Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «МОДАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ И НАБЛЮДАТЕЛИ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

Задание 1. Модальный регулятор

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma(A + BK) = \left[\begin{array}{c} \{-2, -2, -2\}, \\ \{-3, -3, -3\}, \\ \{-2, -20, -200\}, \\ \{-3, -30, -300\}, \\ \{-2, -2 \pm 6i\}, \\ \{-3, -3 \pm 9i\}; \end{array} \right.$$

Управляемость и стабилизируемость

Найдем собственные числа матрицы A с помощью `MATLAB` (программу см. листинг 1 в приложении 1)

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 & -7 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 2 & 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\};$$

$\lambda_1 = -2 < 0$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ имеют положительные действительные части – неустойчивые, нужна управляемость. Определим управляемость собственных чисел через жорданово разложение (приведение комплексной формы к вещественной аналогично первой лабораторной работе)

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Собственное число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, так как первый элемент в матрице входных воздействий B_{Jre} равен нулю. Остальные собственные числа управляемые. Следовательно, система не полностью управляема. Достаточное условие полной управляемости системы в нашем случае – не равенство нулю первого и [второго или третьего] элементов матрицы B_{Jre}. Оно не выполняется. Так как все неустойчивые собственные числа управляемы, то система стабилизируема.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Построим схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$, замкнутой регулятором $u = Kx$, используя `SIMULINK`

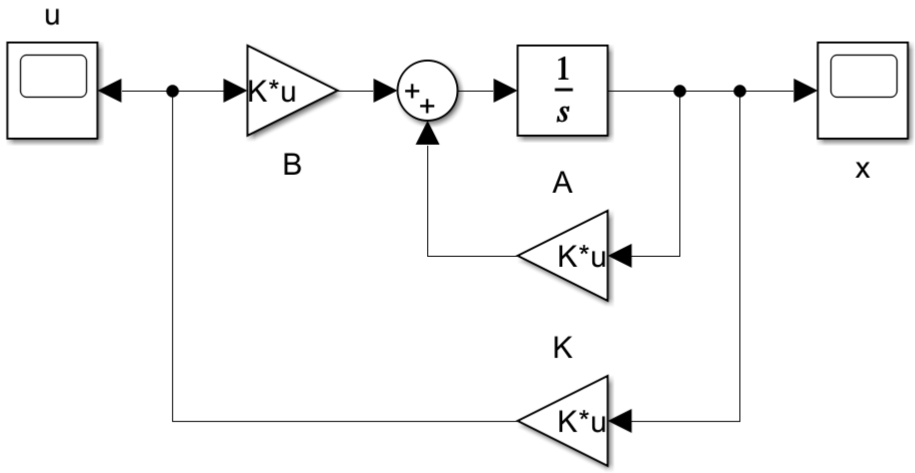


Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Достижимые спектры

Рассмотрим предложенные спектры замкнутой системы $(A + BK)$ и определим, какие из них достижимы. Мы хотим, чтобы матрица $(A + BK)$ была устойчивой, то есть все ее собственные числа имели отрицательную действительную часть. В нашем случае комплексная пара $\lambda_{2,3}$ являются неустойчивыми, но управляемыми – их можно переместить в устойчивую область (подобрать любые числа, меньшие нуля). Собственное число $\lambda_1 = -2$ устойчивое, но неуправляемое – его не получится переместить куда-либо. Это означает, что спектр $\sigma(A + BK)$ должен содержать это неуправляемое число, иначе регулятор не будет выполнять свою функцию, мы потеряем собственное число матрицы A. Таким образом, желаемый спектр должен содержать все неуправляемые (но устойчивые) собственные числа матрицы A, при этом остальные числа могут быть любыми, но устойчивыми. Важно уточнить, что если некоторое собственное число матрицы A неустойчиво и неуправляемо, то система не стабилизируема – модальный регулятор применить не получится.

Исходя из наших рассуждений выше, достижимыми будут следующие спектры замкнутой системы

$$\sigma(A + BK) = \left[\begin{array}{c} \{-2, -2, -2\}, \\ \{-2, -20, -200\}, \\ \{-2, -2 \pm 6i\}; \end{array}\right.$$

Остальные спектры не содержат неуправляемое собственное число $\lambda_1 = -2$.

Матрица регулятора

Для каждого из достижимых спектров, определенных в предыдущем пункте, найдем соответствующие матрицы регулятора K, приводящие спектр замкнутой системы к желаемому.

Рассмотрим спектр $\sigma(A + BK) = \{-2, -2, -2\}$. Запишем полином Ньютона третьего порядка с $\omega_0 = 1$

$$(\lambda + 2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

Составим матрицу Γ_1 в канонической наблюдаемой форме по коэффициентам найденного полинома

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$$

Подберем Y_1 такой, чтобы пара (Y_1, Γ_1) была наблюдаема. Проверим, вычислив ранг матрицы наблюдаемости

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \operatorname{rank} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_1\Gamma_1 \\ Y_1\Gamma_1^2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3;$$

Теперь, используя пакет `cvx` в `MATLAB`, вычислим матрицу $P_1 \in \mathbb{R}^{3\times3}$ как решение уравнения Сильвестра

$$AP_1 - P_1\Gamma_1 = BY_1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.4455 & -0.0701 & -0.0288 \\ -0.0759 & -0.1036 & -0.0181 \\ 0.1649 & 0.1926 & 0.0404 \end{bmatrix};$$

Далее вычислим матрицу регулятора $K_1 \in \mathbb{R}^{3\times3}$ по формуле

$$K_1 = -Y_1P_1^{-1},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.800 & -7.043 & -4.443 \end{bmatrix};$$

Повторим шаги для нахождения остальных K_i. Рассмотрим спектры

$$\sigma\left(A + BK\right) = \{-2, -20, -200\}, \ \sigma\left(A + BK\right) = \{-2, -2 \pm 6i\};$$

Найдем их полиномы

$$(\lambda + 2)(\lambda + 20)(\lambda + 200) = \lambda^3 + 222\lambda^2 + 4440\lambda + 8000,$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 2 - 6i)(\lambda + 2 + 6i) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 48\lambda + 80;$$

