: $u_0+v_0=2u_0=2.\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}=\frac{3q}{p}$ est solution réelle.

$\underline{k=1}$: $u_1+v_1=u_0.j+v_0.\bar{j}=(j+\bar{j})u_0=-u_0=-\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}=\frac{-3q}{2p}$ est solution réelle.

$\underline{k=2}$: $u_2+v_2=u_0.j^2+v_0.\overline{j^2}=(\bar{j}+j)u_0=u_1+v_1$

(E^*) admet bien un solution réelle simple $\frac{3q}{p}$ et une solution réelle double $\frac{-3q}{2p}$.

- lorsque $\Delta<0$

11) *a.* Que peut-on dire du signe de p ?

$\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3<0\Leftrightarrow\left(\frac{p}{3}\right)^3<-\left(\frac{q}{2}\right)^2<0\Leftrightarrow\frac{p}{3}<0$ car $x\longmapsto x^3$ croissante sur $\mathbb{R}$. D'où $p<0$

b. **Par rôle symétrique de u et v, montrer que l'on peut écrire :**

$$u^3=\frac{-q}{2}+i\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{et} \qquad v^3=\frac{-q}{2}-i\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du second degré $(\mathcal{E})$: $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$

Son discriminant $\delta = q^2 + \frac{4}{27}p^3 = 4 \times \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right) = 4\Delta$ est strictement négatif.

On en déduit que $(\mathcal{E})$ admet 2 solutions complexes de la forme :

$$\frac{-q \pm i\sqrt{-\delta}}{2} = \frac{-q \pm 2i\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{-q}{2} \pm i\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

12) *a.* Déterminer module $|u^3|$ et argument principal θ du complexe u^3.

$$|u^3| = \sqrt{\left(\frac{-q}{2}\right)^2 + \left[-\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3\right]} = \sqrt{\left(\frac{-p}{3}\right)^3} = \left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2}$$

Le point d'affixe u^3 est situé dans la moitié supérieure du plan complexe.
Donc son argument principal $\theta \in [0\,;\pi]$ est correctement défini par la relation :

$$\cos\theta = \frac{\Re(u^3)}{|u^3|} = \frac{-q}{2} \Big/ \left(\frac{-p}{3}\right)^{3/2} = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right)$$

***b.* Déterminer les racines cubiques u_k de u^3 ainsi que les racines complexes associées v_k.**

Les racines cubiques de u^3 sont les complexes de la forme :

$$u_k = \sqrt{\frac{-p}{3}}.e^{\frac{i\theta+2ik\pi}{3}} = u_0.j^k \qquad \text{avec } u_0 = \sqrt{\frac{-p}{3}}.e^{\frac{i\theta}{3}} \quad \text{et} \quad k \in \{0,1,2\}$$

On en déduit, par la relation (1), les valeurs associées v_k :

$$v_k = \frac{-p}{3u_k} = \frac{-p}{3u_0}.j^{-k} = \sqrt{\frac{-p}{3}}.e^{\frac{-i\theta-2ik\pi}{3}} = v_0.\overline{j}^k \qquad \text{avec } v_0 = \sqrt{\frac{-p}{3}}.e^{\frac{-i\theta}{3}} \quad \text{et} \quad k \in \{0,1,2\}$$

***c.* En déduire les trois solutions réelles de l'équation (E^*).**

$$\forall k \in \{0,1,2\} : u_k + v_k = \sqrt{\frac{-p}{3}}\left(e^{\frac{i\theta+2ik\pi}{3}} + e^{\frac{-i\theta-2ik\pi}{3}}\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{3}\right) \qquad \text{(en appliquant la formule d'Euler)}$$

$$= 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{-p}}\right) + \frac{2k\pi}{3}\right) \text{ est solution réelle de } (E^*).$$