Résolution de Polynômes du Troisième Degré

par Karl-Stephan BACZKOWSKI

Introduction :

Cet exercice propose une approche graduelle et détaillée pour la résolution de polynômes du troisième degré à coefficients réels : $ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Les équations cubiques sont connues des Grecs, Chinois, Egyptiens et Babyloniens depuis l'antiquité. Mais ça n'est qu'au XVI$^{\text{ème}}$ siècle que les mathématiciens italiens **del Ferro**, **Tartaglia**, **Cardano** et **Bombelli** parviennent successivement à fournir des solutions formelles au problème. C'est notamment à cette occasion que furent introduits les nombres complexes en mathématique.
La démarche abordée ici permet de redécouvrir la méthode de Tartaglia-Cardano en se ramenant à une forme simplifiée d'équation : $x^3 + px + q = 0$.

N.B : Le discriminant d'une équation cubique peut avoir une définition différente selon les ouvrages (formes fractionnée ou complète, signes opposés…). Ici sera préférée une expression plus esthétique rendant le calcul des solutions plus facile.

Sources :

- https://www.youtube.com/watch?v=N-KXStupwsc
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Équation_cubique
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_Cardan
- https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation

Prérequis :

- Etude graphique et analytique des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
- Formule du binôme de Newton
- Notions de trigonométrie (fonctions trigonométriques et réciproques)
- Opérations algébriques sur $\mathbb{R}$ (puissances fractionnaires, quantités conjuguées)
- Opérations algébriques sur $\mathbb{C}$ (forme trigonométrique, racines n$^{\text{ième}}$ complexes)
- Résolution analytique de trinômes du 2$^{\text{nd}}$ degré dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

Intitulé :

On considère l'équation linéaire du troisième degré définie sur $\mathbb{C}$:

$$(E) : ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad \text{où } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3$$

Remarque : On peut simplifier cette équation en posant :

$$(E) : x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad \text{avec } A = \frac{b}{a}, B = \frac{c}{a}, C = \frac{d}{a}$$

A) Etude analytique d'une fonction polynomiale de degré 3

Soit la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1) **Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$. En déduire l'abscisse x_P du point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.**
Autrement dit, trouver le réel x_P tel que $f''(x_P) = 0$.

2) **Soient les fonctions f_1, f_2, f_3 définies sur $\mathbb{R}$ telles que :** $\begin{cases} f_1(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \\ f_2(x) = -x^3 - x + 2 \\ f_3(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \end{cases}$
Représenter graphiquement f_1, f_2, f_3 et commenter leur nombre de racines.

Par soucis de simplification, on décide de noter $X = x + \frac{b}{3a}$

3) **Montrer que l'équation simplifiée (E) : $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$**
peut s'écrire sous la forme (E^*) : $X^3 + pX + q = 0$
en précisant l'expression de p et q en fonction de a, b, c, d.

Rappel sur la formule du binôme de Newton : $(x + k)^3 = x^3 + 3kx^2 + 3k^2x + k^3$.

Soit la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = x^3 + px + q$
On note $\mathcal{C}_\varphi$ la courbe représentative de φ.

4) ***a.*** **Calculer $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.**
b. **Donner les coordonnées (x_P, y_P) du point d'inflexion P de la courbe $\mathcal{C}_\varphi$.**
c. **Donner la pente de la tangente à $\mathcal{C}_\varphi$ au point $P(x_P, y_P)$.**
d. **Monter que la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ est symétrique par rapport à P.**

Autrement dit, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, les points $M\big(x_P - x, \varphi(x_P - x)\big)$ et $N\big(x_P + x, \varphi(x_P + x)\big)$ de la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ forment un segment dont le milieu est P.

5) ***a.*** **Déterminer les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction φ**
(on pourra dresser deux tableaux de variation selon le signe de p).
b. **Si $p \geq 0$, combien de racines réelles la fonction φ admet-elle ?**
c. **Si $p < 0$, montrer que φ admet un maximum local et un minimum local, respectivement en x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$ (préciser l'expression de x_1 et x_2). Calculer $\varphi(x_1)$ et $\varphi(x_2)$.**

Supposons un instant que $p < 0$.

6) ***a.*** **Si $q < 0$, quel est le signe de $\varphi(x_2)$?**
Déterminer une condition sur p et q sous laquelle $\varphi(x_1) > 0$.
b. **Si $q > 0$, quel est le signe de $\varphi(x_1)$?**
Déterminer une condition sur p et q sous laquelle $\varphi(x_2) < 0$.
c. **A l'aide des variations de φ sur $\mathbb{R}$, conclure sur le nombre de solutions réelles de l'équation (E^*) : $x^3 + px + q = 0$, en fonction du signe de la quantité $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$.**

Dans la suite de l'exercice, on nommera « discriminant » la quantité $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$.

B) Formule de Tartaglia-Cardano

Considérons l'équation (E^*) définie sur $\mathbb{C}$:

$$(E^*) :\ x^3 + px + q = 0 \qquad \text{avec } (p, q) \in \mathbb{R}^2$$

On souhaite définir deux complexes u et v tels que $x = u + v$ et que l'on puisse injecter dans (E^*) en utilisant la propriété suivante :

$$(\mathcal{H}) : (u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3 + v^3) = 0$$

Ainsi, résoudre (E^*) sur $\mathbb{C}$ revient donc à résoudre le système double : $(\mathcal{S}) : \begin{cases} 3uv = -p \ \ (1) \\ u^3 + v^3 = -q \ \ (2) \end{cases}$

Cas réel : Supposons dans un premier temps que $\Delta > 0$.

7) Par rôle symétrique de u et v, montrer que l'on peut écrire :

$$u^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{et} \qquad v^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

Aide : Écrire une équation de second degré à partit du système $(\mathcal{S})$.

8) *a.* Déterminer u_0 la racine cubique réelle de u^3, ainsi que la racine réelle v_0 associée.
**   *b.* En déduire la solution réelle de l'équation (E^*)**
**   *c.* En déduire la solution réelle de l'équation (E) lorsque la quantité suivante $D = 4 \times 27 \times a^4 \times \Delta = 27a^4d^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d - b^2c^2$ est positive.**

Cas complexe :

- lorsque $\Delta > 0$

9) *a.* Déterminer sous forme trigonométrique (c'est-à-dire $z = re^{i\theta}$) les racines complexes u_k pour ${u_k}^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ ainsi que les racines complexes associées v_k.
**   *b.* Montrer alors que (E^*) admet 2 solutions complexes qui sont conjuguées l'une de l'autre.**

- lorsque $\Delta = 0$

10) *a.* Dans le cas où $p = q = 0$, déterminer simplement l'unique solution triple de (E^*)
**   *b.* Dans le cas contraire (p et q sont tous deux non nuls), montrer que (E^*) admet une solution réelle simple et une solution réelle double, en donnant leur expression.**

- lorsque $\Delta < 0$

11) *a.* Que peut-on dire du signe de p ?
**   *b.* Par rôle symétrique de u et v, montrer que l'on peut écrire :**

$$u^3 = \frac{-q}{2} + i\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad \text{et} \qquad v^3 = \frac{-q}{2} - i\sqrt{-\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

12) *a.* Déterminer module $|u^3|$ et argument principal θ du complexe u^3.
**   *b.* Déterminer les racines cubiques u_k de u^3 ainsi que les racines complexes associées v_k.**
**   *c.* En déduire les trois solutions réelles de l'équation (E^*).**