Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

Задание 1. Исследование управляемости

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \text{ где } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \text{ дана точка } x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Матрица управляемости

Исходя из условия видим, что порядок системы n равен трем. Значит, матрица управляемости будет иметь вид

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

Вектор B нам известен. Найдем оставшиеся неизвестные

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix},$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 7 & -13 \\ -8 & 7 & -8 \\ 8 & -3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Таким образом, получаем матрицу управляемости

$$U = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -19 \\ -1 & 3 & -7 \\ 3 & -7 & 15 \end{bmatrix}$$

Определим ранг этой матрицы, чтобы сделать вывод об управляемости системы в целом

$$\operatorname{rank}[U] = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} -3 & 8 & -19 \\ -1 & 3 & -7 \\ 3 & -7 & 15 \end{bmatrix} = 3$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы n, то система является полностью управляемой.

Собственные числа и матрицы Хаутуса

Найдем собственные числа матрицы A

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -3 \\ -2 & \lambda + 3 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 13\lambda + 10 = 0$$

Подбором получаем корень $\lambda_1 = -2$. Вынесем его за скобку, и, решим квадратное уравнение

$$(\lambda + 2)\left(\lambda^2 + 4\lambda + 5\right) = 0,$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0, \ D = 4^2 - 5 \cdot 4 = -4 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

Таким образом, матрица A имеет следующие собственные числа

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_{2,3} = -2 \pm i$$

Действительная часть всех собственных чисел меньше нуля, а значит они все асимптотически устойчивые, но могут быть неуправляемыми. Для проверки построим матрицы Хаутуса $[A - \lambda_i I \ B]$ для каждого собственного числа и найдем их ранг

$$\operatorname{rank}[A - \lambda_1 I \ B] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

$$\operatorname{rank}[A - \lambda_{2,3} I \ B] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 3 \pm i & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 \pm i & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \pm i & 3 \end{bmatrix} = 3$$

Ранги матриц Хаутуса для каждого собственного числа матрицы A равны порядку системы, следовательно, все собственные числа являются управляемыми. Из этого же следует, что система полностью управляема.

Жорданова форма системы

Мы можем разложить матрицу A следующим образом

$$A = PJP^{-1},$$

где P – матрица собственных векторов матрицы A, J – жорданова нормальная форма. В нашем случае кратных собственных чисел нет, а значит ЖНФ примет вид диагональной матрицы. Это объясняется тем, что для каждого собственного числа найдется хотя бы один собственный вектор ($A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$), то есть каждому собственному числу соответствует ровно одна жорданова клетка размера 1×1. Ранее мы вычисляли собственные числа – составим матрицу J без поиска P и P^{-1}

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 - i & 0 \\ 0 & 0 & -2 + i \end{bmatrix}$$

Более того, можно сделать матрицу вещественной, пользуясь знаниями с линейной алгебры

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \ J = \begin{bmatrix} \alpha + \beta i & 0 \\ 0 & \alpha - \beta i \end{bmatrix} \Rightarrow J_{re} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Получаем матрицу J_{re} в базисе собственных векторов матрицы A

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = P_{re}^{-1} A P_{re}$$

Далее для анализа необходимо перевести вектор входных воздействий B в базис собственных векторов матрицы A

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B$$

Для поиска P_{re} составим матрицу собственных векторов P матрицы A (v_i находятся подстановкой соответсвующих λ_i в $[\lambda_i I - A]$ и решением СЛАУ)

$$P = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} -1 & -1.5+0.5i & -1.5-0.5i \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Теперь составим матрицу P_{re} по следующему принципу: столбцы для вещественных собственных чисел остаются как в матрице P, а столбцы для комплексно-сопряженных раскладываются отдельно на мнимую и действительную части

$$P_{re} = [[P_1]\ \ [\mathrm{Im}\{P_{2,3}\}]\ \ [\mathrm{Re}\{P_{2,3}\}]] = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Найдем обратную матрицу от P_{re} и вычислим B_{Jre}

$$P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P_{re}^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = B_{Jre}$$

Мы так же можем убедиться, что верно нашли J_{re}

$$J_{re} = P_{re}^{-1} A P_{re} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Итого, получаем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix},\ B_{Jre} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Мы уже выяснили, что все жордановы клетки относятся к различным собственным числам – можем делать выводы об управляемости. Так как элементы матрицы входных воздествий B_{Jre} не равны нулю, то все собственные числа управляемы. Из этого следует, что система полностью управляема. При этом достаточное условие полной управляемости системы в нашем случае – не равенство нулю первого и [второго или третьего] элементов матрицы B_{Jre}.

Грамиан управляемости системы

Найдем Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt$$

Предоставим вычисления `MATLAB`. Программа представлена на листинге 1 в приложении 1. Итого имеем

$$P(t_1 = 3) = \begin{bmatrix} 1.5956 & 0.4779 & -1.7132 \\ 0.4779 & 0.1500 & -0.5029 \\ -1.7132 & -0.5029 & 1.8559 \end{bmatrix}$$

Получили числовую матрицу. Для анализа управляемости системы найдем собственные числа Грамиана с помощью `MATLAB`. Получаем

$$\lambda_1 = 3.5841$$
$$\lambda_2 = 0.0002$$
$$\lambda_3 = 0.0172$$

Все собственные числа Грамиана относительно $t_1 = 3$ строго положительны, следовательно, его определитель (произведение собственных чисел) больше нуля – Грамиан невырожденный. Это следует уже из равенства ранга матрицы управляемости порядку системы – полученный в нынешнем пункте результат подтверждает наши рассуждения – система полностью управляема. Однако из-за присутствия маленького собственного числа $\lambda_2 = 0.0002$ можно сделать вывод, что в некотором направлении система слабо управляема.

Управление системой за определенное время

Найдем управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1, по формуле

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} \left[P(t_1)\right]^{-1} x_1$$

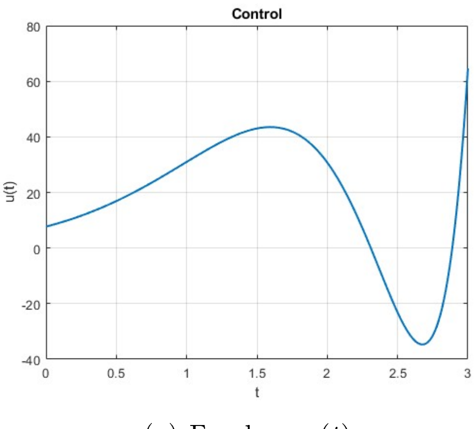
Подставим матрицы и t_1 в выражение

$$u(t) = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}^T e^{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}^T (3-t)} \begin{bmatrix} 1.5956 & 0.4779 & -1.7132 \\ 0.4779 & 0.1500 & -0.5029 \\ -1.7132 & -0.5029 & 1.8559 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

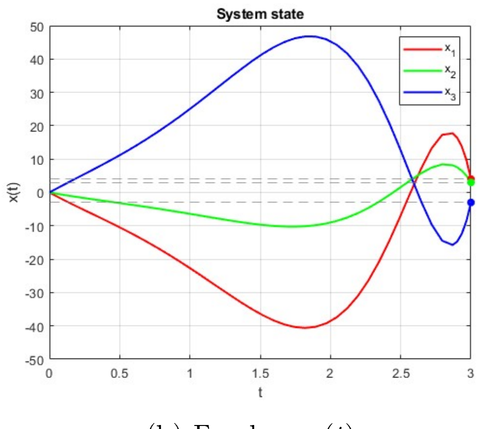
После всех вычислений получим

$$u(t) = \frac{17826740000e^{2t} - 17213830000e^2\cos(3-t) - 6911070000e^2\sin(3-t)}{13222909e^6}$$

