

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ:
ВИРТУАЛЬНЫЙ ВЫХОД»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Задание 1. Компенсирующий регулятор по состоянию	3
1.1	Характер внешнего возмущения	3
1.2	Схема моделирования системы, замкнутой компенсирующим регулятором	3
1.3	Исследование системы перед синтезом регулятора	4
1.4	Синтез компоненты обратной связи компенсирующего регулятора	4
1.5	Синтез компоненты прямой связи компенсирующего регулятора	4
1.6	Компьютерное моделирование	4
1.7	Вывод	7
2	Задание 2. Следящий регулятор по состоянию	8
2.1	Характер внешнего возмущения	8
2.2	Схема моделирования системы, замкнутой следящим регулятором	8
2.3	Исследование системы перед синтезом регулятора	8
2.4	Синтез компоненты обратной связи следящего регулятора	9
2.5	Синтез компоненты прямой связи следящего регулятора	9
2.6	Компьютерное моделирование	9
2.7	Вывод	11
3	Задание 3. Слежение и компенсация по выходу	12
3.1	Характер внешнего возмущения	12
3.2	Возможность осуществления слежения и компенсации по выходу	12
3.3	Уравнение регулятора в форме Вход-Состояние-Выход	13
3.4	Схема моделирования системы для слежения и компенсации по выходу	14
3.5	Исследование системы перед синтезом регулятора	14
3.6	Синтез компоненты обратной связи	15
3.7	Синтез матрицы коррекции наблюдателя	15
3.8	Синтез компоненты прямой связи следящего регулятора	15
3.9	Принцип внутренней модели	16
3.10	Компьютерное моделирование	16
3.11	Вывод	27
4	Задание 4. Тележка и меандр	27
4.1	Математическая модель «тележки»	27
4.2	Задающий сигнал	28
4.3	Ряд Фурье	28
4.4	Формирование генератора	28
4.5	Виртуальный выход	29
4.6	Исследование системы перед синтезом регулятора	29
4.7	Синтез следящего регулятора	29
4.8	Компьютерное моделирование	30
4.9	Вывод	32
5	Общий вывод по работе	32
6	Приложение А	32

7	Приложение Б	33
8	Приложение В	34
9	Приложение Г	36

Задание 1. Компенсирующий регулятор по состоянию

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_f w_f,$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

генератор внешнего возмущения

$$\dot{w}_f = \Gamma w_f, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 25 & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3 & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31 & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad w_f(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и виртуальный выход вида

$$z = C_Z x, \quad C_Z = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

Характер внешнего возмущения

Для определения характера внешнего возмущения найдем собственные числа матрицы Γ . Программа в MATLAB находится на листинге 1 в приложении А

$$\sigma(\Gamma) = \{\pm i, \pm 3i\}$$

Так как спектр состоит только из мнимых собственных чисел, то характер возмущения – гармоника без затухания и роста амплитуды с течением времени.

Схема моделирования системы, замкнутой компенсирующим регулятором

Построим схему моделирования системы, замкнутой компенсирующим регулятором

$$u = K_1 x + K_2 w_f,$$

обеспечивающим выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

при внешнем воздействии, задаваемом генератором. Снимаем осциллограммы $u(t)$, $w_f(t)$, $x(t)$, $z(t)$

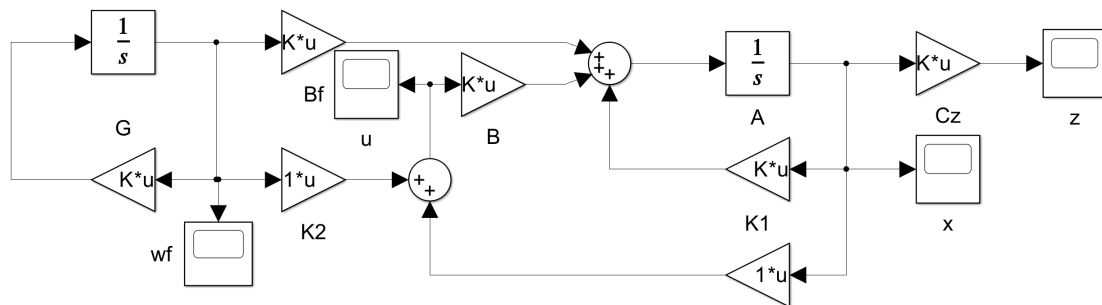


Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой компенсирующим регулятором

Исследование системы перед синтезом регулятора

Определим управляемость и стабилизируемость системы. Найдем собственные числа матрицы A

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}$$

Собственное число $\lambda_1 = -2$ асимптотически устойчивое, остальные неустойчивые. Выполним жорданово разложение матрицы A в вещественной форме. Найдем вектор B в базисе собственных векторов матрицы A . Получаем

$$A_{J_{re}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{J_{re}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Собственное число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, остальные управляемые. Система не полностью управляема, стабилизируема. Максимальная степень устойчивости $\alpha = |\min(\operatorname{Re}(\tilde{\sigma}(A) : \lambda_i \in \mathbb{C}_-))| = 2$.

Синтез компоненты обратной связи компенсирующего регулятора

Синтезируем K_1 с помощью матричного уравнения типа Риккати

$$A^T P + PA + Q - \nu P B R^{-1} B^T P + 2\alpha P = 0, \quad K = -R^{-1} B^T P;$$

Зададим $Q = 0$, $\nu = 2$, $R = 1$. Решаем при $\alpha = 2$. Получаем матрицу регулятора

$$K_1 = [1.6000 \quad -11.2000 \quad 1.6000]$$

Проверим собственные числа замкнутой системы $A + BK_1$

$$\sigma(A + BK_1) = \{-2, -2.0000 \pm 4.1231i\}$$

Желаемая степень устойчивости достигнута, регулятор синтезирован корректно.

Синтез компоненты прямой связи компенсирующего регулятора

Чтобы синтезировать K_2 , нужно найти K_1 , найти P, Y как решение системы уравнений, после чего вычислить K_2 по формуле

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY + B_f, & K_2 = Y - K_1 P; \\ C_Z P + D_Z = 0, \end{cases}$$

Предоставим вычисления пакету `svx` в MATLAB. Получаем

$$K_2 = [-48.3631 \quad -13.0092 \quad 35.7538 \quad -23.4769]$$

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование разомкнутой системы ($u = 0$); замкнутой регулятором только с K_1 компонентой; замкнутой компенсирующим регулятором. Построим графики вектора состояния генератора внешнего возмущения $w_f(t)$, формируемого регулятором управления $u(t)$, вектора состояния объекта управления $x(t)$ и виртуального выхода $z(t)$. Результаты представлены на рис. 2–9

