Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Задание 1. Исследование управляемости **2**

1.1 Матрица управляемости . . . 2

1.2 Собственные числа и матрицы Хаутуса . . . 2

1.3 Жорданова форма системы . . . 3

1.4 Грамиан управляемости системы . . . 4

1.5 Управление системой за определенное время . . . 5

1.6 Выводы . . . 6

2 Задание 2. Еще одно исследование управляемости **6**

2.1 Проверка точек на принадлежность управляемому подпространству . . . 6

2.2 Матрица управляемости . . . 7

2.3 Собственные числа и матрицы Хаутуса . . . 7

2.4 Жорданова форма системы . . . 7

2.5 Грамиан управляемости системы . . . 8

2.6 Управление системой за определенное время . . . 8

2.7 Выводы . . . 9

3 Приложения **9**

3.1 Приложение 1 . . . 9

3.2 Приложение 2 . . . 11

Задание 1. Исследование управляемости

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \text{ где } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \text{ дана точка } x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Матрица управляемости

Исходя из условия видим, что порядок системы n равен трем. Значит, матрица управляемости будет иметь вид

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}$$

Вектор B нам известен. Найдем оставшиеся неизвестные

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix},$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 7 & -13 \\ -8 & 7 & -8 \\ 8 & -3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Таким образом, получаем матрицу управляемости

$$U = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -19 \\ -1 & 3 & -7 \\ 3 & -7 & 15 \end{bmatrix}$$

Определим ранг этой матрицы, чтобы сделать вывод об управляемости системы в целом

$$\operatorname{rank}[U] = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} -3 & 8 & -19 \\ -1 & 3 & -7 \\ 3 & -7 & 15 \end{bmatrix} = 3$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы n, то система является полностью управляемой.

Собственные числа и матрицы Хаутуса

Найдем собственные числа матрицы A

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -3 \\ -2 & \lambda + 3 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 13\lambda + 10 = 0$$

Подбором получаем корень $\lambda_1 = -2$. Вынесем его за скобку, и, решим квадратное уравнение

$$(\lambda + 2)\left(\lambda^2 + 4\lambda + 5\right) = 0,$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0, \ D = 4^2 - 5 \cdot 4 = -4 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

Таким образом, матрица A имеет следующие собственные числа

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_{2,3} = -2 \pm i$$

Действительная часть всех собственных чисел меньше нуля, а значит они все асимптотически устойчивые, но могут быть неуправляемыми. Для проверки построим матрицы Хаутуса $[A - \lambda_i I \ B]$ для каждого собственного числа и найдем их ранг

$$\operatorname{rank}[A - \lambda_1 I \ B] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

$$\operatorname{rank}[A - \lambda_{2,3} I \ B] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 3 \pm i & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 \pm i & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \pm i & 3 \end{bmatrix} = 3$$

Ранги матриц Хаутуса для каждого собственного числа матрицы A равны порядку системы, следовательно, все собственные числа являются управляемыми. Из этого же следует, что система полностью управляема.

Жорданова форма системы

Мы можем разложить матрицу A следующим образом

$$A = PJP^{-1},$$

где P – матрица собственных векторов матрицы A, J – жорданова нормальная форма. В нашем случае кратных собственных чисел нет, а значит ЖНФ примет вид диагональной матрицы. Это объясняется тем, что для каждого собственного числа найдется хотя бы один собственный вектор ($A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$), то есть каждому собственному числу соответствует ровно одна жорданова клетка размера 1×1. Ранее мы вычисляли собственные числа – составим матрицу J без поиска P и P^{-1}

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2-i & 0 \\ 0 & 0 & -2+i \end{bmatrix}$$

Более того, можно сделать матрицу вещественной, пользуясь знаниями с линейной алгебры

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \ J = \begin{bmatrix} \alpha + \beta i & 0 \\ 0 & \alpha - \beta i \end{bmatrix} \Rightarrow J_{re} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Получаем матрицу J_{re} в базисе собственных векторов матрицы A

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = P_{re}^{-1} A P_{re}$$

Далее для анализа необходимо перевести вектор входных воздействий B в базис собственных векторов матрицы A