Аналогично запишем матрицы Γ_i

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8000 & -4440 & -222 \end{bmatrix}, \ \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -80 & -48 & -6 \end{bmatrix};$$

Подберем Y_i и выполним проверку ранга

$$Y_{2,3} = Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Y, \ \operatorname{rank} \begin{bmatrix} Y \\ Y\Gamma_2 \\ Y\Gamma_2^2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} Y \\ Y\Gamma_3 \\ Y\Gamma_3^2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3;$$

Найдем $P_{2,3}$ и $K_{2,3}$ тем же способом

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.2259 & 0.0053 & 0.0000 \\ 0.0612 & 0.0012 & 0.0000 \\ 0.2253 & 0.0146 & 0.0001 \end{bmatrix}, \ P_3 = \begin{bmatrix} 0.2546 & 0.0351 & -0.0026 \\ 0.0744 & 0.0055 & -0.0012 \\ 0.2550 & 0.0275 & 0.0094 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 754.2 & -2553.6 & -67.0 \end{bmatrix}, \ K_3 = \begin{bmatrix} 5.4000 & -25.9424 & -1.7424 \end{bmatrix};$$

Корректность синтеза регулятора

Определим собственные числа каждой матрицы замкнутой системы $(A + BK_i)$ и сравним с соответствующими желаемыми спектрами

$$\sigma\left(A + BK_1\right) = \sigma\begin{bmatrix} -0.400 & -19.129 & -6.329 \\ 0.200 & -6.043 & -2.443 \\ -0.200 & 4.043 & 0.443 \end{bmatrix} = \left\{-2, -2, -2\right\},$$

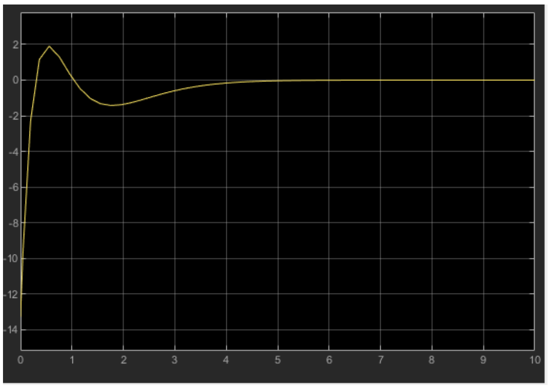
$$\sigma\left(A + BK_2\right) = \sigma\begin{bmatrix} 2267.6 & -7658.7 & -193.9 \\ 756.2 & -2552.6 & -65.0 \\ -756.2 & 2550.6 & 63.0 \end{bmatrix} = \left\{-2, -20, -200\right\},$$

$$\sigma\left(A + BK_3\right) = \sigma\begin{bmatrix} 21.2000 & -75.8273 & 1.7727 \\ 7.4000 & -24.9424 & 0.2576 \\ -7.4000 & 22.9424 & -2.2576 \end{bmatrix} = \left\{-2, -2 \pm 6i\right\};$$

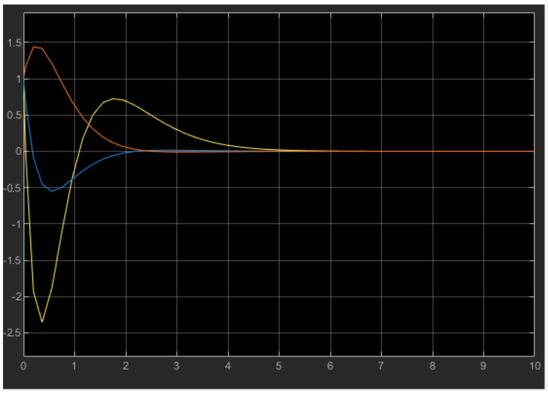
Видим, что спектры совпадают с желаемыми – регулятор синтезирован корректно.

Компьютерное моделирование

Для компьютерного моделирования воспользуемся схемой `SIMULINK`, представленной на рис. 1. Зададим в интегратор начальное условие $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