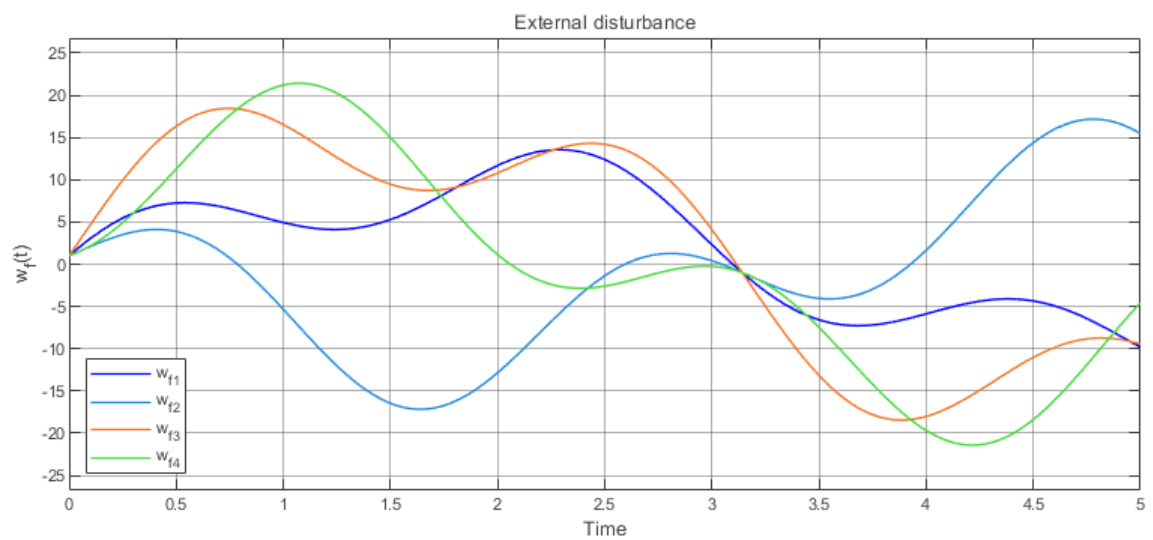


Рис. 2: График возмущений $w_f(t)$

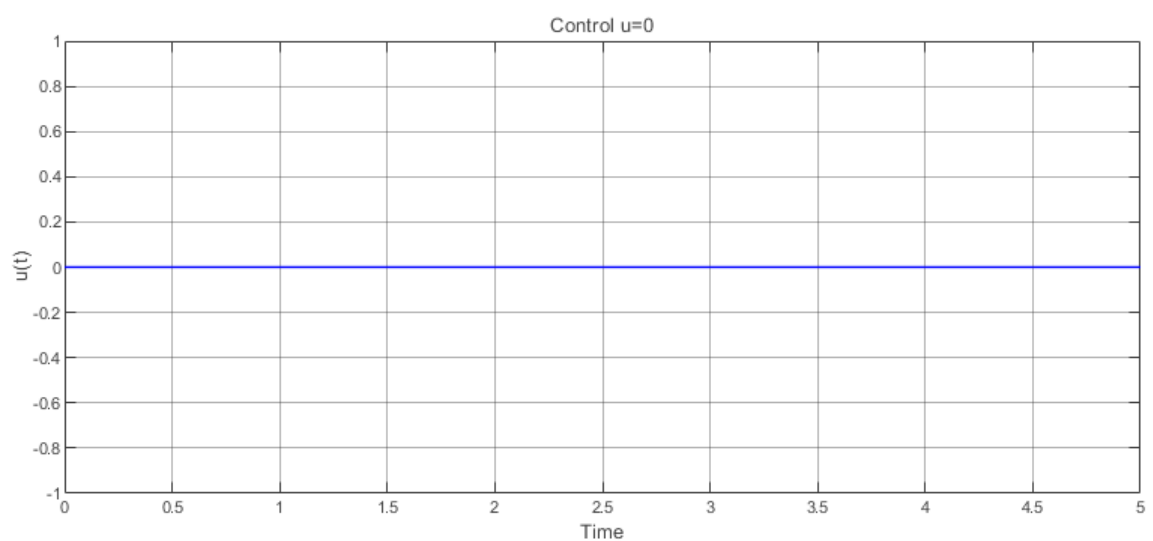


Рис. 3: График управления $u(t) = 0$

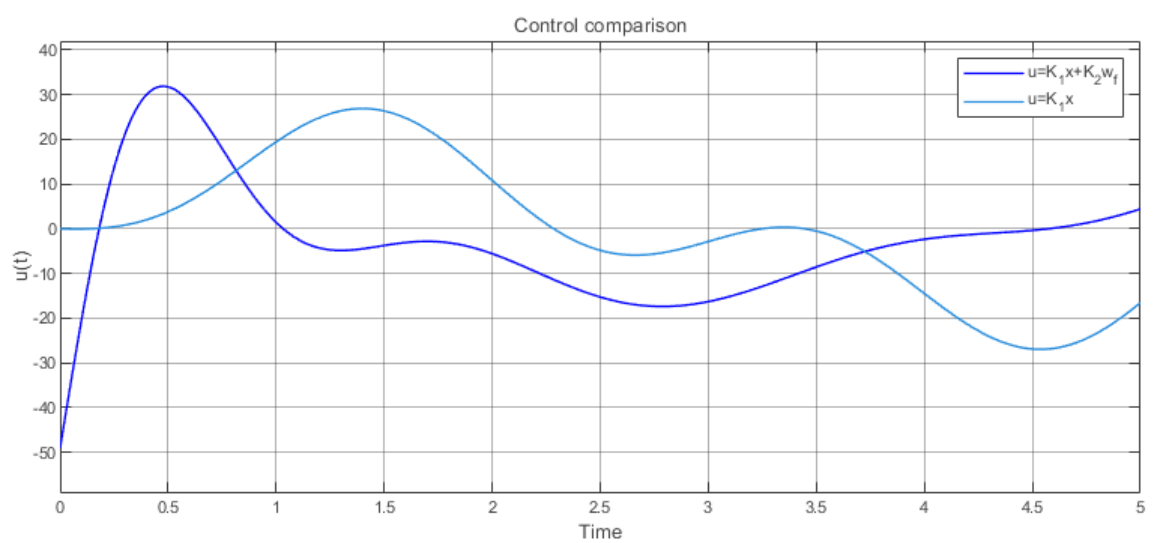


Рис. 4: График сравнения управлений $u(t) = K_1 x$ и $u(t) = K_1 x + K_2 w_f$

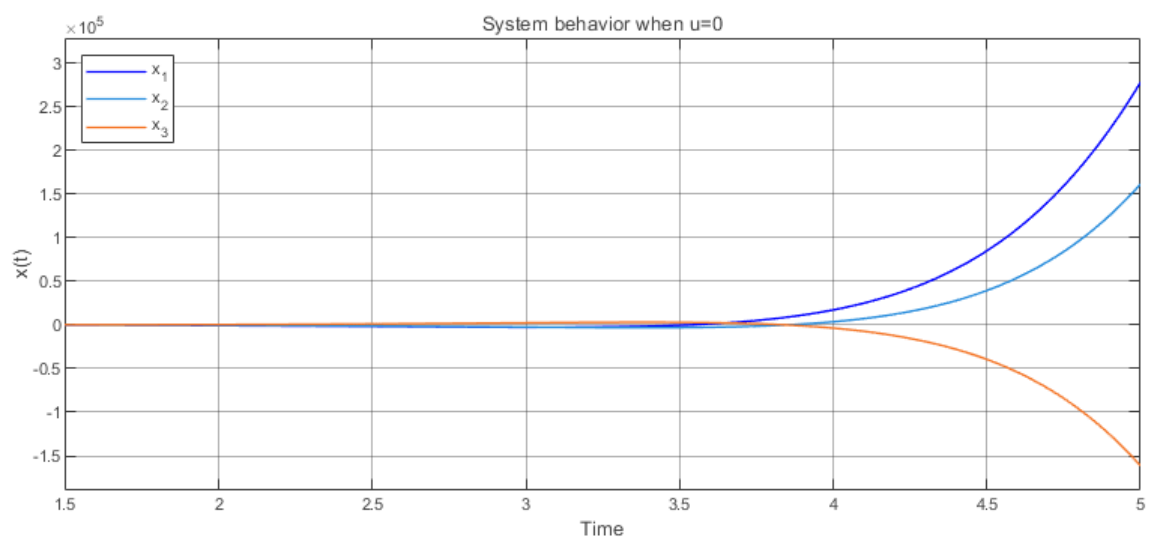


Рис. 5: График поведения системы $x(t)$ при $u(t) = 0$

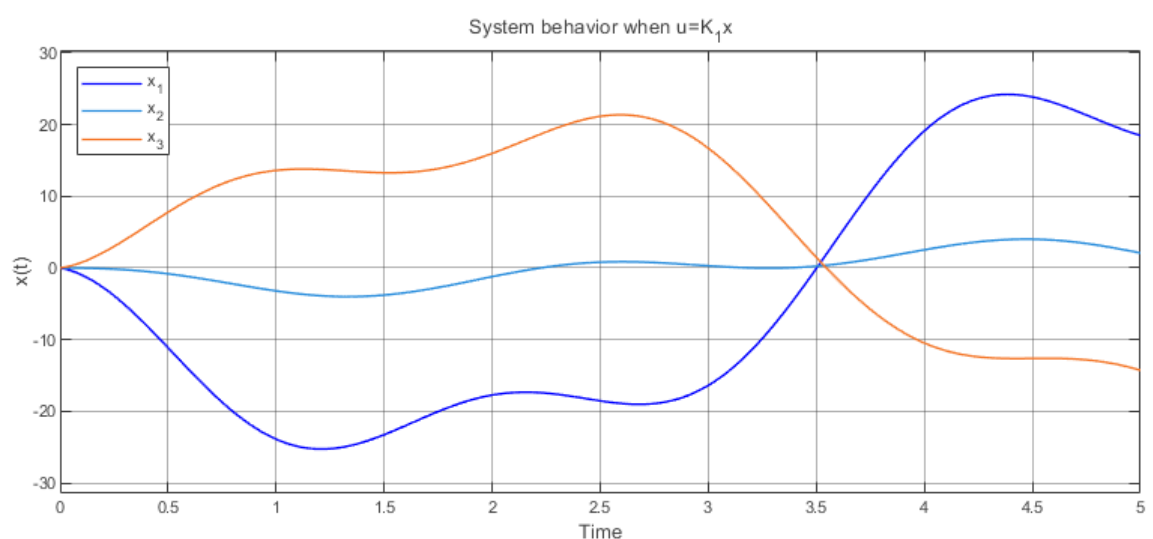


Рис. 6: График поведения системы $x(t)$ при $u(t) = K_1x$

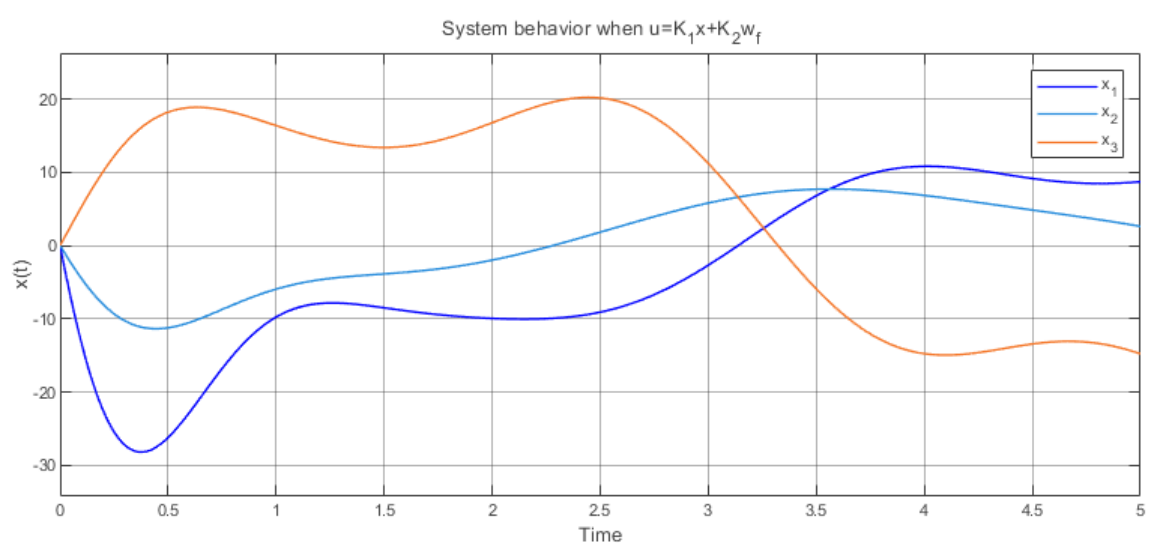


Рис. 7: График поведения системы $x(t)$ при $u(t) = K_1x + K_2w_f$

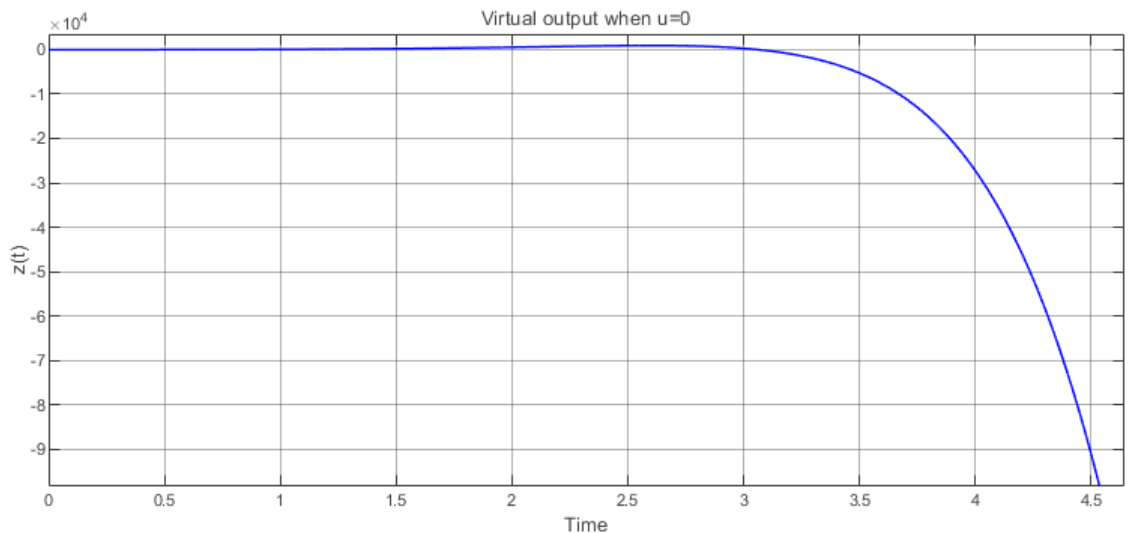


Рис. 8: График виртуального выхода $z(t)$ при $u(t) = 0$

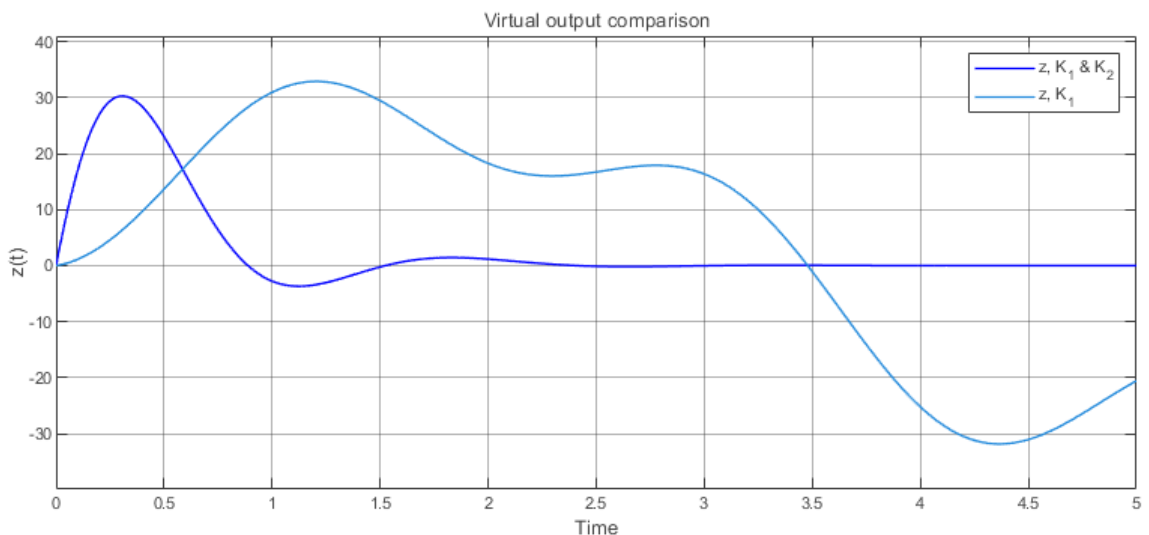


Рис. 9: График сравн. виртуальных выходов $z(t)$ при $u(t) = K_1x$ и $u(t) = K_1x + K_2w_f$

Траектория $z(t)$ при компенсирующем регуляторе стремится к нулю – регулятор выполнил свою задачу. При отсутствии K_2 компоненты $z(t)$ не стабилизируются, но и не расходятся (см. рис. 9). При разомкнутой системе виртуальный выход расходится (см. рис. 8). При отсутствии управления вектор состояния объекта управления расходится, при наличии – нет, но и не стабилизируется (см. рис. 5, 6, 7). При наличии K_2 компоненты регулятор сразу начинает действовать на объект управления, при наличии только K_1 компоненты регулятор постепенно управляет системой (см. рис. 4).

Вывод

В данном задании был исследован компенсирующий регулятор по состоянию. Был синтезирован компенсирующий регулятор. Было проведено компьютерное моделирование при различных конфигурациях регулятора. Результаты были сравнены. Компенсирующий регулятор был синтезирован корректно.

Задание 2. Следящий регулятор по состоянию

Рассмотрим систему (матрицы A, B, C_Z, Γ такие же, как в задании 1)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T,$$

генератор задающего сигнала

$$\dot{w}_g = \Gamma w_g, \quad w_g(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

и виртуальный выход вида

$$z = C_Z x + D_Z w_q, \quad D_Z = \begin{bmatrix} -20 & -6 & 16 & -9 \end{bmatrix};$$

Характер внешнего возмущения

Матрица Γ такая же, как в первом задании. Ее спектр имеет вид

$$\sigma(\Gamma) = \{\pm i, \pm 3i\}$$

Характер возмущений – гармоника без затухания и роста амплитуды с течением времени.

Схема моделирования системы, замкнутой следящим регулятором

Построим схему моделирования системы, замкнутой следящим регулятором

$$u = K_1 x + K_2 w_q,$$

обеспечивающим выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

при внешнем воздействии, задаваемом генератором. Снимаем осциллограммы $u(t)$, $w_q(t)$, $x(t)$, $z(t)$

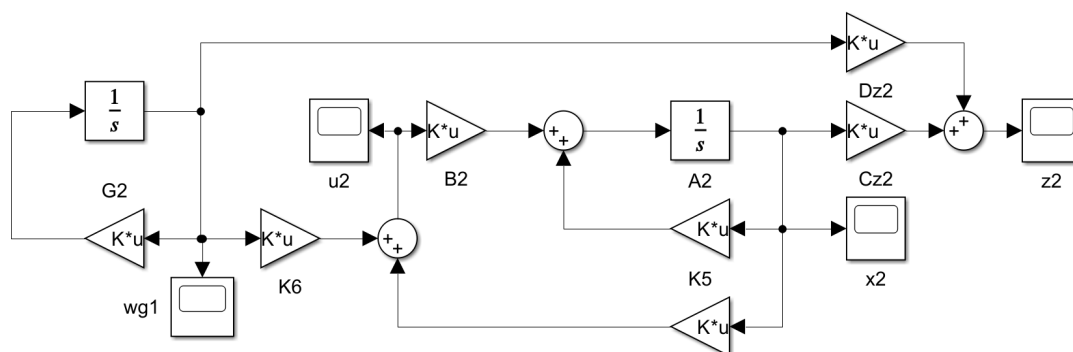


Рис. 10: Схема моделирования системы, замкнутой следящим регулятором

Исследование системы перед синтезом регулятора

Матрицы A, B такие же, как в первом задании. Имеем

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}, \quad A_{J_{re}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{J_{re}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Система не полностью управляема, стабилизируема. Максимальная степень устойчивости $\alpha = 2$.

Синтез компоненты обратной связи следящего регулятора

Синтезируем K_1 так же, как в задании 1 – с помощью матричного уравнения Риккати. Матрицы, участвующие в расчетах, не изменились. Таким образом, имеем

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.6000 & -11.2000 & 1.6000 \end{bmatrix}, \quad \sigma(A + BK_1) = \{-2, -2.0000 \pm 4.1231i\};$$

В первом задании уже выяснили, что регулятор синтезирован корректно.

Синтез компоненты прямой связи следящего регулятора

Синтезируем K_2 аналогично заданию 1. Из системы уравнений пропадет B_f , взамен появится D_Z . Программа представлена на листинге 2 в приложении Б. Получаем

$$K_2 = \begin{bmatrix} 7.2 & 3.2 & -8.0 & 4.0 \end{bmatrix}$$

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование систем аналогично заданию 1