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B$$

Для поиска P_{re} составим матрицу собственных векторов P матрицы A (v_i находятся подстановкой соответсвующих λ_i в $[\lambda_i I - A]$ и решением СЛАУ)

$$P = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{bmatrix} -1 & -1.5+0.5i & -1.5-0.5i \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Теперь составим матрицу P_{re} по следующему принципу: каждый нечетный столбец составляется из действительных частей чисел соответствующих нечетных столбцов матрицы P, а каждый четный – из мнимых частей

$$P_{re} = [\Re\{P_1\}\ \Im\{P_2\}\ \Re\{P_3\}] = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Найдем обратную матрицу от P_{re} и вычислим B_{Jre}

$$P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P_{re}^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = B_{Jre}$$

Мы так же можем убедиться, что верно нашли J_{re}

$$J_{re} = P_{re}^{-1} A P_{re} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Итого, получаем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix},\ B_{Jre} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Мы уже выяснили, что все жордановы клетки относятся к различным собственным числам – можем делать выводы об управляемости. Так как элементы матрицы входных воздействий B_{Jre} не равны нулю, то все собственные числа управляемы. Из этого следует, что система полностью управляема. При этом достаточное условие полной управляемости системы в нашем случае – не равенство нулю первого и последнего элементов матрицы B_{Jre}.

Грамиан управляемости системы

Найдем Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$

$$P(t_1) = \int\limits_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t}\, dt$$

Предоставим вычисления `MATLAB`. Программа представлена на листинге 1 в приложении 1. Итого имеем

$$P(t_1 = 3) = \begin{bmatrix} 1.5956 & 0.4779 & -1.7132 \\ 0.4779 & 0.1500 & -0.5029 \\ -1.7132 & -0.5029 & 1.8559 \end{bmatrix}$$

Получили числовую матрицу. Для анализа управляемости системы найдем собственные числа Грамиана с помощью `MATLAB`. Получаем

$$\lambda_1 = 3.5841$$
$$\lambda_2 = 0.0002$$
$$\lambda_3 = 0.0172$$

Все собственные числа Грамиана относительно $t_1 = 3$ строго положительны, следовательно, его определитель (произведение собственных чисел) больше нуля – Грамиан невырожденный. Это следует уже из равенства ранга матрицы управляемости порядку системы – полученный в нынешнем пункте результат подтверждает наши рассуждения – система полностью управляема. Однако из-за присутствия маленького собственного числа $\lambda_2 = 0.0002$ можно сделать вывод, что в некотором направлении система слабо управляема.

Управление системой за определенное время

Найдем управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1, по формуле

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} \left[P(t_1)\right]^{-1} x_1$$

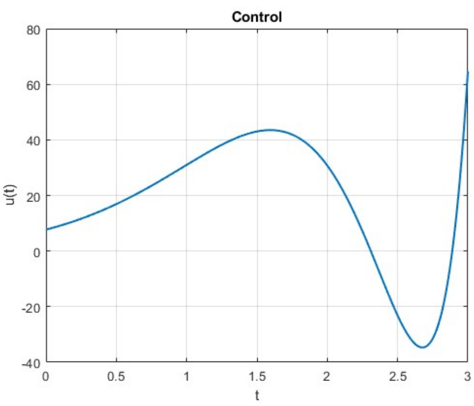
Подставим матрицы и t_1 в выражение

$$u(t) = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}^T e^{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}^T (3-t)} \begin{bmatrix} 1.5956 & 0.4779 & -1.7132 \\ 0.4779 & 0.1500 & -0.5029 \\ -1.7132 & -0.5029 & 1.8559 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

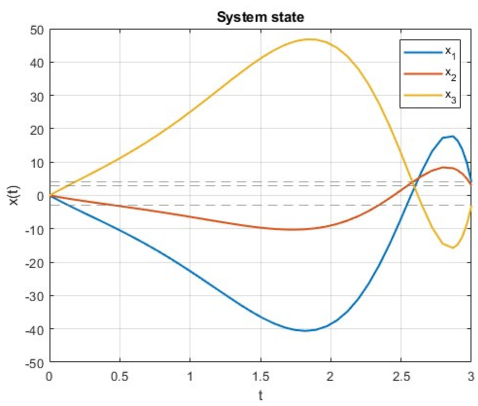
После всех вычислений получим

$$u(t) = \frac{17826740000e^{2t} - 17213830000e^2 \cos(3-t) - 6911070000e^2 \sin(3-t)}{13222909e^6}$$