Мы нашли управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1. Выполним моделирование системы в `MATLAB`. Зададим интервал $t \in [0, t_1 = 3]$ с 1000 точками. Для каждого t_i вычислим по формуле $u_i(t_i)$, после чего построим график $u(t)$. Для моделирования изменения состояния системы во времени решим СДУ $\dot{x} = Ax + Bu(t)$ с начальным условием $x(0) = 0$, после чего построим график



(a) График $u(t)$



(b) График $x(t)$

Рис. 1: Графики для первого задания

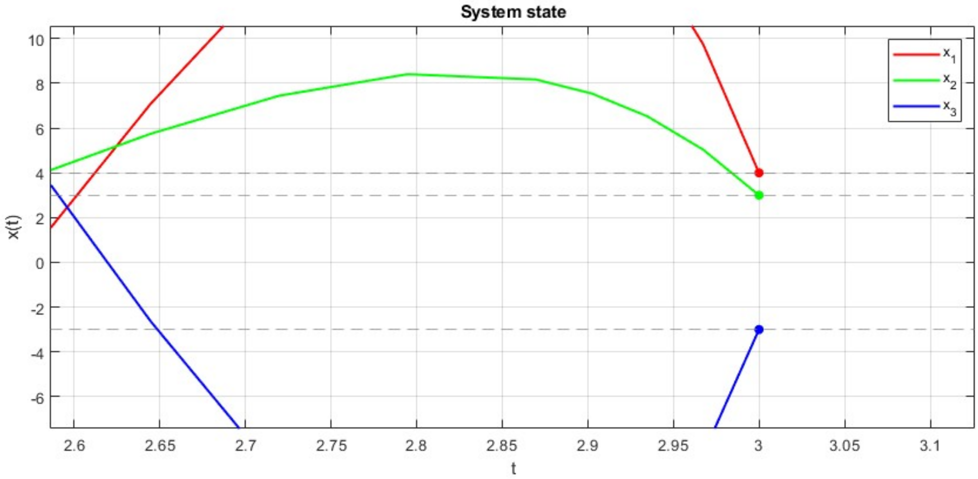


Рис. 2: График $x(t)$ в приближении

Серыми пунктирными линиями на графике $x(t)$ отмечены координаты точки $x_1 = [4\ 3\ \ -3]^T$. Как видим, система достигает состояния x_1 в момент времени $t_1 = 3$ – x_i сходятся к соответствующим пунктирным линиям.

Выводы

Все собственные числа матрицы A управляемы, система полностью управляема. Моделирование системы подтвердило наши рассуждения.

Задание 2. Еще одно исследование управляемости

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \text{ где } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ x_1' = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \ x_1'' = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Проверка точек на принадлежность управляемому подпространству

Чтобы проверить, принадлежит ли точка управляемому подпространству системы, необходимо найти матрицу управляемости и вычислить ее ранг. После этого создать расширенную матрицу – матрица управляемости с точкой, которую проверяем на принадлежность управляемому подпространству системы. Смысл в том, что, если ранг расширенной матрицы будет равен рангу обычной матрицы управляемости, то данная точка уже существует в базисе, в котором задана система, а значит можно перевести систему в эту точку некоторым управлением из начальной точки (линейная зависимость). Если ранг больше, то точка выходит за пределы подпространства.

Найдем матрицу управления U и ее ранг. Ожидаем ранг, равный двум. Опустим вычисления, так как они аналогичны первому заданию. Программа для вычислений и построения графиков представлена на листинге 2 в приложении 2. Получаем

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & -9 \\ -1 & -1 & 9 \end{bmatrix}, \ \operatorname{rank}[U] = 2$$

Создадим расширенные матрицы и вычислим их ранги

$$U_{x_1'} = \begin{bmatrix} U & x_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 9 & -3 \end{bmatrix}, \text{ rank}\begin{bmatrix} U_{x_1'} \end{bmatrix} = 2$$

$$U_{x_1''} = \begin{bmatrix} U & x_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 9 & -2 \end{bmatrix}, \text{ rank}\begin{bmatrix} U_{x_1''} \end{bmatrix} = 3$$

Выходит, что точка x_1' принадлежит управляемому подпространству системы, а x_1'' – нет. Принимаем целевой точкой x_1 точку x_1'. Далее все шаги аналогичны первому заданию.

Матрица управляемости

Сделаем вывод об управляемости системы по матрице управляемости. Система одноканальная – один вход и один выход – U квадратная. Проверим определитель

$$\det[U] = 0$$

Так как определитель равен нулю, то система является не полностью управляемой. Об этом уже говорил ранг U, меньший порядка системы.

Собственные числа и матрицы Хаутуса

Матрица A такая же, как в первом задании. Мы уже вычислили ее собственные числа

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_{2,3} = -2 \pm i$$

и выяснили, что они асимптотически устойчивые, но могут быть неуправляемыми. Матрицы Хаутуса изменятся – они зависят от B. Построим их и вычислим их ранги

$$\text{rank}\,[A - \lambda_1 I \;\; B] = \text{rank}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rank}\,[A - \lambda_{2,3} I \;\; B] = \text{rank}\begin{bmatrix} 3 \pm i & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 \pm i & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \pm i & -1 \end{bmatrix} = 3$$

Выходит, что $\lambda_{2,3} = -2 \pm i$ являются управляемыми, так как ранги их матриц Хаутуса равны порядку системы. Собственное число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое (ранг матрицы Хаутуса меньше порядка системы), но устойчивое – система не полностью управляема, но стабилизируема.

Жорданова форма системы

Жорданово разложение матрицы A не изменится, но изменится матрица входных воздействий, так как B другая. Имеем

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Пересчитаем B_{Jre}

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Таким образом, исследуем

$$J_{re} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \; B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Собственное число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, а $\lambda_{2,3} = -2 \pm i$ управляемые. Достаточное условие полной управляемости не выполнено – первый элемент матрицы входных воздействий B_{Jre} равен нулю – система не полностью управляема.

Грамиан управляемости системы

Найдем Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$ аналогично первому заданию

$$P\left(t_1 = 3\right) = \begin{bmatrix} 3.625 & 1.625 & -1.625 \\ 1.625 & 0.750 & -0.750 \\ -1.625 & -0.750 & 0.750 \end{bmatrix}$$

Теперь найдем собственные числа Грамиана

$$\lambda_1 = 5.0943$$
$$\lambda_2 = 0.0307$$
$$\lambda_3 = 0.0000$$

Так как одно из собственных чисел Грамиана равно нулю, то его определитель равен нулю, то есть Грамиан вырожденный. Это следует уже из неполного ранга матрицы управляемости. Система не полностью управляема – в некотором направлении управлять системой не получится. В других же направлениях (двумерном подпространстве) система управляема.

