

Project 1 Δορυφορικών Επικοινωνιών

Σκοπός είναι να μάθετε τον αλγόριθμο Viterbi και να καταλάβετε ότι πρόκειται για εκτιμητή ακολουθίας μέγιστης *a posteriori* πιθανότητας (που για ισοπίθανες ακολουθίες αντιστοιχεί στον εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας ML). Η παράδοση του σχετικού κώδικα και της αναφοράς θα γίνει μέσω *courses*. Επιτρέπεται η συνεργασία, αρκεί να αναγραφεί στην αναφορά. Ωστόσο, ο κώδικας και η αναφορά πρέπει να γίνουν ατομικά.

Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή θα μελετήσετε το bit error rate (BER) της διαμόρφωσης MSK, της οποίας ο μιγαδικός φάκελος δίνεται από την παρακάτω σχέση [1]:

$$\tilde{s}(t) = Ae^{+j\phi(t)}, \quad (1)$$

$$\phi(t) = x_n \frac{\pi(t - nT)}{T} + \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} x_k, \quad nT \leq t \leq nT + T. \quad (2)$$

Όπως εξηγήθηκε στα Τηλεπ. Συστήματα II, το MSK σύμβολο $x_n \in \{\pm 1\}$, το οποίο στέλνεται το χρονικό διάστημα $[nT, (n+1)T]$, αυξάνει την φάση $\phi(t)$ κατά $\pi/2$, όταν $x_n = 1$ ή μειώνει την φάση κατά $\pi/2$, όταν $x_n = -1$. Επομένως, η τελική ποσότητα της φάσης την χρονική στιγμή $t = (n+1)T$ εξαρτάται από την τιμή του x_n ΚΑΙ από την τιμή της φάσης $\phi(nT) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{n-1} x_k$ την χρονική στιγμή $t = nT$. Με λίγα λόγια, η διαμόρφωση αυτή έχει μνήμη και απαιτεί έξυπνο χειρισμό στον δέκτη. Επιπλέον, η διαμόρφωση αυτή εξασφαλίζει συνέχεια φάσης στο μεταδιδόμενο σήμα (όπως δείξαμε στα Τηλεπ. Συστήματα II) και φαίνεται στην παραπάνω σχέση, καθώς μεταβάλλει ομαλά την φάση κατά την διάρκεια μετάδοσης του κάθε MSK συμβόλου x_n .

Παρακάτω θεωρούμε πως ο μιγαδικός φάκελος του σήματος λήψης κατά την μετάδοση σε κανάλι AWGN δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις:

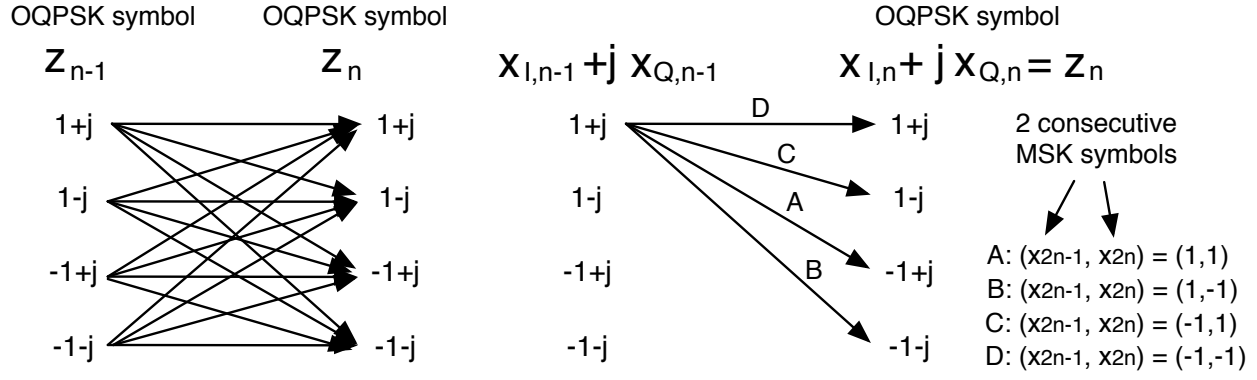
$$y(t) = \tilde{s}(t) + w(t), \quad (3)$$

$$w(t) = w_I(t) + jw_Q(t), \quad (4)$$

όπου $w_I(t), w_Q(t)$ στάσιμες με την ευρεία έννοια στοχαστικές διαδικασίες, μηδενικής μέσης τιμής, ανεξάρτητες μεταξύ τους, με φασματική πυκνότητα ισχύος $S_{ww_I}(f) = S_{ww_Q}(f) = \beta$ στο διάστημα $[-W, W]$ και μηδέν αλλού, με $\beta > 0$ και W το εύρος ζώνης του δέκτη (στην βασική ζώνη).