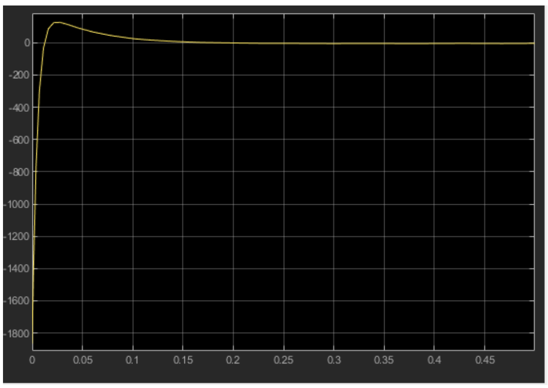


(a) График $u(t)$

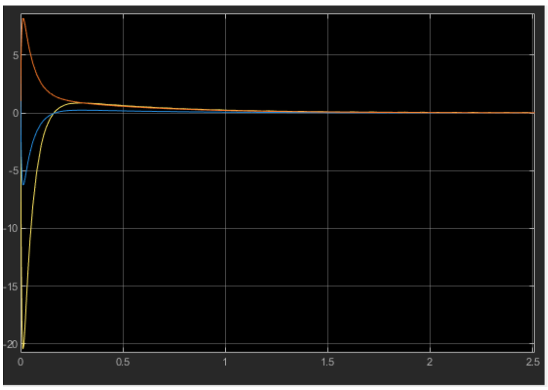


(b) График $x(t)$

Рис. 2: Графики $u(t), x(t)$ для K_1

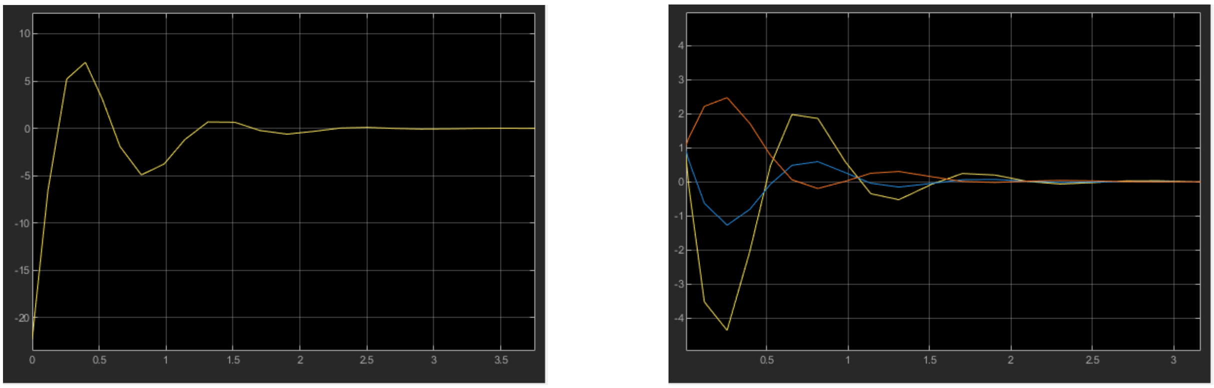


(a) График $u(t)$



(b) График $x(t)$

Рис. 3: Графики $u(t), x(t)$ для K_2



(a) График $u(t)$ (b) График $x(t)$

Рис. 4: Графики $u(t), x(t)$ для K_3

Сравнение результатов

Сопоставим полученные результаты компьютерного моделирования для рассмотренных спектров, оценим возможные сравнительные преимущества и недостатки каждого из них.

На каждом рисунке система $x(t)$ стабилизировалась – все координаты пришли в ноль, выходя из 1. Управления $u(t)$ сошлись к нулю – регуляторы выполнили свою задачу и больше не требуют активного управления.

На рис. 2 видим, что управление $u(t)$ достаточно плавное, имеет небольшое перерегулирование в сравнении с другими графиками. На графике $x(t)$ система ожидаемо медленно и плавно затухает.

На рис. 3 наблюдаем быстрое стабилизирование системы, однако при этом присутствуют большие начальные отклонения. В сравнении с другими графиками имеется ожидаемо наибольшее перерегулирование. Получили достаточно агрессивный регулятор.

На рис. 4 система, вследствие наличия комплексных собственных чисел, приобрела сравнительно небольшие осцилляции. По скорости затухания колебаний результат получился средним (быстрее, чем K_1; медленнее, чем K_2). Система выглядит менее предсказуемо в сравнении с остальными результатами.

Вывод

В ходе выполнения задания мы выяснили, что система не полностью управляема, но стабилизируема. Мы нашли достижимые спектры по принципу наличия в них неуправляемых (но устойчивых) собственных чисел матрицы A. Мы вычислили матрицы регулятора, убедились в корректности синтеза каждого регулятора, после чего провели компьютерное моделирование. В ходе сравнения результатов было выяснено, что при маленьких собственных числах в спектре система медленно и плавно затухает со сравнительно небольшим перерегулированием. При больших по модулю собственных числах система быстро стабилизируется, но имеет сравнительно большое перерегулирование. Наличие комплексных собственных чисел создаст некоторые осцилляции в системе, из-за чего она может быть менее предсказуема. При этом скорость затухания системы выше, чем при небольших по модулю числах, принадлежащих множеству рациональных чисел.

Задание 2. Наблюдатель полного порядка

Рассмотрим систему

$$
\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}, \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},
$$

$$
\sigma(A + LC) = \left[\begin{array}{c} \{-2, -2, -2, -2\}, \\ \{-2, -20, -200, -2000\}, \\ \{-2 \pm 3i, -2 \pm 4i\}; \end{array} \right.
$$

Наблюдаемость и обнаруживоемость

Найдем собственные числа матрицы A. Программа для вычислений в MATLAB находится в приложении 2 на листинге 2

$$
\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ 26 & \lambda + 7 & -20 & 11 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 & -2 \\ -16 & -4 & 14 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = 0,
$$

$$
\sigma(A) = \{\pm 2i, \pm i\};
$$

Все собственные числа комплексные и имеют нулевую действительную часть. Следовательно, они все устойчивые, но не асимптотически. То есть в системе будут незатухающие колебания. Перейдем к вещественной жордановой форме системы, чтобы определить наблюдаемость каждого собственного числа, а далее сделать выводы о наблюдаемости и обнаруживоемости системы

$$
A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -2 & 6 & -3 \\ 2 & -0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -6 & 4 \\ 12 & 4 & -10 & 6 \end{bmatrix},
$$

$$
C_{Jre} = CP_{re} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix};
$$

Итого имеем

$$
J_{re} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \ C_{Jre} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix};
$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Все собственные числа, кроме λ_4, наблюдаемы, так как соответствующие им элементы матрицы выходов C_{Jre} не равны нулю. Из этого нельзя сделать вывод, что система полностью наблюдаема. Достаточное условие полной наблюдаемости нашей системы – не равенство нулю [первого или второго] и [третьего или четвертого] элементов матрицы C_{Jre}. Так как условие выполняется, то система полностью наблюдаема, а значит, и обнаруживаема.

Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Построим в `SIMULINK` схему моделирования системы с наблюдателем состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L\left(C\hat{x} - y\right)$

