

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «МОДАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ И
НАБЛЮДАТЕЛИ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Задание 1. Модальный регулятор	2
1.1	Управляемость и стабилизируемость	2
1.2	Схема моделирования системы, замкнутой регулятором	3
1.3	Достижимые спектры	3
1.4	Матрица регулятора	3
1.5	Корректность синтеза регулятора	5
1.6	Компьютерное моделирование	5
1.7	Сравнение результатов	6
1.8	Вывод	6
2	Задание 2. Наблюдатель полного порядка	7
2.1	Наблюдаемость и обнаруживаемость	7
2.2	Схема моделирования системы с наблюдателем состояния	8
2.3	Необходимость в наблюдателе состояния	8
2.4	Матрица коррекции наблюдателя	8
2.5	Корректность синтеза регулятора	8
2.6	Компьютерное моделирование	8
2.7	Сравнение результатов	8
2.8	Вывод	9
3	Приложения	9
3.1	Приложение 1	9
3.2	Приложение 2	10

Задание 1. Модальный регулятор

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma(A + BK) = \begin{bmatrix} \{-2, -2, -2\}, \\ \{-3, -3, -3\}, \\ \{-2, -20, -200\}, \\ \{-3, -30, -300\}, \\ \{-2, -2 \pm 6i\}, \\ \{-3, -3 \pm 9i\}; \end{bmatrix}$$

Управляемость и стабилизируемость

Найдем собственные числа матрицы A с помощью MATLAB (программу см. листинг 1 в приложении 1)

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 & -7 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 2 & 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}$$

$\lambda_1 = -2 < 0$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ имеют положительные действительные части – неустойчивые, нужна управляемость. Определим управляемость собственных чисел через жорданово разложение (приведение комплексной формы к вещественной аналогично первой лабораторной работе)

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Собственное число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, так как первый элемент в матрице входных воздействий B_{Jre} равен нулю. Остальные собственные числа управляемые. Следовательно, система не полностью управляема. Достаточное условие полной управляемости системы в нашем случае – не равенство нулю первого и [второго или третьего] элементов матрицы B_{Jre} . Оно не выполняется. Так как все неустойчивые собственные числа управляемы, то система стабилизируема.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Построим схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$, замкнутой регулятором $u = Kx$, используя SIMULINK

