

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «МОДАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ И
НАБЛЮДАТЕЛИ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Задание 1. Модальный регулятор	2
1.1	Управляемость и стабилизируемость	2
1.2	Схема моделирования системы, замкнутой регулятором	3
1.3	Достижимые спектры	3
1.4	Матрица регулятора	3
1.5	Корректность синтеза регулятора	5
1.6	Компьютерное моделирование	5
1.7	Сравнение результатов	6
1.8	Вывод	6
2	Задание 2. Наблюдатель полного порядка	7
2.1	Наблюдаемость и обнаруживаемость	7
2.2	Схема моделирования системы с наблюдателем состояния	8
2.3	Матрица коррекции наблюдателя	8
2.4	Корректность синтеза регулятора	9
2.5	Компьютерное моделирование	10
2.6	Сравнение результатов	11
2.7	Вывод	12
3	Приложения	12
3.1	Приложение 1	12
3.2	Приложение 2	13

Задание 1. Модальный регулятор

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma(A + BK) = \begin{bmatrix} \{-2, -2, -2\}, \\ \{-3, -3, -3\}, \\ \{-2, -20, -200\}, \\ \{-3, -30, -300\}, \\ \{-2, -2 \pm 6i\}, \\ \{-3, -3 \pm 9i\}; \end{bmatrix}$$

Управляемость и стабилизируемость

Найдем собственные числа матрицы A с помощью MATLAB (программу см. листинг 1 в приложении 1)

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 & -7 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 2 & 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\};$$

$\lambda_1 = -2 < 0$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ имеют положительные действительные части – неустойчивые, нужна управляемость. Определим управляемость собственных чисел через жорданово разложение (приведение комплексной формы к вещественной аналогично первой лабораторной работе)

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Собственное число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, так как первый элемент в матрице входных воздействий B_{Jre} равен нулю. Остальные собственные числа управляемые. Следовательно, система не полностью управляема. Достаточное условие полной управляемости системы в нашем случае – не равенство нулю первого и [второго или третьего] элементов матрицы B_{Jre} . Оно не выполняется. Так как все неустойчивые собственные числа управляемы, то система стабилизируема.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Построим схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$, замкнутой регулятором $u = Kx$, используя SIMULINK

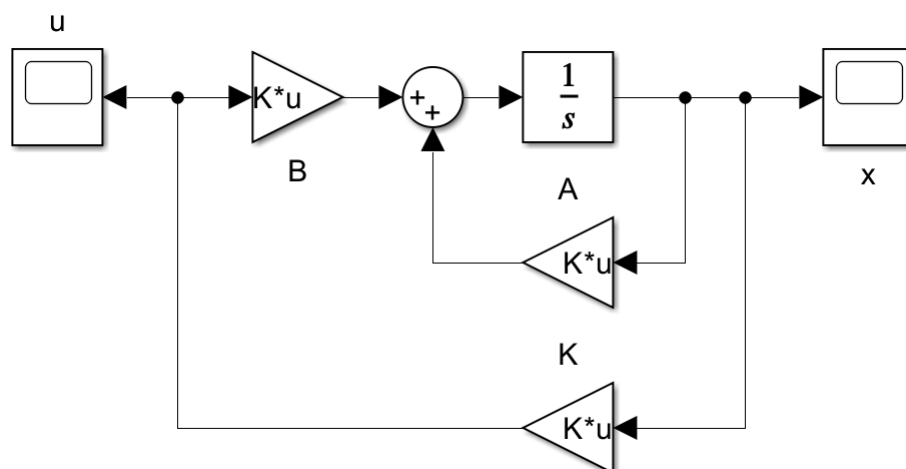


Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Достижимые спектры

Рассмотрим предложенные спектры замкнутой системы $(A + BK)$ и определим, какие из них достижимы. Мы хотим, чтобы матрица $(A + BK)$ была устойчивой, то есть все ее собственные числа имели отрицательную действительную часть. В нашем случае комплексная пара $\lambda_{2,3}$ являются неустойчивыми, но управляемыми – их можно переместить в устойчивую область (подобрать любые числа, меньшие нуля). Собственное число $\lambda_1 = -2$ устойчивое, но неуправляемое – его не получится переместить куда-либо. Это означает, что спектр $\sigma(A + BK)$ должен содержать это неуправляемое число, иначе регулятор не будет выполнять свою функцию, мы потеряем собственное число матрицы A . Таким образом, желаемый спектр должен содержать все неуправляемые (но устойчивые) собственные числа матрицы A , при этом остальные числа могут быть любыми, но устойчивыми. Важно уточнить, что если некоторое собственное число матрицы A неустойчиво и неуправляемо, то система не стабилизируема – модальный регулятор применить не получится.