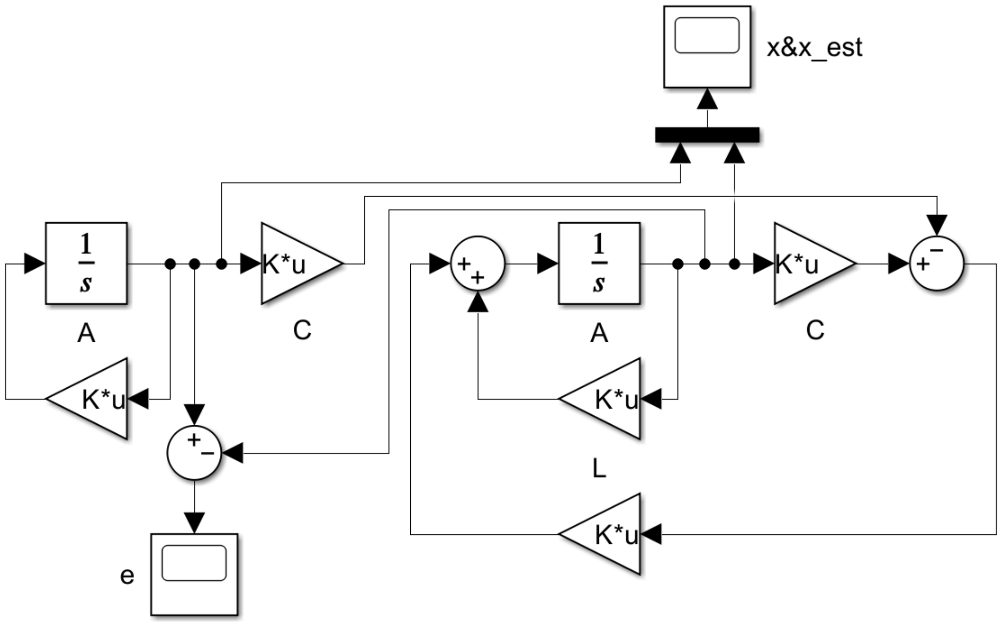


Рис. 5: Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Через один `Scope` отслеживаем сигналы $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ на одном графике, через другой ошибку наблюдателя (невязку) $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Матрица коррекции наблюдателя

Для каждого из предложенных спектров найдем матрицы коррекции наблюдателя L, обеспечивающих соответствующий желаемый спектр. Аналогично первому заданию составим полиномы

$$(\lambda + 2)^4 = \lambda^4 + 8\lambda^3 + 24\lambda^2 + 32\lambda + 16,$$
$$(\lambda + 2)(\lambda + 20)(\lambda + 200)(\lambda + 2000) = \lambda^4 + 2222\lambda^3 + 448440\lambda^2 + 8888000\lambda + 16000000,$$
$$(\lambda + 2 - 3i)(\lambda + 2 + 3i)(\lambda + 2 - 4i)(\lambda + 2 + 4i) = \lambda^4 + 8\lambda^3 + 49\lambda^2 + 132\lambda + 260;$$

Запишем матрицы Γ_i

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16 & -32 & -24 & -8 \end{bmatrix}, \ \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16000000 & -8888000 & -448440 & -2222 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -260 & -132 & -49 & -8 \end{bmatrix};$$

Все матрицы Γ_i составлены по одинаковому принципу, поэтому подберем единый Y такой, чтобы пары (Y, Γ_i) были управляемы. Проверим, вычислив ранги матриц управляемости U_i

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ U_i = \begin{bmatrix} Y & \Gamma_i Y & \Gamma_i^2 Y & \Gamma_i^3 Y \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} Y & \Gamma_1 Y & \Gamma_1^2 Y & \Gamma_1^3 Y \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -16 & 128 \\ 0 & -16 & 128 & -640 \end{bmatrix} = 4,$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} Y & \Gamma_2 Y & \Gamma_2^2 Y & \Gamma_2^3 Y \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\left[10^{13}\cdot\begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0036 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0036 & -7.1822 \end{bmatrix}\right] = 4,$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} Y & \Gamma_3 Y & \Gamma_3^2 Y & \Gamma_3^3 Y \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -260 \\ 0 & 0 & -260 & 2080 \\ 0 & -260 & 2080 & -3900 \end{bmatrix} = 4;$$

Используя пакет `cvx` в `MATLAB`, вычилим матрицы $Q_i \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ как решения уравнения Сильвестра

$$\Gamma_i Q_i - Q_i A = YC$$

После чего вычислим $L_i \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ по формуле

$$L_i = Q_i^{-1} Y$$

Получаем следующие результаты

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -7.7426 & -2.3690 & 6.5528 & -3.5588 \\ 3.6532 & 1.1580 & -3.1096 & 1.9516 \\ 1.1176 & 0.2440 & -1.0528 & 0.3088 \\ -1.4032 & -0.4080 & 1.6096 & -1.2016 \end{bmatrix},\ L_1 = \begin{bmatrix} 10.3333 \\ -21.0000 \\ 7.6667 \\ 5.3333 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} -1.7989 & -0.5605 & 1.4628 & -0.6220 \\ 3.6220 & 1.0996 & -2.9656 & 1.3166 \\ -7.5251 & -1.7746 & 6.5261 & -3.8724 \\ -15.8185 & -4.0663 & 12.1953 & -5.9314 \end{bmatrix},\ L_2 = 10^6\cdot\begin{bmatrix} 0.7378 \\ 7.5493 \\ 6.0674 \\ 5.3319 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} -1.4397 & -0.4741 & 1.0517 & -0.3017 \\ 6.5000 & 1.7241 & -5.3103 & 2.4655 \\ -5.3793 & -1.0172 & 5.2759 & -3.3621 \\ -27.3448 & -6.4310 & 21.4483 & -10.5345 \end{bmatrix},\ L_3 = \begin{bmatrix} 4.0000 \\ 76.0000 \\ 58.6667 \\ 62.6667 \end{bmatrix};$$

Корректность синтеза наблюдателя

Определим собственные числа матриц наблюдателя $(A + L_i C)$ и сравним с соответствующими желаемыми спектрами

$$\sigma\left(A + L_1 C\right) = \sigma\begin{bmatrix} -10.3333 & 1.0000 & 10.3333 & -9.3333 \\ -5.0000 & -7.0000 & -1.0000 & 10.0000 \\ -7.6667 & 1.0000 & 6.6667 & -5.6667 \\ 10.6667 & 4.0000 & -8.6667 & 2.6667 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.0017 \\ -2.0000 + 0.0017i \\ -2.0000 - 0.0017i \\ -1.9983 \end{Bmatrix},$$