Мы нашли управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1. Выполним моделирование системы в `MATLAB`. Зададим интервал $t \in [0, t_1 = 3]$ с 1000 точками. Для каждого t_i вычислим по формуле $u_i(t_i)$, после чего построим график $u(t)$. Для моделирования изменения состояния системы во времени решим СДУ $\dot{x} = Ax + Bu(t)$ с начальным условием $x(0) = 0$, после чего построим график



(a) График $u(t)$



(b) График $x(t)$

Рис. 1: Графики для первого задания

Серыми пунктирными линиями на графике $x(t)$ отмечены координаты точки $x_1 = [4\ 3\ \ -3]^T$. Как видим, система достигает состояния x_1 в момент времени $t_1 = 3$ – x_i сходятся к соответствующим пунктирным линиям.

Выводы

Все собственные числа матрицы A управляемы, система полностью управляема. Моделирование системы подтвердило наши рассуждения.

Задание 2. Еще одно исследование управляемости

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ \text{где}\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ x_1' = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix},\ x_1'' = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Проверка точек на принадлежность управляемому подпространству

Чтобы проверить, принадлежит ли точка управляемому подпространству системы, необходимо найти матрицу управляемости и вычислить ее ранг. После этого создать расширенную матрицу – матрица управляемости с точкой, которую проверяем на принадлежность управляемому подпространству системы. Смысл в том, что, если ранг расширенной матрицы будет равен рангу обычной матрицы управляемости, то данная точка уже существует в базисе, в котором задана система, а значит можно перевести систему в эту точку некоторым управлением из начальной точки (линейная зависимость). Если ранг больше, то точка выходит за пределы подпространства.

Найдем матрицу управления U и ее ранг. Ожидаем ранг, равный двум. Опустим вычисления, так как они аналогичны первому заданию. Программа для вычислений и построения графиков представлена на листинге 2 в приложении 2. Получаем

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & -9 \\ -1 & -1 & 9 \end{bmatrix},\ \operatorname{rank}[U] = 2$$

Создадим расширенные матрицы и вычислим их ранги

$$U_{x_1'} = \begin{bmatrix} U & x_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 9 & -3 \end{bmatrix},\ \operatorname{rank}\left[U_{x_1'}\right] = 2$$

$$U_{x_1''} = \begin{bmatrix} U & x_1'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 9 & -2 \end{bmatrix},\ \operatorname{rank}\left[U_{x_1''}\right] = 3$$

Выходит, что точка x_1' принадлежит управляемому подпространству системы, а x_1'' – нет. Принимаем целевой точкой x_1 точку x_1'. Далее все шаги аналогичны первому заданию.

Матрица управляемости

Сделаем вывод об управляемости системы по матрице управляемости. Система одноканальная – один вход и один выход – U квадратная. Проверим определитель

$$\det[U] = 0$$

Так как определитель равен нулю, то система является не полностью управляемой. Об этом уже говорил ранг U, меньший порядка системы.

Собственные числа и матрицы Хаутуса

Матрица A такая же, как в первом задании. Мы уже вычислили ее собственные числа

$$\lambda_1 = -2$$
$$\lambda_{2,3} = -2 \pm i$$

и выяснили, что они асимптотически устойчивые, но могут быть неуправляемыми. Матрицы Хаутуса изменятся – они зависят от B. Построим их и вычислим их ранги

$$\operatorname{rank}[A - \lambda_1 I \;\; B] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\operatorname{rank}[A - \lambda_{2,3} I \;\; B] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 3 \pm i & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 \pm i & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \pm i & -1 \end{bmatrix} = 3$$

Выходит, что $\lambda_{2,3} = -2 \pm i$ являются управляемыми, так как ранги их матриц Хаутуса равны порядку системы. Собственное число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое (ранг матрицы Хаутуса меньше порядка системы), но устойчивое – система не полностью управляема, но стабилизируема.

Жорданова форма системы

Жорданово разложение матрицы A не изменится, но изменится матрица входных воздействий, так как B другая. Имеем

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Пересчитаем B_{Jre}

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Таким образом, исследуем

$$J_{re} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \; B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Собственное число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, а $\lambda_{2,3} = -2 \pm i$ управляемые. Достаточное условие полной управляемости не выполнено – первый элемент матрицы входных воздействий B_{Jre} равен нулю – система не полностью управляема.