1 MSK ως OQPSK

Στις σημειώσεις [1] και στα problem sets των Τηλεπ. Συστημάτων II είδαμε πως ο μιγαδικός φάκελος της MSK (Εξ. (2)) μπορεί να εκφραστεί ως offset QPSK (OQPSK), εάν ομαδοποιήσουμε



Σχήμα 1: MSK = OQPSK.

ζευγάρια (x_{2n-1}, x_{2n}) διαδοχικών MSK συμβόλων σε QPSK σύμβολα $x_{I,n} + jx_{Q,n} \in \{\pm 1 \pm j\}$, σύμφωνα με τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις:

$$\tilde{s}(t) = A \sum_n x_{I,n} h_a(t - n2T) + jx_{Q,n} h_a(t - n2T - T), \quad (5)$$

$$h_a(t) = \cos\left(2\pi \frac{1}{4T} t\right) u_{2T}(t + T), \quad (6)$$

$$h_a(t - T) = \sin\left(2\pi \frac{1}{4T} t\right) u_{2T}(t), \quad (7)$$

όπου $u_{2T}(t)$ ο τετραγωνικός παλμός με $u_{2T}(t) = 1, t \in [0, 2T)$ και μηδέν αλλού. Παρατηρήστε ότι ο παλμός διαμόρφωσης $h_a(t)$ έχει διάρκεια $2T$ και το quadrature component είναι καθυστερημένο κατά μισό QPSK σύμβολο ($2T/2 = T$), δηλ. κατά ένα σύμβολο MSK. Το επόμενο QPSK σύμβολο $z_n = x_{I,n} + jx_{Q,n}$ εξαρτάται από τα MSK σύμβολα x_{2n-1}, x_{2n} αλλά και από το προηγούμενο QPSK σύμβολο $z_{n-1} = x_{I,n-1} + jx_{Q,n-1}$, σύμφωνα με τις παρακάτω αναδρομικές:

$$x_{I,n} = -x_{Q,n-1} \quad x_{2n-1}, \quad (8)$$

$$x_{Q,n} = -x_{I,n} \quad x_{2n} = x_{Q,n-1} \quad x_{2n-1} \quad x_{2n}, \quad (9)$$

$$x_{Q,-1} = -1, x_{-1} = 1. \quad (10)$$

Για την αποστολή ενός OQPSK συμβόλου απαιτείται συνολική διάρκεια $3T$, λόγω της καθυστέρησης του quadrature component κατά T . Αξιοποιώντας την ιδιότητα $\int_{-\infty}^{+\infty} h_a^2(t) dt = T$, το ισοδύναμο διακριτό σύστημα της εξίσωσης (3) και της εξίσωσης (7) δίνεται από τις παρακάτω σχέσεις (αποδειξτε το):

$$y_n = ATz_n + \sqrt{\beta T} n_n, \quad (11)$$

$$z_n = x_{I,n} + jx_{Q,n}, \quad (12)$$

$$n_n = n_{I,n} + jn_{Q,n}, \quad (13)$$

όπου $n_{I,n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $n_{I,Q} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ και $n_{I,n}, n_{Q,n}$ στατιστικώς ανεξάρτητα.¹ Επίσης, μιγαδικά n_n και n_m είναι στατιστικώς ανεξάρτητα για $n \neq m$.

¹Ο ορισμός αυτός είναι ισοδύναμος με το να συμβολίσουμε την n_n ως μια κυκλικά συμμετρική μιγαδική Γκαουσιανή $n_n \sim \mathcal{CN}(0, 2)$. Είναι κυκλικά συμμετρική γιατί η μηδενική μέση τιμή εξασφαλίζει ότι ο πολλαπλασιασμός με έναν ντετερμινιστικό φάσσορα $e^{j\theta}$ δεν αλλάζει τα στατιστικά του $e^{j\theta} n_n$.

