

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»



**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1**  
**ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО**  
**УПРАВЛЕНИЯ»**  
**ТЕМА «УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ»**  
Вариант №2

Преподаватель:  
Пашенко А. В.

Выполнил:  
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР  
Группа: R3341  
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург  
2025

# Содержание

<b>1</b>	<b>Задание 1. Исследование управляемости</b>	<b>2</b>
1.1	Матрица управляемости . . . . .	2
1.2	Собственные числа и матрицы Хаутуса . . . . .	2
1.3	Жорданова форма системы . . . . .	3
1.4	Грамиан управляемости системы . . . . .	4
1.5	Управление системой за определенное время . . . . .	5
1.6	Выводы . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Задание 2. Еще одно исследование управляемости</b>	<b>6</b>
2.1	Проверка точек на принадлежность управляемому подпространству . . . . .	6
2.2	Матрица управляемости . . . . .	7
2.3	Собственные числа и матрицы Хаутуса . . . . .	7
2.4	Жорданова форма системы . . . . .	7
2.5	Грамиан управляемости системы . . . . .	8
2.6	Управление системой за определенное время . . . . .	8
2.7	Выводы . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Задание 3. Исследование наблюдаемости</b>	<b>9</b>
3.1	Матрица наблюдаемости . . . . .	9
3.2	Собственные числа и матрицы Хаутуса . . . . .	10
3.3	Жорданова форма системы . . . . .	11
3.4	Грамиан наблюдаемости системы . . . . .	11
3.5	Определение начальных условий системы . . . . .	12
3.6	Выводы . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Задание 4. Еще одно исследование наблюдаемости</b>	<b>13</b>
4.1	Матрица наблюдаемости . . . . .	13
4.2	Собственные числа и матрицы Хаутуса . . . . .	13
4.3	Жорданова форма системы . . . . .	14
4.4	Грамиан наблюдаемости системы . . . . .	14
4.5	Определение начальных условий системы . . . . .	14
4.6	Другие начальные условия . . . . .	15
4.7	Вывод . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Приложения</b>	<b>15</b>
5.1	Приложение 1 . . . . .	15
5.2	Приложение 2 . . . . .	17
5.3	Приложение 3 . . . . .	19
5.4	Приложение 4 . . . . .	21

## Задание 1. Исследование управляемости

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \text{ где } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \text{ дана точка } x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

### Матрица управляемости

Исходя из условия видим, что порядок системы  $n$  равен трем. Значит, матрица управляемости будет иметь вид

$$U = [B \quad AB \quad A^2B]$$

Вектор  $B$  нам известен. Найдем оставшиеся неизвестные

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix},$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 7 & -13 \\ -8 & 7 & -8 \\ 8 & -3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Таким образом, получаем матрицу управляемости

$$U = \begin{bmatrix} -3 & 8 & -19 \\ -1 & 3 & -7 \\ 3 & -7 & 15 \end{bmatrix}$$

Определим ранг этой матрицы, чтобы сделать вывод об управляемости системы в целом

$$\text{rank } [U] = \text{rank} \begin{bmatrix} -3 & 8 & -19 \\ -1 & 3 & -7 \\ 3 & -7 & 15 \end{bmatrix} = 3$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы  $n$ , то система является полностью управляемой.

### Собственные числа и матрицы Хаутуса

Найдем собственные числа матрицы  $A$

$$\det [\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -3 \\ -2 & \lambda + 3 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 13\lambda + 10 = 0$$

Подбором получаем корень  $\lambda_1 = -2$ . Вынесем его за скобку, и, решим квадратное уравнение

$$(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4\lambda + 5) = 0,$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0, D = 4^2 - 5 \cdot 4 = -4 \Rightarrow \lambda_{2,3} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

Таким образом, матрица  $A$  имеет следующие собственные числа

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -2 \\ \lambda_{2,3} &= -2 \pm i\end{aligned}$$

Действительная часть всех собственных чисел меньше нуля, а значит они все асимптотически устойчивые, но могут быть неуправляемыми. Для проверки построим матрицы Хаутуса  $[A - \lambda_i I \ B]$  для каждого собственного числа и найдем их ранг

$$\text{rank} [A - \lambda_1 I \ B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

$$\text{rank} [A - \lambda_{2,3} I \ B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 3 \pm i & -2 & 3 & -3 \\ 2 & -1 \pm i & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \pm i & 3 \end{bmatrix} = 3$$

Ранги матриц Хаутуса для каждого собственного числа матрицы  $A$  равны порядку системы, следовательно, все собственные числа являются управляемыми. Из этого же следует, что система полностью управляема.