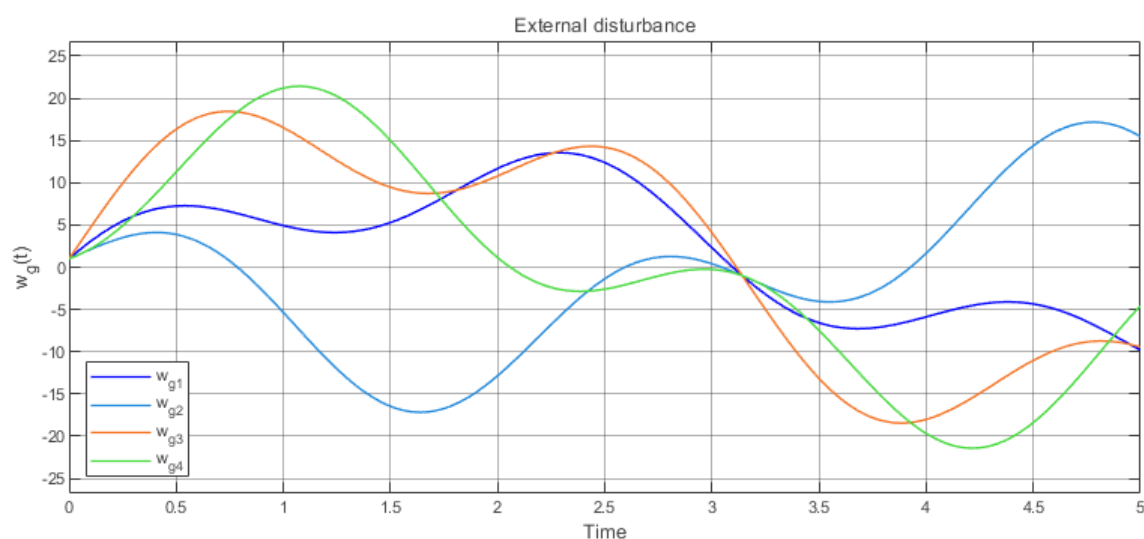


Рис. 11: График возмущений $w_g(t)$

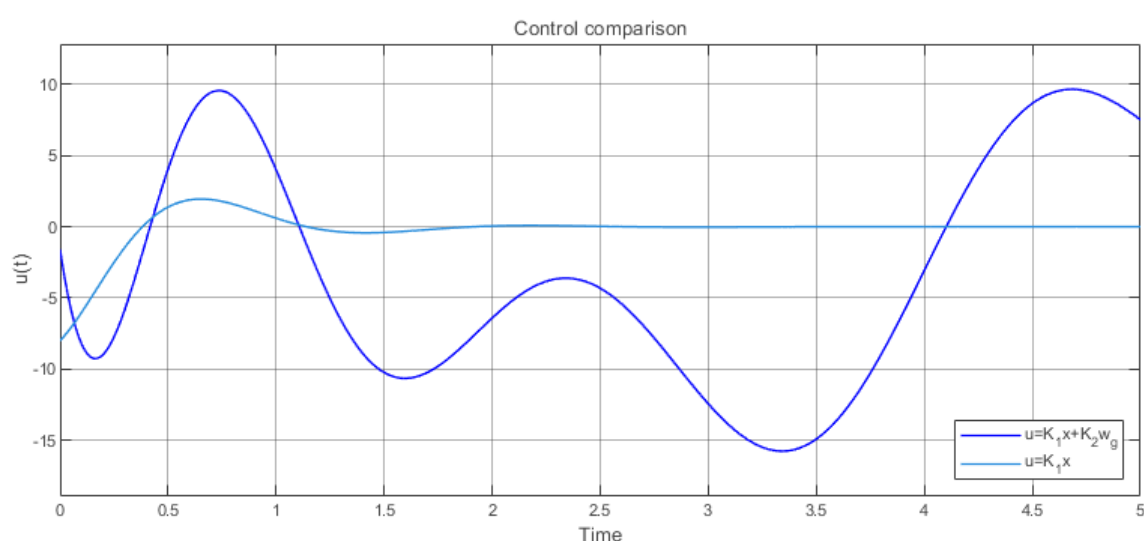


Рис. 12: График сравнения управлений $u(t) = K_1 x$ и $u(t) = K_1 x + K_2 w_g$

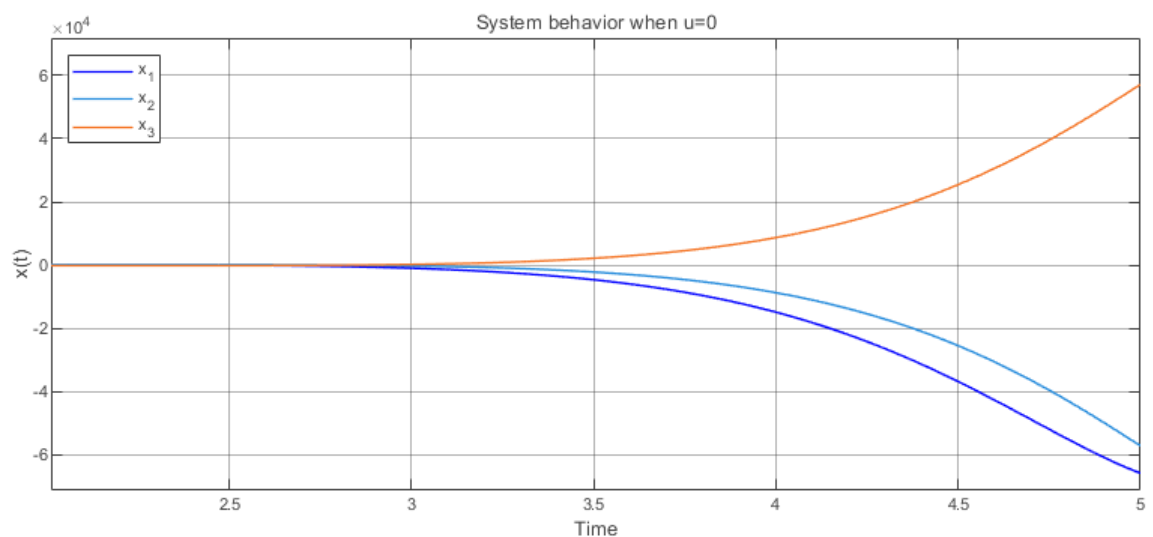


Рис. 13: График поведения системы $x(t)$ при $u(t) = 0$

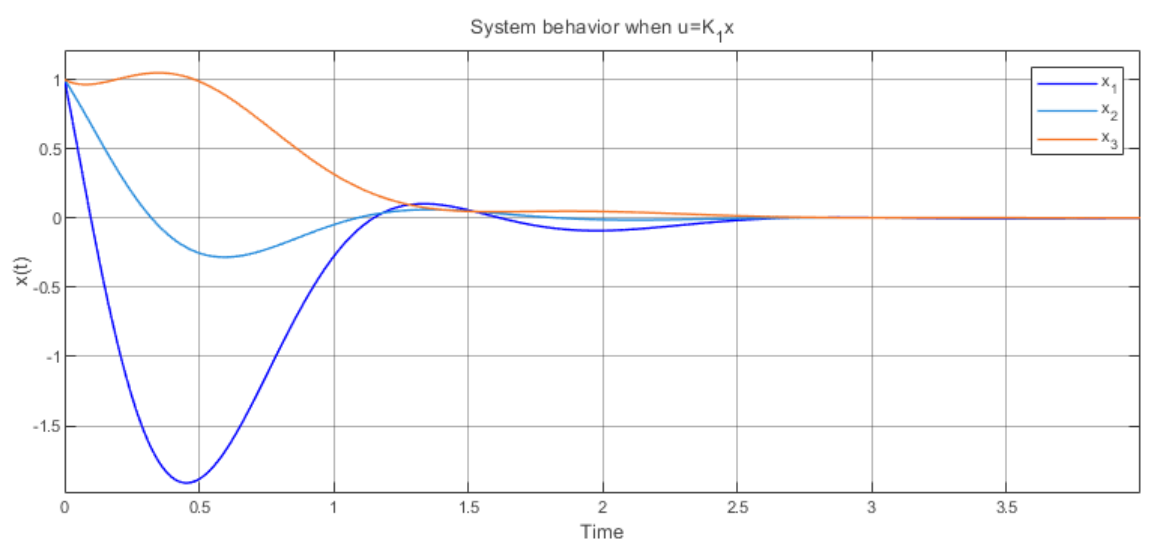


Рис. 14: График поведения системы $x(t)$ при $u(t) = K_1x$

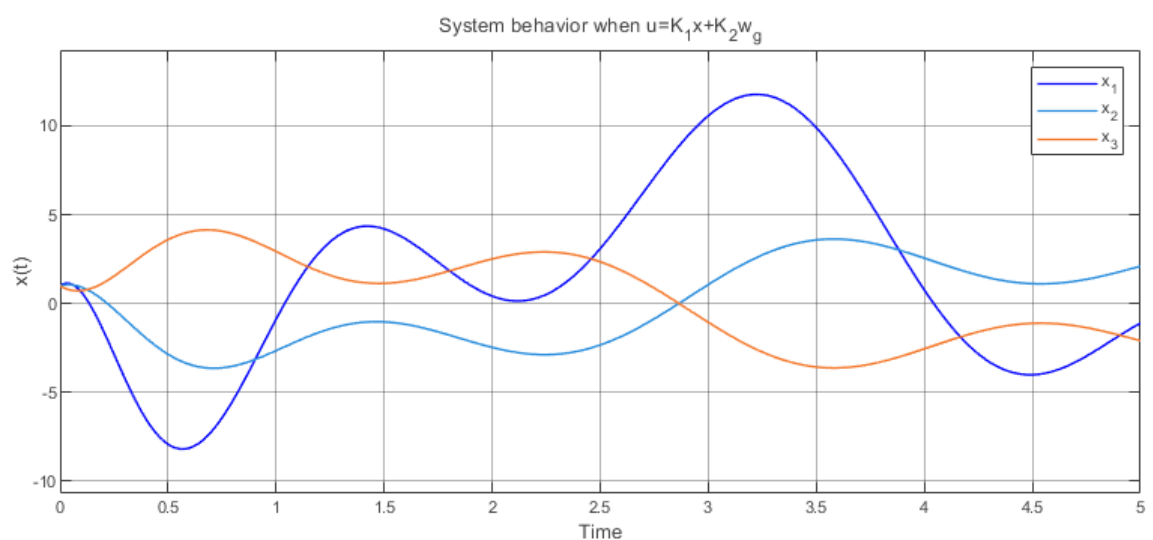


Рис. 15: График поведения системы $x(t)$ при $u(t) = K_1x + K_2w_g$

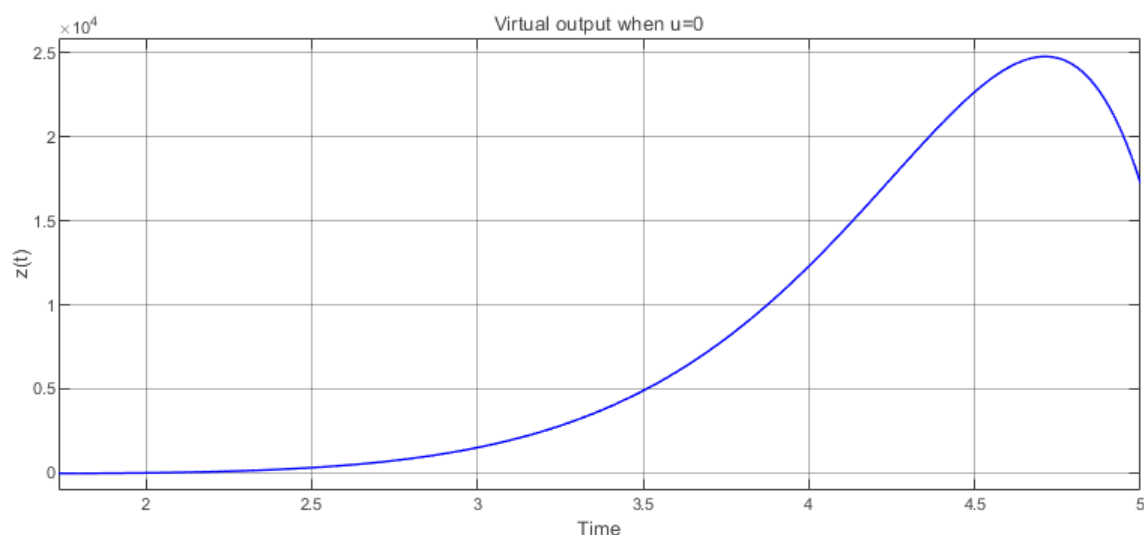


Рис. 16: График виртуального выхода $z(t)$ при $u(t) = 0$

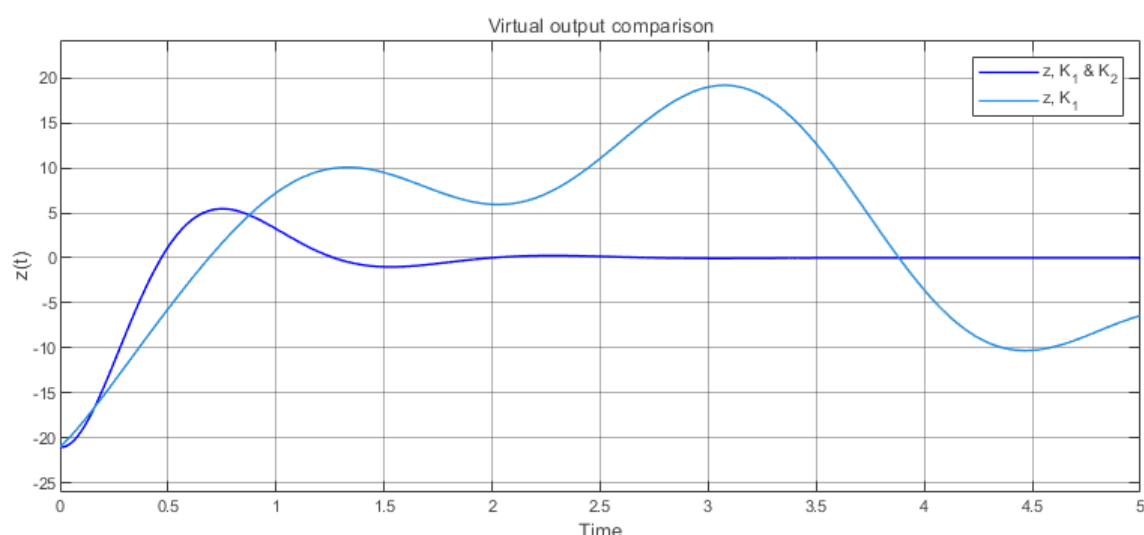


Рис. 17: График сравн. виртуальных выходов $z(t)$ при $u(t) = K_1x$ и $u(t) = K_1x + K_2w_g$

Следящий регулятор выполнил свою задачу – на рис. 17 $z(t)$ стремится к нулю с увеличением времени. Виртуальный выход для регулятора только с компонентой K_1 не расходится, но и не стабилизируется. При отсутствии управления $z(t)$ расходится (см. рис. 16). Вектор состояния объекта управления под действием регулятора только с K_1 компонентой стабилизируется к нулю, но виртуальный выход продолжает движение под действием внешних возмущений ($C_Zx \rightarrow 0, D_Zw_g \nrightarrow 0$). При наличии компонент K_1, K_2 график $x(t)$ не стабилизируется к нулю, но и не расходится (см. рис. 15), при этом $z(t)$ достигает целевого состояния. Без управления $x(t)$ расходится (см. рис. 13). При наличии только компоненты K_1 управление со временем стабилизируется к нулю, при наличии обеих компонент – нет (см. рис. 12).

Вывод

В данном задании был исследован следящий регулятор по состоянию. Его синтез был проведен аналогично синтезу компенсирующего регулятора в задании 1. Было выполнено компьютерное моделирование систем со сравнением результатов.

Задание 3. Слежение и компенсация по выходу

Рассмотрим систему (матрицы A, B, B_f, C_Z, D_Z такие же, как в предыдущих заданиях)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_fw, \\ y = Cx + Dw, \end{cases} \quad x(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$$

и генератор внешнего воздействия

$$\dot{w} = \Gamma w, \quad w(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

при

$$C = [2 \ 0 \ 3], \quad D = [8 \ 2 \ -6 \ 4];$$

Характер внешнего возмущения

Матрица Γ такая же, как в предыдущих заданиях. Ее спектр содержит только мнимые числа. Характер возмущений – гармоника без затухания и роста амплитуды с течением времени.

