Optimisation : Fonction – Volume – Surface

Les centrales nucléaires sont d'imposants sites industriels qui utilisent l'énergie de la fission des noyaux d'Uranium (^{235}U) pour générer de l'électricité. Des barres d'uranium sont insérées dans un réacteur où la chaleur générée vaporise de l'eau à haute pression vers des turbines couplées à des alternateurs électriques.

Les réacteurs nucléaires sont des cylindres de volume fixé *V* et dont la surface *S* doit être réduite au maximum pour éviter une trop grande dissipation d'énergie.

Le principe de l'exercice est, pour un volume donné V, de déterminer le rayon r du cylindre et la hauteur h pour avoir une surface S minimale.

1) Rappeler l'expression du volume *V* du cylindre en fonction de *r* et *h*.
   Exprimer alors *h* en fonction de *V* et de *r*.

V = Base x hauteur = $\pi r^2 h$ et $h = \frac{V}{\pi r^2}$

2) La surface du cylindre est composée de deux disques et d'un rectangle.
   Donner l'aire correspondant à la surface du cylindre en fonction de *r* et *h*.

S = 2 x Disque + Rectangle = $2\pi r^2 + 2\pi r h$

3) On note *S*(*r*) l'expression de *S* en fonction de *r* et *V*. Donner *S*(*r*).

$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2\pi r V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$

a) A l'aide de Geogebra, tracer le graphique $\mathcal{S}$ de la fonction *S*.
Note : On pourra utiliser un curseur V d'intervalle [0 ; 1000] et d'incrément 1.

b) Placer un point M sur la courbe $\mathcal{S}$. A quoi correspondent l'abscisse et l'ordonnée de ce point ? *M = (rayon du cylindre, Surface correspondante)*

b) La fonction *S*(*r*) admet-elle un minimum ?
Placer le point N correspondant au minimum de la fonction *S*.
Aide : dans propriétés du point M, taper "Définition : Min[S ; 0 ; 100]"

c) A quoi correspondent l'ordonnée et l'abscisse du point N ?

N = (rayon optimal tel que S est minimal, S minimal)

c) Faire afficher la trace du point N puis déplacer le curseur de *V*.

d) A l'aide d'un tableur, relever la surface minimale et le rayon optimal lorsque V vaut 125 m^3, 216 m^3, 343 m^3, 512 m^3, 729 m^3 et 1000 m^3.

Volume *V*	125 m^3	216 m^3	343 m^3	512 m^3	729 m^3	1000 m^3
Surface $S_{minimal}$	138,39 m^2	199,29 m^2	271,25 m^2	354,29 m^2	448,4 m^2	553,58 m^2
Rayon $r_{optimal}$	2,71 m	3,25 m	3,79 m	4,34 m	4,88 m	5,42 m

4) Sur quel intervalle la fonction $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$ est-elle dérivable (*V* est une constante réelle positive) ? Donner alors l'expression de sa dérivée *S'*.

La fonction $r \to 2\pi r^2$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *tout entier. La fonction* $r \to \frac{2V}{r}$ *est dérivable sur*]-∞ ; 0[*et sur*]0 ; +∞[. *Et pour tout* $r \in$]-∞ ; 0[∪]0 ; +∞[,

$$S'(r) = 2\pi \times 2r - \frac{2V}{r^2} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

5) Etudier le signe de $S'(r)$ sur $\mathbb{R}^+$. Quelle est la limite de $S(r)$ en 0^+ et en +∞.

$$S'(r) \geq 0 \Leftrightarrow 4\pi r - \frac{2V}{r^2} \geq 0 \Leftrightarrow 4\pi r \geq \frac{2V}{r^2} \Leftrightarrow r^3 \geq \frac{V}{2\pi} \Leftrightarrow r \geq \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Donc $S'(r) \geq 0$ *ssi* $r \in [\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; $+\infty[$ et $S'(r) \leq 0$ ssi $r \in [0 ; \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}]$

$$\lim_{r\to 0^+} 2\pi r^2 = 0 \textit{ et } \lim_{r\to 0^+} \frac{2V}{r} = +\infty \textit{ donc } \lim_{r\to 0^+} S(r) = +\infty$$

$$\lim_{r\to +\infty} 2\pi r^2 = +\infty \textit{ et } \lim_{r\to +\infty} \frac{2V}{r} = 0 \textit{ donc } \lim_{r\to +\infty} S(r) = +\infty$$

6) On note $r_{opt} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ et $S_{min} = S(r_{opt})$. Exprimer S_{min} en fonction de *V*.

$$S_{\min} = 2\pi r_{\text{opt}}^2 + \frac{2V}{r_{\text{opt}}} = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2 + \frac{2V}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = 2\pi\left(\frac{V^{\frac{1}{3}}}{(2\pi)^{\frac{1}{3}}}\right)^2 + 2V \Big/ \frac{V^{\frac{1}{3}}}{(2\pi)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= 2\pi \frac{V^{\frac{2}{3}}}{(2\pi)^{\frac{2}{3}}} + \frac{2V(2\pi)^{\frac{1}{3}}}{V^{\frac{1}{3}}} = (2\pi)^{1-\frac{2}{3}} V^{\frac{2}{3}} + 2\,(2\pi)^{\frac{1}{3}} V^{1-\frac{1}{3}}$$

$$= (2\pi)^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}} + 2\,(2\pi)^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}} = 3\,(2\pi)^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}}$$

7) Retrouver les réponses du 3) d) par le calcul.

On pourra inscrire les valeurs de r_{opt} et S_{min} dans 2 nouvelles rangées du tableur.

8) Dresser le tableau de variations de la fonction S sur $]0\ ;+\infty[$.

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
$S'(r)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$S(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$3\,(2\pi)^{\frac{1}{3}}\,V^{\frac{2}{3}}$	$\nearrow$	$+\infty$

9) Donner l'expression de V en fonction de r_{opt}. A partir de l'expression $S_{\min} = 2\pi r_{\text{opt}}^2 + \frac{2V}{r_{\text{opt}}}$, exprimer $S_{\min}$ en fonction de r_{opt} uniquement.

$V = 2\pi\, r_{\text{opt}}^3$ et $S_{\min} = 2\pi\, r_{\text{opt}}^2 + \frac{2\times 2\pi r_{\text{opt}}^3}{r_{\text{opt}}} = 2\pi\, r_{\text{opt}}^2 + 4\pi\, r_{\text{opt}}^2 = 6\pi\, r_{\text{opt}}^2$

10) On considère la fonction $S_{\min}(r) = 6\pi r^2$. Tracer sa représentation graphique $\mathcal{S}_m$ sur Geogebra. Que constate-t-on ?

La trace du point M et de la courbe $\mathcal{S}_m$ sont confondues sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$