Грамиан управляемости системы

Найдем Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$ аналогично первому заданию

$$P\left(t_1 = 3\right) = \begin{bmatrix} 3.625 & 1.625 & -1.625 \\ 1.625 & 0.750 & -0.750 \\ -1.625 & -0.750 & 0.750 \end{bmatrix}$$

Теперь найдем собственные числа Грамиана

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 5.0943 \\ \lambda_2 &= 0.0307 \\ \lambda_3 &= 0.0000 \end{aligned}$$

Так как одно из собственных чисел Грамиана равно нулю, то его определитель равен нулю, то есть Грамиан вырожденный. Это следует уже из неполного ранга матрицы управляемости. Система не полностью управляема – в некотором направлении управлять системой не получится. В других же направлениях (двумерном подпространстве) система управляема.

Управление системой за определенное время

Найдем приближенное управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1. Теперь в формуле необходимо использовать псевдообратную матрицу Грамиана, так как вследствие вырожденности обратную найти не получится

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} \left[P(t_1)\right]^+ x_1$$

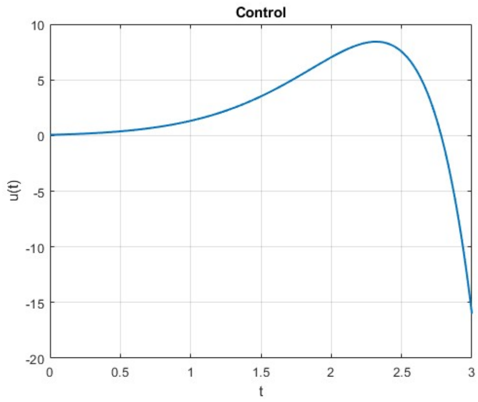
Подставим матрицы и t_1 в выражение

$$u(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T e^{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}^T (3-t)} \begin{bmatrix} 3.625 & 1.625 & -1.625 \\ 1.625 & 0.750 & -0.750 \\ -1.625 & -0.750 & 0.750 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

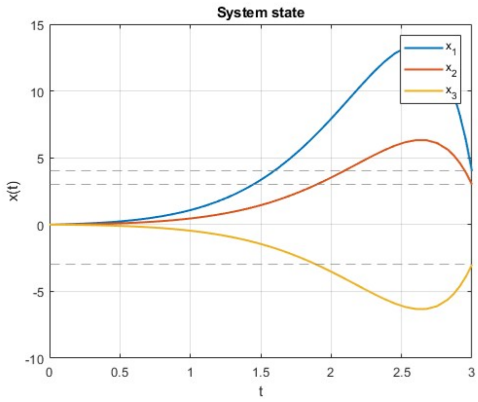
После всех вычислений получим

$$u(t) = \frac{-80001\cos\left(3 - t\right) + 360002\sin\left(3 - t\right)}{5000e^4}$$

Аналогично первому заданию промоделируем систему. Результаты представлены на рис. 2



(a) График $u(t)$



(b) График $x(t)$

Рис. 2: Графики для второго задания

Серыми пунктирными линиями на графике $x(t)$ отмечены координаты точки $x_1 = [4\ 3\ \ -3]^T$. Как видим, система достигает состояния x_1 в момент времени $t_1 = 3$ – x_i сходятся к соответствующим пунктирным линиям. Это подтверждает, что точка x_1' принадлежит управляемому подпространству системы – мы ее достигли, несмотря на не полную управляемость системы.

Выводы

Система не полностью управляема, но стабилизируема. Мы смогли найти приближенное управление для перевода системы из начального условия в точку x_1, принадлежащую управляемому подпространству системы, за конечное время t_1 и, продемонстрировали это, промоделировав систему.