### Жорданова форма системы

Мы можем разложить матрицу  $A$  следующим образом

$$A = PJP^{-1},$$

где  $P$  – матрица собственных векторов матрицы  $A$ ,  $J$  – жорданова нормальная форма. В нашем случае кратных собственных чисел нет, а значит ЖНФ примет вид диагональной матрицы. Это объясняется тем, что для каждого собственного числа найдется хотя бы один собственный вектор ( $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ), то есть каждому собственному числу соответствует ровно одна жорданова клетка размера  $1 \times 1$ . Ранее мы вычисляли собственные числа – составим матрицу  $J$  без поиска  $P$  и  $P^{-1}$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 - i & 0 \\ 0 & 0 & -2 + i \end{bmatrix}$$

Более того, можно сделать матрицу вещественной, пользуясь знаниями с линейной алгебры

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i, \ J = \begin{bmatrix} \alpha + \beta i & 0 \\ 0 & \alpha - \beta i \end{bmatrix} \Rightarrow J_{re} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Получаем матрицу  $J_{re}$  в базисе собственных векторов матрицы  $A$

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = P_{re}^{-1} A P_{re}$$

Далее для анализа необходимо перевести вектор входных воздействий  $B$  в базис собственных векторов матрицы  $A$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B$$

Для поиска  $P_{re}$  составим матрицу собственных векторов  $P$  матрицы  $A$  ( $v_i$  находятся подстановкой соответствующих  $\lambda_i$  в  $[\lambda_i I - A]$  и решением СЛАУ)

$$P = [v_1 \ v_2 \ v_3] = \begin{bmatrix} -1 & -1.5 + 0.5i & -1.5 - 0.5i \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Теперь составим матрицу  $P_{re}$  по следующему принципу: каждый нечетный столбец составляется из действительных частей чисел соответствующих нечетных столбцов матрицы  $P$ , а каждый четный – из мнимых частей

$$P_{re} = [\Re\{P_1\} \ \Im\{P_2\} \ \Re\{P_3\}] = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Найдем обратную матрицу от  $P_{re}$  и вычислим  $B_{Jre}$

$$P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P_{re}^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = B_{Jre}$$

Мы так же можем убедиться, что верно нашли  $J_{re}$

$$J_{re} = P_{re}^{-1}AP_{re} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Итого, получаем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_{Jre} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Мы уже выяснили, что все жордановы клетки относятся к различным собственным числам – можем делать выводы об управляемости. Так как элементы матрицы входных воздействий  $B_{Jre}$  не равны нулю, то все собственные числа управляемы. Из этого следует, что система полностью управляема. При этом достаточное условие полной управляемости системы в нашем случае – не равенство нулю первого и последнего элементов матрицы  $B_{Jre}$ .

### Грамиан управляемости системы

Найдем Грамиан управляемости системы относительно времени  $t_1 = 3$

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

Предоставим вычисления MATLAB. Программа представлена на листинге 1 в приложении 1. Итого имеем

$$P(t_1 = 3) = \begin{bmatrix} 1.5956 & 0.4779 & -1.7132 \\ 0.4779 & 0.1500 & -0.5029 \\ -1.7132 & -0.5029 & 1.8559 \end{bmatrix}$$

Получили числовую матрицу. Для анализа управляемости системы найдем собственные числа Грамиана с помощью MATLAB. Получаем

$$\lambda_1 = 3.5841$$

$$\lambda_2 = 0.0002$$

$$\lambda_3 = 0.0172$$

Все собственные числа Грамиана относительно  $t_1 = 3$  строго положительны, следовательно, его определитель (произведение собственных чисел) больше нуля – Грамиан невырожденный. Это следует уже из равенства ранга матрицы управляемости порядку системы – полученный в нынешнем пункте результат подтверждает наши рассуждения – система полностью управляема. Однако из-за присутствия маленького собственного числа  $\lambda_2 = 0.0002$  можно сделать вывод, что в некотором направлении система слабо управляема.

### Управление системой за определенное время

Найдем управление, переводящее систему из  $x(0) = 0$  в  $x(t_1) = x_1$  за время  $t_1$ , по формуле

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} [P(t_1)]^{-1} x_1$$

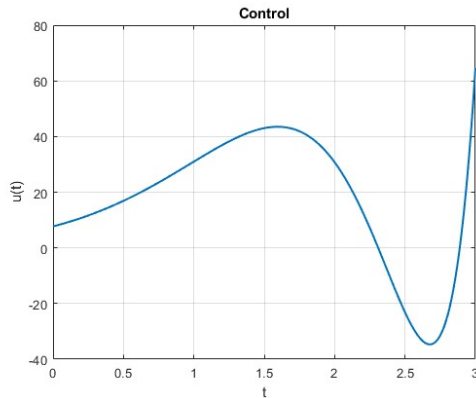
Подставим матрицы и  $t_1$  в выражение

$$u(t) = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}^T e^{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}^T (3-t)} \begin{bmatrix} 1.5956 & 0.4779 & -1.7132 \\ 0.4779 & 0.1500 & -0.5029 \\ -1.7132 & -0.5029 & 1.8559 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

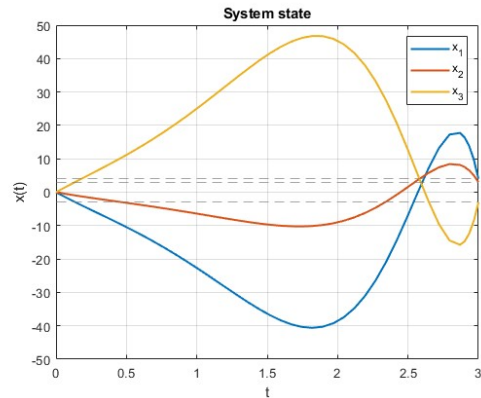
После всех вычислений получим

$$u(t) = \frac{17826740000e^{2t} - 17213830000e^2 \cos(3-t) - 6911070000e^2 \sin(3-t)}{13222909e^6}$$