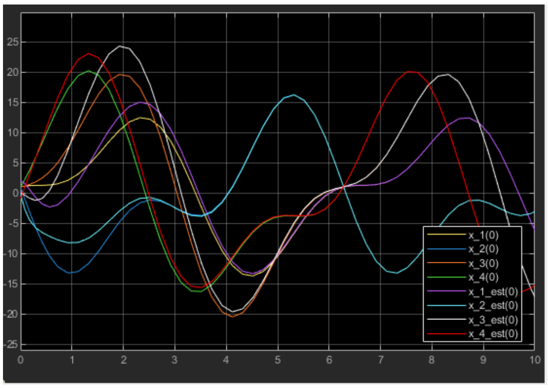
$$\sigma\left(A+L_2C\right)=\sigma\left[10^6\cdot\begin{bmatrix}-0.7378 & 0.0000 & 0.7378 & -0.7378\\ -7.5494 & 0.0000 & 7.5494 & -7.5494\\ -6.0674 & 0.0000 & 6.0674 & -6.0674\\ -5.3318 & 0.0000 & 5.3318 & -5.3318\end{bmatrix}\right]=\begin{Bmatrix}-2000\\ -200\\ -2\\ -20\end{Bmatrix},$$

$$\sigma\left(A+L_3C\right)=\sigma\begin{bmatrix}-4.0000 & 1.0000 & 4.0000 & -3.0000\\ -102.0000 & -7.0000 & 96.0000 & -87.0000\\ -58.6667 & 1.0000 & 57.6667 & -56.6667\\ -46.6667 & 4.0000 & 48.6667 & -54.6667\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}-2\pm 4i\\ -2\pm 3i\end{Bmatrix};$$

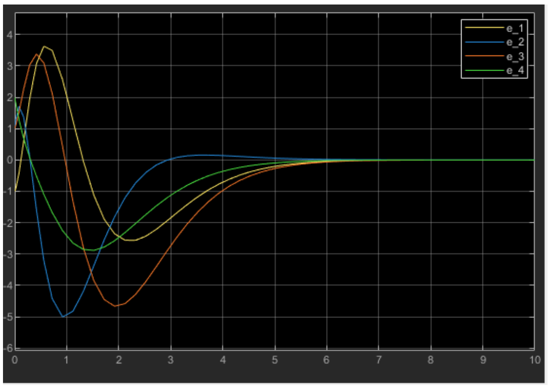
Отклонение в 0.085% для L_1 будем считать погрешностью вычислений в `MATLAB`. Остальные спектры совпали с желаемыми. Наблюдатель синтезирован корректно.

Компьютерное моделирование

Для компьютерного моделирования воспользуемся схемой `SIMULINK`, представленной на рис. 5. Зададим в интеграторы такие начальные условия: для системы $x(0)=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$, для наблюдателя $\hat{x}(0)=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$. Также для одного из случаев приблизим график к началу времени t, чтобы убедиться в том, что каждая координата выходит из своего начального условия

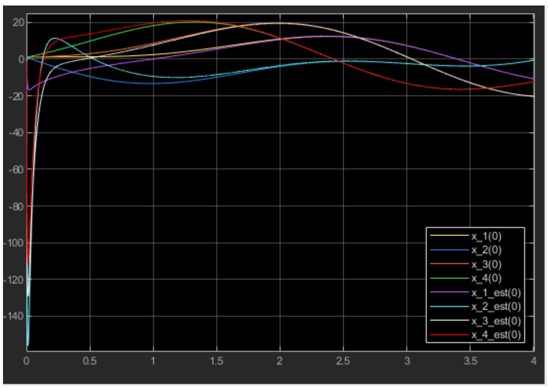


(a) Графики $x(t), \hat{x}(t)$

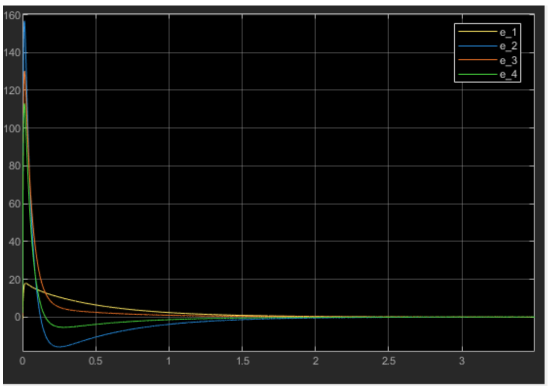


(b) График $e(t)$

Рис. 6: Графики $x(t), \hat{x}(t), e(t)$ для L_1

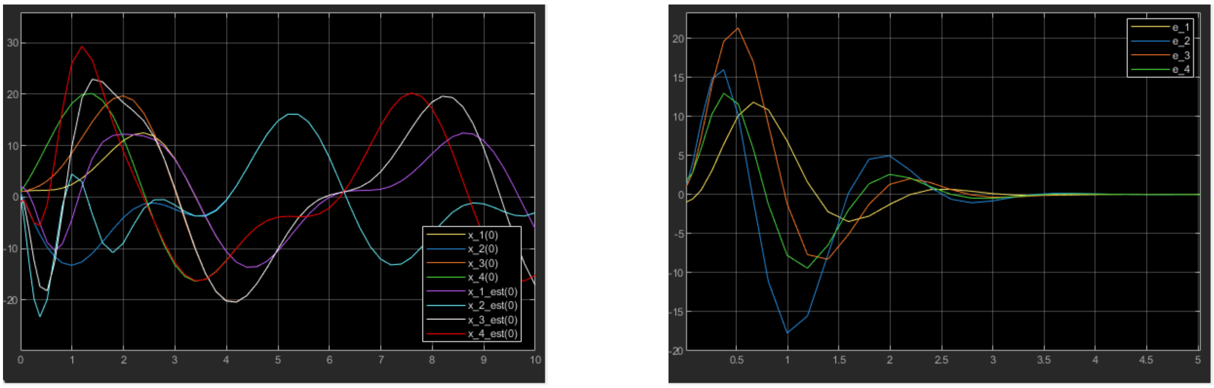


(a) Графики $x(t), \hat{x}(t)$



(b) График $e(t)$

Рис. 7: Графики $x(t), \hat{x}(t), e(t)$ для L_2



(a) Графики $x(t), \hat{x}(t)$

(b) График $e(t)$

Рис. 8: Графики $x(t), \hat{x}(t), e(t)$ для L_3

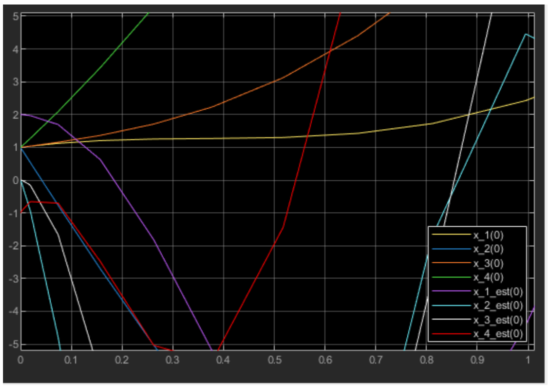


Рис. 9: Проверка начальных условий (случай для L_3)