Приложения

Приложение 1

```
% input data
A = [1 -2 3; 2 -3 2; -2 1 -4];
B = [-3; -1; 3];
x1 = [4; 3; -3];
t1 = 3;

% controllability matrix
U = [B A*B A*A*B];
r = rank(U);
disp(U);
disp(r);

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Houtus matrices
H_1 = [A-A_e(1)*eye(3) B];
r_1 = rank(H_1);
disp(H_1);
```

```
disp(r_1);

H_2 = [A-A_e(2)*eye(3) B];
r_2 = rank(H_2);
disp(H_2);
disp(r_2);

H_3 = [A-A_e(3)*eye(3) B];
r_3 = rank(H_3);
disp(H_3);
disp(r_3);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P1(:,1) = real(P(:,1));
P1(:,2) = imag(P(:,2));
P1(:,3) = real(P(:,3));
P1_inv = P1^-1;
J_re = P1_inv * A * P1;
B_jre = P1_inv * B;
disp(P1);
disp(P1_inv);
disp(J_re);
disp(B_jre);

% gramian
integrand = @(t) expm(A * t) * (B * B') * expm(A' * t);
P_t1 = integral(@(t) integrand(t), 0, t1, 'ArrayValued', true);
disp(P_t1);

% gramian eigenvalues
e = eig(P_t1);
disp(e);

% u_t
u_t = @(t) B' * expm(A' * (t1 - t)) * inv(P_t1) * x1;

% u_t modeling
time = linspace(0, t1, 1000);

control = arrayfun(@(t) u_t(t), time, 'UniformOutput', false);
control = cell2mat(control);

figure;
plot(time, control, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('t');
ylabel('u(t)');
title('Control');
grid on;

% x_t
dxdt = @(t, x) A * x + B * u_t(t);

% x_t modeling
[t, x] = ode45(dxdt, [0 t1], [0; 0; 0]);

figure;
plot(t, x, 'LineWidth', 1.5);
```

```
yline(x1(1), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_1
yline(x1(2), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_2
yline(x1(3), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_3
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
legend('x_1', 'x_2', 'x_3');
title('System state');
grid on;
```

Листинг 1: Программа для первого задания

Приложение 2

```
% input data
A = [1 -2 3; 2 -3 2; -2 1 -4];
B = [3; 1; -1];
x1p = [4; 3; -3];
x1pp = [3; 3; -2];
t1 = 3;

% controllability matrix
U = [B A*B A*A*B];
r = rank(U);
detU = det(U);
disp(U);
disp(r);
disp(detU)

% check x1p in subspace
U_x1p = [U x1p];
r_x1p = rank(U_x1p);
disp(U_x1p);
disp(r_x1p);

% check x1pp in subspace
U_x1pp = [U x1pp];
r_x1pp = rank(U_x1pp);
disp(U_x1pp);
disp(r_x1pp);

if r_x1p == r
    x1 = x1p;
else
    x1 = x1pp;
end
disp(x1)

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Houtus matrices
H_1 = [A-A_e(1)*eye(3) B];
r_1 = rank(H_1);
disp(H_1);
disp(r_1);
```

```
H_2 = [A-A_e(2)*eye(3) B];
r_2 = rank(H_2);
disp(H_2);
disp(r_2);

H_3 = [A-A_e(3)*eye(3) B];
r_3 = rank(H_3);
disp(H_3);
disp(r_3);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P1(:,1) = real(P(:,1));
P1(:,2) = imag(P(:,2));
P1(:,3) = real(P(:,3));
P1_inv = P1^-1;
J_re = P1_inv * A * P1;
B_jre = P1_inv * B;
disp(P1);
disp(P1_inv);
disp(J_re);
disp(B_jre);

% gramian
integrand = @(t) expm(A * t) * (B * B') * expm(A' * t);
P_t1 = integral(@(t) integrand(t), 0, t1, 'ArrayValued', true);
disp(P_t1);

% gramian eigenvalues
e = eig(P_t1);
disp(e);

% u_t
u_t = @(t) B' * expm(A' * (t1 - t)) * pinv(P_t1) * x1;
disp(pinv(P_t1));

% u_t modeling
time = linspace(0, t1, 1000);

control = arrayfun(@(t) u_t(t), time, 'UniformOutput', false);
control = cell2mat(control);

figure;
plot(time, control, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('t');
ylabel('u(t)');
title('Control');
grid on;

% x_t
dxdt = @(t, x) A * x + B * u_t(t);

% x_t modeling
[t, x] = ode45(dxdt, [0 t1], [0; 0; 0]);

figure;
plot(t, x, 'LineWidth', 1.5);
yline(x1(1), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_1
```

```
    yline(x1(2), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_2
    yline(x1(3), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_3
    xlabel('t');
    ylabel('x(t)');
    legend('x_1', 'x_2', 'x_3');
    title('System state');
    grid on;
```

Листинг 2: Программа для второго задания