Мы нашли управление, переводящее систему из  $x(0) = 0$  в  $x(t_1) = x_1$  за время  $t_1$ . Выполним моделирование системы в MATLAB. Зададим интервал  $t \in [0, t_1 = 3]$  с 1000 точками. Для каждого  $t_i$  вычислим по формуле  $u_i(t_i)$ , после чего построим график  $u(t)$ . Для моделирования изменения состояния системы во времени решим СДУ  $\dot{x} = Ax + Bu(t)$  с начальным условием  $x(0) = 0$ , после чего построим график



(a) График  $u(t)$



(b) График  $x(t)$

Рис. 1: Графики для первого задания

Серыми пунктирными линиями на графике  $x(t)$  отмечены координаты точки  $x_1 = [4 \ 3 \ -3]^T$ . Как видим, система достигает состояния  $x_1$  в момент времени  $t_1 = 3 - x_i$  сходятся к соответствующим пунктирным линиям.

## Выводы

Все собственные числа матрицы  $A$  управляемы, система полностью управляема. Моделирование системы подтвердило наши рассуждения.

## Задание 2. Еще одно исследование управляемости

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \text{ где } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x'_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}, x''_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

### Проверка точек на принадлежность управляемому подпространству

Чтобы проверить, принадлежит ли точка управляемому подпространству системы, необходимо найти матрицу управляемости и вычислить ее ранг. После этого создать расширенную матрицу – матрица управляемости с точкой, которую проверяем на принадлежность управляемому подпространству системы. Смысл в том, что, если ранг расширенной матрицы будет равен рангу обычной матрицы управляемости, то данная точка уже существует в базисе, в котором задана система, а значит можно перевести систему в эту точку некоторым управлением из начальной точки (линейная зависимость). Если ранг больше, то точка выходит за пределы подпространства.

Найдем матрицу управления  $U$  и ее ранг. Ожидаем ранг, равный двум. Опустим вычисления, так как они аналогичны первому заданию. Программа для вычислений и построения графиков представлена на листинге 2 в приложении 2. Получаем

$$U = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & -9 \\ -1 & -1 & 9 \end{bmatrix}, \text{ rank } [U] = 2$$

Создадим расширенные матрицы и вычислим их ранги

$$U_{x'_1} = [U \ x'_1] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 9 & -3 \end{bmatrix}, \text{ rank } [U_{x'_1}] = 2$$

$$U_{x''_1} = [U \ x''_1] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & -9 & 3 \\ -1 & -1 & 9 & -2 \end{bmatrix}, \text{ rank } [U_{x''_1}] = 3$$

Выходит, что точка  $x'_1$  принадлежит управляемому подпространству системы, а  $x''_1$  – нет. Принимаем целевой точкой  $x_1$  точку  $x'_1$ . Далее все шаги аналогичны первому заданию.

### Матрица управляемости

Сделаем вывод об управляемости системы по матрице управляемости. Система одноканальная – один вход и один выход –  $U$  квадратная. Проверим определитель

$$\det[U] = 0$$

Так как определитель равен нулю, то система является не полностью управляемой. Об этом уже говорил ранг  $U$ , меньший порядка системы.

### Собственные числа и матрицы Хаутуса

Матрица  $A$  такая же, как в первом задании. Мы уже вычислили ее собственные числа

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_{2,3} = -2 \pm i$$

и выяснили, что они асимптотически устойчивые, но могут быть неуправляемыми. Матрицы Хаутуса изменятся – они зависят от  $B$ . Построим их и вычислим их ранги

$$\text{rank}[A - \lambda_1 I \ B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rank}[A - \lambda_{2,3} I \ B] = \text{rank} \begin{bmatrix} 3 \pm i & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 \pm i & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \pm i & -1 \end{bmatrix} = 3$$

Выходит, что  $\lambda_{2,3} = -2 \pm i$  являются управляемыми, так как ранги их матриц Хаутуса равны порядку системы. Собственное число  $\lambda_1 = -2$  неуправляемое (ранг матрицы Хаутуса меньше порядка системы), но устойчивое – система не полностью управляема, но стабилизируема.

### Жорданова форма системы

Жорданово разложение матрицы  $A$  не изменится, но изменится матрица входных воздействий, так как  $B$  другая. Имеем

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Пересчитаем  $B_{Jre}$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Таким образом, исследуем

$$J_{re} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Собственное число  $\lambda_1 = -2$  неуправляемое, а  $\lambda_{2,3} = -2 \pm i$  управляемые. Достаточное условие полной управляемости не выполнено – первый элемент матрицы входных воздействий  $B_{Jre}$  равен нулю – система не полностью управляема.