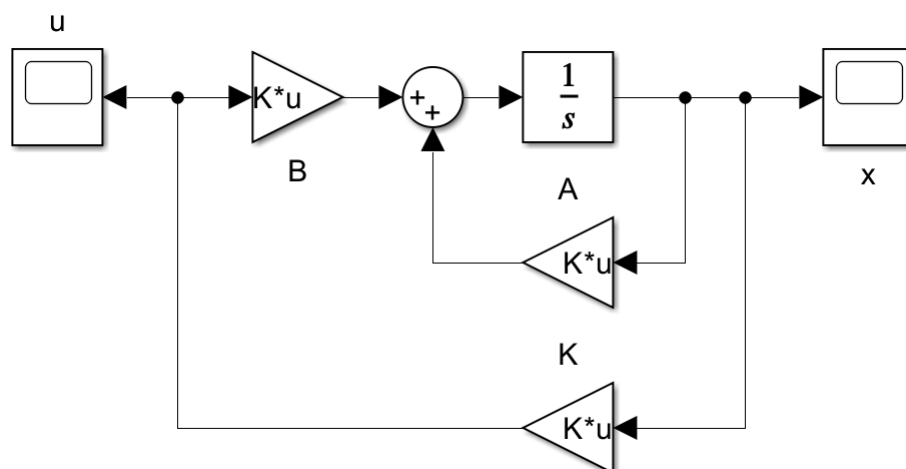


Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Достижимые спектры

Рассмотрим предложенные спектры замкнутой системы $(A + BK)$ и определим, какие из них достижимы. Мы хотим, чтобы матрица $(A + BK)$ была устойчивой, то есть все ее собственные числа имели отрицательную действительную часть. В нашем случае комплексная пара $\lambda_{2,3}$ являются неустойчивыми, но управляемыми – их можно переместить в устойчивую область (подобрать любые числа, меньшие нуля). Собственное число $\lambda_1 = -2$ устойчивое, но неуправляемое – его не получится переместить куда-либо. Это означает, что спектр $\sigma(A + BK)$ должен содержать это неуправляемое число, иначе регулятор не будет выполнять свою функцию, мы потеряем собственное число матрицы A . Таким образом, желаемый спектр должен содержать все неуправляемые (но устойчивые) собственные числа матрицы A , при этом остальные числа могут быть любыми, но устойчивыми. Важно уточнить, что если некоторое собственное число матрицы A неустойчиво и неуправляемо, то система не стабилизируема – модальный регулятор применить не получится.

Исходя из наших рассуждений выше, достижимыми будут следующие спектры замкнутой системы

$$\sigma(A + BK) = \begin{cases} \{-2, -2, -2\}, \\ \{-2, -20, -200\}, \\ \{-2, -2 \pm 6i\}; \end{cases}$$

Остальные спектры не содержат неуправляемое собственное число $\lambda_1 = -2$.

Матрица регулятора

Для каждого из достижимых спектров, определенных в предыдущем пункте, найдем соответствующие матрицы регулятора K , приводящие спектр замкнутой системы к желаемому.

Рассмотрим спектр $\sigma(A + BK) = \{-2, -2, -2\}$. Запишем полином Ньютона третьего порядка с $\omega_0 = 1$

$$(\lambda + 2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

Составим по коэффициентам матрицу Γ_1

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$$

Подберем Y_1 такой, чтобы пара (Y_1, Γ_1) была наблюдаема. Проверим, вычислив ранг матрицы наблюдаемости

$$Y_1 = [1 \ 0 \ 0], \text{ rank } \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_1 \Gamma_1 \\ Y_1 \Gamma_1^2 \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Теперь, используя пакет `svh` в **MATLAB**, вычислим матрицу $P_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ как решение уравнения Сильвестра

$$\begin{aligned} AP_1 - P_1 \Gamma_1 &= BY_1 \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0] \\ P_1 &= \begin{bmatrix} 0.4455 & -0.0701 & -0.0288 \\ -0.0759 & -0.1036 & -0.0181 \\ 0.1649 & 0.1926 & 0.0404 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Далее вычислим матрицу регулятора $K_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ по формуле

$$\begin{aligned} K_1 &= -Y_1 P_1^{-1} \\ K_1 &= [-1.800 \quad -7.043 \quad -4.443] \end{aligned}$$

Повторим шаги для нахождения остальных K_i . Рассмотрим спектры

$$\sigma(A + BK) = \{-2, -20, -200\}, \quad \sigma(A + BK) = \{-2, -2 \pm 6i\}$$

Найдем их полиномы

$$\begin{aligned} (\lambda + 2)(\lambda + 20)(\lambda + 200) &= \lambda^3 + 222\lambda^2 + 4440\lambda + 8000 \\ (\lambda + 2)(\lambda + 2 - 6i)(\lambda + 2 + 6i) &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 48\lambda + 80 \end{aligned}$$

Аналогично запишем матрицы Γ_i

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8000 & -4440 & -222 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -80 & -48 & -6 \end{bmatrix}$$