Возможность осуществления слежения и компенсации по выходу

Проверим пару

$$\left([C \ D], \begin{bmatrix} A & B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \right)$$

на обнаруживаемость. Обозначим

$$\mathcal{C} = [C \ D], \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B_f \\ \mathbf{0}_{4 \times 3} & \Gamma \end{bmatrix};$$

Найдем собственные числа матрицы \mathcal{A} . Программа в MATLAB представлена на листинге 3 в приложении В

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{-2, 2 \pm i, \pm i, \pm 3i\}$$

Собственное число $\lambda_1 = -2$ асимптотически устойчивое, может быть ненаблюдаемым. Комплексные пары $\lambda_{4,5} = \pm i, \lambda_{6,7} = \pm 3i$ устойчивые, но не асимптотически. Комплексная пара $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ неустойчивая, нужна наблюдаемость. Найдем вещественное жорданово разложение матрицы \mathcal{A} , а матрицу \mathcal{C} переведем в базис собственных векторов матрицы \mathcal{A} . Получаем

$$\mathcal{A}_{J_{re}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_{J_{re}} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.9500 \\ 2.1500 \\ -1.2192 \\ 0.5038 \end{bmatrix}^T;$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Для комплексной пары $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ в $\mathcal{C}_{J_{re}}$ один из двух соответствующих ей столбцов ненулевой, следовательно $\lambda_{2,3}$ наблюдаемы. Остальные собственные числа наблюдаемы. Таким образом, система полностью наблюдаема и обнаруживаема. Слежение и компенсация по выходу осуществимы.

Уравнение регулятора в форме Вход-Состояние-Выход

Найдем матрицу \bar{A} , которая будет нужна в дальнейшем для построения схемы и проведения вычислений, через запись уравнения регулятора в форме В-С-В, где вход это $y(t)$, а выход $u(t)$. Расширенный объект имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f w, \\ \dot{w} = \Gamma w, \\ y = Cx + Dw, \\ z = C_z x + D_z w; \end{cases} \quad (1)$$

Для него можно записать следящий регулятор по выходу

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + B_f \hat{w} + L_1 (\hat{y} - y), \\ \dot{\hat{w}} = \Gamma \hat{w} + L_2 (\hat{y} - y), \\ \hat{y} = C\hat{x} + D\hat{w}, \\ u = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{w}; \end{cases} \quad (2)$$

Выполним подстановку \hat{y}, u в $\dot{\hat{x}}$ и выразим \hat{x}, \hat{w} , чтобы позже вынести эти компоненты как вектор, на который умножается матрица \bar{A} . Аналогично с y . Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + B_f \hat{w} + L_1 (\hat{y} - y), \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B(K_1 \hat{x} + K_2 \hat{w}) + B_f \hat{w} + L_1 (C\hat{x} + D\hat{w} - y), \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + BK_1 \hat{x} + BK_2 \hat{w} + B_f \hat{w} + L_1 C\hat{x} + L_1 D\hat{w} - L_1 y, \\ \dot{\hat{x}} &= (A + BK_1 + L_1 C) \hat{x} + (BK_2 + B_f + L_1 D) \hat{w} - L_1 y; \end{aligned} \quad (3)$$

Проведем аналогичные действия для $\dot{\hat{w}}$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}} &= \Gamma \hat{w} + L_2 (\hat{y} - y), \\ \dot{\hat{w}} &= \Gamma \hat{w} + L_2 (C\hat{x} + D\hat{w} - y), \\ \dot{\hat{w}} &= \Gamma \hat{w} + L_2 C\hat{x} + L_2 D\hat{w} - L_2 y, \\ \dot{\hat{w}} &= (L_2 C) \hat{x} + (\Gamma + L_2 D) \hat{w} - L_2 y; \end{aligned} \quad (4)$$

Запишем регулятор по выходу (2) с учетом подстановок (3), (4)

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A + BK_1 + L_1 C) \hat{x} + (BK_2 + B_f + L_1 D) \hat{w} - (L_1) y, \\ \dot{\hat{w}} = (L_2 C) \hat{x} + (\Gamma + L_2 D) \hat{w} - (L_2) y, \\ u = (K_1) \hat{x} + (K_2) \hat{w}; \end{cases} \quad (5)$$

Вынесем компоненты за скобками в соответствующие векторы

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_1 + L_1 C & BK_2 + B_f + L_1 D \\ L_2 C & \Gamma + L_2 D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} y, \\ u = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix}; \end{cases} \quad (6)$$

Получили уравнение регулятора в форме Вход-Состояние-Выход. Матрица \bar{A} имеет вид

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A + BK_1 + L_1 C & BK_2 + B_f + L_1 D \\ L_2 C & \Gamma + L_2 D \end{bmatrix} \quad (7)$$

Схема моделирования системы для слежения и компенсации по выходу

Построим схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из расширенного наблюдателя

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} y$$

и закона управления

$$u = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{w},$$

обеспечивающего выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

при внешнем воздействии, задаваемом генератором. Снимаем осциллограммы $u(t)$, $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$, $e(t)$, $y(t)$, $z(t)$

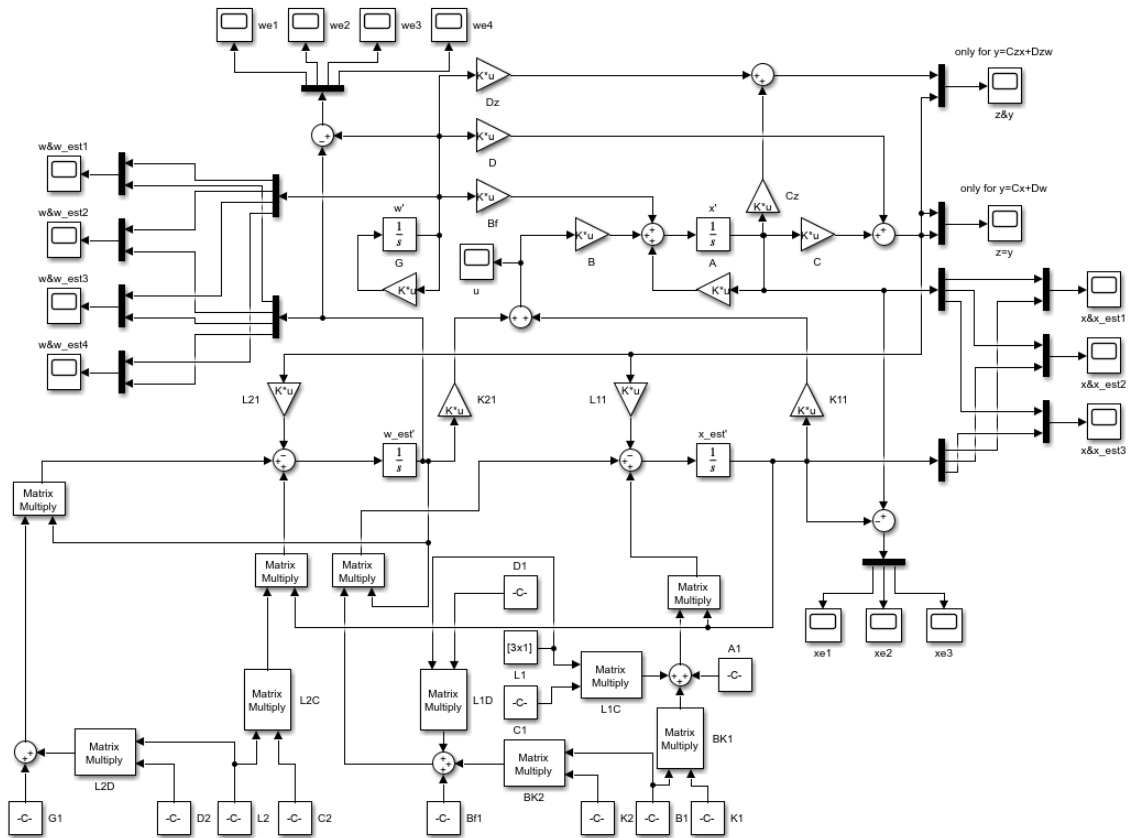


Рис. 18: Схема моделирования системы для слежения и компенсации по выходу

Исследование системы перед синтезом регулятора

Матрицы A, B такие же, как в первом задании. Имеем

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}, \quad A_{J_{re}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{J_{re}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Система не полностью управляема, стабилизируема. Максимальная степень устойчивости $\alpha = 2$.

Синтез компоненты обратной связи

Аналогично заданию 1 синтезируем K_1 при помощи матричного уравнения типа Риккати. Матрицы, участвующие в расчетах, не изменились. Тогда, получаем

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.6000 & -11.2000 & 1.6000 \end{bmatrix}, \sigma(A + BK_1) = \{-2, -2.0000 \pm 4.1231i\};$$

В первом задании уже выяснили, что регулятор синтезирован корректно.

Синтез матрицы коррекции наблюдателя

Матрицу наблюдателя \mathcal{L} будем искать с помощью матричных неравенств

$$Q \succ 0, \mathcal{A}^T Q + Q \mathcal{A} + 2\alpha Q + \mathcal{C}^T Y^T + Y \mathcal{C} \prec 0, \mathcal{L} = Q^{-1} Y$$

совместно с решением задачи минимизации управления. Зададим $\alpha = 1$. Используя `cvx`, получаем

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 41.4979 \\ 31.3700 \\ -30.9945 \\ 0.2455 \\ 1.4359 \\ 1.1914 \\ 0.6445 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{bmatrix} 41.4979 \\ 31.3700 \\ -30.9945 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0.2455 \\ 1.4359 \\ 1.1914 \\ 0.6445 \end{bmatrix}; \mu = 28.1390;$$

Проверим собственные числа замкнутой системы $\mathcal{A} + \mathcal{L}\mathcal{C}$

$$\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{L}\mathcal{C}) = \left\{ \begin{array}{c} -1.4717 \\ -1.0103 \pm 3.3960i \\ -1.0300 \pm 1.7041i \\ -1.0850 \pm 0.3955i \end{array} \right\}$$

Наблюдатель синтезирован корректно.

Синтез компоненты прямой связи следящего регулятора

Синтезируем K_2 для различных виртуальных выходов. Рассмотрим

$$\begin{aligned} z_1 &= C_Z x + D_Z w \\ z_2 &= y = Cx + Dw \end{aligned}$$

Синтез возможен в том случае, если матрицы $A + BK_1$ и $\mathcal{A} + \mathcal{L}\mathcal{C}$ гурвицевы. В нашем случае условия выполнены – мы проверяли собственные числа этих замкнутых систем ранее – спектры матриц принадлежат левой комплексной полуплоскости. Процедура синтеза аналогична заданию 1. Получаем

$$K_{2_{z1}} = \begin{bmatrix} -41.1631 & -9.8092 & 27.7538 & -19.4769 \end{bmatrix},$$

$$K_{2_{z2}} = \begin{bmatrix} 20.3076 & 2.7419 & -14.2967 & 8.5001 \end{bmatrix};$$

Принцип внутренней модели

Если измеряемый выход y равен регулируемому выходу z , и если регулятор обеспечивает устойчивость объекта в случае $w \equiv 0$, то для решения задачи слежения и компенсации ($z \rightarrow 0$) необходимо, чтобы

$$\sigma(\Gamma) \in \sigma(\bar{A})$$

Спектр матрицы Γ мы уже находили

$$\sigma(\Gamma) = \{\pm i, \pm 3i\}$$

Проверим спектры матриц \bar{A}_{z_1} и \bar{A}_{z_2} . Матрицу \bar{A} выводили ранее (7), когда представляли уравнения регулятора в форме В-С-В (6) с $y(t)$ как входом, $u(t)$ как выходом. Получаем

$$\sigma(\bar{A}_{z_1}) = \left\{ \begin{array}{c} -1.9996 \\ -6.8702 \pm 32.8647i \\ 0.0175 \pm 3.0096i \\ -0.0085 \pm 0.9756i \end{array} \right\}, \quad \sigma(\bar{A}_{z_2}) = \left\{ \begin{array}{c} -1.9996 \\ -6.8613 \pm 32.8152i \\ \pm 3.0000i \\ \pm 1.0000i \end{array} \right\};$$

Для $z_1 = C_Z x + D_Z w$ принцип внутренней модели не выполняется, для $z_2 = Cx + Dw$ – выполняется. Регулятор K_{2z_2} умеет воспроизводить сигналы, за которыми надо проследить или которые нужно компенсировать.

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование для K_{2z_1} и K_{2z_2} с нулевыми начальными условиями наблюдателя. Построим график формируемого регулятором управления $u(t)$, сравнительные графики

$$\begin{bmatrix} x(t) & w(t) \end{bmatrix}^T \text{ и } \begin{bmatrix} \hat{x}(t) & \hat{w}(t) \end{bmatrix}^T,$$

график ошибки наблюдателя

$$e(t) = \begin{bmatrix} x(t) & w(t) \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \hat{x}(t) & \hat{w}(t) \end{bmatrix}^T$$

и сравнительные графики фактического и виртуального выходов $y(t)$ и $z(t)$. Результаты представлены на рис. 19–50