### Грамиан управляемости системы

Найдем Грамиан управляемости системы относительно времени  $t_1 = 3$  аналогично первому заданию

$$P(t_1 = 3) = \begin{bmatrix} 3.625 & 1.625 & -1.625 \\ 1.625 & 0.750 & -0.750 \\ -1.625 & -0.750 & 0.750 \end{bmatrix}$$

Теперь найдем собственные числа Грамиана

$$\lambda_1 = 5.0943$$

$$\lambda_2 = 0.0307$$

$$\lambda_3 = 0.0000$$

Так как одно из собственных чисел Грамиана равно нулю, то его определитель равен нулю, то есть Грамиан вырожденный. Это следует уже из неполного ранга матрицы управляемости. Система не полностью управляема – в некотором направлении управлять системой не получится. В других же направлениях (двумерном подпространстве) система управляема.

### Управление системой за определенное время

Найдем приближенное управление, переводящее систему из  $x(0) = 0$  в  $x(t_1) = x_1$  за время  $t_1$ . Теперь в формуле необходимо использовать псевдообратную матрицу Грамиана, так как вследствие вырожденности обратную найти не получится

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} [P(t_1)]^+ x_1$$

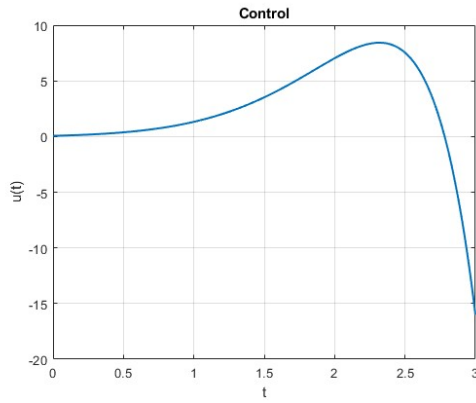
Подставим матрицы и  $t_1$  в выражение

$$u(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}^T e^{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}^T (3-t)} \begin{bmatrix} 3.625 & 1.625 & -1.625 \\ 1.625 & 0.750 & -0.750 \\ -1.625 & -0.750 & 0.750 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

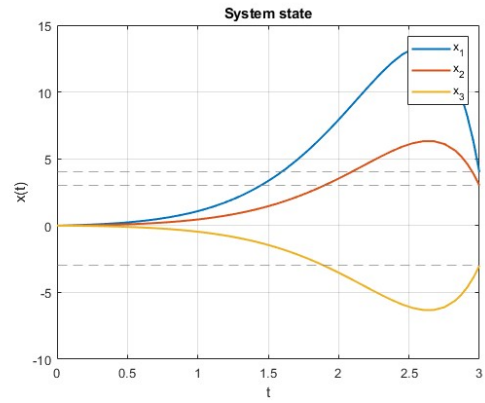
После всех вычислений получим

$$u(t) = \frac{-80001 \cos(3-t) + 360002 \sin(3-t)}{5000e^4}$$

Аналогично первому заданию промоделируем систему. Результаты представлены на рис. 2



(a) График  $u(t)$



(b) График  $x(t)$

Рис. 2: Графики для второго задания

Серыми пунктирными линиями на графике  $x(t)$  отмечены координаты точки  $x_1 = [4 \ 3 \ -3]^T$ . Как видим, система достигает состояния  $x_1$  в момент времени  $t_1 = 3 - x_i$  сходятся к соответствующим пунктирным линиям. Это подтверждает, что точка  $x'_1$  принадлежит управляемому подпространству системы – мы ее достигли, несмотря на не полную управляемость системы.

### Выводы

Система не полностью управляема, но стабилизируема. Мы смогли найти приближенное управление для перевода системы из начального условия в точку  $x_1$ , принадлежащую управляемому подпространству системы, за конечное время  $t_1$  и, продемонстрировали это, промоделировав систему.

## Задание 3. Исследование наблюдаемости

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ y = Cx, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -16 & -27 & 7 \\ 6 & 9 & -4 \\ -5 & -11 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [2 \ 7 \ 1],$$

$$f(t) = -9e^{-4t} \cos(t) + 9e^{-4t} \sin(t)$$

### Матрица наблюдаемости

Составим матрицу наблюдаемости системы и определим ее ранг. Порядок системы равен трем

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

Найдем неизвестные

$$CA = [2 \ 7 \ 1] \begin{bmatrix} -16 & -27 & 7 \\ 6 & 9 & -4 \\ -5 & -11 & 0 \end{bmatrix} = [5 \ -2 \ -14]$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -16 & -27 & 7 \\ 6 & 9 & -4 \\ -5 & -11 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 59 & 112 & -4 \\ -22 & -37 & 6 \\ 14 & 36 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & 1 & 43 \end{bmatrix}$$

Таким образом, получаем матрицу наблюдаемости

$$V = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & -2 & -14 \\ -22 & 1 & 43 \end{bmatrix}$$

Определим ее ранг

$$\text{rank}[V] = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & -2 & -14 \\ -22 & 1 & 43 \end{bmatrix} = 3$$

Ранг матрицы наблюдаемости равен порядку системы  $n = 3$ , следовательно, система полностью наблюдаема. Так как выход один и матрица  $V$  квадратная, достаточно было сравнить ее определитель с нулем.