Исходя из наших рассуждений выше, достижимыми будут следующие спектры замкнутой системы

$$\sigma(A + BK) = \begin{cases} \{-2, -2, -2\}, \\ \{-2, -20, -200\}, \\ \{-2, -2 \pm 6i\}; \end{cases}$$

Остальные спектры не содержат неуправляемое собственное число $\lambda_1 = -2$.

Матрица регулятора

Для каждого из достижимых спектров, определенных в предыдущем пункте, найдем соответствующие матрицы регулятора K , приводящие спектр замкнутой системы к желаемому.

Рассмотрим спектр $\sigma(A + BK) = \{-2, -2, -2\}$. Запишем полином Ньютона третьего порядка с $\omega_0 = 1$

$$(\lambda + 2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

Составим матрицу Γ_1 в канонической наблюдаемой форме по коэффициентам найденного полинома

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$$

Подберем Y_1 такой, чтобы пара (Y_1, Γ_1) была наблюдаема. Проверим, вычислив ранг матрицы наблюдаемости

$$Y_1 = [1 \ 0 \ 0], \text{ rank } \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_1 \Gamma_1 \\ Y_1 \Gamma_1^2 \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3;$$

Теперь, используя пакет `svx` в `MATLAB`, вычислим матрицу $P_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ как решение уравнения Сильвестра

$$\begin{aligned} AP_1 - P_1 \Gamma_1 &= BY_1 \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0], \\ P_1 &= \begin{bmatrix} 0.4455 & -0.0701 & -0.0288 \\ -0.0759 & -0.1036 & -0.0181 \\ 0.1649 & 0.1926 & 0.0404 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

Далее вычислим матрицу регулятора $K_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ по формуле

$$\begin{aligned} K_1 &= -Y_1 P_1^{-1}, \\ K_1 &= [-1.800 \quad -7.043 \quad -4.443]; \end{aligned}$$

Повторим шаги для нахождения остальных K_i . Рассмотрим спектры

$$\sigma(A + BK) = \{-2, -20, -200\}, \quad \sigma(A + BK) = \{-2, -2 \pm 6i\};$$

Найдем их полиномы

$$\begin{aligned} (\lambda + 2)(\lambda + 20)(\lambda + 200) &= \lambda^3 + 222\lambda^2 + 4440\lambda + 8000, \\ (\lambda + 2)(\lambda + 2 - 6i)(\lambda + 2 + 6i) &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 48\lambda + 80; \end{aligned}$$

Аналогично запишем матрицы Γ_i

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8000 & -4440 & -222 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -80 & -48 & -6 \end{bmatrix};$$

Подберем Y_i и выполним проверку ранга

$$Y_{2,3} = Y_1 = [1 \ 0 \ 0] = Y, \text{ rank } \begin{bmatrix} Y \\ Y \Gamma_2 \\ Y \Gamma_2^2 \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} Y \\ Y \Gamma_3 \\ Y \Gamma_3^2 \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3;$$

Найдем $P_{2,3}$ и $K_{2,3}$ тем же способом

$$\begin{aligned} P_2 &= \begin{bmatrix} 0.2259 & 0.0053 & 0.0000 \\ 0.0612 & 0.0012 & 0.0000 \\ 0.2253 & 0.0146 & 0.0001 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0.2546 & 0.0351 & -0.0026 \\ 0.0744 & 0.0055 & -0.0012 \\ 0.2550 & 0.0275 & 0.0094 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= [754.2 \quad -2553.6 \quad -67.0], \quad K_3 = [5.4000 \quad -25.9424 \quad -1.7424]; \end{aligned}$$

Корректность синтеза регулятора

Определим собственные числа каждой матрицы замкнутой системы $(A + BK_i)$ и сравним с соответствующими желаемыми спектрами

$$\sigma(A + BK_1) = \sigma \begin{bmatrix} -0.400 & -19.129 & -6.329 \\ 0.200 & -6.043 & -2.443 \\ -0.200 & 4.043 & 0.443 \end{bmatrix} = \{-2, -2, -2\},$$

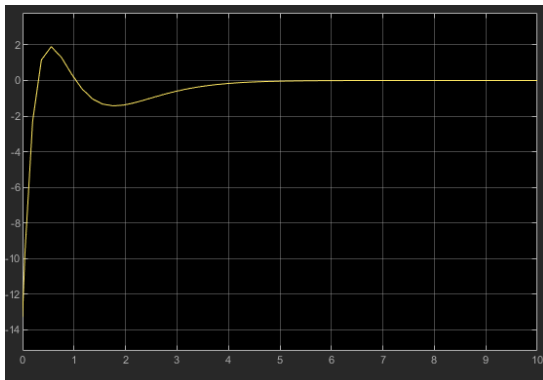
$$\sigma(A + BK_2) = \sigma \begin{bmatrix} 2267.6 & -7658.7 & -193.9 \\ 756.2 & -2552.6 & -65.0 \\ -756.2 & 2550.6 & 63.0 \end{bmatrix} = \{-2, -20, -200\},$$

$$\sigma(A + BK_3) = \sigma \begin{bmatrix} 21.2000 & -75.8273 & 1.7727 \\ 7.4000 & -24.9424 & 0.2576 \\ -7.4000 & 22.9424 & -2.2576 \end{bmatrix} = \{-2, -2 \pm 6i\};$$