Подберем Y_i и выполним проверку ранга

$$Y_{2,3} = Y_1 = [1 \ 0 \ 0] = Y, \text{ rank } \begin{bmatrix} Y \\ Y \Gamma_2 \\ Y \Gamma_2^2 \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} Y \\ Y \Gamma_3 \\ Y \Gamma_3^2 \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Найдем $P_{2,3}$ и $K_{2,3}$ тем же способом

$$\begin{aligned} P_2 &= \begin{bmatrix} 0.2259 & 0.0053 & 0.0000 \\ 0.0612 & 0.0012 & 0.0000 \\ 0.2253 & 0.0146 & 0.0001 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0.2546 & 0.0351 & -0.0026 \\ 0.0744 & 0.0055 & -0.0012 \\ 0.2550 & 0.0275 & 0.0094 \end{bmatrix} \\ K_2 &= [754.2 \quad -2553.6 \quad -67.0], \quad K_3 = [5.4000 \quad -25.9424 \quad -1.7424] \end{aligned}$$

Корректность синтеза регулятора

Определим собственные числа каждой матрицы замкнутой системы $(A + BK_i)$ и сравним с соответствующими желаемыми спектрами

$$\sigma(A + BK_1) = \sigma \begin{bmatrix} -0.400 & -19.129 & -6.329 \\ 0.200 & -6.043 & -2.443 \\ -0.200 & 4.043 & 0.443 \end{bmatrix} = \{-2, -2, -2\},$$

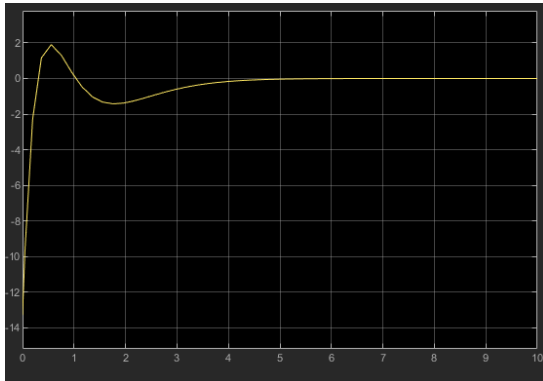
$$\sigma(A + BK_2) = \sigma \begin{bmatrix} 2267.6 & -7658.7 & -193.9 \\ 756.2 & -2552.6 & -65.0 \\ -756.2 & 2550.6 & 63.0 \end{bmatrix} = \{-2, -20, -200\},$$

$$\sigma(A + BK_3) = \sigma \begin{bmatrix} 21.2000 & -75.8273 & 1.7727 \\ 7.4000 & -24.9424 & 0.2576 \\ -7.4000 & 22.9424 & -2.2576 \end{bmatrix} = \{-2, -2 \pm 6i\}$$

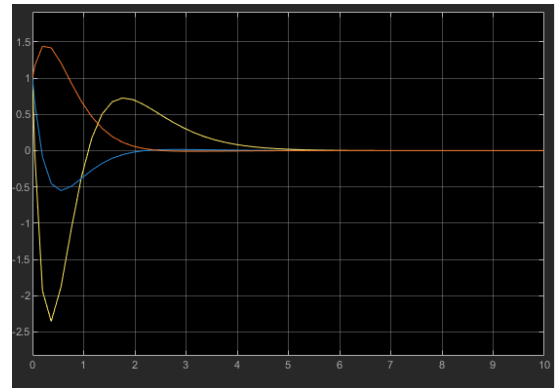
Видим, что спектры совпадают с желаемыми – регулятор синтезирован корректно.

Компьютерное моделирование

Для компьютерного моделирования воспользуемся схемой SIMULINK, представленной на рис. 1. Зададим в интегратор начальное условие $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$