Στο Σχήμα 1-αριστερά φαίνεται πως από κάθε δυνατή τιμή του $z_{n-1} \in \{\pm 1 \pm j\}$ μπορεί να υπάρξει μετάβαση σε μία από 4 δυνατές τιμές του z_n , με πιθανότητα μετάβασης 1/4. Στο Σχήμα 1-δεξιά φαίνεται η περίπτωση του $z_{n-1} = 1 + j$ με όλες τις πιθανές μεταβάσεις, σύμφωνα με τις αναδρομικές σχέσεις των εξισώσεων (8)-(10). Αντίστοιχο σχήμα μπορεί να προκύψει και για τις υπόλοιπες 3 δυνατές τιμές του z_{n-1} .

Με βάση τα παραπάνω, ο βέλτιστος (ML) δέκτης αρκεί να παρατηρήσει 2 διαδοχικά OQPSK ληφθέντα σύμβολα y_{n-1}, y_n και να εκτιμήσει με τον κανόνα ελάχιστης απόστασης, από τα δυνατά σύμβολα $AT(\pm 1 \pm j)$, τα σύμβολα z_{n-1}, z_n . Η μετάβαση από συγκεκριμένο z_{n-1} σε συγκεκριμένο z_n δείχνει ποιο είναι το ζευγάρι (x_{2n-1}, x_{2n}) των MSK συμβόλων. Με προσεκτική παρατήρηση των εξισώσεων (8)-(10) παραπάνω, προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις που δίνουν τα x_{2n-1}, x_{2n} από τα z_{n-1}, z_n :

$$x_{2n-1} = -x_{Q,n-1}x_{I,n}, \quad (14)$$

$$x_{2n} = -x_{Q,n}x_{I,n}. \quad (15)$$

1.1 Ερωτήσεις

Ορίζουμε την σηματοδορυβική σχέση, ως εξής:

$$\text{SNR} \triangleq \frac{A^2 T}{\beta}. \quad (16)$$

A. Για $\text{SNR} = 5$ dB, προσομοιώστε την Εξ. (11) για $N = 10^5$ MSK σύμβολα (δηλ. 0.5×10^5 OQPSK σύμβολα) και εκτιμήστε το BER.

B. Επαναλάβετε για $\text{SNR} = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ dB και προσφέρετε διάγραμμα BER ως συνάρτηση του SNR.

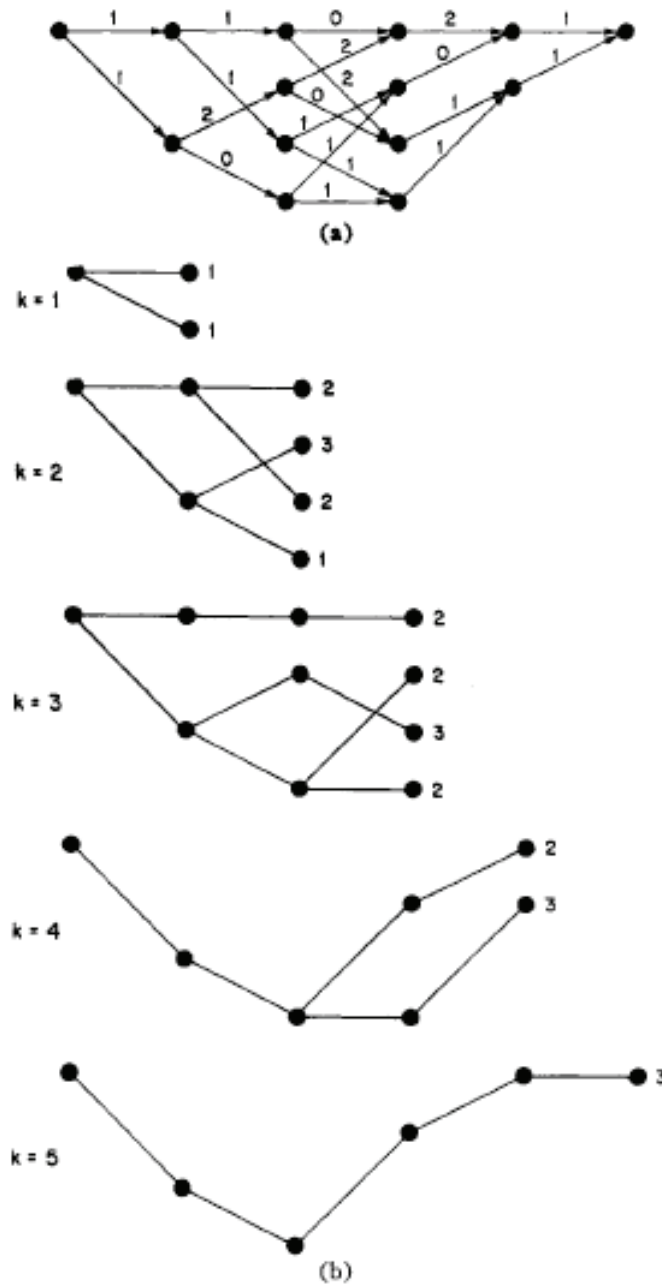
Γ. Εξηγήστε συνοπτικά γιατί η σχέση $Q(\sqrt{\text{SNR}})$ αποτελεί μια πρόσεγγιση του BER. Για ποιό λόγο το BER που εκτιμήσατε παραπάνω δεν είναι ακριβώς ίσο με $Q(\sqrt{\text{SNR}})$;