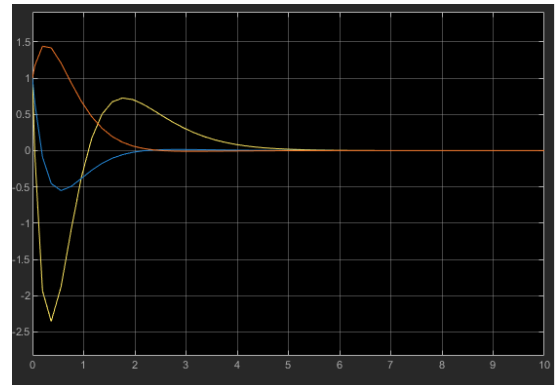
Видим, что спектры совпадают с желаемыми – регулятор синтезирован корректно.

Компьютерное моделирование

Для компьютерного моделирования воспользуемся схемой SIMULINK, представленной на рис. 1. Зададим в интегратор начальное условие $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$

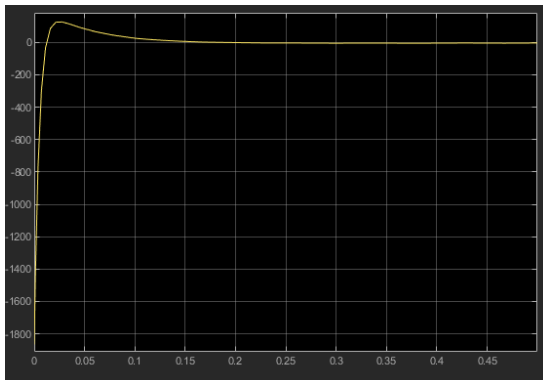


(a) График $u(t)$

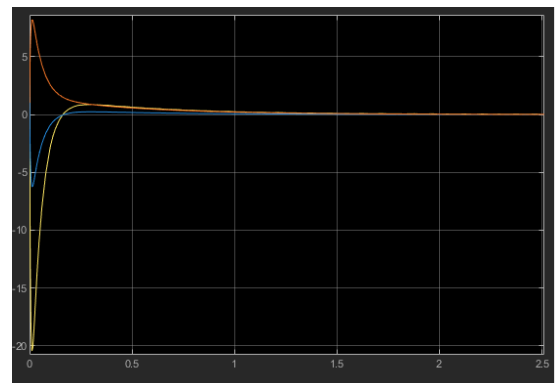


(b) График $x(t)$

Рис. 2: Графики $u(t), x(t)$ для K_1

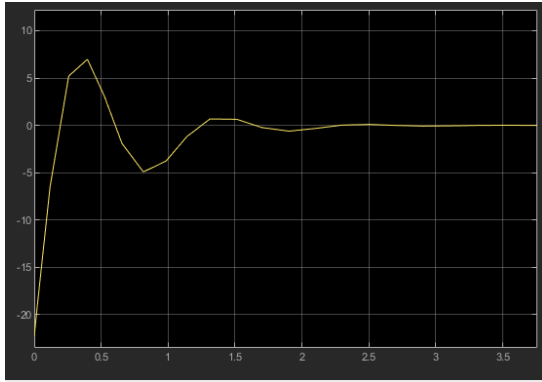


(a) График $u(t)$

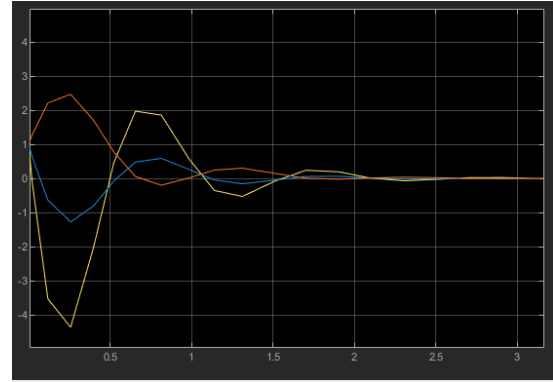


(b) График $x(t)$

Рис. 3: Графики $u(t), x(t)$ для K_2



(a) График $u(t)$



(b) График $x(t)$

Рис. 4: Графики $u(t), x(t)$ для K_3

Сравнение результатов

Сопоставим полученные результаты компьютерного моделирования для рассмотренных спектров, оценим возможные сравнительные преимущества и недостатки каждого из них.