Управление системой за определенное время

Найдем приближенное управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1. Теперь в формуле необходимо использовать псевдообратную матрицу Грамиана, так как вследствие вырожденности обратную найти не получится

$$u(t) = B^T e^{A^T (t_1 - t)} \left[P(t_1)\right]^{+} x_1$$

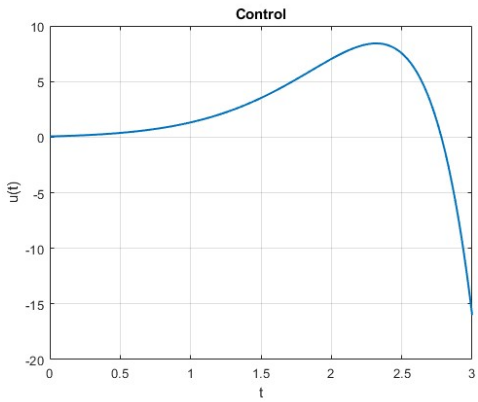
Подставим матрицы и t_1 в выражение

$$u(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T e^{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}^T (3-t)} \begin{bmatrix} 3.625 & 1.625 & -1.625 \\ 1.625 & 0.750 & -0.750 \\ -1.625 & -0.750 & 0.750 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

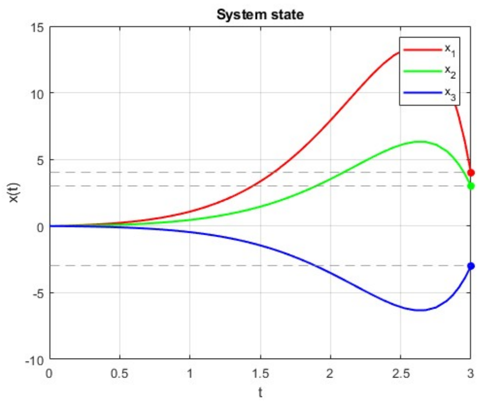
После всех вычислений получим

$$u(t) = \frac{-80001\cos(3-t) + 360002\sin(3-t)}{5000e^4}$$

Аналогично первому заданию промоделируем систему. Результаты представлены на рис. 3



(a) График $u(t)$



(b) График $x(t)$

Рис. 3: Графики для второго задания

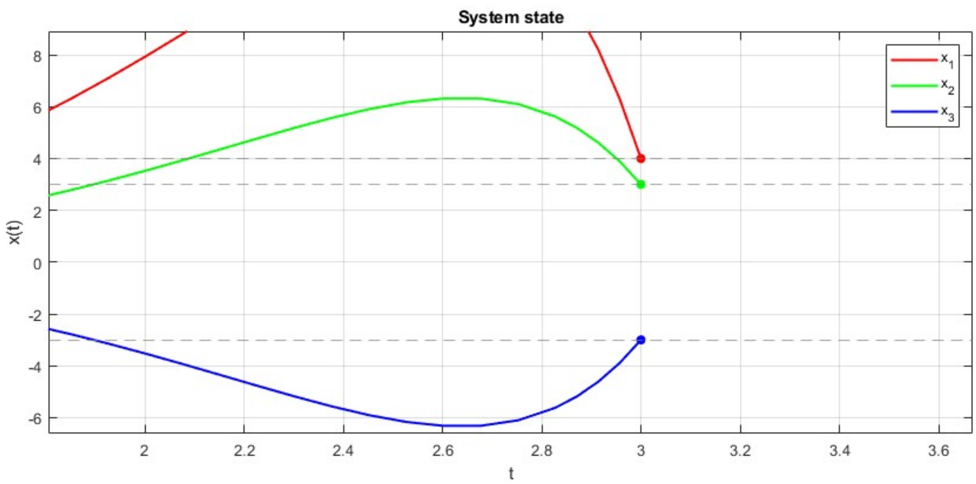


Рис. 4: График $x(t)$ в приближении

Серыми пунктирными линиями на графике $x(t)$ отмечены координаты точки $x_1 = [4\ 3\ -3]^T$. Как видим, система достигает состояния x_1 в момент времени $t_1 = 3$ – x_i сходятся к соответствующим пунктирным линиям. Это подтверждает, что точка x_1' принадлежит управляемому подпространству системы – мы ее достигли, несмотря на не полную управляемость системы.

Выводы

Система не полностью управляема, но стабилизируема. Мы смогли найти приближенное управление для перевода системы из начального условия в точку x_1, принадлежащую управляемому подпространству системы, за конечное время t_1 и, продемонстрировали это, промоделировав систему.

Задание 3. Исследование наблюдаемости

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ y = Cx, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -16 & -27 & 7 \\ 6 & 9 & -4 \\ -5 & -11 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$f(t) = -9e^{-4t}\cos(t) + 9e^{-4t}\sin(t)$$

Матрица наблюдаемости

Составим матрицу наблюдаемости системы и определим ее ранг. Порядок системы равен трем

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

Найдем неизвестные

$$CA = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16 & -27 & 7 \\ 6 & 9 & -4 \\ -5 & -11 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16 & -27 & 7 \\ 6 & 9 & -4 \\ -5 & -11 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 59 & 112 & -4 \\ -22 & -37 & 6 \\ 14 & 36 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & 1 & 43 \end{bmatrix}$$

Таким образом, получаем матрицу наблюдаемости

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & -2 & -14 \\ -22 & 1 & 43 \end{bmatrix}$$

Определим ее ранг

$$\operatorname{rank}[V] = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & -2 & -14 \\ -22 & 1 & 43 \end{bmatrix} = 3$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен порядку системы $n = 3$, следовательно, система полностью наблюдаема. Так как выход один и матрица V квадратная, достаточно было сравнить ее определитель с нулем.

Собственные числа и матрицы Хаутуса

Собственные числа находим аналогично первому заданию. Предоставим вычисления `MATLAB`. Программа находится на листинге 3 в приложении 3

$$\det[\lambda I - A] = 0$$

Получаем

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_{2,3} = -4 \pm i$$

Видим, что $\lambda_1 > 0$ – неустойчивое, нужна наблюдаемость. Действительная часть $\lambda_{2,3}$ меньше нуля, следовательно, они асимптотически устойчивые, но могут быть ненаблюдаемыми. Для проверки найдем матрицы Хаутуса для наблюдаемости

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$$

Если ранг этой матрицы для конкретного λ_i равен порядку системы n, то это собственное число наблюдаемо. Определим матрицы и их ранги

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -17 & -27 & 7 \\ 6 & 8 & -4 \\ -5 & -11 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - \lambda_{2,3} I \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -12 \pm i & -27 & 7 \\ 6 & 13 \pm i & -4 \\ -5 & -11 & 4 \pm i \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Ранги матриц Хаутуса для каждого собственного числа матрицы A равны порядку системы, следовательно, все собственные числа являются наблюдаемыми. Из этого же следует, что система полностью наблюдаема.

Жорданова форма системы

Найдем жорданово разложение матрицы в `MATLAB` и приведем к вещественному виду

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3-2i & 3+2i \\ -1 & -1+i & -1-i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4-i & 0 \\ 0 & 0 & -4+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0.5 & 1-0.5i & -0.5i \\ 0.5 & 1+0.5i & 0.5i \end{bmatrix}$$

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицу выходов C_{Jre} в базисе собственных векторов матрицы A

$$C_{Jre} = CP_{re} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \; C_{Jre} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Видим, что λ_1, λ_2 наблюдаемы, а λ_3 – нет (см. элементы соответствующих столбцов C_{Jre}). Из наблюдаемости $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нельзя сделать вывод, что система полностью наблюдаема. Достаточное условие полной наблюдаемости системы в нашем случае – не равенство нулю первого и [второго или третьего] элементов столбцов матрицы выходов C_{Jre}. Так как оно выполняется, то система является полностью наблюдаемой.