2 Ο Αλγόριθμος Viterbi

Ο αλγόριθμος Viterbi (VA) [2] προτάθηκε την δεκαετία του 70 για την αποκωδικοποίηση συνελκτικών κωδίκων και ουσιαστικά, αποτελεί το εργαλείο εύρεσης ακολουθιών μέγιστης πιθανοφάνειας (ML). Συνεπώς, έχει εφαρμογή σε πληθώρα προβλημάτων, όπως η αποδιαμόρφωση σημάτων συνεχούς φάσης, η ισοστάθμιση (equalization) καναλιού, η αντιμετώπιση παρεμβολών, η αναγνώριση οπτικών χαρακτήρων κλπ. Στο Σχήμα 2-α, φαίνεται ένα παράδειγμα διαγράμματος μεταβάσεων (trellis), με σημειωμένα τα βάρη σε κάθε μετάβαση, $k = 1..5$ βημάτων και έως $M = 4$ καταστάσεων σε κάθε βήμα.

Ο αλγόριθμος βρίσκει το μονοπάτι από την αρχή του trellis έως το τέλος του trellis, που βελτιστοποιεί συγκεκριμένο κριτήριο. Στο Σχήμα 2, το κριτήριο αυτό είναι το ελάχιστο αθροιστικό κόστος.² Μάλιστα, το επιτυγχάνει σε ακριβώς $k = 5$ βήματα, για το συγκεκριμένο παράδειγμα.

²Στο παράδειγμα MSK παρακάτω, το κριτήριο είναι το μονοπάτι με το μέγιστο αθροιστικό κόστος.



Σχήμα 2: Παράδειγμα Αλγορίθμου Viterbi από [2].

Αποτελεί εφαρμογή δυναμικού προγραμματισμού. Για όσους ασχοληθούν με δίκτυα υπολογιστών, θα δουν ότι πρόκειται για την περίπτωση του αλγορίθμου Bellman-Ford, ενώ για όσους ασχοληθούν με τεχνητή νοημοσύνη, θα δουν ότι πρόκειται για ειδική περίπτωση του αλγορίθμου min-sum (max-product) σε Hidden Markov Model (HMM).

Η βασική του ιδέα είναι πως ξεκινώντας από τα αριστερά προς τα δεξιά του διαγράμματος trellis (forward pass), οι μεταβάσεις προς μια κοινή κατάσταση σε οποιοδήποτε ενδιαμέσο βήμα, θα πρέπει να βελτιστοποιούν το συνολικό βάρος μέχρι την κατάσταση αυτή. Δηλ. εάν υπάρχουν δύο καταστάσεις $x_{k-1}^{(1)}$, $x_{k-1}^{(2)}$ με συνολικό βάρος μονοπατιού έως τις καταστάσεις αυτές $\Gamma(x_{k-1}^{(1)})$, $\Gamma(x_{k-1}^{(2)})$ αντιστοίχως, τότε η μετάβαση $(x_{k-1}^{(1)}, x_k)$ με βάρος $w(x_{k-1}^{(1)}, x_k)$ είναι προτιμητέα της $(x_{k-1}^{(2)}, x_k)$ εάν