На каждом рисунке система $x(t)$ стабилизировалась – все координаты пришли в ноль, выходя из 1. Управления $u(t)$ сошлись к нулю – регуляторы выполнили свою задачу и больше не требуют активного управления.

На рис. 2 видим, что управление $u(t)$ достаточно плавное, имеет небольшое перерегулирование в сравнении с другими графиками. На графике $x(t)$ система ожидаемо медленно и плавно затухает.

На рис. 3 наблюдаем быстрое стабилизирование системы, однако при этом присутствуют большие начальные отклонения. В сравнении с другими графиками имеется ожидаемо наибольшее перерегулирование. Получили достаточно агрессивный регулятор.

На рис. 4 система, вследствие наличия комплексных собственных чисел, приобрела сравнительно небольшие осцилляции. По скорости затухания колебаний результат получился средним (быстрее, чем K_1 ; медленнее, чем K_2). Система выглядит менее предсказуемо в сравнении с остальными результатами.

Вывод

В ходе выполнения задания мы выяснили, что система не полностью управляема, но стабилизируема. Мы нашли достижимые спектры по принципу наличия в них неуправляемых (но устойчивых) собственных чисел матрицы A . Мы вычислили матрицы регулятора, убедились в корректности синтеза каждого регулятора, после чего провели компьютерное моделирование. В ходе сравнения результатов было выяснено, что при маленьких собственных числах в спектре система медленно и плавно затухает со сравнительно небольшим перерегулированием. При больших по модулю собственных числах система быстро стабилизируется, но имеет сравнительно большое перерегулирование. Наличие комплексных собственных чисел создаст некоторые осцилляции в системе, из-за чего она может быть менее предсказуема. При этом скорость затухания системы выше, чем при небольших по модулю числах, принадлежащих множеству рациональных чисел.

Задание 2. Наблюдатель полного порядка

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad -1],$$

$$\sigma(A + LC) = \begin{bmatrix} \{-2, -2, -2, -2\}, \\ \{-2, -20, -200, -2000\}, \\ \{-2 \pm 3i, -2 \pm 4i\}; \end{bmatrix}$$

Наблюдаемость и обнаруживаемость

Найдем собственные числа матрицы A . Программа для вычислений в MATLAB находится в приложении 2 на листинге 2

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ 26 & \lambda + 7 & -20 & 11 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 & -2 \\ -16 & -4 & 14 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma(A) = \{\pm 2i, \pm i\};$$

Все собственные числа комплексные и имеют нулевую действительную часть. Следовательно, они все устойчивые, но не асимптотически. То есть в системе будут незатухающие колебания. Перейдем к вещественной жордановой форме системы, чтобы определить наблюдаемость каждого собственного числа, а далее сделать выводы о наблюдаемости и обнаруживаемости системы

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -2 & 6 & -3 \\ 2 & -0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -6 & 4 \\ 12 & 4 & -10 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C_{Jre} = C P_{re} = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad -1] \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [-0.5 \quad -0.5 \quad -0.5 \quad 0];$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{Jre} = [-0.5 \quad -0.5 \quad -0.5 \quad 0];$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Все собственные числа, кроме λ_4 , наблюдаемы, так как соответствующие им элементы матрицы выходов C_{Jre} не равны нулю. Из этого нельзя сделать вывод, что система полностью наблюдаема. Достаточное условие полной наблюдаемости нашей системы – не равенство нулю [первого или второго] и [третьего или четвертого] элементов матрицы C_{Jre} . Так как условие выполняется, то система полностью наблюдаема, а значит, и обнаруживаема.

Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Построим в SIMULINK схему моделирования системы с наблюдателем состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$