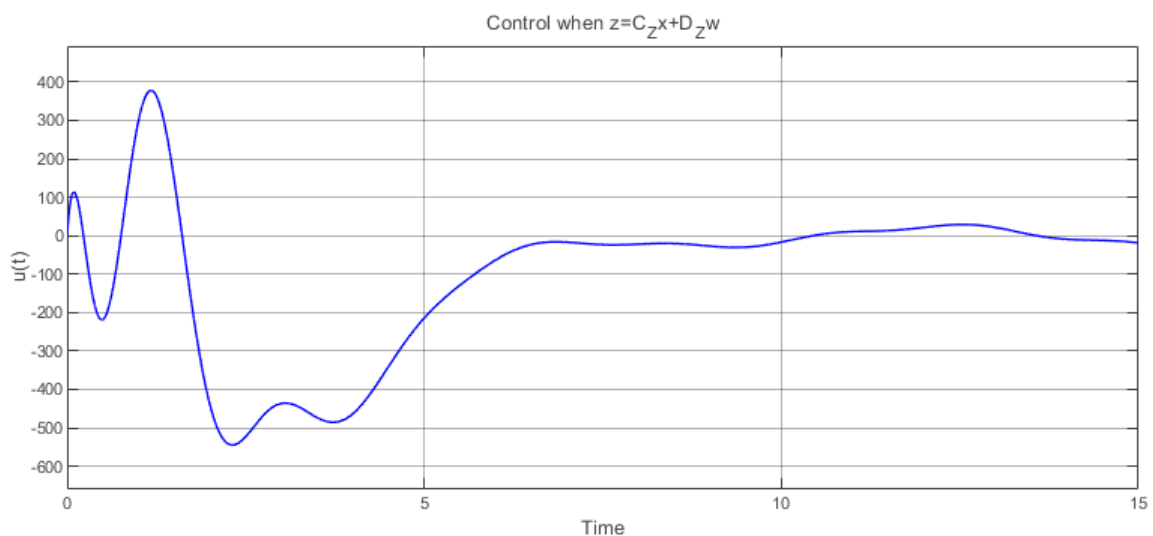


Рис. 19: График управления $u(t)$ при K_{2z_1}

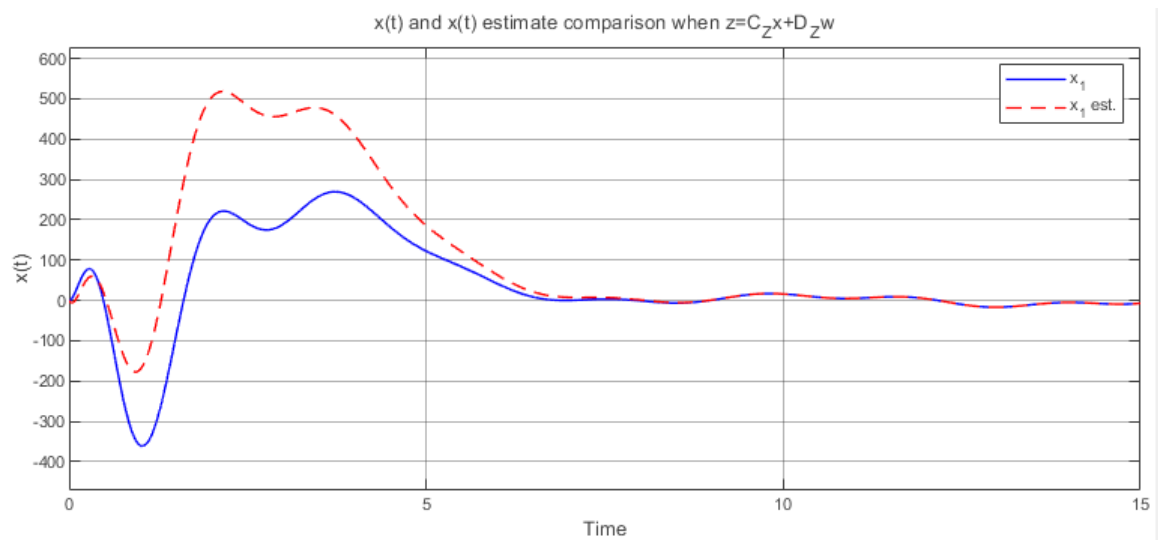


Рис. 20: График $x_1(t), \hat{x}_1(t)$ при $K_{2_{z1}}$

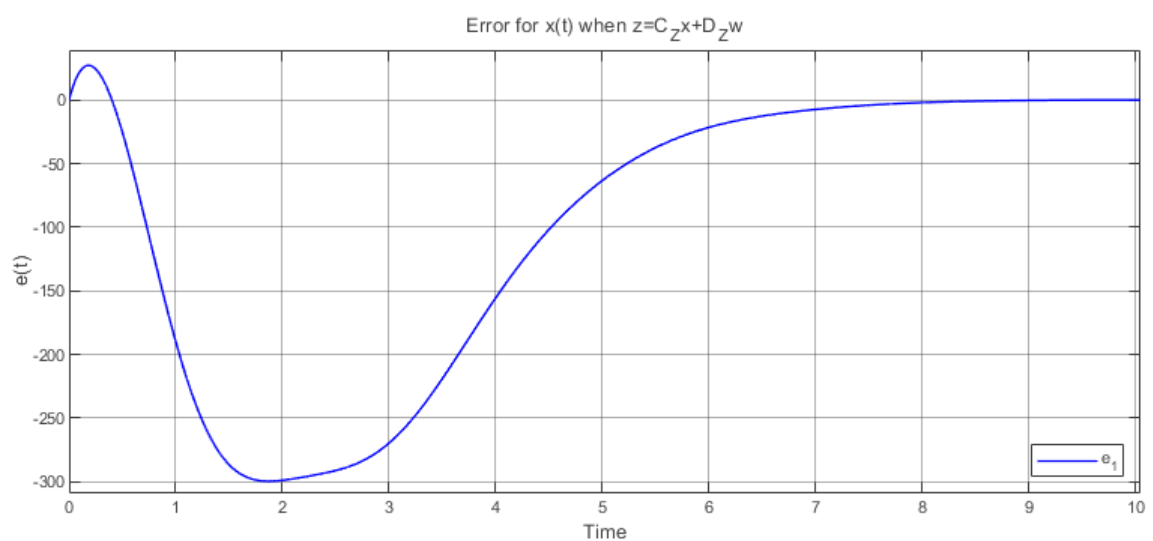


Рис. 21: График ошибки $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ при $K_{2_{z1}}$

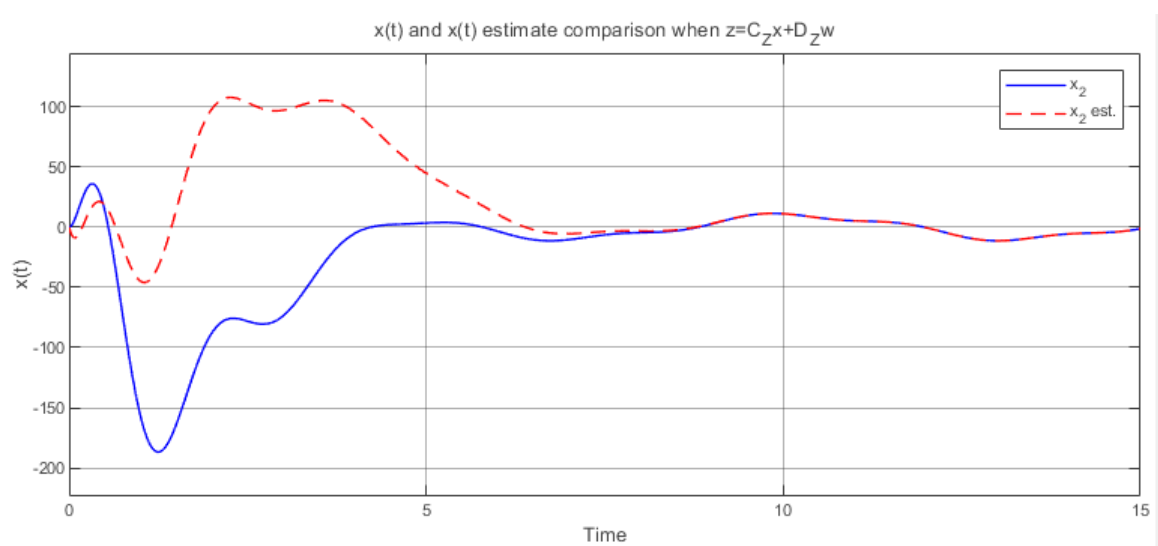


Рис. 22: График $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ при $K_{2_{z1}}$

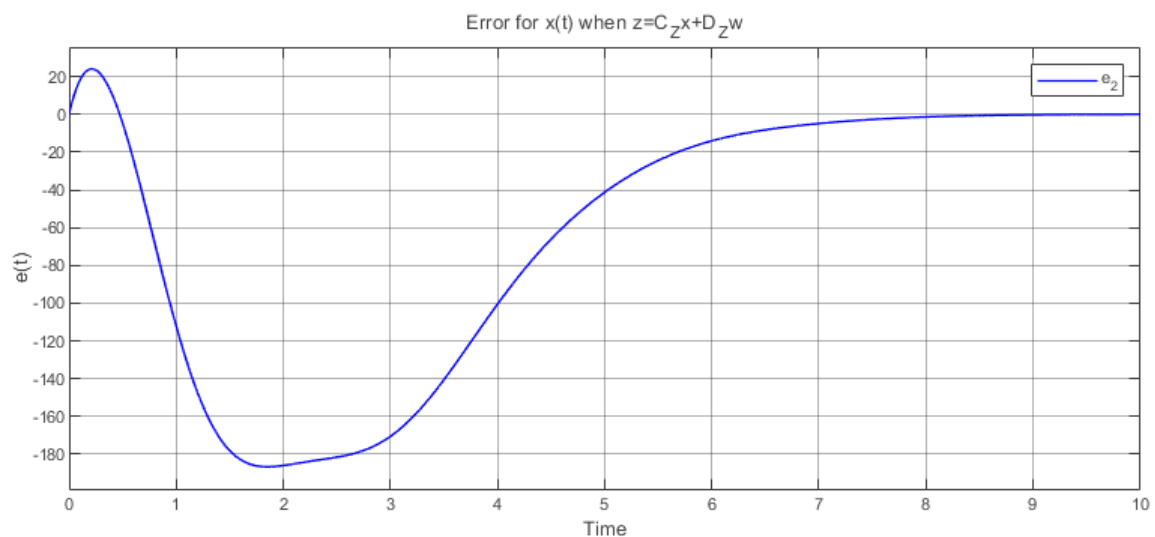


Рис. 23: График ошибки $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ при K_{2z1}

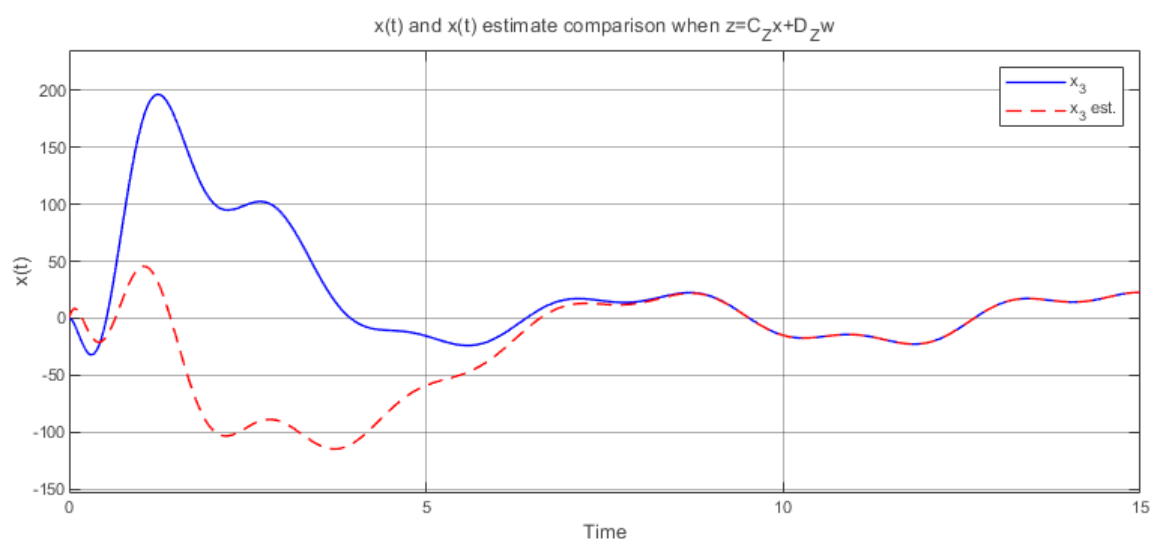


Рис. 24: График $x_3(t), \hat{x}_3(t)$ при K_{2z1}

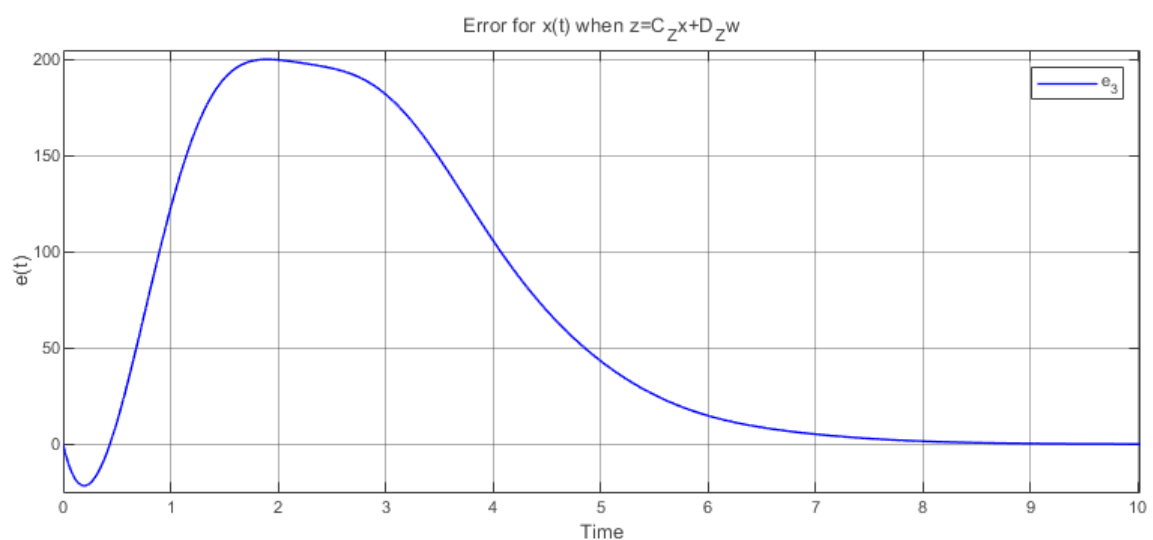


Рис. 25: График ошибки $e_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$ при K_{2z1}