Грамиан наблюдаемости системы

Найдем Грамиан наблюдаемости системы относительно времени $t_1 = 3$

$$Q(t_1) = \int\limits_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} \, dt$$

Предоставим вычисления MATLAB. Получим следующий результат

$$Q(t_1 = 3) = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.8061 & 1.6141 & -0.8035 \\ 1.6141 & 3.2332 & -1.6078 \\ -0.8035 & -1.6078 & 0.8023 \end{bmatrix}$$

Найдем собственные числа Грамиана наблюдаемости

$$\lambda_1 = 4.8393 \cdot 10^3$$
$$\lambda_2 = 0.0000 \cdot 10^3$$
$$\lambda_3 = 0.0023 \cdot 10^3$$

У Грамиана наблюдаемости присутствует нулевое собственное число – он вырожденный, система не полностью наблюдаема. При этом другие собственные числа достаточно велики – в некоторых неправлениях система хорошо наблюдаема. Такой результат может говорить о том, что на практике какое-то состояние системы не получится восстановить за конечное время t_1. При этом теоретически система полностью наблюдаема.

Определение начальных условий системы

Пусть выход системы $y(t)$ подчиняется закону $y(t) = f(t)$ на временном интервале $t \in [0, t_1]$. Определим начальные условия системы по формуле

$$x(0) = [Q(t_1)]^+ \int\limits_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) \, dt$$

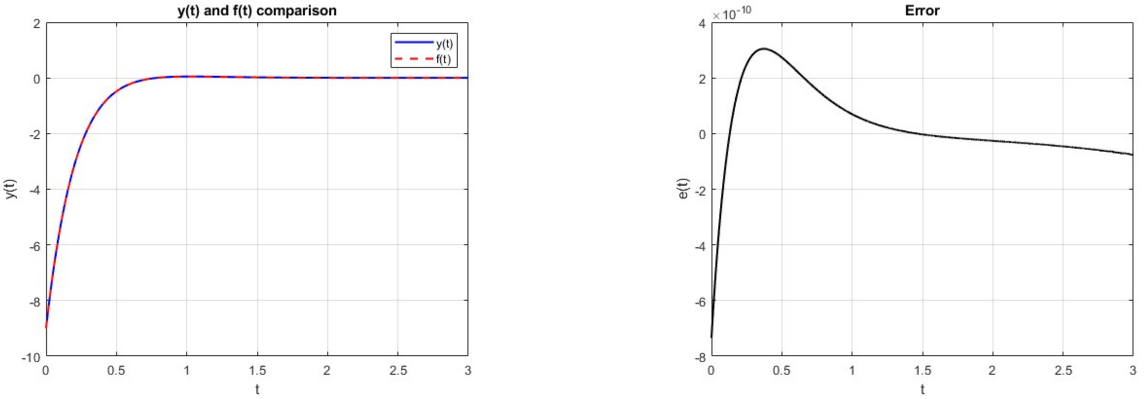
Вместо обратной матрицы Грамиана используем псевдообратную (определитель равен нулю). Подставим матрицы, t_1 и $y(t)$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 806.1 & 1614.1 & -803.5 \\ 1614.1 & 3233.2 & -1607.8 \\ -803.5 & -1607.8 & 802.3 \end{bmatrix}^+ 9 \int\limits_0^3 e^{\begin{bmatrix} -16 & -27 & 7 \\ 6 & 9 & -4 \\ -5 & -11 & 0 \end{bmatrix}^T t - 4t} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} (\sin(t) - \cos(t))$$

Предоставим вычисления `MATLAB`. Получаем следующий результат

$$x(0) = \begin{bmatrix} 15 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Получили начальные условия системы, соответсвующие выходу $y(t) = f(t)$. Выполним моделирование системы аналогично первому заданию. Программа для построения графиков находится в приложении 3. Графики представлены на рисунке 5



(a) График $y(t)$ и $f(t)$ (b) График $e(t) = y(t) - f(t)$

Рис. 5: Графики для третьего задания

Графики $y(t)$ и $f(t)$ почти совпадают. На графике ошибки видим очень маленькие значения ($\times 10^{-10}$). Логично, что наибольшая ошибка будет в момент наибольшего изменения состояния системы, а дальше будет уменьшаться, что видим на рис. 5b, сопоставляя t с рис. 5a.

Выводы

Теоретически система полностью наблюдаема (критерий Калмана, матрицы Хаутуса, жорданова форма системы), но практически есть направления, в которых система ненаблюдаема (Грамиан наблюдаемости). Начальные условия при заданной $f(t)$ были найдены, система была успешно промоделирована.

Задание 4. Еще одно исследование наблюдаемости

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ y = Cx, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -16 & -27 & 7 \\ 6 & 9 & -4 \\ -5 & -11 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 \end{bmatrix},$$

$$f(t) = -9e^{-4t}\cos(t) + 9e^{-4t}\sin(t)$$

Матрица наблюдаемости

Составим аналогично предыдущему заданию матрицу наблюдаемости и определим ее ранг (порядок системы $n = 3$, программа представлена на листинге 4 в приложении 4)

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}, \; CA = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}^T, \; CA^2 = \begin{bmatrix} 40 \\ 5 \\ -75 \end{bmatrix}^T$$

Получаем

$$V = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -5 & 10 & 20 \\ 40 & 5 & -75 \end{bmatrix}, \; \operatorname{rank}[V] = 2, \; \det[V] = 0$$

Ранг матрицы наблюдаемости меньше порядка системы, определитель равен нулю, система не полностью наблюдаема. Существуют ненаблюдаемые состояния, которые не влияют на $y(t)$.

Собственные числа и матрицы Хаутуса

Матрица A такая же, как в задании №3 – собственные числа не изменятся. Имеем

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_{2,3} = -4 \pm i$$

Выводы по собственным числам аналогичны предыдущему заданию. Построим матрицы Хаутуса

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$$

Вычисления производятся в `MATLAB`. Определим эти матрицы и их ранги

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} -17 & -27 & 7 \\ 6 & 8 & -4 \\ -5 & -11 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = 2$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_{2,3} I \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} -12 \pm i & -27 & 7 \\ 6 & 13 \pm i & -4 \\ -5 & -11 & 4 \pm i \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = 3$$

Видим, что ранг матрицы Хаутуса для λ_1 меньше порядка системы – собственное число λ_1 ненаблюдаемое. Собственные числа $\lambda_{2,3}$ наблюдаемы, ранги их матриц Хаутуса совпадают с порядком системы. Таким образом, система не полностью наблюдаема.

Жорданова форма системы

Жорданова форма системы будет такая же, как в задании №3

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицу выходов C_{Jre} в базисе собственных векторов матрицы A

$$C_{Jre} = CP_{re} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \ C_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Видим, что наблюдаемым является только собственное число λ_2, так как элемент соответствующего столбца матрицы выходов не равен нулю. Остальные собственные числа ненаблюдаемы. Достаточное условие полной наблюдаемости системы не выполнено – первый элемент матрицы выходов равен нулю. Следовательно, система не полностью наблюдаема.

Грамиан наблюдаемости системы

Вычислим Грамиан наблюдаемости системы относительно времени $t_1 = 3$ аналогично заданию №3

$$Q(t_1 = 3) = \begin{bmatrix} 0.0919 & 0.5515 & 0.3676 \\ 0.5515 & 4.8713 & 3.7684 \\ 0.3676 & 3.7684 & 3.0331 \end{bmatrix}$$

Найдем собственные числа Грамиана наблюдаемости

$$\lambda_1 = 7.8871$$
$$\lambda_2 = -0.0000$$
$$\lambda_3 = 0.1093$$

Видим, что у Грамиана наблюдаемости $\lambda_2 = 0$. Следовательно, Грамиан вырожденный. Другие же собственные числа наблюдаемы. Вывод – система не полностью наблюдаема.