το κριτήριο βελτιστοποίησης είναι το ελάχιστο αθροιστικό κόστος και εάν:

$$\Gamma(x_{k-1}^{(1)}) + w(x_{k-1}^{(1)}, x_k) < \Gamma(x_{k-1}^{(2)}) + w(x_{k-1}^{(2)}, x_k). \quad (\Delta\Delta\Delta)$$

Το συνολικό βάρος στο βήμα k ανανεώνεται με πρόσθεση του βάρους της μετάβασης που επιλέχθηκε. Συνεπώς, κάθε κατάσταση σε κάθε βήμα, έχει ένα συνολικό βάρος και έναν δείκτη (pointer) προς την κατάσταση του προηγούμενου βήματος που έχει επιλεγεί.

Στο Σχήμα 2-β, φαίνεται το παράδειγμα εκτέλεσης του αλγορίθμου για το trellis πιο πάνω. Παρατηρήστε ότι το trellis στο βήμα $k = 3$ έχει πολλαπλές διαδρομές και για τις 4 καταστάσεις. Ωστόσο, ο αλγόριθμος διατηρεί μόνο ένα μονοπάτι προς τα αριστερά (**survivor**) για κάθε κατάσταση, λόγω του παραπάνω κανόνα ($\Delta\Delta\Delta$). Στο τελευταίο βήμα του forward pass παραμένουν τόσες διαδρομές, όσες και οι καταστάσεις στο τελευταίο βήμα. Στο παράδειγμα παραπάνω, υπάρχει μόνο μία τελική κατάσταση και επομένως, η διαδρομή που καταλήγει σε αυτή αποτελεί την λύση. Στην περίπτωση που υπήρχαν περισσότερες από μία τελικές καταστάσεις, θα επιλεγόταν το μονοπάτι της τελικής κατάστασης που βελτιστοποιεί το κριτήριο. Έχοντας γνώση σε κάθε βήμα του δείκτη (pointer) προς την καλύτερη προηγούμενη κατάσταση, γίνεται εύκολα εύρεση των μεταβάσεων του καλύτερου μονοπατιού (backward pass).

Για περισσότερες πληροφορίες υλοποίησης, μπορείτε να δείτε την σελίδα 5 στην εργασία [2]. Τονίζεται πως στο παράδειγμα της MSK με Viterbi παρακάτω, το κριτήριο είναι η *μεγιστοποίηση* του αθροιστικού βάρους του μονοπατιού, και συνεπώς η σχέση ($\Delta\Delta\Delta$) μετατρέπεται σε:

$$\Gamma(x_{k-1}^{(1)}) + w(x_{k-1}^{(1)}, x_k) > \Gamma(x_{k-1}^{(2)}) + w(x_{k-1}^{(2)}, x_k).$$

3 MSK ως διάγραμμα Trellis

Ισοδύναμα, το διακριτό σήμα βασικής ζώνης της MSK μπορεί να εκφραστεί ως δι-διάστατο μιγαδικό διάνυσμα, σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις [3]:

$$\mathbf{r}_n = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \mathbf{s}_n + \begin{bmatrix} n_{1,n} \\ n_{2,n} \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{s}_n = \mathbf{s}^{x_n} e^{j\phi[n]}, \quad (18)$$

$$\phi[n+1] = \phi[n] + x_n \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad \phi[1] = 0, \quad (19)$$