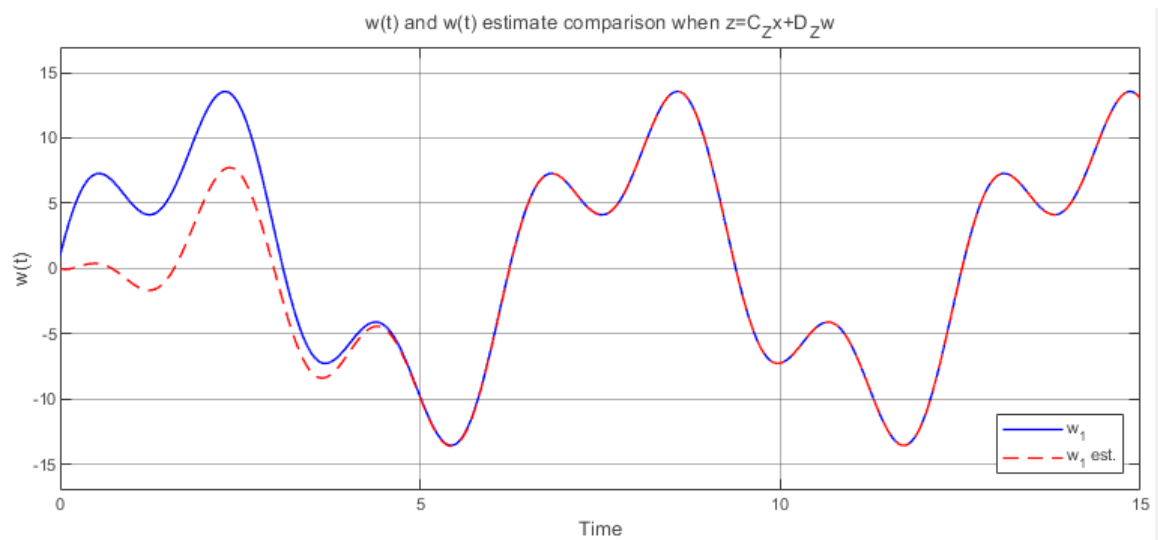


Рис. 26: График $w_1(t), \hat{w}_1(t)$ при $K_{2_{z1}}$

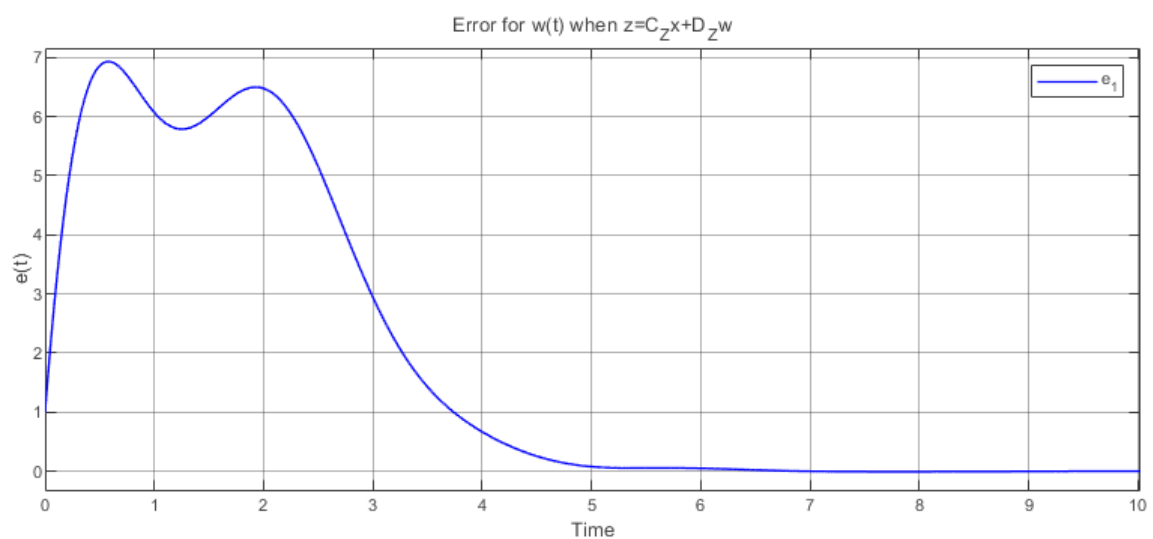


Рис. 27: График ошибки $e_1(t) = w_1(t) - \hat{w}_1(t)$ при $K_{2_{z1}}$

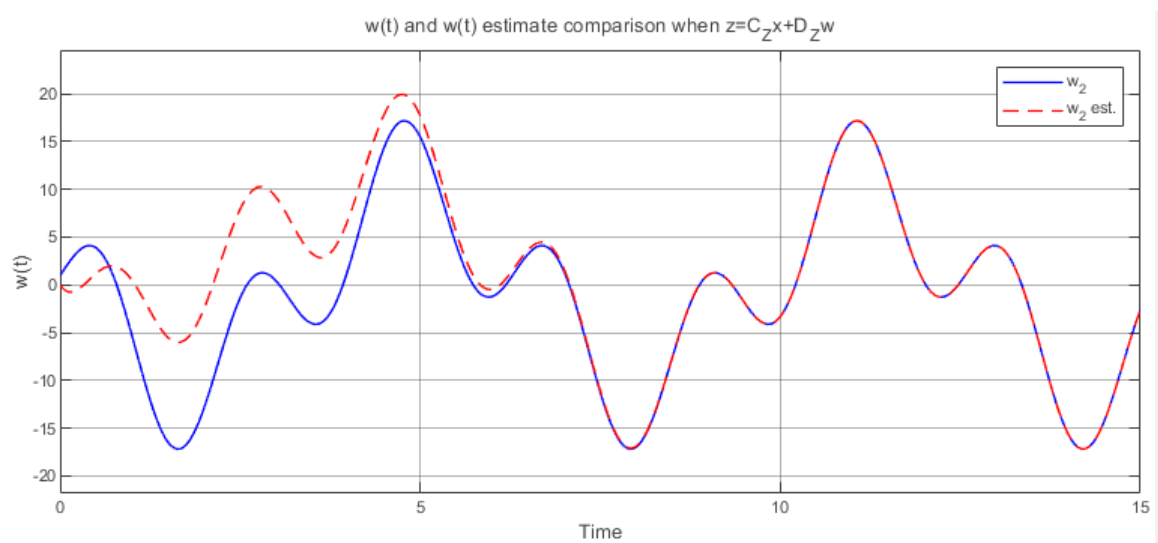


Рис. 28: График $w_2(t), \hat{w}_2(t)$ при $K_{2_{z1}}$

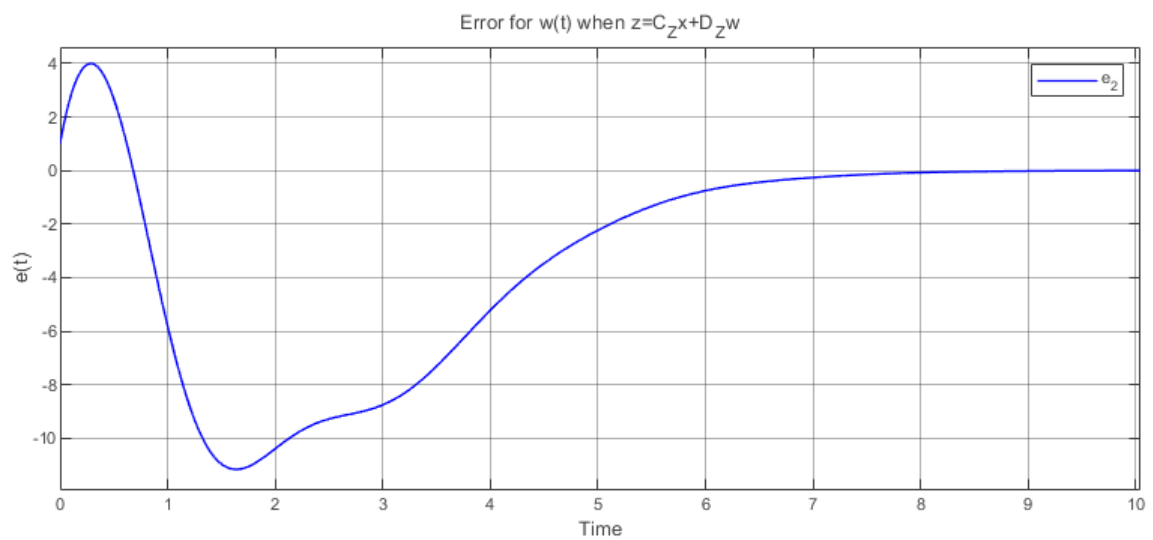


Рис. 29: График ошибки $e_2(t) = w_2(t) - \hat{w}_2(t)$ при K_{2z_1}

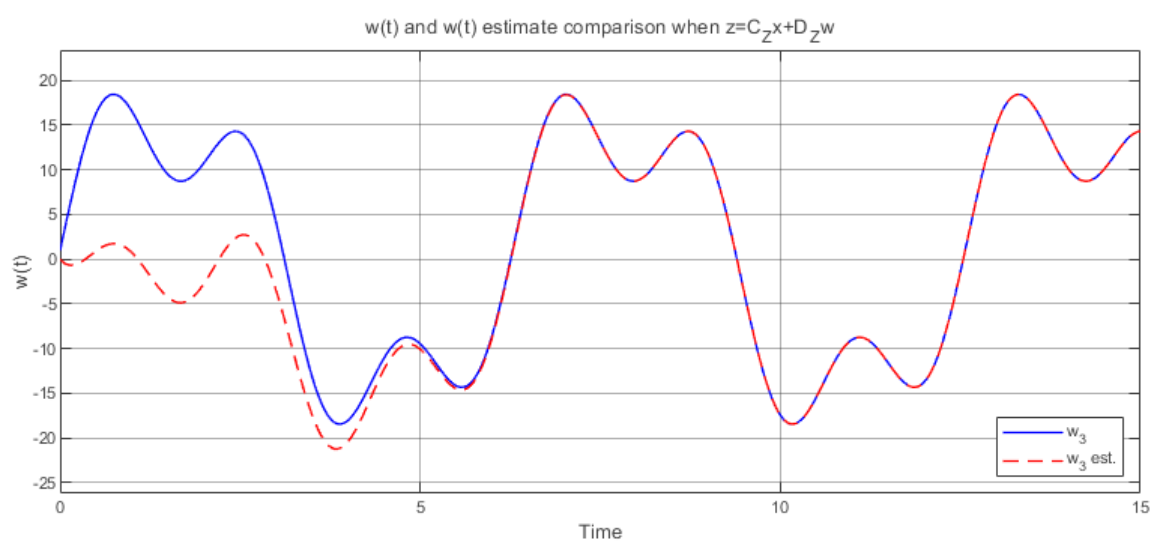


Рис. 30: График $w_3(t), \hat{w}_3(t)$ при K_{2z_1}

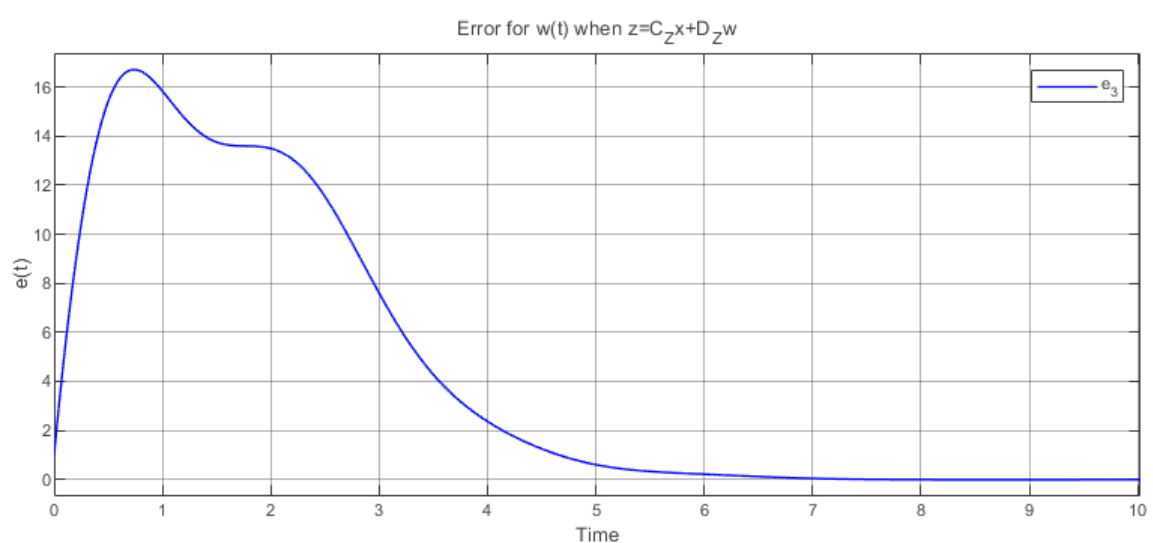


Рис. 31: График ошибки $e_3(t) = w_3(t) - \hat{w}_3(t)$ при K_{2z_1}

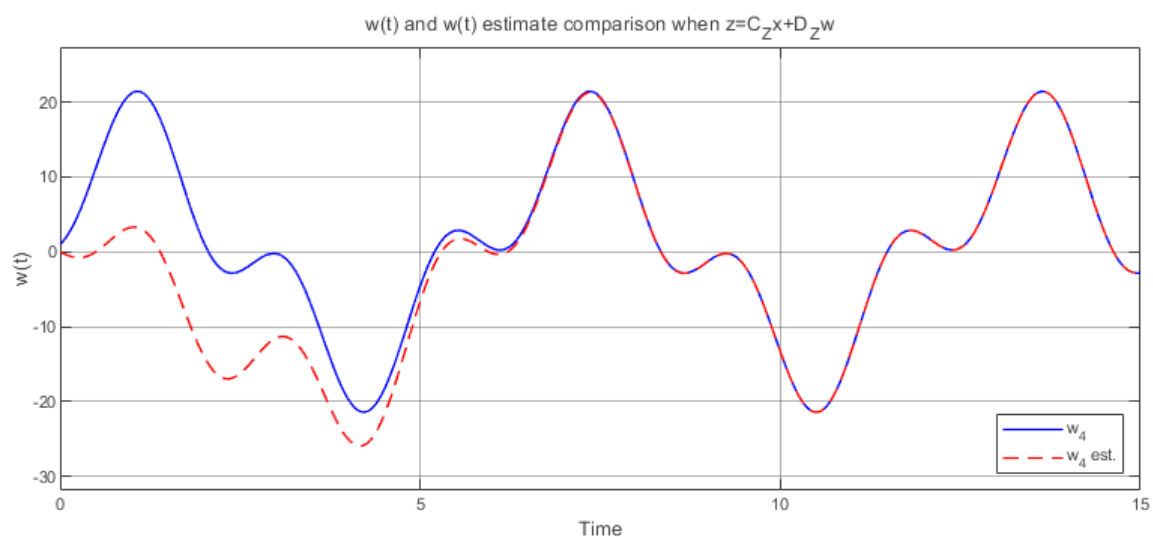


Рис. 32: График $w_4(t), \hat{w}_4(t)$ при $K_{2_{z1}}$

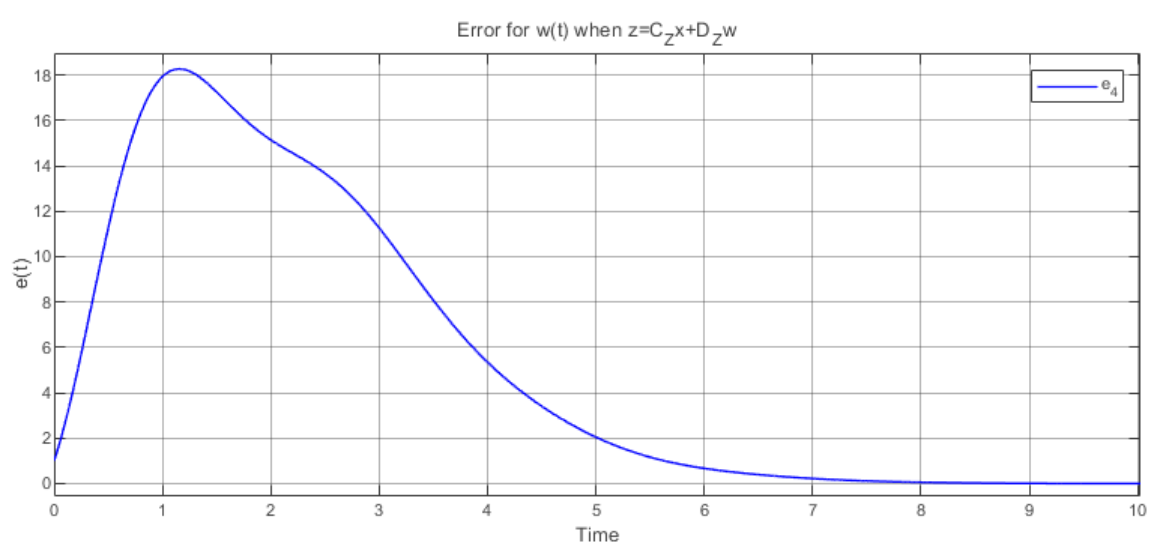


Рис. 33: График ошибки $e_4(t) = w_4(t) - \hat{w}_4(t)$ при $K_{2_{z1}}$

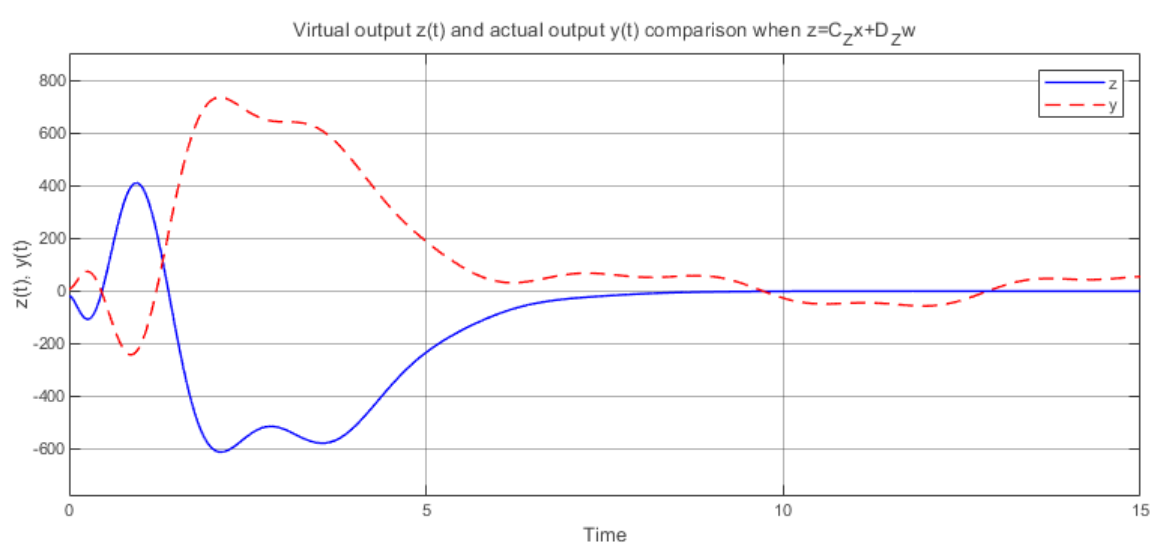


Рис. 34: График виртуального $z(t)$ и фактического $y(t)$ выходов при $K_{2_{z1}}$