Определение начальных условий системы

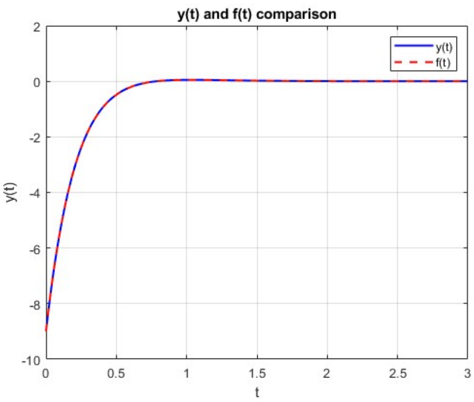
Определим начальные условия системы аналогично заданию №3

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.0919 & 0.5515 & 0.3676 \\ 0.5515 & 4.8713 & 3.7684 \\ 0.3676 & 3.7684 & 3.0331 \end{bmatrix}^+ 9 \int_0^3 e^{\begin{bmatrix} -16 & -27 & 7 \\ 6 & 9 & -4 \\ -5 & -11 & 0 \end{bmatrix}^T t - 4t} \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} (\sin(t) - \cos(t))$$

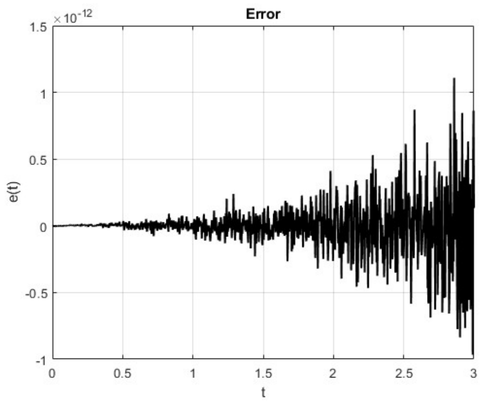
Проведя вычисления в `MATLAB`, получаем

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1.2 \\ -0.3 \\ 2.1 \end{bmatrix}$$

Получили начальные условия системы, соответсвующие выходу $y(t) = f(t)$. Выполним моделирование системы аналогично третьему заданию. Программа для построения графиков находится в приложении 4. Графики представлены на рисунке 6



(a) График $y(t)$ и $f(t)$



(b) График $e(t) = y(t) - f(t)$

Рис. 6: Графики для четвертого задания

График $y(t)$ почти совпадает с $f(t)$. Несмотря на то, что ошибка очень мала ($\times 10^{-12}$), при увеличении t (приближении к t_1) она хаотически возрастает по модулю. Либо это погрешности численного решения, либо особенности системы.

Другие начальные условия

Так как Грамиан $Q(t_1 = 3)$ вырожден, то различным начальным условиям может соответствовать одинаковый выход. То есть мы можем найти такие вектора $x_i(0)$, которые будут порождать выход вида $y(t) = f(t)$.

Для решения такой задачи обратимся к ненаблюдаемому подпространству – ядру матрицы наблюдаемости. В нашем случае оно существует, так как матрица V имеет неполный ранг. Вектора из этого подпространства могут быть различными начальными условиями, но именно вследствие их природы выход будет одинаковый (эти вектора ненаблюдаемы – мы смотрим на выход, но не знаем, какое именно начальное условие его породило). Проверить невидимость начального условия можно следующей формулой

$$Vx_0 = y$$

Вектор y – желаемый выход. Мы можем его вычислить, зная V и x_0

$$Vx_0 = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -5 & 10 & 20 \\ 40 & 5 & -75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.2 \\ -0.3 \\ 2.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 45 \\ -207 \end{bmatrix}$$

Теперь мы задаемся вопросом – а можно ли использовать другой x_0 и получить тот же y при той же V? Ответ – нужно решить СЛАУ, сделав x_0 неизвестным. Так как ранг V меньше порядка системы, то такая СЛАУ будет иметь множество решений (иначе – единственное). Запишем в матричном виде

$$Vx_0 = y \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -5 & 10 & 20 \\ 40 & 5 & -75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 45 \\ -207 \end{bmatrix}$$

Запишем в виде системы

$$\begin{cases} 0x_1 - 5x_2 - 5x_3 = -9 \\ -5x_1 + 10x_2 + 20x_3 = 45 \\ 40x_1 + 5x_2 - 75x_3 = -207 \end{cases}$$

Эту систему можно решить, например, методом Гаусса. Избавляясь от линейно-зависимых строк и выражая каждую координату через одну свободную получаем

$$\begin{cases} x_1 = -5.4 + 2x_3 \\ x_2 = 1.8 - x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

То есть мы можем составить любой вектор

$$x_i(0) = \begin{bmatrix} -5.4 + 2x_3 \\ 1.8 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

который будет являться начальным условием для нашей системы и давать одинаковый выход (они все линейно зависимы). Пусть $x_3 = 0, 1, -1$, тогда

$$x_1(0) = \begin{bmatrix} -5.4 \\ 1.8 \\ 0 \end{bmatrix}, \ x_2(0) = \begin{bmatrix} -3.4 \\ 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}, \ x_3(0) = \begin{bmatrix} -7.4 \\ 2.8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Предоставим вычисления $x(t)$ и $y(t)$ `MATLAB`. Построим соответствующие графики. Серым цветом обозначим графики с начальным условием, найденным через Грамиан и интеграл. Точками отметим начальные условия $x(t)$. Программа находится в приложении 4