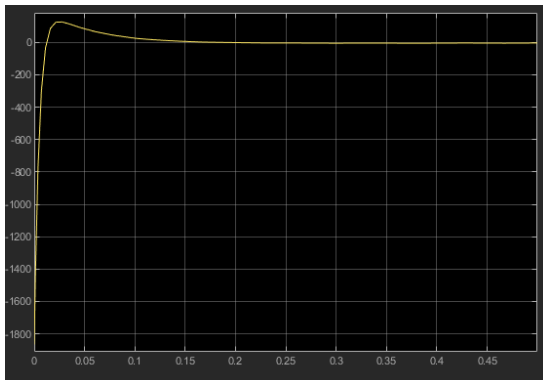


(a) График $u(t)$

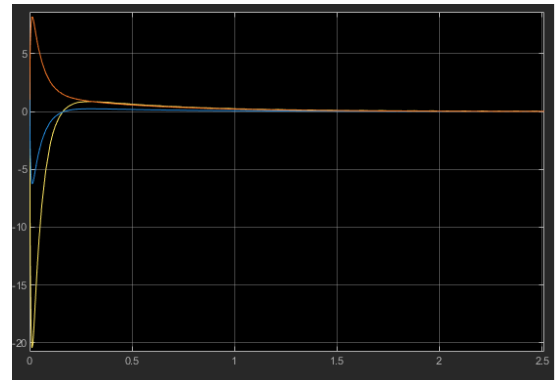


(b) График $x(t)$

Рис. 2: Графики $u(t), x(t)$ для K_1

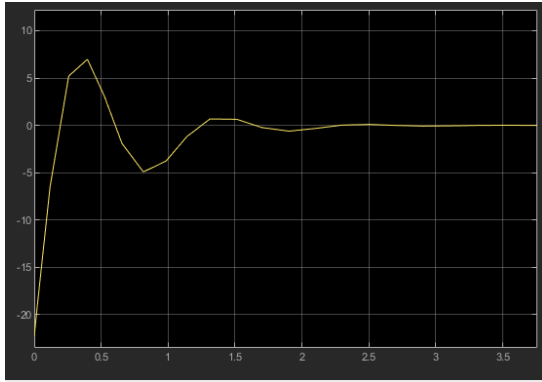


(a) График $u(t)$

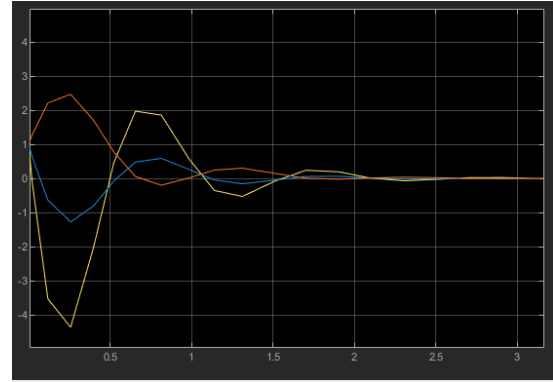


(b) График $x(t)$

Рис. 3: Графики $u(t), x(t)$ для K_2



(a) График $u(t)$



(b) График $x(t)$

Рис. 4: Графики $u(t), x(t)$ для K_3

Сравнение результатов

Сопоставим полученные результаты компьютерного моделирования для рассмотренных спектров, оценим возможные сравнительные преимущества и недостатки каждого из них.

На каждом рисунке система $x(t)$ стабилизировалась – все координаты пришли в ноль. Управления $u(t)$ сошлись к нулю – регуляторы выполнили свою задачу и больше не требуют активного управления.

На рис. 2 видим, что управление $u(t)$ достаточно плавное, имеет небольшое перерегулирование в сравнении с другими графиками. На графике $x(t)$ система ожидаемо медленно и плавно затухает.

На рис. 3 наблюдаем быстрое стабилизирование системы, однако при этом присутствуют большие начальные отклонения. В сравнении с другими графиками имеется ожидаемо наибольшее перерегулирование. Получили достаточно агрессивный регулятор.

На рис. 4 система, вследствие наличия комплексных собственных чисел, приобрела сравнительно небольшие осцилляции. По скорости затухания колебаний результат получился средним (быстрее, чем K_1 ; медленнее, чем K_2). Система выглядит менее предсказуемо в сравнении с остальными результатами.