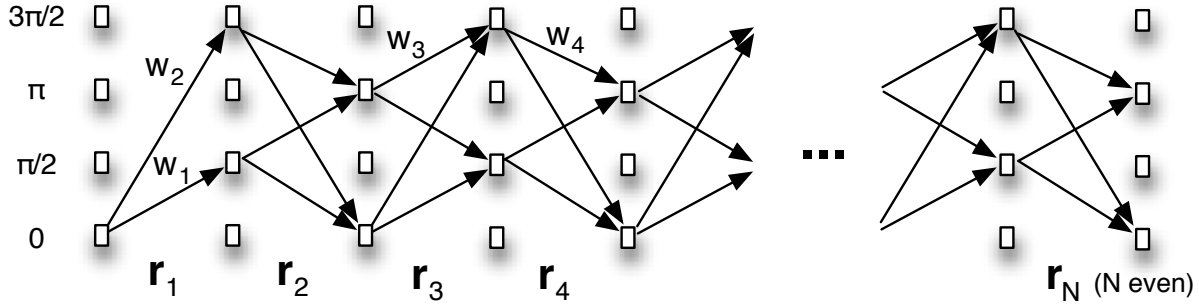
με $n_{1,n} \sim \mathcal{CN}(0, 2\beta)$, $n_{2,n} \sim \mathcal{CN}(0, 2\beta)$, $n_{1,n}$ ανεξάρτητο του $n_{2,n}$ και ανεξαρτησία μεταξύ $n_{1,n}$, $n_{2,n}$ και $n_{1,m}$, $n_{2,m}$ για $n \neq m$. Τα σταθερά διανύσματα $\{\mathbf{s}_n\}$ για $x_n \in \{\pm 1\}$ δίνονται από:

$$\mathbf{s}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2A\sqrt{T}}{\pi} j \\ \frac{A\sqrt{T}\sqrt{\pi^2-4}}{\pi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s}^1 = \begin{bmatrix} A\sqrt{T} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Η φάση στην αρχή του n -οστού MSK συμβόλου είναι $\phi[n]$ και στο τέλος $\phi[n+1]$, αλλαγή κατά $x_n \pi/2$. Προσέξτε ότι $(\mathbf{s}^{x_n})^H \mathbf{s}^{x_n} = A^2 T$, όπου \mathbf{x}^H σημαίνει ανάστροφο του μιγαδικού διανύσματος με συζυγή στοιχεία.

Με βάση τα παραπάνω, μπορεί σχετικά εύκολα να αποδειχθεί ότι η κανόνας μέγιστης πιθανοφάνειας (ML) για το n -οστό ληφθέν δι-διάστατο μιγαδικό διάνυσμα \mathbf{r}_n εξαρτάται από το σύμβολο x_n αλλά και από την φάση $\phi[n]$ στην αρχή του συμβόλου:

$$\arg \max_{\mathbf{s}_n} \ln [f_{\mathbf{r}_n|\mathbf{s}_n}(\mathbf{r}_n|\mathbf{s}_n)] = \arg \max_{\mathbf{s}_n} \mathbf{Real}(\mathbf{r}_n^H \mathbf{s}_n) = \arg \max_{\mathbf{s}_n} \mathbf{Real}(\mathbf{r}_n^H \mathbf{s}^{x_n} e^{j\phi[n]}), \quad (21)$$



Σχήμα 3: MSK trellis.

όπου $\mathbf{Real}(z)$ είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού z . Η φάση $\phi[n]$ είναι ωστόσο ίση με την φάση στο τέλος του προηγούμενου συμβόλου x_{n-1} και επομένως, υπάρχει μνήμη, δηλ. εξάρτηση του κάθε συμβόλου από το προηγούμενό του. Ο κανόνας μέγιστης πιθανοφάνειας για την εκτίμηση της αλληλουχίας $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_N$ δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\max_{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_N} \sum_{n=1}^N \ln [f_{\mathbf{r}_n | \mathbf{s}_n}(\mathbf{r}_n | \mathbf{s}_n)] = \max_{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_N} \sum_{n=1}^N \mathbf{Real} \left(\mathbf{r}_n^H \underbrace{\mathbf{s}_n^{x_n} e^{j\phi[n]}}_{\mathbf{s}_n} \right) = \max_{x_1, x_2, \dots, x_N} \sum_{n=1}^N w(\mathbf{r}_n, \phi[n], x_n). \quad (22)$$

Συνεπώς, απαιτείται αξιοποίηση των μεταβάσεων, δηλ. αξιοποίηση του διαγράμματος trellis και εύρεση της αλληλουχίας με την μεγαλύτερη πιθανοφάνεια, σύμφωνα με τον αλγόριθμο Viterbi. Το βάρος για κάθε μετάβαση δίνεται σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$w(\mathbf{r}_n, \phi[n], x_n) = \mathbf{Real}(\mathbf{r}_n^H \mathbf{s}_n^{x_n} e^{j\phi[n]}). \quad (23)$$