### Собственные числа и матрицы Хаутуса

Собственные числа находим аналогично первому заданию. Предоставим вычисления MATLAB. Программа находится на листинге 3 в приложении 3

$$\det[\lambda I - A] = 0$$

Получаем

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_{2,3} &= -4 \pm i \end{aligned}$$

Видим, что  $\lambda_1 > 0$  – неустойчивое, нужна наблюдаемость. Действительная часть  $\lambda_{2,3}$  меньше нуля, следовательно, они асимптотически устойчивые, но могут быть ненаблюдаемыми. Для проверки найдем матрицы Хаутуса для наблюдаемости

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$$

Если ранг этой матрицы для конкретного  $\lambda_i$  равен порядку системы  $n$ , то это собственное число наблюдаемо. Определим матрицы и их ранги

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -17 & -27 & 7 \\ 6 & 8 & -4 \\ -5 & -11 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_{2,3} I \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -12 \pm i & -27 & 7 \\ 6 & 13 \pm i & -4 \\ -5 & -11 & 4 \pm i \\ 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

Ранги матриц Хаутуса для каждого собственного числа матрицы  $A$  равны порядку системы, следовательно, все собственные числа являются наблюдаемыми. Из этого же следует, что система полностью наблюдаема.

## Жорданова форма системы

Найдем жорданово разложение матрицы в MATLAB и приведем к вещественному виду

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3-2i & 3+2i \\ -1 & -1+i & -1-i \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4-i & 0 \\ 0 & 0 & -4+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0.5 & 1-0.5i & -0.5i \\ 0.5 & 1+0.5i & 0.5i \end{bmatrix}$$

$$A = P_{re}J_{re}P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицу выходов  $C_{Jre}$  в базисе собственных векторов матрицы  $A$

$$C_{Jre} = CP_{re} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad C_{Jre} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Видим, что  $\lambda_1, \lambda_2$  наблюдаемы, а  $\lambda_3$  – нет (см. элементы соответствующих столбцов  $C_{Jre}$ ). Из наблюдаемости  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  нельзя сделать вывод, что система полностью наблюдаема. Достаточное условие полной наблюдаемости системы в нашем случае – не равенство нулю первого и [второго или третьего] элементов столбцов матрицы выходов  $C_{Jre}$ . Так как оно выполняется, то система является полностью наблюдаемой.

## Грамиан наблюдаемости системы

Найдем Грамиан наблюдаемости системы относительно времени  $t_1 = 3$

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

Предоставим вычисления MATLAB. Получим следующий результат

$$Q(t_1 = 3) = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0.8061 & 1.6141 & -0.8035 \\ 1.6141 & 3.2332 & -1.6078 \\ -0.8035 & -1.6078 & 0.8023 \end{bmatrix}$$

Найдем собственные числа Грамиана наблюдаемости

$$\lambda_1 = 4.8393 \cdot 10^3$$

$$\lambda_2 = 0.0000 \cdot 10^3$$

$$\lambda_3 = 0.0023 \cdot 10^3$$

У Грамиана наблюдаемости присутствует нулевое собственное число – он вырожденный, система не полностью наблюдаема. При этом другие собственные числа достаточно велики – в некоторых направлениях система хорошо наблюдаема. Такой результат может говорить о том, что на практике какое-то состояние системы не получится восстановить за конечное время  $t_1$ . При этом теоретически система полностью наблюдаема.

### Определение начальных условий системы

Пусть выход системы  $y(t)$  подчиняется закону  $y(t) = f(t)$  на временном интервале  $t \in [0, t_1]$ . Определим начальные условия системы по формуле

$$x(0) = [Q(t_1)]^+ \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt$$

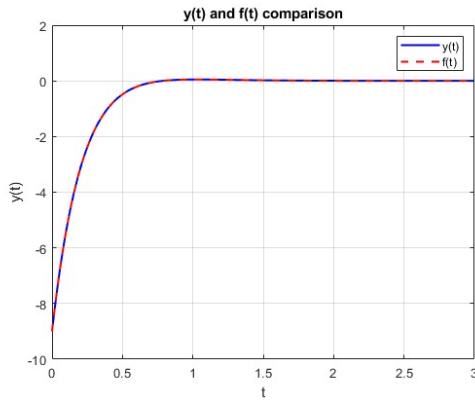
Вместо обратной матрицы Грамиана используем псевдообратную (определитель равен нулю). Подставим матрицы,  $t_1$  и  $y(t)$

$$x(0) = \begin{bmatrix} 806.1 & 1614.1 & -803.5 \\ 1614.1 & 3233.2 & -1607.8 \\ -803.5 & -1607.8 & 802.3 \end{bmatrix}^+ 9 \int_0^3 e^{\begin{bmatrix} -16 & -27 & 7 \\ 6 & 9 & -4 \\ -5 & -11 & 0 \end{bmatrix}^T t - 4t} \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} (\sin(t) - \cos(t))$$