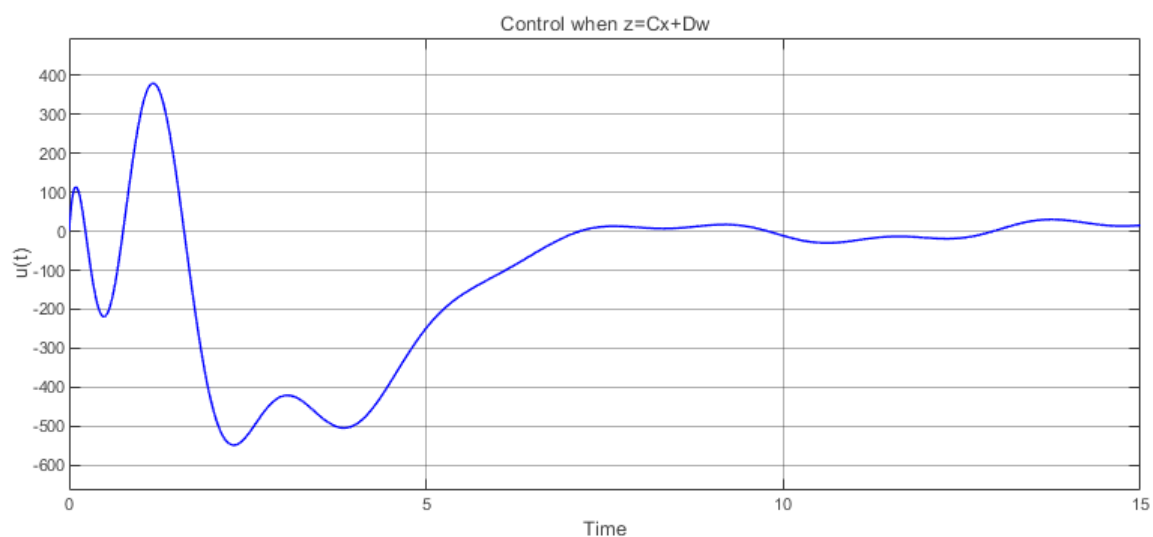


Рис. 35: График управления $u(t)$ при K_{2z2}

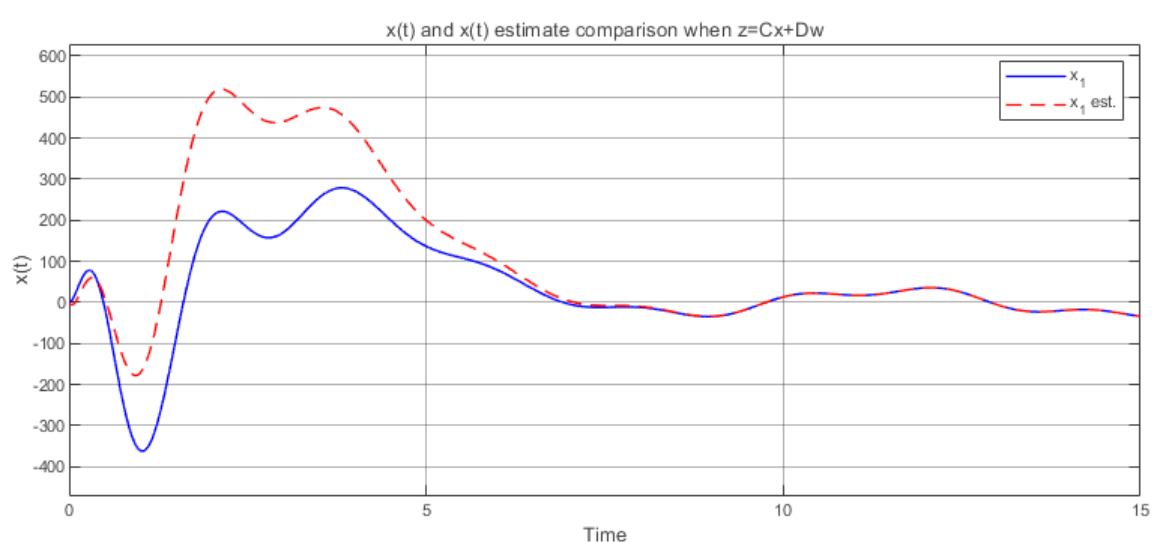


Рис. 36: График $x_1(t), \hat{x}_1(t)$ при K_{2z2}

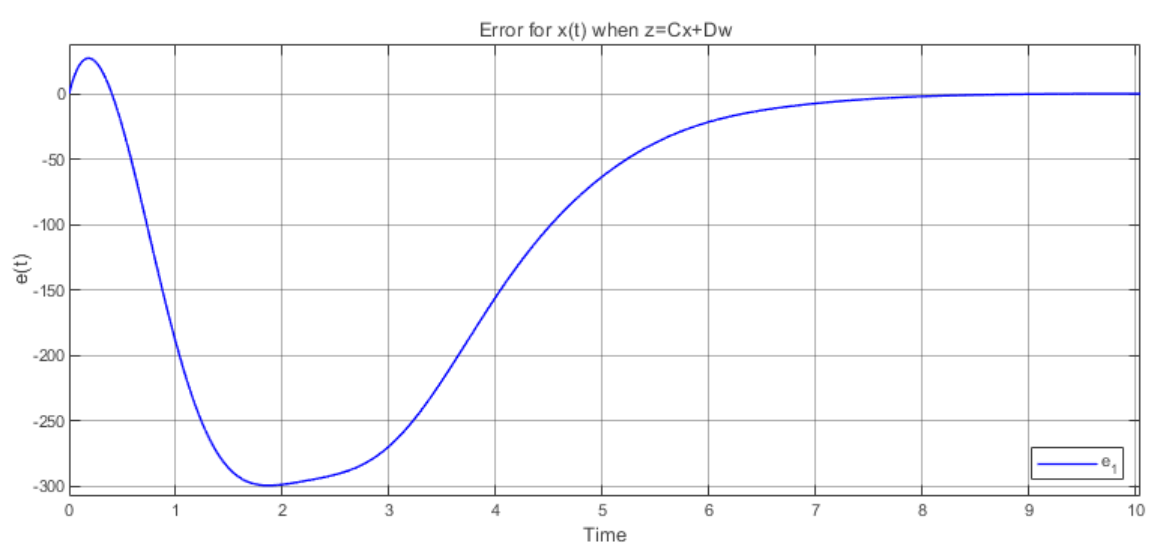


Рис. 37: График ошибки $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ при K_{2z2}

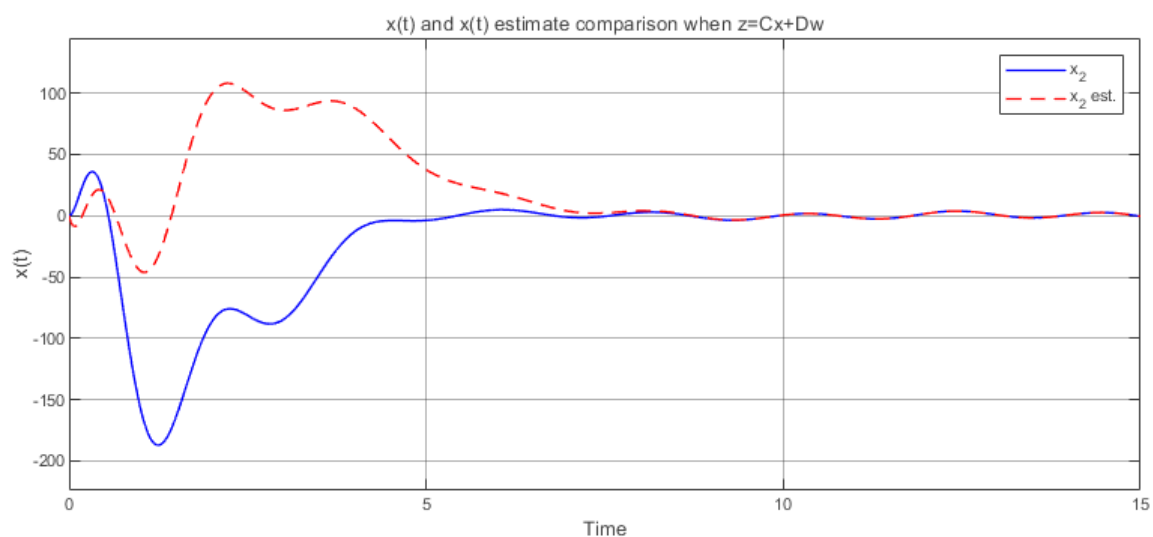


Рис. 38: График $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ при K_{2z2}

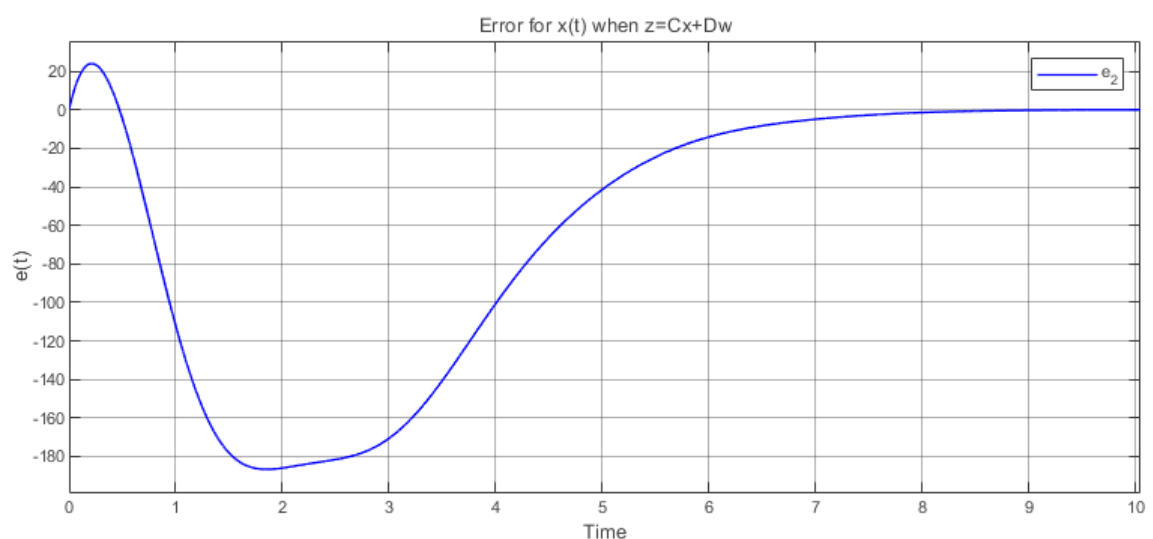


Рис. 39: График ошибки $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ при K_{2z2}

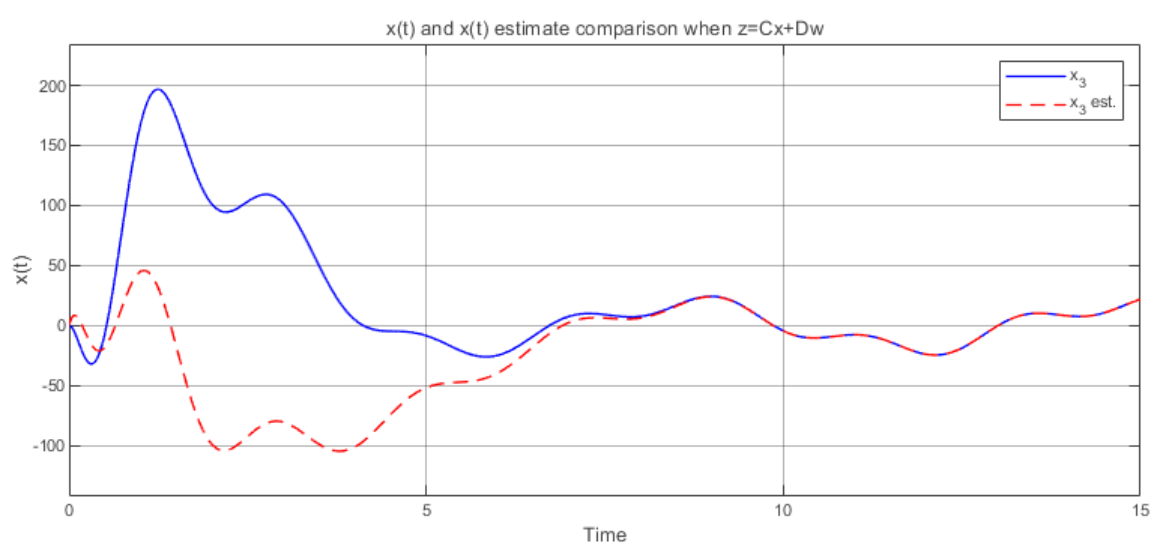


Рис. 40: График $x_3(t), \hat{x}_3(t)$ при K_{2z2}

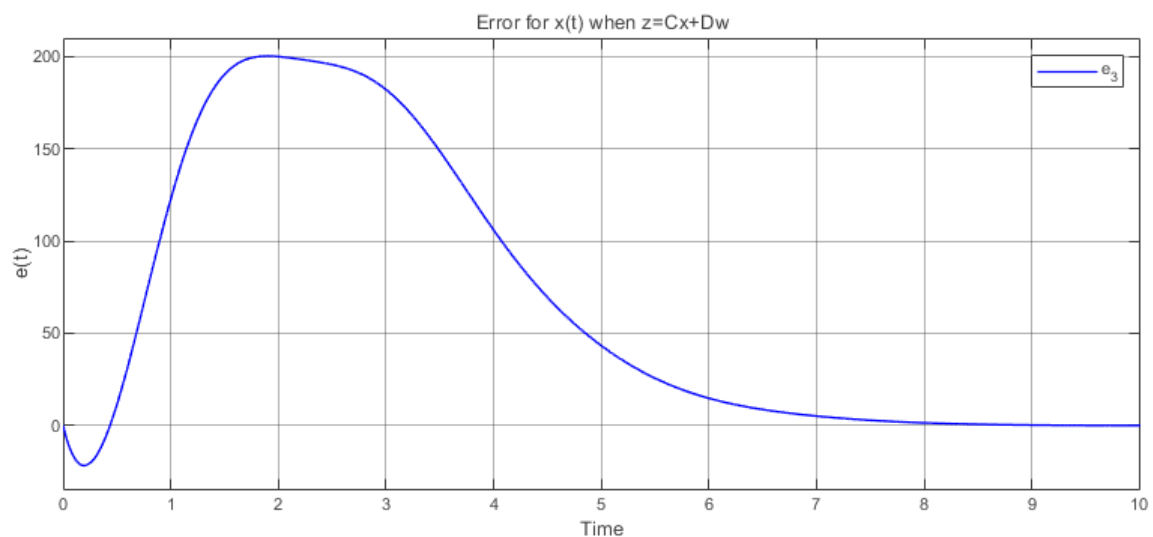


Рис. 41: График ошибки $e_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$ при K_{2z2}

