Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «МОДАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ И НАБЛЮДАТЕЛИ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

Задание 1. Модальный регулятор

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma\left(A + BK\right) = \left[\begin{array}{c} \{-2, -2, -2\}, \\ \{-3, -3, -3\}, \\ \{-2, -20, -200\}, \\ \{-3, -30, -300\}, \\ \{-2, -2 \pm 6i\}, \\ \{-3, -3 \pm 9i\}; \end{array}\right.$$

Управляемость и стабилизируемость собственных чисел и системы

Найдем собственные числа матрицы A с помощью `MATLAB` (программу см. листинг 1 в приложении 1)

$$\det\left[\lambda I - A\right] = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 & -7 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 2 & 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma\left(A\right) = \{-2, 2 \pm i\}$$

$\lambda_1 = -2 < 0$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ имеют положительные действительные части – неустойчивые, нужна управляемость. Определим управляемость собственных чисел через жорданово разложение (приведение комплексной формы к вещественной аналогично первой лабораторной работе)

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Собственное число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, так как первый элемент в матрице входных воздействий B_{Jre} равен нулю. Остальные собственные числа управляемые. Следовательно, система не полностью управляема. Достаточное условие полной управляемости системы в нашем случае – не равенство нулю первого и [второго или третьего] элементов матрицы B_{Jre}. Оно не выполняется. Так как все неустойчивые собственные числа управляемы, то система стабилизируема.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Построим схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$, замкнутой регулятором $u = Kx$, используя `SIMULINK`

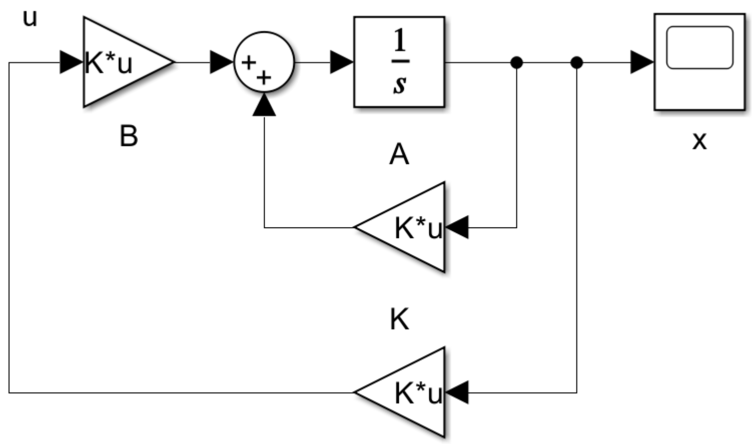

Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Достижимые спектры замкнутой системы

Рассмотрим предложенные спектры замкнутой системы $(A + BK)$ и определим, какие из них достижимы. Мы хотим, чтобы матрица $(A + BK)$ была устойчивой, то есть все ее собственные числа имели отрицательную действительную часть. В нашем случае комплексная пара $\lambda_{2,3}$ являются неустойчивыми, но управляемыми – их можно переместить в устойчивую область (подобрать любые числа, меньшие нуля). Собственное число $\lambda_1 = -2$ устойчивое, но неуправляемое – его не получится переместить куда-либо. Это означает, что спектр $\sigma(A + BK)$ должен содержать это неуправляемое число, иначе регулятор не будет выполнять свою функцию, мы потеряем собственное число матрицы A. Таким образом, желаемый спектр должен содержать все неуправляемые (но устойчивые) собственные числа матрицы A, при этом остальные числа могут быть любыми, но устойчивыми. Важно уточнить, что если некоторое собственное число матрицы A неустойчиво и неуправляемо, то система не стабилизируема – модальный регулятор применить не получится.

Исходя из наших рассуждений выше, достижимыми будут следующие спектры замкнутой системы

$$\sigma(A + BK) = \left[\begin{array}{c} \{-2, -2, -2\}, \\ \{-2, -20, -200\}, \\ \{-2, -2 \pm 6i\}; \end{array}\right.$$

Остальные спектры не содержат неуправляемое собственное число $\lambda_1 = -2$.

Матрица регулятора, приводящая спектр системы к желаемому

Для каждого из достижимых спектров, определенных в предыдущем пункте, найдем соответствующие матрицы регулятора K, приводящие спектр замкнутой системы к желаемому.

Рассмотрим спектр $\sigma\left(A+BK\right) = \{-2, -2, -2\}$. Запишем полином Ньютона третьего порядка с $\omega_0 = 1$

$$(\lambda + 2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

Составим по коэффициентам матрицу Γ

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$$

Подберем Y такой, чтобы пара (Y, Γ) была наблюдаема. Проверим, вычислив ранг матрицы наблюдаемости

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \text{rank} \begin{bmatrix} Y \\ Y\Gamma \\ Y\Gamma^2 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Приложения

Приложение 1

```
        to be done
```

Листинг 1: Программа для первого задания