Вывод

В ходе выполнения задания мы выяснили, что система не полностью управляема, но стабилизируема. Мы нашли достижимые спектры по принципу наличия в них неуправляемых (но устойчивых) собственных чисел матрицы A . Мы вычислили матрицы регулятора, убедились в корректности синтеза каждого регулятора, после чего провели компьютерное моделирование. В ходе сравнения результатов было выяснено, что при маленьких собственных числах в спектре система медленно и плавно затухает со сравнительно небольшим перерегулированием. При больших по модулю собственных числах система быстро стабилизируется, но имеет сравнительно большое перерегулирование. Наличие комплексных собственных чисел создаст некоторые осцилляции в системе, из-за чего она может быть менее предсказуема. При этом скорость затухания системы выше, чем при небольших по модулю числах, принадлежащих множеству рациональных чисел.

Задание 2. Наблюдатель полного порядка

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad -1],$$

$$\sigma(A + LC) = \begin{bmatrix} \{-2, -2, -2, -2\}, \\ \{-2, -20, -200, -2000\}, \\ \{-2 \pm 3i, -2 \pm 4i\}; \end{bmatrix}$$

Наблюдаемость и обнаруживаемость

Найдем собственные числа матрицы A . Программа для вычислений в MATLAB находится в приложении 2 на листинге 2

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ 26 & \lambda + 7 & -20 & 11 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 & -2 \\ -16 & -4 & 14 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma(A) = \{\pm 2i, \pm i\}$$

Все собственные числа комплексные и имеют нулевую действительную часть. Следовательно, они все устойчивые, но не асимптотически. То есть в системе будут незатухающие колебания. Перейдем к вещественной жордановой форме системы, чтобы определить наблюдаемость каждого собственного числа, а далее сделать выводы о наблюдаемости и обнаруживаемости системы

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -2 & 6 & -3 \\ 2 & -0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -6 & 4 \\ 12 & 4 & -10 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C_{Jre} = C P_{re} = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad -1] \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [-0.5 \quad -0.5 \quad -0.5 \quad 0]$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{Jre} = [-0.5 \quad -0.5 \quad -0.5 \quad 0]$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Все собственные числа, кроме λ_4 , наблюдаемы, так как соответствующие им элементы матрицы выходов C_{Jre} не равны нулю. Из этого нельзя сделать вывод, что система полностью наблюдаема. Достаточное условие полной наблюдаемости нашей системы – не равенство нулю [первого или второго] и [третьего или четвертого] элементов матрицы C_{Jre} . Так как условие выполняется, то система полностью наблюдаема, а значит, и обнаруживаема.

Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Построим в SIMULINK схему моделирования системы с наблюдателем состояния

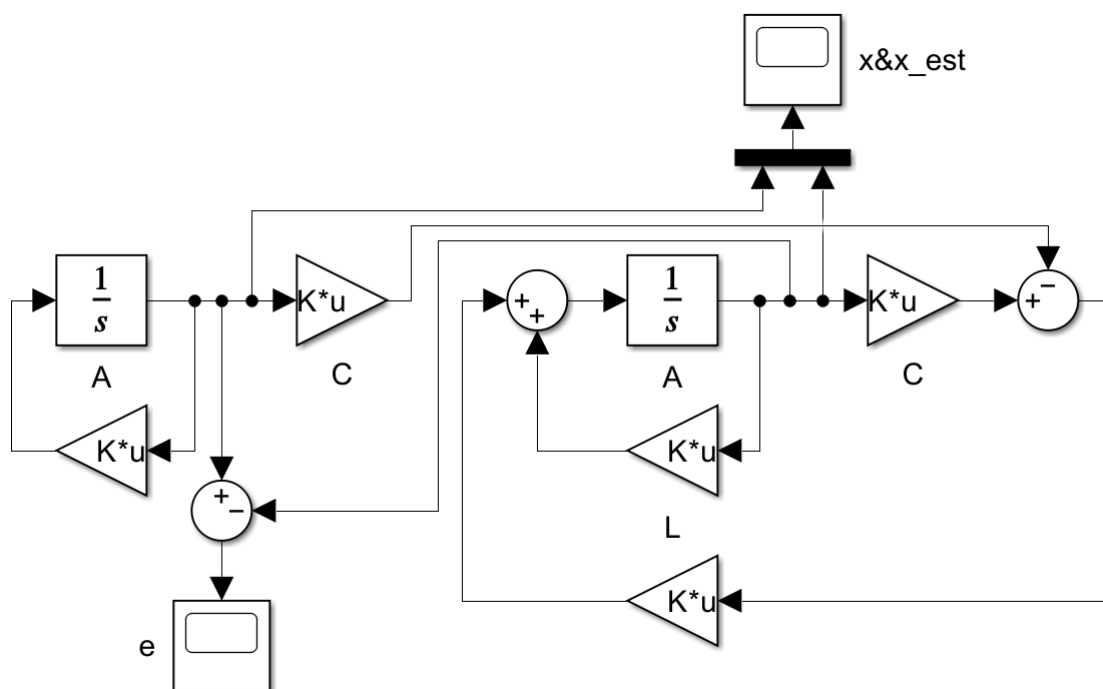
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$$