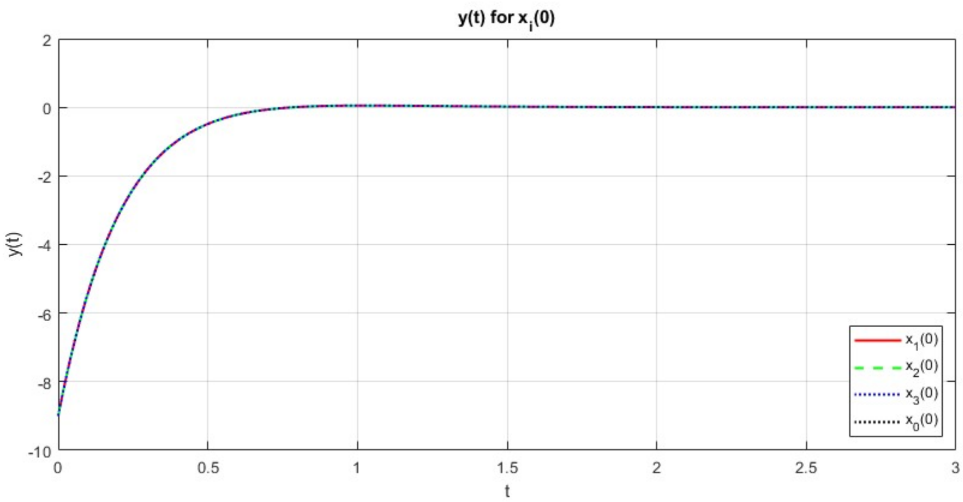


Рис. 7: Графики $y(t)$ при $x_i(0)$

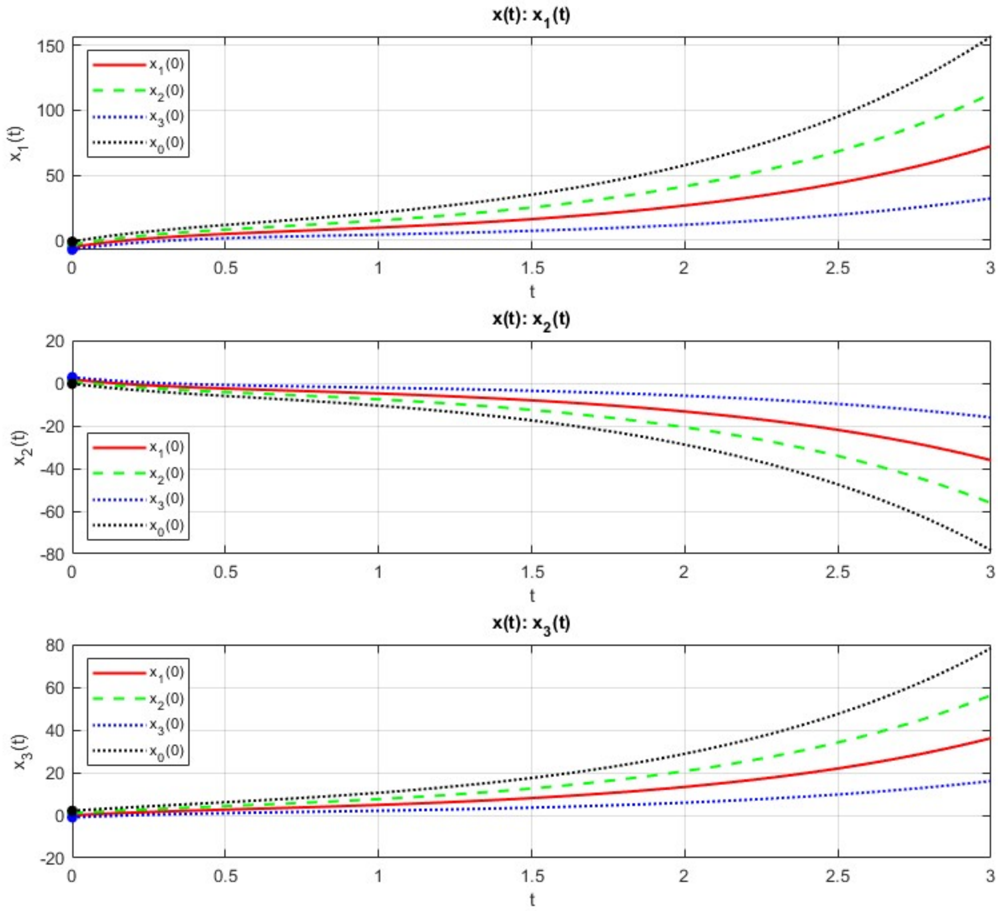


Рис. 8: Графики $x(t)$ при $x_i(0)$

Как видим на рис. 8, каждая координата $x(t)$ для соответствующих начальных условий ведет себя по разному с течением времени. При этом все выходы одинаковы (см. рис. 7). Приблизим графики, чтобы убедиться в начальных условиях

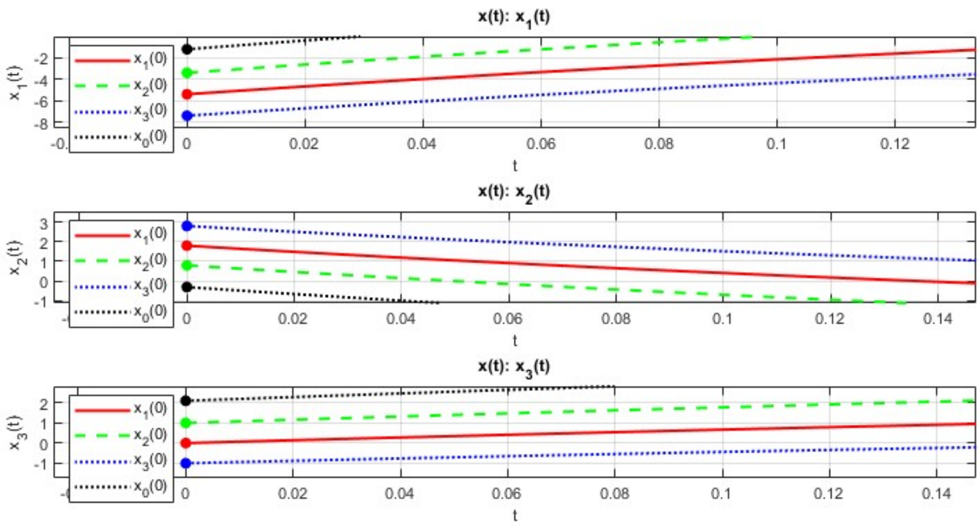


Рис. 9: Графики $x(t)$ при $x_i(0)$ в приближении

Вывод

Система является не полностью наблюдаемой. Мы смогли разными начальными условиями получить одинаковый выход.

Задание 5. Исследование управляемости по выходу

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Жорданова форма системы

Ранее мы находили жорданову форму системы для матрицы A. Запишем ее еще раз

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Управляемость и наблюдаемость собственных чисел

Собственные числа матрицы A мы разбирали ранее

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_{2,3} = -2 \pm i$$

Повторим: все собственные числа матрицы A асимптотически устойчивые. Собственное число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, $\lambda_{2,3}$ – управляемые. Система не полностью управляема. Проверим наблюдаемость матрицами Хаутуса. Определим их и найдем ранги

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_{2,3} I \\ C \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 3 \pm i & -2 & 3 \\ 2 & -1 \pm i & 2 \\ -2 & 1 & -2 \pm i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} = 3$$

Все собственные числа наблюдаемы, ранги их матриц Хаутуса совпадают с порядком системы $n = 3$. Таким образом, система полностью наблюдаема.

Матрица управляемости системы по выходу

Составим матрицу управляемости по выходу (программа представлена в приложении 5 на листинге 5)

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & -9 \\ -1 & -1 & 9 \end{bmatrix},$$

$$U_{out} = \begin{bmatrix} CU & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 54 & 0 \end{bmatrix}$$

Уже видим, что

$$\operatorname{rank}\left[U_{out}\right] = 1$$

Размерность выхода заданной системы $k = 2$, так как матрица C имеет 2 строки (также и D имеет две строки). Ранг матрицы управляемости по выходу меньше размерности выхода, следовательно, система неуправляема по выходу.

Другая матрица связи

Матрица управляемости по выходу описывает управляемое по выходу пространство – множество выходов линейной системы, которых от нее можно добиться за конечное время при помощи ограниченного управления. Наша U_{out} описывает всего лишь одномерное пространство $\operatorname{Range}\left(U_{out}\right)$, которого нам недостаточно для полного управления по выходу. Нам не хватает некоторого управления через матрицу связи D. Мы можем это исправить следующим образом

$$D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Мы добавили некоторое управление, и теперь

$$\operatorname{rank}\left[U_{out}\right] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -6 & 54 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Получилось, что наша система полностью управляема по выходу – можем добиться от системы любого выхода, используя ограниченное управление. Однако теперь выход системы зависит не только от состояний системы, то есть $u(t)$ сразу влияет на $y(t)$.

Вывод

Система не полностью управляема, полностью наблюдаема и полностью управляема по выходу после изменения матрицы связи. Однако теперь входное воздействие сразу напрямую влияет на выход системы.

Общий вывод по работе

В данной лабораторной работе мы изучили управляемость и наблюдаемость системы по состоянию и по выходу. Были промоделированы системы для подтверждения рассуждений.