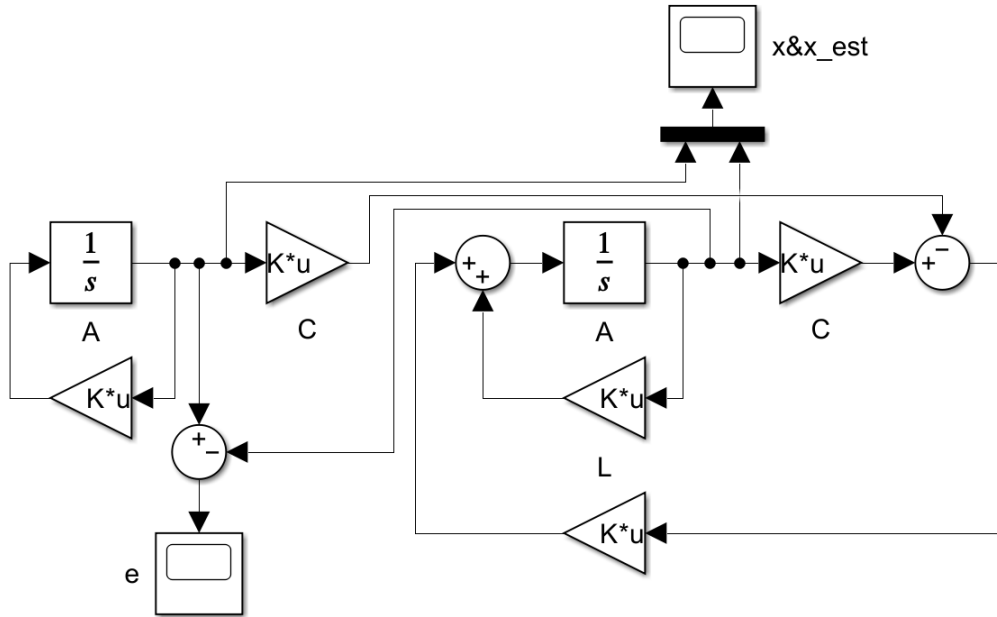


Рис. 5: Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Через один Scope отслеживаем сигналы $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ на одном графике, через другой ошибку наблюдателя (невязку) $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Матрица коррекции наблюдателя

Для каждого из предложенных спектров найдем матрицы коррекции наблюдателя L , обеспечивающих соответствующий желаемый спектр. Аналогично первому заданию составим полиномы

$$\begin{aligned} (\lambda + 2)^4 &= \lambda^4 + 8\lambda^3 + 24\lambda^2 + 32\lambda + 16, \\ (\lambda + 2)(\lambda + 20)(\lambda + 200)(\lambda + 2000) &= \lambda^4 + 2222\lambda^3 + 448440\lambda^2 + 8888000\lambda + 16000000, \\ (\lambda + 2 - 3i)(\lambda + 2 + 3i)(\lambda + 2 - 4i)(\lambda + 2 + 4i) &= \lambda^4 + 8\lambda^3 + 49\lambda^2 + 132\lambda + 260; \end{aligned}$$

Запишем матрицы Γ_i

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16 & -32 & -24 & -8 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16000000 & -8888000 & -448440 & -2222 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -260 & -132 & -49 & -8 \end{bmatrix};$$

Все матрицы Γ_i составлены по одинаковому принципу, поэтому подберем единый Y такой, чтобы пары (Y, Γ_i) были управляемы. Проверим, вычислив ранги матриц

управляемости U_i

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U_i = [Y \quad \Gamma_i Y \quad \Gamma_i^2 Y \quad \Gamma_i^3 Y],$$

$$\text{rank} [Y \quad \Gamma_1 Y \quad \Gamma_1^2 Y \quad \Gamma_1^3 Y] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -16 & 128 \\ 0 & -16 & 128 & -640 \end{bmatrix} = 4,$$

$$\text{rank} [Y \quad \Gamma_2 Y \quad \Gamma_2^2 Y \quad \Gamma_2^3 Y] = \text{rank} \left[10^{13} \cdot \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0036 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0036 & -7.1822 \end{bmatrix} \right] = 4,$$

$$\text{rank} [Y \quad \Gamma_3 Y \quad \Gamma_3^2 Y \quad \Gamma_3^3 Y] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -260 \\ 0 & 0 & -260 & 2080 \\ 0 & -260 & 2080 & -3900 \end{bmatrix} = 4;$$

Используя пакет `svh` в `MATLAB`, вычислим матрицы $Q_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ как решения уравнения Сильвестра

$$\Gamma_i Q_i - Q_i A = Y C$$

После чего вычислим $L_i \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ по формуле

$$L_i = Q_i^{-1} Y$$

Получаем следующие результаты

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -7.7426 & -2.3690 & 6.5528 & -3.5588 \\ 3.6532 & 1.1580 & -3.1096 & 1.9516 \\ 1.1176 & 0.2440 & -1.0528 & 0.3088 \\ -1.4032 & -0.4080 & 1.6096 & -1.2016 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 10.3333 \\ -21.0000 \\ 7.6667 \\ 5.3333 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} -1.7989 & -0.5605 & 1.4628 & -0.6220 \\ 3.6220 & 1.0996 & -2.9656 & 1.3166 \\ -7.5251 & -1.7746 & 6.5261 & -3.8724 \\ -15.8185 & -4.0663 & 12.1953 & -5.9314 \end{bmatrix}, \quad L_2 = 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 0.7378 \\ 7.5493 \\ 6.0674 \\ 5.3319 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} -1.4397 & -0.4741 & 1.0517 & -0.3017 \\ 6.5000 & 1.7241 & -5.3103 & 2.4655 \\ -5.3793 & -1.0172 & 5.2759 & -3.3621 \\ -27.3448 & -6.4310 & 21.4483 & -10.5345 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 4.0000 \\ 76.0000 \\ 58.6667 \\ 62.6667 \end{bmatrix};$$