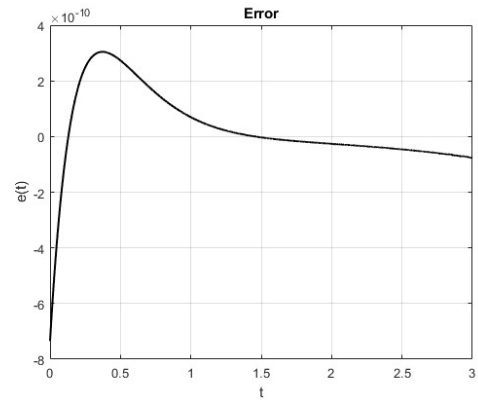
Предоставим вычисления MATLAB. Получаем следующий результат

$$x(0) = \begin{bmatrix} 15 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Получили начальные условия системы, соответствующие выходу  $y(t) = f(t)$ . Выполним моделирование системы аналогично первому заданию. Программа для построения графиков находится в приложении 3. Графики представлены на рисунке 3



(a) График  $y(t)$  и  $f(t)$



(b) График  $e(t) = y(t) - f(t)$

Рис. 3: Графики для третьего задания

Графики  $y(t)$  и  $f(t)$  почти совпадают. На графике ошибки видим очень маленькие значения ( $\times 10^{-10}$ ). Логично, что наибольшая ошибка будет в момент наибольшего изменения состояния системы, а дальше будет уменьшаться, что видим на рис. 3b, сопоставляя  $t$  с рис. 3a.

### Выводы

Теоретически система полностью наблюдаема (критерий Калмана, матрицы Хатутуса, жорданова форма системы), но практически есть направления, в которых система ненаблюдаема (Грамиан наблюдаемости). Начальные условия при заданной  $f(t)$  были найдены, система была успешно промоделирована.

## Задание 4. Еще одно исследование наблюдаемости

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ y = Cx, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} -16 & -27 & 7 \\ 6 & 9 & -4 \\ -5 & -11 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 \end{bmatrix},$$
$$f(t) = -9e^{-4t} \cos(t) + 9e^{-4t} \sin(t)$$

### Матрица наблюдаемости

Составим аналогично предыдущему заданию матрицу наблюдаемости и определим ее ранг (порядок системы  $n = 3$ , программа представлена на листинге 4 в приложении 4)

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}, \quad CA = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}^T, \quad CA^2 = \begin{bmatrix} 40 \\ 5 \\ -75 \end{bmatrix}^T$$

Получаем

$$V = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -5 & 10 & 20 \\ 40 & 5 & -75 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}[V] = 2, \quad \det[V] = 0$$

Ранг матрицы наблюдаемости меньше порядка системы, определитель равен нулю, система не полностью наблюдаема. Существуют ненаблюдаемые состояния, которые не влияют на  $y(t)$ .

### Собственные числа и матрицы Хаутуса

Матрица  $A$  такая же, как в задании №3 – собственные числа не изменятся. Имеем

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_{2,3} = -4 \pm i$$

Выводы по собственным числам аналогичны предыдущему заданию. Построим матрицы Хаутуса

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$$

Вычисления производятся в MATLAB. Определим эти матрицы и их ранги

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -17 & -27 & 7 \\ 6 & 8 & -4 \\ -5 & -11 & -1 \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = 2$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \lambda_{2,3} I \\ C \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} -12 \pm i & -27 & 7 \\ 6 & 13 \pm i & -4 \\ -5 & -11 & 4 \pm i \\ 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} = 3$$

Видим, что ранг матрицы Хаутуса для  $\lambda_1$  меньше порядка системы – собственное число  $\lambda_1$  ненаблюдаемое. Собственные числа  $\lambda_{2,3}$  наблюдаемы, ранги их матриц Хаутуса совпадают с порядком системы. Таким образом, система не полностью наблюдаема.

### Жорданова форма системы

Жорданова форма системы будет такая же, как в задании №3

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Найдем матрицу выходов  $C_{Jre}$  в базисе собственных векторов матрицы  $A$

$$C_{Jre} = C P_{re} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad C_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Видим, что наблюдаемым является только собственное число  $\lambda_2$ , так как элемент соответствующего столбца матрицы выходов не равен нулю. Остальные собственные числа ненаблюдаемы. Достаточное условие полной наблюдаемости системы не выполнено – первый элемент матрицы выходов равен нулю. Следовательно, система не полностью наблюдаема.

### Грамиан наблюдаемости системы

Вычислим Грамиан наблюдаемости системы относительно времени  $t_1 = 3$  аналогично заданию №3

$$Q(t_1 = 3) = \begin{bmatrix} 0.0919 & 0.5515 & 0.3676 \\ 0.5515 & 4.8713 & 3.7684 \\ 0.3676 & 3.7684 & 3.0331 \end{bmatrix}$$

Найдем собственные числа Грамиана наблюдаемости

$$\lambda_1 = 7.8871$$

$$\lambda_2 = -0.0000$$

$$\lambda_3 = 0.1093$$

Видим, что у Грамиана наблюдаемости  $\lambda_2 = 0$ . Следовательно, Грамиан вырожденный. Другие же собственные числа наблюдаемы. Вывод – система не полностью наблюдаема.