Приложения

Приложение 1

```
% input data
A = [1 -2 3; 2 -3 2; -2 1 -4];
B = [-3; -1; 3];
x1 = [4; 3; -3];
t1 = 3;

% controllability matrix
U = [B A*B A*A*B];
r = rank(U);
disp(U);
disp(r);

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Houtus matrices
H_1 = [A-A_e(1)*eye(3) B];
r_1 = rank(H_1);
disp(H_1);
disp(r_1);

H_2 = [A-A_e(2)*eye(3) B];
r_2 = rank(H_2);
disp(H_2);
disp(r_2);

H_3 = [A-A_e(3)*eye(3) B];
r_3 = rank(H_3);
disp(H_3);
disp(r_3);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P1(:,1) = P(:,1);
P1(:,2) = imag(P(:,2));
P1(:,3) = real(P(:,3));
P1_inv = P1^-1;
J_re = P1_inv * A * P1;
B_jre = P1_inv * B;
disp(P1);
disp(P1_inv);
disp(J_re);
disp(B_jre);

% gramian
integrand = @(t) expm(A * t) * (B * B') * expm(A' * t);
P_t1 = integral(@(t) integrand(t), 0, t1, 'ArrayValued', true);
disp(P_t1);

% gramian eigenvalues
e = eig(P_t1);
disp(e);
```

```
% u_t
u_t = @(t) B' * expm(A' * (t1 - t)) * inv(P_t1) * x1;

% u_t modeling
time = linspace(0, t1, 1000);

control = arrayfun(@(t) u_t(t), time, 'UniformOutput', false);
control = cell2mat(control);

figure;
plot(time, control, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('t');
ylabel('u(t)');
title('Control');
grid on;

% x_t
dxdt = @(t, x) A * x + B * u_t(t);

% x_t modeling
[t, x] = ode45(dxdt, [0 t1], [0; 0; 0]);

figure;
plot(t, x(:,1), 'r', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(t, x(:,2), 'g', 'LineWidth', 1.5);
plot(t, x(:,3), 'b', 'LineWidth', 1.5);
scatter(t1, x1(1), 'ro', 'filled');
scatter(t1, x1(2), 'go', 'filled');
scatter(t1, x1(3), 'bo', 'filled');
yline(x1(1), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_1
yline(x1(2), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_2
yline(x1(3), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_3
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
legend('x_1', 'x_2', 'x_3');
title('System state');
grid on;
```

Листинг 1: Программа для первого задания

Приложение 2

```
% input data
A = [1 -2 3; 2 -3 2; -2 1 -4];
B = [3; 1; -1];
x1p = [4; 3; -3];
x1pp = [3; 3; -2];
t1 = 3;

% controllability matrix
U = [B A*B A*A*B];
r = rank(U);
detU = det(U);
disp(U);
disp(r);
disp(detU)
```

```
% check x1p in subspace
U_x1p = [U x1p];
r_x1p = rank(U_x1p);
disp(U_x1p);
disp(r_x1p);

% check x1pp in subspace
U_x1pp = [U x1pp];
r_x1pp = rank(U_x1pp);
disp(U_x1pp);
disp(r_x1pp);

if r_x1p == r
    x1 = x1p;
else
    x1 = x1pp;
end
disp(x1)

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Houtus matrices
H_1 = [A-A_e(1)*eye(3) B];
r_1 = rank(H_1);
disp(H_1);
disp(r_1);

H_2 = [A-A_e(2)*eye(3) B];
r_2 = rank(H_2);
disp(H_2);
disp(r_2);

H_3 = [A-A_e(3)*eye(3) B];
r_3 = rank(H_3);
disp(H_3);
disp(r_3);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P1(:,1) = P(:,1);
P1(:,2) = imag(P(:,2));
P1(:,3) = real(P(:,3));
P1_inv = P1^-1;
J_re = P1_inv * A * P1;
B_jre = P1_inv * B;
disp(P1);
disp(P1_inv);
disp(J_re);
disp(B_jre);

% gramian
integrand = @(t) expm(A * t) * (B * B') * expm(A' * t);
P_t1 = integral(@(t) integrand(t), 0, t1, 'ArrayValued', true);
disp(P_t1);

% gramian eigenvalues
```

```
e = eig(P_t1);
disp(e);

% u_t
u_t = @(t) B' * expm(A' * (t1 - t)) * pinv(P_t1) * x1;
disp(pinv(P_t1));

% u_t modeling
time = linspace(0, t1, 1000);

control = arrayfun(@(t) u_t(t), time, 'UniformOutput', false);
control = cell2mat(control);

figure;
plot(time, control, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('t');
ylabel('u(t)');
title('Control');
grid on;

% x_t
dxdt = @(t, x) A * x + B * u_t(t);

% x_t modeling
[t, x] = ode45(dxdt, [0 t1], [0; 0; 0]);

figure;
plot(t, x(:,1), 'r', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(t, x(:,2), 'g', 'LineWidth', 1.5);
plot(t, x(:,3), 'b', 'LineWidth', 1.5);
scatter(t1, x1(1), 'ro', 'filled');
scatter(t1, x1(2), 'go', 'filled');
scatter(t1, x1(3), 'bo', 'filled');
yline(x1(1), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_1
yline(x1(2), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_2
yline(x1(3), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_3
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
legend('x_1', 'x_2', 'x_3');
title('System state');
grid on;
```

Листинг 2: Программа для второго задания

Приложение 3

```
% input data
A = [-16 -27 7; 6 9 -4; -5 -11 0];
C = [2 7 1];
f_t = @(t) -9 * exp(-4 * t) * cos(t) + 9 * exp(-4 * t) * sin(t);
t1 = 3;

% observability matrix
V = [C; C*A; C*A^2];
r = rank(V);
disp(A^2);
disp(V);
```

```
disp(r);

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Houtus matrices
H_1 = [A-A_e(1)*eye(3); C];
r_1 = rank(H_1);
disp(H_1);
disp(r_1);

H_2 = [A-A_e(2)*eye(3); C];
r_2 = rank(H_2);
disp(H_2);
disp(r_2);

H_3 = [A-A_e(3)*eye(3); C];
r_3 = rank(H_3);
disp(H_3);
disp(r_3);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P1(:,1) = P(:,1);
P1(:,2) = imag(P(:,2));
P1(:,3) = real(P(:,3));
P1_inv = P1^-1;
J_re = P1_inv * A * P1;
C_jre = C * P1;
disp(P1);
disp(P1_inv);
disp(J_re);
disp(C_jre);

% gramian
integrand = @(t) expm(A' * t) * (C' * C) * expm(A * t);
Q_t1 = integral(@(t) integrand(t), 0, t1, 'ArrayValued', true);
disp(Q_t1);

% gramian eigenvalues
e = eig(Q_t1);
disp(e);

% initial conditions x(0)
integrand_x0 = @(t) expm(A' * t) * C' * f_t(t);
X_int = integral(@(t) integrand_x0(t), 0, t1, 'ArrayValued', true);
Q_t1_pinv = pinv(Q_t1);
x0 = Q_t1_pinv * X_int;
disp(Q_t1_pinv);
disp(x0);

% system modeling
x_t = @(t) expm(A * t) * x0;
y_t = @(t) C * x_t(t);

time = linspace(0, t1, 1000);
y_arr = arrayfun(y_t, time);
```

```
f_arr = arrayfun(f_t, time);

figure;
plot(time, y_arr, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(time, f_arr, 'r--', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('t');
ylabel('y(t)');
legend('y(t)', 'f(t)');
title('y(t) and f(t) comparison');
grid on;

err = y_arr - f_arr;

figure;
plot(time, err, 'k', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('t');
ylabel('e(t)');
title('Error');
grid on;
```