Το σχετικό διάγραμμα trellis δίνεται στο Σχήμα 3. Παρατηρήστε ότι η αρχική φάση $\phi[1] = 0$ και ότι στα περιττά σύμβολα οι δυνατές καταστάσεις φάσης $\pi/2, 3\pi/2$ στο τέλος του συμβόλου είναι διαφορετικές από τις δυνατές καταστάσεις $0, \pi$ στο τέλος των άρτιων συμβόλων. Στο Σχήμα αυτό χωρίς βλάβη της γενικότητας, έχουμε υποθέσει ότι το πλήθος των μεταδιδόμενων συμβόλων N είναι άρτιο. Επίσης, ενδεικτικά έχουμε σημειώσει τα βάρη 4 μεταβάσεων για να γίνει καλύτερα αντιληπτό το διάγραμμα trellis.

$$w_1 = \mathbf{Real}(\mathbf{r}_1^H \mathbf{s}^1 e^{j0}) \quad (24)$$

$$w_2 = \mathbf{Real}(\mathbf{r}_1^H \mathbf{s}^{-1} e^{j0}) \quad (25)$$

$$w_3 = \mathbf{Real}(\mathbf{r}_3^H \mathbf{s}^1 e^{j\pi}) \quad (26)$$

$$w_4 = \mathbf{Real}(\mathbf{r}_4^H \mathbf{s}^{-1} e^{j3\pi/2}) \quad (27)$$

Π.χ., το βάρος w_3 αναφέρεται σε μετάβαση κατά την μετάδοση του 3ου MSK συμβόλου, από την φάση π στην αρχή του συμβόλου, στην φάση $3\pi/2$ στο τέλος της μετάδοσης του συμβόλου. Επομένως, η μετάβαση αυτή αντιστοιχεί στο σύμβολο $x_n = +1$. Με αντίστοιχο τρόπο, μπορεί κάποιος να καταλάβει το βάρος οποιασδήποτε μετάβασης στο συγκεκριμένο trellis.

3.1 Ερωτήσεις

Δ. Ο ορισμός του SNR παραμένει όπως και στην Εξ. (16). Για $\text{SNR} = 5 \text{ dB}$, προσομοιώστε την Εξ. (17) για $N = 10^5$ MSK σύμβολα. Υλοποιήστε τον αλγόριθμο Viterbi με την βοήθεια του

παραπάνω trellis και βρείτε την αλληλουχία μέγιστης πιθανοφάνειας. Προσέξτε ότι στο τελευταίο βήμα του forward pass του αλγορίθμου, θα βρείτε δύο μονοπάτια. Κρατήστε το μονοπάτι με το μέγιστο συνολικό βάρος και εκτιμήστε το BER.

Ε. Επαναλάβετε για $\text{SNR} = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ dB και προσφέρετε διάγραμμα BER ως συνάρτηση του SNR.

Ζ. Στην συνέχεια, απεικονίστε τα αποτελέσματα BER των ερωτημάτων Α, Β, Δ, Ε, καθώς και της $Q(\sqrt{\text{SNR}})$ στο ίδιο διάγραμμα.

Η. Εξηγήστε συνοπτικά για ποιο λόγο η εργασία αυτή θα μπορούσε να ονομαστεί SURVIVOR!

Βιβλιογραφία

- [1] Α. Μπλέτσας, Σημειώσεις Τηλεπ. Συστημάτων ΙΙ, Σχολή ΗΜΜΥ Πολυτεχνείου Κρήτης, εαρινό 2016-2017.
- [2] G. D. Forney, “The Viterbi Algorithm”, *Proc. of IEEE*, vol. 61, no. 3, pp. 268 – 278, Mar. 1973.
- [3] Y. Fountzoulas, D. Chachlakis, G.N. Karystinos, and A. Bletsas, “GLRT-Optimal Blind MSK Detection With Log-Linear Complexity”, *Proc. of IEEE 23rd Int. Conf. on Telecommunications (ICT)*, May 2016, Thessaloniki, Greece.