### Определение начальных условий системы

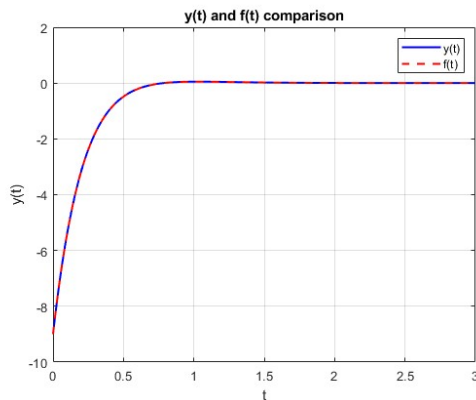
Определим начальные условия системы аналогично заданию №3

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0.0919 & 0.5515 & 0.3676 \\ 0.5515 & 4.8713 & 3.7684 \\ 0.3676 & 3.7684 & 3.0331 \end{bmatrix}^+ 9 \int_0^3 e^{\begin{bmatrix} -16 & -27 & 7 \\ 6 & 9 & -4 \\ -5 & -11 & 0 \end{bmatrix}^T t - 4t} \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix} (\sin(t) - \cos(t))$$

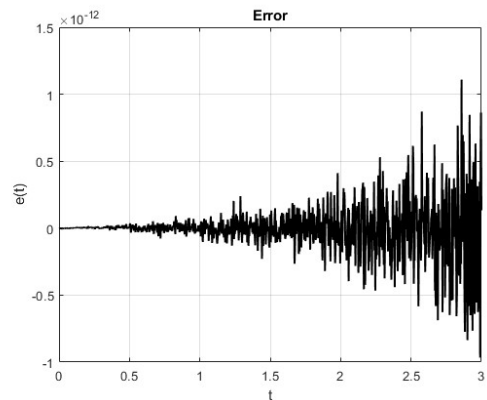
Проведя вычисления в MATLAB, получаем

$$x(0) = \begin{bmatrix} -1.2 \\ -0.3 \\ 2.1 \end{bmatrix}$$

Получили начальные условия системы, соответствующие выходу  $y(t) = f(t)$ . Выполним моделирование системы аналогично третьему заданию. Программа для построения графиков находится в приложении 4. Графики представлены на рисунке 4



(a) График  $y(t)$  и  $f(t)$



(b) График  $e(t) = y(t) - f(t)$

Рис. 4: Графики для четвертого задания

График  $y(t)$  почти совпадает с  $f(t)$ . Несмотря на то, что ошибка очень мала ( $\times 10^{-12}$ ), при увеличении  $t$  (приближении к  $t_1$ ) она хаотически возрастает по модулю. Либо это погрешности численного решения, либо особенности системы.

## Другие начальные условия

...

## Вывод

...

## Приложения

### Приложение 1

```
% input data
A = [1 -2 3; 2 -3 2; -2 1 -4];
B = [-3; -1; 3];
x1 = [4; 3; -3];
t1 = 3;

% controllability matrix
U = [B A*B A*A*B];
r = rank(U);
disp(U);
```



```

disp(r);

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Houtus matrices
H_1 = [A-A_e(1)*eye(3) B];
r_1 = rank(H_1);
disp(H_1);
disp(r_1);

H_2 = [A-A_e(2)*eye(3) B];
r_2 = rank(H_2);
disp(H_2);
disp(r_2);

H_3 = [A-A_e(3)*eye(3) B];
r_3 = rank(H_3);
disp(H_3);
disp(r_3);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P1(:,1) = real(P(:,1));
P1(:,2) = imag(P(:,2));
P1(:,3) = real(P(:,3));
P1_inv = P1^-1;
J_re = P1_inv * A * P1;
B_jre = P1_inv * B;
disp(P1);
disp(P1_inv);
disp(J_re);
disp(B_jre);

% gramian
integrand = @(t) expm(A * t) * (B * B') * expm(A' * t);
P_t1 = integral(@(t) integrand(t), 0, t1, 'ArrayValued', true);
disp(P_t1);

% gramian eigenvalues
e = eig(P_t1);
disp(e);

% u_t
u_t = @(t) B' * expm(A' * (t1 - t)) * inv(P_t1) * x1;

% u_t modeling
time = linspace(0, t1, 1000);

control = arrayfun(@(t) u_t(t), time, 'UniformOutput', false);
control = cell2mat(control);

figure;
plot(time, control, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('t');
ylabel('u(t)');
title('Control');

```

```

grid on;

% x_t
dxdt = @(t, x) A * x + B * u_t(t);

% x_t modeling
[t, x] = ode45(dxdt, [0 t1], [0; 0; 0]);

figure;
plot(t, x, 'LineWidth', 1.5);
yline(x1(1), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_1
yline(x1(2), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_2
yline(x1(3), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_3
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
legend('x_1', 'x_2', 'x_3');
title('System state');
grid on;