Корректность синтеза регулятора

Определим собственные числа матриц наблюдателя $(A + L_i C)$ и сравним с соответствующими желаемыми спектрами

$$\sigma(A + L_1 C) = \sigma \begin{bmatrix} -10.3333 & 1.0000 & 10.3333 & -9.3333 \\ -5.0000 & -7.0000 & -1.0000 & 10.0000 \\ -7.6667 & 1.0000 & 6.6667 & -5.6667 \\ 10.6667 & 4.0000 & -8.6667 & 2.6667 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} -2.0017 \\ -2.0000 + 0.0017i \\ -2.0000 - 0.0017i \\ -1.9983 \end{array} \right\},$$

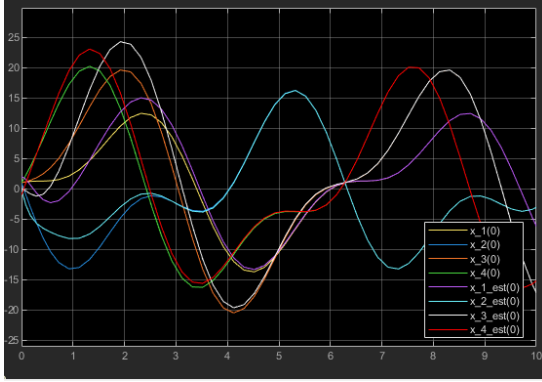
$$\sigma(A + L_2C) = \sigma \left[10^6 \cdot \begin{bmatrix} -0.7378 & 0.0000 & 0.7378 & -0.7378 \\ -7.5494 & 0.0000 & 7.5494 & -7.5494 \\ -6.0674 & 0.0000 & 6.0674 & -6.0674 \\ -5.3318 & 0.0000 & 5.3318 & -5.3318 \end{bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} -2000 \\ -200 \\ -2 \\ -20 \end{Bmatrix},$$

$$\sigma(A + L_3C) = \sigma \begin{bmatrix} -4.0000 & 1.0000 & 4.0000 & -3.0000 \\ -102.0000 & -7.0000 & 96.0000 & -87.0000 \\ -58.6667 & 1.0000 & 57.6667 & -56.6667 \\ -46.6667 & 4.0000 & 48.6667 & -54.6667 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \pm 4i \\ -2 \pm 3i \end{Bmatrix};$$

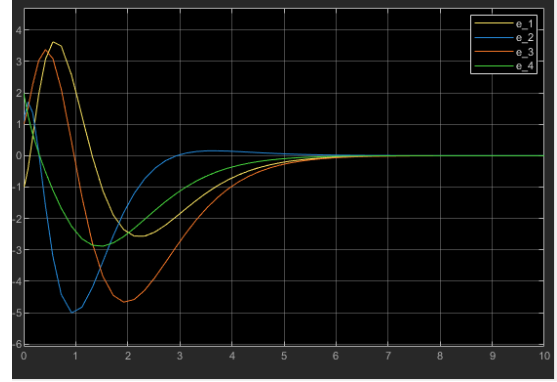
Отклонение в 0.085% для L_1 будем считать погрешностью вычислений в MATLAB. Остальные спектры совпали с желаемыми. Регулятор синтезирован корректно.

Компьютерное моделирование

Для компьютерного моделирования воспользуемся схемой SIMULINK, представленной на рис. 5. Зададим в интеграторы такие начальные условия: для системы $x(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, для наблюдателя $\hat{x}(0) = [2 \ 0 \ 0 \ -1]^T$. Также для одного из случаев приблизим график к началу времени t , чтобы убедиться в том, что каждая координата выходит из своего начального условия