Рис. 5: Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Необходимость в наблюдателе состояния

Может система и является полностью наблюдаемой, но устойчивой она является не асимптотически. В системе будут незатухающие колебания, которые нам не нужны. Они могут и не меняются со временем, но при этом присутствуют. Если мы приведем наблюдателем состояния систему к спектру с числами, имеющими отрицательную вещественную часть, то эта система будет асимптотически устойчивой. В условии как раз даны именно такие спектры.

Матрица коррекции наблюдателя

...

Корректность синтеза регулятора

...

Компьютерное моделирование

...

Сравнение результатов

...

Вывод

...

Приложения

Приложение 1

```
% input data
A = [5 2 7; 2 1 2; -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
Pre(:,1) = P(:,1);
Pre(:,2) = imag(P(:,2));
Pre(:,3) = real(P(:,3));
Pre_inv = Pre^-1;
J_re = Pre_inv * A * Pre;
B_jre = Pre_inv * B;
disp(Pre);
disp(Pre_inv);
disp(J_re);
disp(B_jre);

% G matrices
G1 = [0 1 0; 0 0 1; -8 -12 -6];
Y1 = [1 0 0];
O1 = [Y1; Y1*G1; Y1*G1^2];
rank_01 = rank(O1);
disp(O1);
disp(rank_01);

G2 = [0 1 0; 0 0 1; -8000 -4440 -222];
Y2 = [1 0 0];
O2 = [Y2; Y2*G2; Y2*G2^2];
rank_02 = rank(O2);
disp(O2);
disp(rank_02);

G3 = [0 1 0; 0 0 1; -80 -48 -6];
Y3 = [1 0 0];
O3 = [Y3; Y3*G3; Y3*G3^2];
rank_03 = rank(O3);
disp(O3);
disp(rank_03);

% regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P1(3,3)
variable P2(3,3)
variable P3(3,3)
A*P1-P1*G1 == B*Y1;
```

```

A*P2-P2*G2 == B*Y2;
A*P3-P3*G3 == B*Y3;
cvx_end

K1 = -Y1*inv(P1);
disp(P1);
disp(K1);

K2 = -Y2*inv(P2);
disp(P2);
disp(K2);

K3 = -Y3*inv(P3);
disp(P3);
disp(K3);

% A+BK eigenvalues
ABK1 = A+B*K1;
ABK2 = A+B*K2;
ABK3 = A+B*K3;

ABK1_eig = eig(ABK1);
ABK2_eig = eig(ABK2);
ABK3_eig = eig(ABK3);

disp(ABK1);
disp(ABK1_eig);

disp(ABK2);
disp(ABK2_eig);

disp(ABK3);
disp(ABK3_eig);

```

Листинг 1: Программа для первого задания

Приложение 2

```
to be done
```

Листинг 2: Программа для второго задания