```

Листинг 1: Программа для первого задания

## Приложение 2

```

% input data
A = [1 -2 3; 2 -3 2; -2 1 -4];
B = [3; 1; -1];
x1p = [4; 3; -3];
x1pp = [3; 3; -2];
t1 = 3;

% controllability matrix
U = [B A*B A*A*B];
r = rank(U);
detU = det(U);
disp(U);
disp(r);
disp(detU)

% check x1p in subspace
U_x1p = [U x1p];
r_x1p = rank(U_x1p);
disp(U_x1p);
disp(r_x1p);

% check x1pp in subspace
U_x1pp = [U x1pp];
r_x1pp = rank(U_x1pp);
disp(U_x1pp);
disp(r_x1pp);

if r_x1p == r
    x1 = x1p;
else
    x1 = x1pp;
end
disp(x1)

```

```

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Houtus matrices
H_1 = [A-A_e(1)*eye(3) B];
r_1 = rank(H_1);
disp(H_1);
disp(r_1);

H_2 = [A-A_e(2)*eye(3) B];
r_2 = rank(H_2);
disp(H_2);
disp(r_2);

H_3 = [A-A_e(3)*eye(3) B];
r_3 = rank(H_3);
disp(H_3);
disp(r_3);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P1(:,1) = real(P(:,1));
P1(:,2) = imag(P(:,2));
P1(:,3) = real(P(:,3));
P1_inv = P1^-1;
J_re = P1_inv * A * P1;
B_jre = P1_inv * B;
disp(P1);
disp(P1_inv);
disp(J_re);
disp(B_jre);

% gramian
integrand = @(t) expm(A * t) * (B * B') * expm(A' * t);
P_t1 = integral(@(t) integrand(t), 0, t1, 'ArrayValued', true);
disp(P_t1);

% gramian eigenvalues
e = eig(P_t1);
disp(e);

% u_t
u_t = @(t) B' * expm(A' * (t1 - t)) * pinv(P_t1) * x1;
disp(pinv(P_t1));

% u_t modeling
time = linspace(0, t1, 1000);

control = arrayfun(@(t) u_t(t), time, 'UniformOutput', false);
control = cell2mat(control);

figure;
plot(time, control, 'LineWidth', 1.5);
xlabel('t');
ylabel('u(t)');
title('Control');
grid on;

```

```

% x_t
dxdt = @(t, x) A * x + B * u_t(t);

% x_t modeling
[t, x] = ode45(dxdt, [0 t1], [0; 0; 0]);

figure;
plot(t, x, 'LineWidth', 1.5);
yline(x1(1), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_1
yline(x1(2), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_2
yline(x1(3), '--', 'Color', [0.5 0.5 0.5]); % x_3
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
legend('x_1', 'x_2', 'x_3');
title('System state');
grid on;

```

Листинг 2: Программа для второго задания

### Приложение 3

```

% input data
A = [-16 -27 7; 6 9 -4; -5 -11 0];
C = [2 7 1];
f_t = @(t) -9 * exp(-4 * t) * cos(t) + 9 * exp(-4 * t) * sin(t);
t1 = 3;

% observability matrix
V = [C; C*A; C*A^2];
r = rank(V);
disp(A^2);
disp(V);
disp(r);

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Houtus matrices
H_1 = [A-A_e(1)*eye(3); C];
r_1 = rank(H_1);
disp(H_1);
disp(r_1);

H_2 = [A-A_e(2)*eye(3); C];
r_2 = rank(H_2);
disp(H_2);
disp(r_2);

H_3 = [A-A_e(3)*eye(3); C];
r_3 = rank(H_3);
disp(H_3);
disp(r_3);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);

```

```

P1(:,1) = real(P(:,1));
P1(:,2) = imag(P(:,2));
P1(:,3) = real(P(:,3));
P1_inv = P1^-1;
J_re = P1_inv * A * P1;
C_jre = C * P1;
disp(P1);
disp(P1_inv);
disp(J_re);
disp(C_jre);

% gramian
integrand = @(t) expm(A' * t) * (C' * C) * expm(A * t);
Q_t1 = integral(@(t) integrand(t), 0, t1, 'ArrayValued', true);
disp(Q_t1);

% gramian eigenvalues
e = eig(Q_t1);
disp(e);

% initial conditions x(0)
integrand_x0 = @(t) expm(A' * t) * C' * f_t(t);
X_int = integral(@(t) integrand_x0(t), 0, t1, 'ArrayValued', true);
Q_t1_pinv = pinv(Q_t1);
x0 = Q_t1_pinv * X_int;
disp(Q_t1_pinv);
disp(x0);

% system modeling
x_t = @(t) expm(A * t) * x0;
y_t = @(t) C * x_t(t);

time = linspace(0, t1, 1000);
y_arr = arrayfun(y_t, time);
f_arr = arrayfun(f_t, time);

figure;
plot(time, y_arr, 'b', 'LineWidth', 1.5); hold on;
plot(time, f_arr, 'r--', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('t');
ylabel('y(t)');
legend('y(t)', 'f(t)');
title('y(t) and f(t) comparison');
grid on;

err = y_arr - f_arr;

figure;
plot(time, err, 'k', 'LineWidth', 1.5);
xlabel('t');
ylabel('e(t)');
title('Error');
grid on;

```

Листинг 3: Программа для третьего задания

## Приложение 4

```
to be done
```

Листинг 4: Программа для четвертого задания