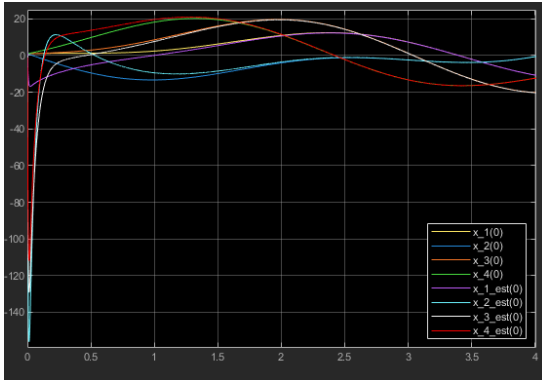


(a) Графики $x(t), \hat{x}(t)$

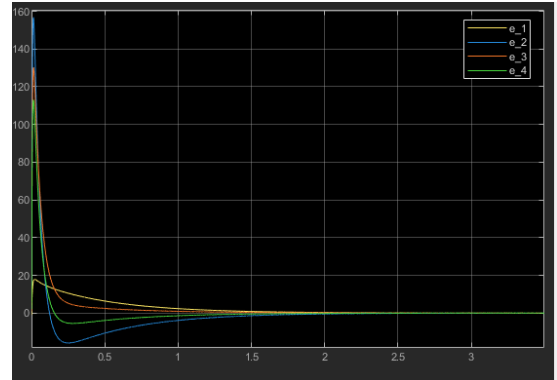


(b) График $e(t)$

Рис. 6: Графики $x(t), \hat{x}(t), e(t)$ для L_1

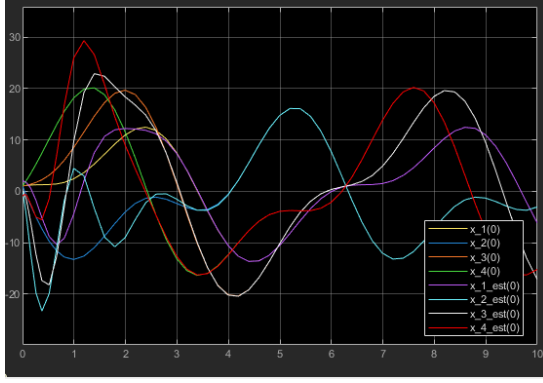


(a) Графики $x(t), \hat{x}(t)$

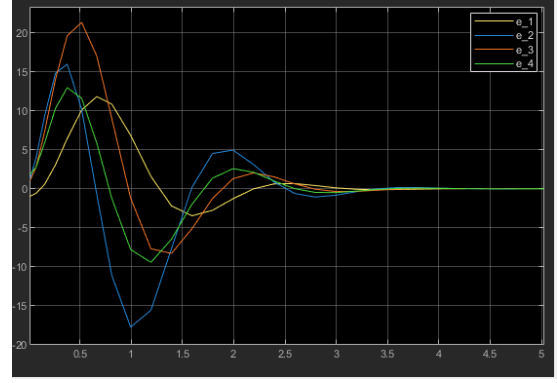


(b) График $e(t)$

Рис. 7: Графики $x(t), \hat{x}(t), e(t)$ для L_2



(а) Графики $x(t), \hat{x}(t)$



(б) График $e(t)$

Рис. 8: Графики $x(t), \hat{x}(t), e(t)$ для L_3

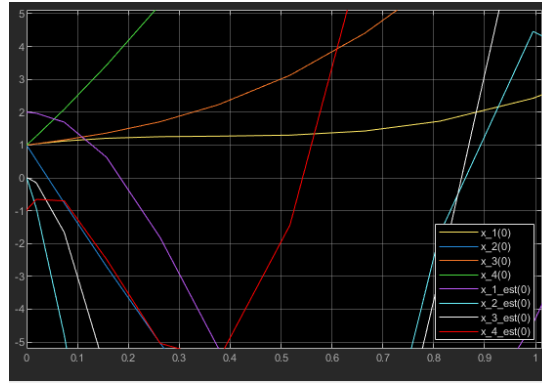


Рис. 9: Проверка начальных условий (случай для L_3)

Сравнение результатов

Видим, как на каждом графике $x(t), \hat{x}(t)$ оценки координат сходятся к настоящим координатам – наблюдатель выполняет свою работу верно. Например, на рис. 6а голубая оценка координаты \hat{x}_2 сходится к синей истинной координате x_2 примерно за $t = 3.5$. Ошибки ожидаемо стремятся к нулю. На рис. 9 видим, что все координаты выходят из своих начальных условий.

На рис. 6а видим, что примерно к $t = 5$ каждая координата наблюдателя сошлась с исходными координатами. Ошибка на рис. 6б сравнительно небольшая, ожидаемо наибольшая в начале, далее плавно и медленно стремится к нулю. Итого: плавное поведение наблюдателя с небольшой ошибкой, но медленное схождение к истинным координатам.

На рис. 7а ситуация обратная – наблюдатель быстро сводит координаты с координатами исходной системы (примерно за $t = 2$), однако ошибка на рис. 7б ожидаемо сравнительно большая. На практике лучше всего соблюдать баланс между величиной ошибки и скоростью сходимости.

На рис. 8а результат в целом схож с результатом для L_1 на рис. 6а. Разница в том, что координаты сходятся немного быстрее, однако, что видно на рис. 8б, появляются лишние осцилляции, то есть система становится менее предсказуемой (есть более значимый второй скачок ошибки выше нуля в сравнении со случаем для L_1 – там почти все ошибки сразу сходятся к нулю снизу).