Листинг 3: Программа для третьего задания

Приложение 4

```
% input data
A = [-16 -27 7; 6 9 -4; -5 -11 0];
C = [0 -5 -5];
f_t = @(t) -9 * exp(-4 * t) * cos(t) + 9 * exp(-4 * t) * sin(t);
t1 = 3;

% observability matrix
V = [C; C*A; C*A^2];
r = rank(V);
det_V = det(V);
disp(A^2);
disp(V);
disp(r);
disp(det_V);

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Houtus matrices
H_1 = [A-A_e(1)*eye(3); C];
r_1 = rank(H_1);
disp(H_1);
disp(r_1);

H_2 = [A-A_e(2)*eye(3); C];
r_2 = rank(H_2);
disp(H_2);
disp(r_2);

H_3 = [A-A_e(3)*eye(3); C];
r_3 = rank(H_3);
disp(H_3);
```

```
disp(r_3);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P1(:,1) = P(:,1);
P1(:,2) = imag(P(:,2));
P1(:,3) = real(P(:,3));
P1_inv = P1^-1;
J_re = P1_inv * A * P1;
C_jre = C * P1;
disp(P1);
disp(P1_inv);
disp(J_re);
disp(C_jre);

% gramian
integrand = @(t) expm(A' * t) * (C' * C) * expm(A * t);
Q_t1 = integral(@(t) integrand(t), 0, t1, 'ArrayValued', true);
disp(Q_t1);

% gramian eigenvalues
e = eig(Q_t1);
disp(e);

% initial conditions x(0)
integrand_x0 = @(t) expm(A' * t) * C' * f_t(t);
X_int = integral(@(t) integrand_x0(t), 0, t1, 'ArrayValued', true);
Q_t1_pinv = pinv(Q_t1);
x0 = Q_t1_pinv * X_int;
disp(Q_t1_pinv);
disp(x0);

% system modeling
x_t = @(t) expm(A * t) * x0;
y_t = @(t) C * x_t(t);

time = linspace(0, t1, 1000);
y_arr = arrayfun(y_t, time);
f_arr = arrayfun(f_t, time);

figure;
plot(time, y_arr, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(time, f_arr, 'r--', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('t');
ylabel('y(t)');
legend('y(t)', 'f(t)');
title('y(t) and f(t) comparison');
grid on;

err = y_arr - f_arr;

figure;
plot(time, err, 'k', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('t');
ylabel('e(t)');
title('Error');
grid on;
```

```
% other initial conditions
y_wanted = V * x0;
disp(y_wanted);

x0_1 = [-5.4; 1.8; 0]; % x_3 = 0
x0_2 = [-3.4; 0.8; 1]; % x_3 = 1
x0_3 = [-7.4; 2.8; -1]; % x_3 = -1

[t, x00] = ode45(@(t, x) A * x, time, x0);
[t, x1] = ode45(@(t, x) A * x, time, x0_1);
[t, x2] = ode45(@(t, x) A * x, time, x0_2);
[t, x3] = ode45(@(t, x) A * x, time, x0_3);

y00 = C * x0;
y1 = C * x1';
y2 = C * x2';
y3 = C * x3';

% x_t
figure;

subplot(3, 1, 1);
plot(t, x1(:,1), 'r', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(t, x2(:,1), 'g--', 'LineWidth', 1.5);
plot(t, x3(:,1), 'b:', 'LineWidth', 1.5);
plot(t, x00(:,1), 'k:', 'LineWidth', 1.5);
scatter(0, x0_1(1), 'ro', 'filled');
scatter(0, x0_2(1), 'go', 'filled');
scatter(0, x0_3(1), 'bo', 'filled');
scatter(0, x0(1), 'ko', 'filled');
xlabel('t');
ylabel('x_1(t)');
title('x(t): x_1(t)');
legend('x_1(0)', 'x_2(0)', 'x_3(0)', 'x_0(0)', 'Location', '
    northwest');
grid on;

subplot(3, 1, 2);
plot(t, x1(:,2), 'r', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(t, x2(:,2), 'g--', 'LineWidth', 1.5);
plot(t, x3(:,2), 'b:', 'LineWidth', 1.5);
plot(t, x00(:,2), 'k:', 'LineWidth', 1.5);
scatter(0, x0_1(2), 'ro', 'filled');
scatter(0, x0_2(2), 'go', 'filled');
scatter(0, x0_3(2), 'bo', 'filled');
scatter(0, x0(2), 'ko', 'filled');
xlabel('t');
ylabel('x_2(t)');
title('x(t): x_2(t)');
legend('x_1(0)', 'x_2(0)', 'x_3(0)', 'x_0(0)', 'Location', '
    southwest');
grid on;

subplot(3, 1, 3);
plot(t, x1(:,3), 'r', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(t, x2(:,3), 'g--', 'LineWidth', 1.5);
plot(t, x3(:,3), 'b:', 'LineWidth', 1.5);
plot(t, x00(:,3), 'k:', 'LineWidth', 1.5);
```

```
scatter(0, x0_1(3), 'ro', 'filled');
scatter(0, x0_2(3), 'go', 'filled');
scatter(0, x0_3(3), 'bo', 'filled');
scatter(0, x0(3), 'ko', 'filled');
xlabel('t');
ylabel('x_3(t)');
title('x(t): x_3(t)');
legend('x_1(0)', 'x_2(0)', 'x_3(0)', 'x_0(0)', 'Location', '
    northwest');
grid on;

% y_t
figure;
plot(t, y1, 'r', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(t, y2, 'g--', 'LineWidth', 1.5);
plot(t, y3, 'b:', 'LineWidth', 1.5);
plot(t, y00, 'k:', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('t');
ylabel('y(t)');
title('y(t) for x_i(0)');
legend('x_1(0)', 'x_2(0)', 'x_3(0)', 'x_0(0)', 'Location', '
    southeast');
grid on;
```

Листинг 4: Программа для четвертого задания

```
% input data
A = [1 -2 3; 2 -3 2; -2 1 -4];
B = [3; 1; -1];
C = [0 1 1; 0 -4 2];
D = [0; 0];

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P1(:,1) = P(:,1);
P1(:,2) = imag(P(:,2));
P1(:,3) = real(P(:,3));
P1_inv = P1^-1;
J_re = P1_inv * A * P1;
B_jre = P1_inv * B;
disp(P1);
disp(P1_inv);
disp(J_re);
disp(B_jre);

% Houtus matrices
H_1 = [A-A_e(1)*eye(3); C];
r_1 = rank(H_1);
disp(H_1);
disp(r_1);

H_2 = [A-A_e(2)*eye(3); C];
r_2 = rank(H_2);
disp(H_2);
disp(r_2);

H_3 = [A-A_e(3)*eye(3); C];
r_3 = rank(H_3);
```

```
    disp(H_3);
    disp(r_3);

    % output controllability matrix
    U = [B A*B A^2*B];
    U_out = [C*U D];
    r_U_out = rank(U_out);
    disp(U);
    disp(U_out);
    disp(r_U_out);

    % new communication matrix
    D_new = [1; 0];
    U_out_new = [C*U D_new];
    r_U_out_new = rank(U_out_new);
    disp(U_out_new);
    disp(r_U_out_new);
```

Листинг 5: Программа для пятого задания