Сравнение результатов

Видим, как на каждом графике $x(t), \hat{x}(t)$ оценки координат сходятся к настоящим координатам – наблюдатель выполняет свою работу верно. Например, на рис. 6a **голубая** оценка координаты $\hat{x}_2$ сходится к **синей** истинной координате x_2 примерно за $t = 3.5$. Ошибки ожидаемо стремятся к нулю. На рис. 9 видим, что все координаты выходят из своих начальных условий.

На рис. 6a видим, что примерно к $t = 5$ каждая координата наблюдателя сошлась с исходными координатами. Ошибка на рис. 6b сравнительно небольшая, ожидаемо наибольшая в начале, далее плавно и медленно стремится к нулю. Итого: плавное поведение наблюдателя с небольшой ошибкой, но медленное схождение к истинным координатам.

На рис. 7a ситуация обратная – наблюдатель быстро сводит координаты с координатами исходной системы (примерно за $t = 2$), однако ошибка на рис. 7b ожидаемо сравнительно большая. На практике лучше всего соблюдать баланс между величиной ошибки и скоростью сходимости.

На рис. 8a результат в целом схож с результатом для L_1 на рис. 6a. Разница в том, что координаты сходятся немного быстрее, однако, что видно на рис. 8b, появляются лишние осцилляции, то есть система становится менее предсказуемой (есть более значимый второй скачок ошибки выше нуля в сравнении со случаем для L_1 – там почти все ошибки сразу сходятся к нулю снизу).

Вывод

Мы выяснили, что система является полностью наблюдаемой, а следовательно, и обнаруживаемой. Мы вычислили матрицы коррекции наблюдателя и убедились в том, что наблюдатель синтезирован верно. Мы промоделировали систему с наблюдателем состояния и сравнили полученные результаты. В целом выводы аналогичны первому заданию. Лучше всего брать небольшие по модулю рациональные или комплексные числа. Выбор зависит от того, что нам важнее. Если важнее скорость – комплексные. Если точность – рациональные.

Задание 3. Модальное управление по выходу

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость, обнаруживоемость

Найдем собственные числа матрицы A. Программа для вычислений в `MATLAB` представлена в приложении 3 на листинге 3

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma(A) = \{-4, 0, 4, 8\};$$

Собственное число $\lambda_1 = -4$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым и/или ненаблюдаемым. $\lambda_2 = 0$ устойчивое, но не асимптотически. $\lambda_{2,3} > 0$ неустойчивые, нужна управляемость и наблюдаемость. Перейдем к жордановой форме системы

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & -0.25 & -0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & -0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix},$$

$$B_J = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & -0.25 & -0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & -0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$C_J = CP = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \ B_J = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ C_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Матрица B_J не содержит нулевых элементов – все собственные числа матрицы A управляемы, следовательно, система полностью управляема, а значит, и стабилизируема. Матрица C_J содержит нулевой столбец, соответствующий $\lambda_2 = -4$ – это собственное число ненаблюдаемо. Остальные собственные числа наблюдаемы, следовательно, система не полностью наблюдаема. Так как все неустойчивые собственные числа наблюдаемы, а ненаблюдаемое $\lambda_2 < 0$, то система обнаруживаема.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния и закона управления

Построим в `SIMULINK` схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + (B + LD)\,u + L\,(C\hat{x} - y)$ и закона управления $u = K\hat{x}$