Вывод

Мы выяснили, что система является полностью наблюдаемой, а следовательно, и стабилизируемой. Мы вычислили матрицы коррекции наблюдателя и убедились в том, что регулятор синтезирован верно. Мы промоделировали систему с наблюдателем состояния и сравнили полученные результаты. В целом выводы аналогичны первому заданию. Лучше всего брать небольшие по модулю рациональные или комплексные числа. Выбор зависит от того, что нам важнее. Если важнее скорость – комплексные. Если точность – рациональные.

Приложения

Приложение 1

```
% input data
A = [5 2 7; 2 1 2; -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
Pre(:,1) = P(:,1);
Pre(:,2) = imag(P(:,2));
Pre(:,3) = real(P(:,3));
Pre_inv = Pre^-1;
J_re = Pre_inv * A * Pre;
B_jre = Pre_inv * B;
disp(Pre);
disp(Pre_inv);
disp(J_re);
disp(B_jre);

% G matrices
G1 = [0 1 0; 0 0 1; -8 -12 -6];
Y1 = [1 0 0];
O1 = [Y1; Y1*G1; Y1*G1^2];
rank_O1 = rank(O1);
disp(O1);
disp(rank_O1);

G2 = [0 1 0; 0 0 1; -8000 -4440 -222];
Y2 = [1 0 0];
O2 = [Y2; Y2*G2; Y2*G2^2];
rank_O2 = rank(O2);
disp(O2);
disp(rank_O2);

G3 = [0 1 0; 0 0 1; -80 -48 -6];
Y3 = [1 0 0];
O3 = [Y3; Y3*G3; Y3*G3^2];
rank_O3 = rank(O3);
disp(O3);
disp(rank_O3);
```

```

% regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P1(3,3)
variable P2(3,3)
variable P3(3,3)
A*P1-P1*G1 == B*Y1;
A*P2-P2*G2 == B*Y2;
A*P3-P3*G3 == B*Y3;
cvx_end

K1 = -Y1*inv(P1);
disp(P1);
disp(K1);

K2 = -Y2*inv(P2);
disp(P2);
disp(K2);

K3 = -Y3*inv(P3);
disp(P3);
disp(K3);

% A+BK eigenvalues
ABK1 = A+B*K1;
ABK2 = A+B*K2;
ABK3 = A+B*K3;

ABK1_eig = eig(ABK1);
ABK2_eig = eig(ABK2);
ABK3_eig = eig(ABK3);

disp(ABK1);
disp(ABK1_eig);

disp(ABK2);
disp(ABK2_eig);

disp(ABK3);
disp(ABK3_eig);

```

Листинг 1: Программа для первого задания

Приложение 2

```

% input data
A = [0 1 0 1;
     -26 -7 20 -11;
     0 1 -1 2;
     16 4 -14 8];
C = [-1 0 1 -1];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Jordan matrix

```

```

[P, J] = jordan(A);
P_re(:,1) = real(P(:,1));
P_re(:,2) = imag(P(:,2));
P_re(:,3) = real(P(:,3));
P_re(:,4) = imag(P(:,4));
P_re_inv = P_re^-1;
J_re = P_re_inv * A * P_re;
C_jre = C * P_re;
disp(P_re);
disp(P_re_inv);
disp(J_re);
disp(C_jre);

% G matrices
Y = [1; 0; 0; 0];

G1 = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -16 -32 -24 -8];
U1 = [Y G1*Y G1^2*Y G1^3*Y];
disp(U1);
disp(rank(U1));
disp(eig(G1));

G2 = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -16000000 -8888000 -448440 -2222];
U2 = [Y G2*Y G2^2*Y G2^3*Y];
disp(U2);
disp(rank(U2));
disp(eig(G2));

G3 = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -260 -132 -49 -8];
U3 = [Y G3*Y G3^2*Y G3^3*Y];
disp(U3);
disp(rank(U3));
disp(eig(G3));

% regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable Q1(4,4)
variable Q2(4,4)
variable Q3(4,4)
G1*Q1-Q1*A == Y*C;
G2*Q2-Q2*A == Y*C;
G3*Q3-Q3*A == Y*C;
cvx_end

L1 = inv(Q1)*Y;
disp(Q1);
disp(L1);

L2 = inv(Q2)*Y;
disp(Q2);
disp(L2);

L3 = inv(Q3)*Y;
disp(Q3);
disp(L3);

% A+LC eigenvalues
ALC1 = A+L1*C;

```

```
ALC2 = A+L2*C;  
ALC3 = A+L3*C;  
  
ALC1_eig = eig(ALC1);  
ALC2_eig = eig(ALC2);  
ALC3_eig = eig(ALC3);  
  
disp(ALC1);  
disp(ALC1_eig);  
  
disp(ALC2);  
disp(ALC2_eig);  
  
disp(ALC3);  
disp(ALC3_eig);
```

Листинг 2: Программа для второго задания