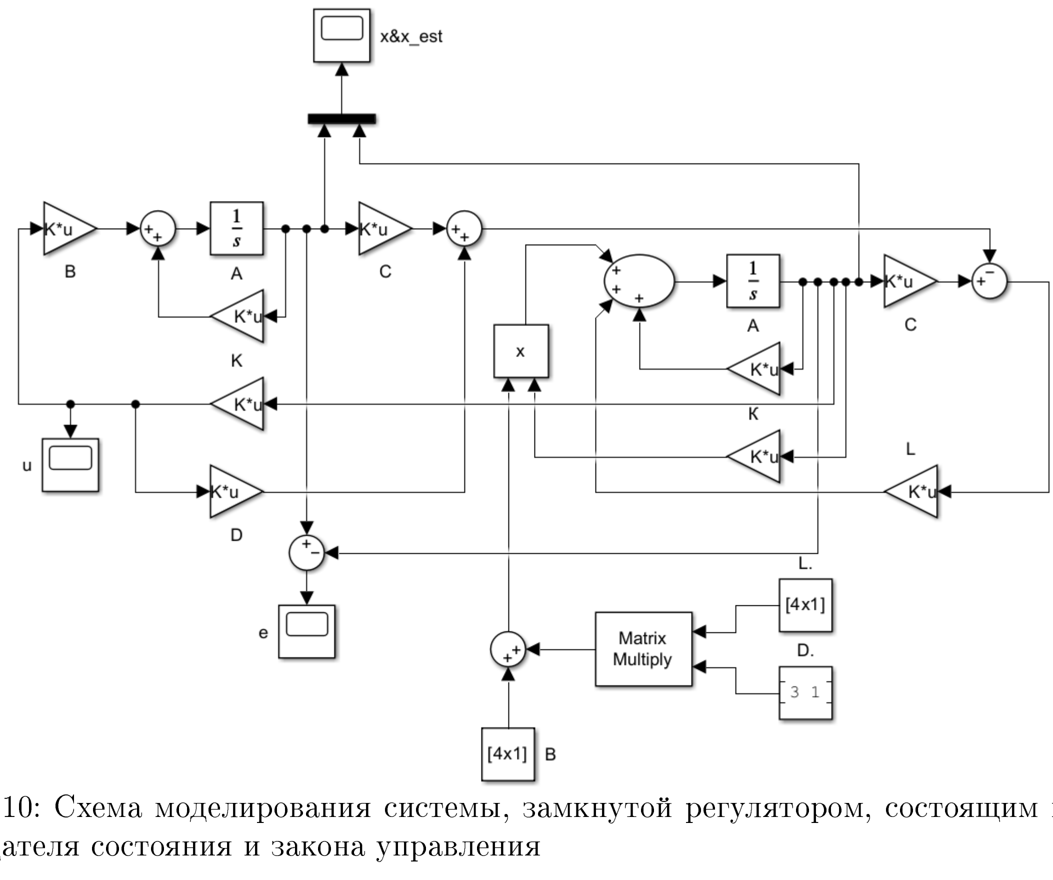


Рис. 10: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния и закона управления

Отслеживаем на одном графике $x(t), \hat{x}(t)$, на другом $e(t)$ аналогично второму заданию. На третьем рассматриваем $u(t)$.

Достижимые спектры и асимптотическая устойчивость

Для асимптотической устойчивости все числа в спектре должны иметь отрицательную действительную часть.

Система полностью управляема, поэтому спектр для матрицы регулятора можно задать любой. Пусть

$$\sigma\left(A+BK\right)=\{-1,-1,-1,-1\}$$

Система не полностью наблюдаема. Значит, ненаблюдаемое собственное число нужно обязательно использовать в желаемом спектре, иначе он будет недостижим. Пусть

$$\sigma\left(A+LC\right)=\{-4,-3,-3,-3\}$$

Матрица регулятора

Синтезируем регулятор K аналогично заданию 1. Запишем полином, составим матрицу Γ_K, зададим Y_K, проверим ранг матрицы наблюдаемости пары (Y_K,Γ_K). После чего решим уравнение Сильвестра относительно P и вычислим K

$$(\lambda+1)^4=\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+4\lambda+1\Rightarrow\Gamma_K=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&-4&-6&-4\end{bmatrix},$$

$$Y_K=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix},\ \operatorname{rank}\begin{bmatrix}Y_K\\Y_K\Gamma_K\\Y_K\Gamma_K^2\\Y_K\Gamma_K^3\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=4,$$

$$AP-P\Gamma_K=BY_K\Rightarrow P=\begin{bmatrix}11.0046&17.8620&11.9525&3.0063\\-10.9986&-17.6516&-11.9451&-2.9809\\12.5015&18.2862&12.0475&3.0184\\13.4953&18.2002&12.0549&2.9944\end{bmatrix},$$

$$K=-Y_KP^{-1}\Rightarrow K=\begin{bmatrix}-2.3888&-1.7772&2.4930&-1.8840\end{bmatrix};$$

Проверим корректность синтеза регулятора – определим собственные числа матрицы замкнутой системы $(A+BK)$ и сравним с соответствующим желаемым спектром

$$\sigma\left(A+BK\right)=\sigma\begin{bmatrix}-2.7777&-3.5544&0.9860&-1.7679\\-9.5553&-5.1087&7.9720&-3.5358\\-18.3330&-12.6631&16.9580&-11.3037\\-17.1107&-10.2174&19.9440&-13.0716\end{bmatrix}=\begin{Bmatrix}-0.9992+0.0008i\\-0.9992-0.0008i\\-1.0008+0.0008i\\-1.0008-0.0008i\end{Bmatrix}$$

Отклонение в 0.08% будем считать погрешностью вычислений в `MATLAB`. Регулятор синтезирован корректно – получили желаемый спектр.

Матрица коррекции наблюдателя

Найдем матрицу коррекции наблюдателя L, обеспечивающую желаемый спектр, аналогично второму заданию (поменялась только размерность выхода)

$$(\lambda+3)^4=\lambda^4+12\lambda^3+54\lambda^2+108\lambda+81\Rightarrow\Gamma_L=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-108&-135&-63&-13\end{bmatrix},$$

$$Y_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathrm{rank}\begin{bmatrix} Y_L & \Gamma_L Y_L & \Gamma_L^2 Y_L & \Gamma_L^3 Y_L \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -108 & -135 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -108 & -135 & 1404 & 1647 \\ 0 & 0 & -108 & -135 & 1404 & 1647 & -11448 & -12906 \end{bmatrix} = 4,$$

$$\Gamma_L Q - QA = Y_L C \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} -0.1175 & 0.0885 & -1.0492 & -1.0781 \\ -0.1944 & -0.0370 & 0.1944 & -0.0370 \\ 0.7595 & -0.6108 & 1.2405 & 1.3893 \\ -0.6643 & 1.8546 & 0.6646 & 1.8544 \end{bmatrix},$$

$$L = Q^{-1} Y_L \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 26040 & 28794 \\ 26032 & 28786 \\ 26035 & 28793 \\ -26037 & -28794 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность синтеза наблюдателя

$$\sigma\left(A + LC\right) = \sigma \begin{bmatrix} 5510 & 52080 & 52080 & 109670 \\ 5510 & 52070 & 52060 & 109640 \\ 5510 & 52070 & 52070 & 109660 \\ -5510 & -52070 & -52070 & -109660 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.0001 \\ -3.0165 \pm 0.0298i \\ -2.9670 \end{Bmatrix}$$

Примем неточности за погрешность вычислений в MATLAB. Тогда, наблюдатель синтезирован корректно – желаемый спектр получен.

Компьютерное моделирование

Для компьютерного моделирования воспользуемся схемой SIMULINK, представленной на рис. 10. Зададим в интеграторы такие начальные условия: для системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$, для наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

...

Вывод

...

Приложения

Приложение 1

```
% input data
A = [5 2 7; 2 1 2; -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);
```

```
% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
Pre(:,1) = P(:,1);
Pre(:,2) = imag(P(:,2));
Pre(:,3) = real(P(:,3));
Pre_inv = Pre^-1;
J_re = Pre_inv * A * Pre;
B_jre = Pre_inv * B;
disp(Pre);
disp(Pre_inv);
disp(J_re);
disp(B_jre);

% G matrices
G1 = [0 1 0; 0 0 1; -8 -12 -6];
Y1 = [1 0 0];
O1 = [Y1; Y1*G1; Y1*G1^2];
rank_O1 = rank(O1);
disp(O1);
disp(rank_O1);

G2 = [0 1 0; 0 0 1; -8000 -4440 -222];
Y2 = [1 0 0];
O2 = [Y2; Y2*G2; Y2*G2^2];
rank_O2 = rank(O2);
disp(O2);
disp(rank_O2);

G3 = [0 1 0; 0 0 1; -80 -48 -6];
Y3 = [1 0 0];
O3 = [Y3; Y3*G3; Y3*G3^2];
rank_O3 = rank(O3);
disp(O3);
disp(rank_O3);

% regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P1(3,3)
variable P2(3,3)
variable P3(3,3)
A*P1-P1*G1 == B*Y1;
A*P2-P2*G2 == B*Y2;
A*P3-P3*G3 == B*Y3;
cvx_end

K1 = -Y1*inv(P1);
disp(P1);
disp(K1);

K2 = -Y2*inv(P2);
disp(P2);
disp(K2);

K3 = -Y3*inv(P3);
disp(P3);
disp(K3);

% A+BK eigenvalues
```

```
ABK1 = A+B*K1;
ABK2 = A+B*K2;
ABK3 = A+B*K3;

ABK1_eig = eig(ABK1);
ABK2_eig = eig(ABK2);
ABK3_eig = eig(ABK3);

disp(ABK1);
disp(ABK1_eig);

disp(ABK2);
disp(ABK2_eig);

disp(ABK3);
disp(ABK3_eig);
```

Листинг 1: Программа для первого задания

Приложение 2

```
% input data
A = [0 1 0 1;
    -26 -7 20 -11;
    0 1 -1 2;
    16 4 -14 8];
C = [-1 0 1 -1];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P_re(:,1) = real(P(:,1));
P_re(:,2) = imag(P(:,2));
P_re(:,3) = real(P(:,3));
P_re(:,4) = imag(P(:,4));
P_re_inv = P_re^-1;
J_re = P_re_inv * A * P_re;
C_jre = C * P_re;
disp(P_re);
disp(P_re_inv);
disp(J_re);
disp(C_jre);

% G matrices
Y = [1; 0; 0; 0];

G1 = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -16 -32 -24 -8];
U1 = [Y G1*Y G1^2*Y G1^3*Y];
disp(U1);
disp(rank(U1));
disp(eig(G1));

G2 = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -16000000 -8888000 -448440 -2222];
U2 = [Y G2*Y G2^2*Y G2^3*Y];
```

```
disp(U2);
disp(rank(U2));
disp(eig(G2));

G3 = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -260 -132 -49 -8];
U3 = [Y G3*Y G3^2*Y G3^3*Y];
disp(U3);
disp(rank(U3));
disp(eig(G3));

% observer synthesis
cvx_begin sdp
variable Q1(4,4)
variable Q2(4,4)
variable Q3(4,4)
G1*Q1-Q1*A == Y*C;
G2*Q2-Q2*A == Y*C;
G3*Q3-Q3*A == Y*C;
cvx_end

L1 = inv(Q1)*Y;
disp(Q1);
disp(L1);

L2 = inv(Q2)*Y;
disp(Q2);
disp(L2);

L3 = inv(Q3)*Y;
disp(Q3);
disp(L3);

% A+LC eigenvalues
ALC1 = A+L1*C;
ALC2 = A+L2*C;
ALC3 = A+L3*C;

ALC1_eig = eig(ALC1);
ALC2_eig = eig(ALC2);
ALC3_eig = eig(ALC3);

disp(ALC1);
disp(ALC1_eig);

disp(ALC2);
disp(ALC2_eig);

disp(ALC3);
disp(ALC3_eig);
```

Листинг 2: Программа для второго задания

Приложение 3

```
% input data
A = [2 0 -4 2;
     0 2 -2 4;
```

```
    -4 -2 2 0;
    2 4 0 2];
B = [2;4;6;8];
C = [-2 2 2 2;
    2 0 0 2];
D = [3;1];

% A eigenvalues
disp(eig(A));

% controlability
U = [B A*B A^2*B A^3*B];
disp(rank(U));

% observability
V = [C;C*A;C*A^2;C*A^3];
disp(rank(V));

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P_inv = inv(P);
disp(P);
disp(J);
disp(P_inv);

B_new = P_inv*B;
C_new = C*P;
disp(B_new);
disp(C_new);

% G control
G_K = [0 1 0 0;
    0 0 1 0;
    0 0 0 1;
    -1 -4 -6 -4];
Y_K = [1 0 0 0];
O = [Y_K; Y_K*G_K; Y_K*G_K^2; Y_K*G_K^3];
disp(O);
disp(rank(O));

% regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P(4,4)
A*P-P*G_K == B*Y_K;
cvx_end

K = -Y_K*inv(P);
disp(P);
disp(K);

% A+BK eigenvalues
ABK = A+B*K;
disp(ABK);
disp(eig(ABK));

% G observe
G_L = [0 1 0 0;
    0 0 1 0;
```

```
        0 0 0 1;
        -108 -135 -63 -13];
    Y_L = [1 0;
        0 1;
        0 0;
        0 0];
    U = [Y_L G_L*Y_L G_L^2*Y_L G_L^3*Y_L];
    disp(U);
    disp(rank(U));

    % observer synthesis
    cvx_begin sdp
    variable Q(4,4)
    G_L*Q-Q*A == Y_L*C;
    cvx_end

    L = inv(Q)*Y_L;
    disp(Q);
    disp(L);

    % A+LC eigenvalues
    ALC = A+L*C;
    disp(ALC);
    disp(eig(ALC));
```

Листинг 3: Программа для третьего задания