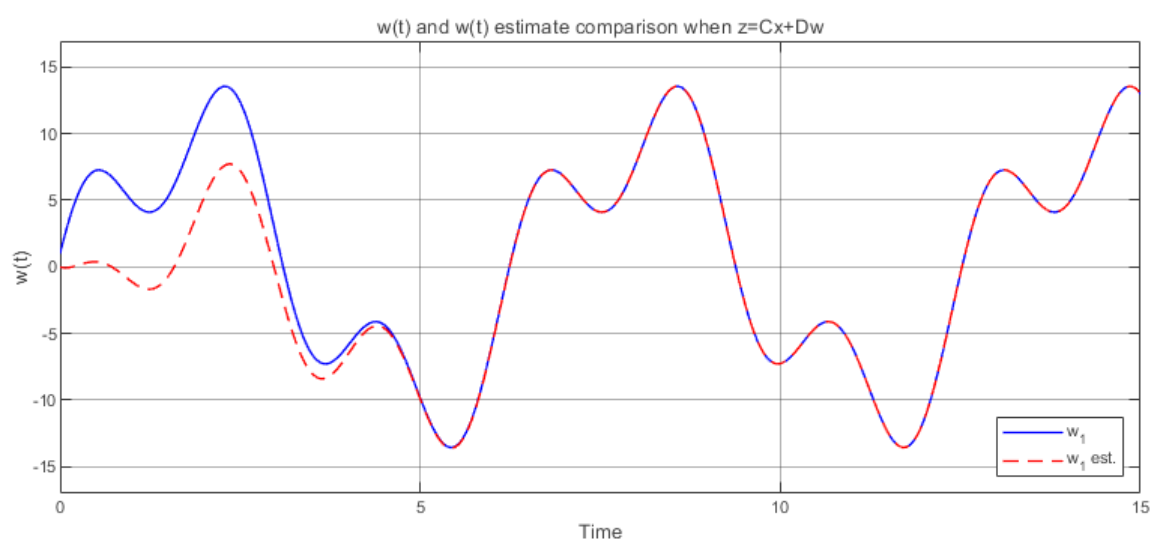


Рис. 42: График $w_1(t), \hat{w}_1(t)$ при K_{2z2}

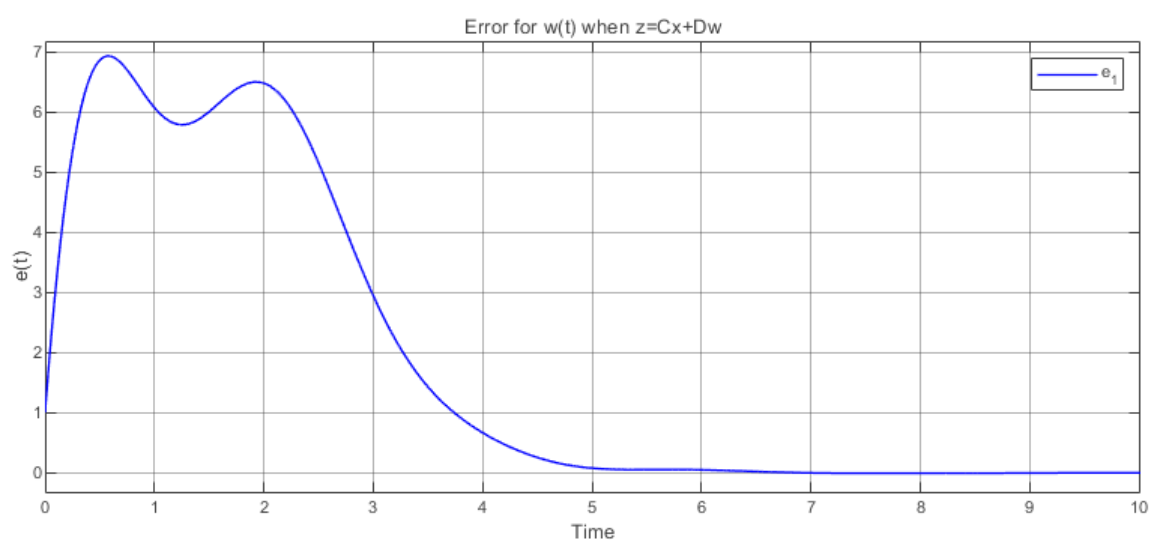


Рис. 43: График ошибки $e_1(t) = w_1(t) - \hat{w}_1(t)$ при K_{2z2}

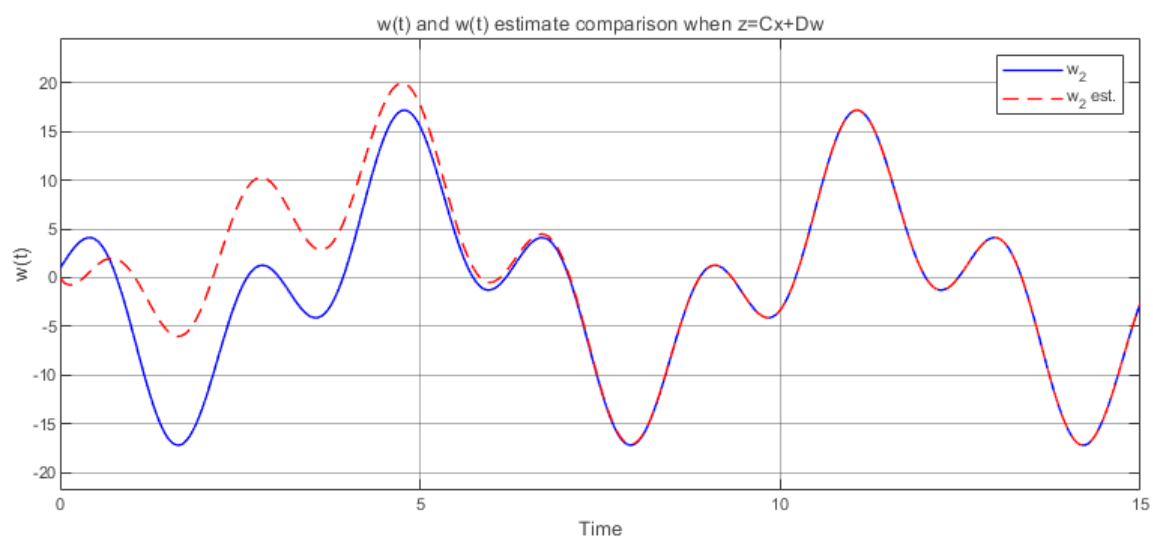


Рис. 44: График $w_2(t), \hat{w}_2(t)$ при K_{2z_2}

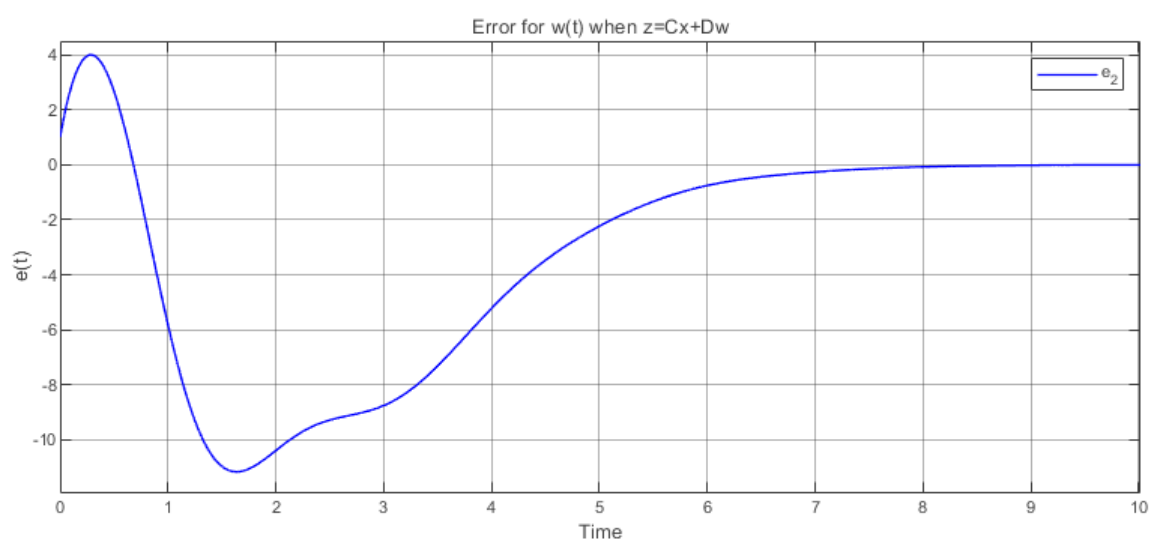


Рис. 45: График ошибки $e_2(t) = w_2(t) - \hat{w}_2(t)$ при K_{2z_2}

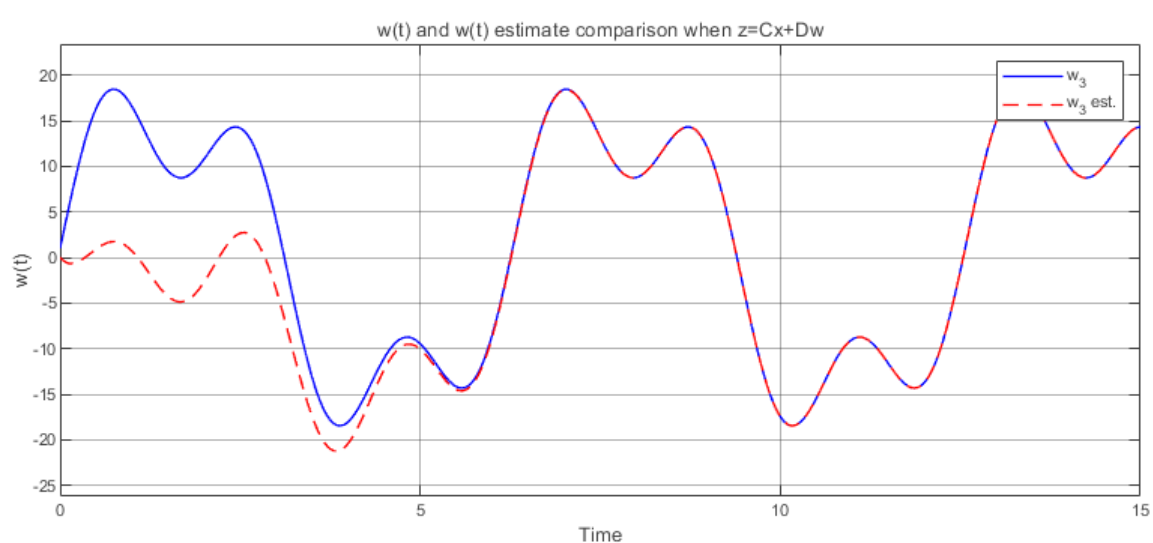


Рис. 46: График $w_3(t), \hat{w}_3(t)$ при K_{2z_2}

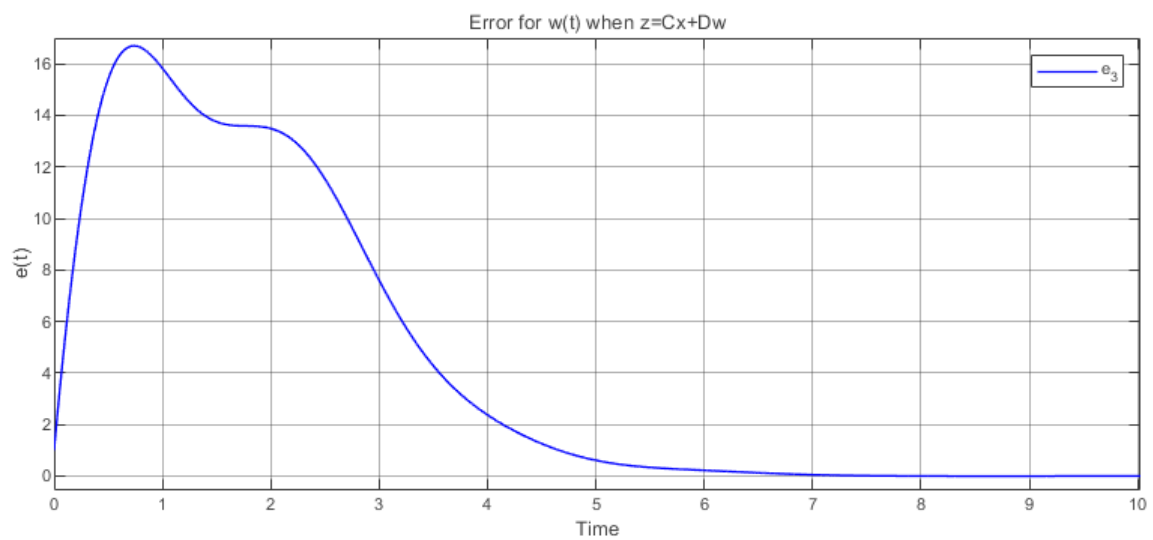


Рис. 47: График ошибки $e_3(t) = w_3(t) - \hat{w}_3(t)$ при K_{2z_2}

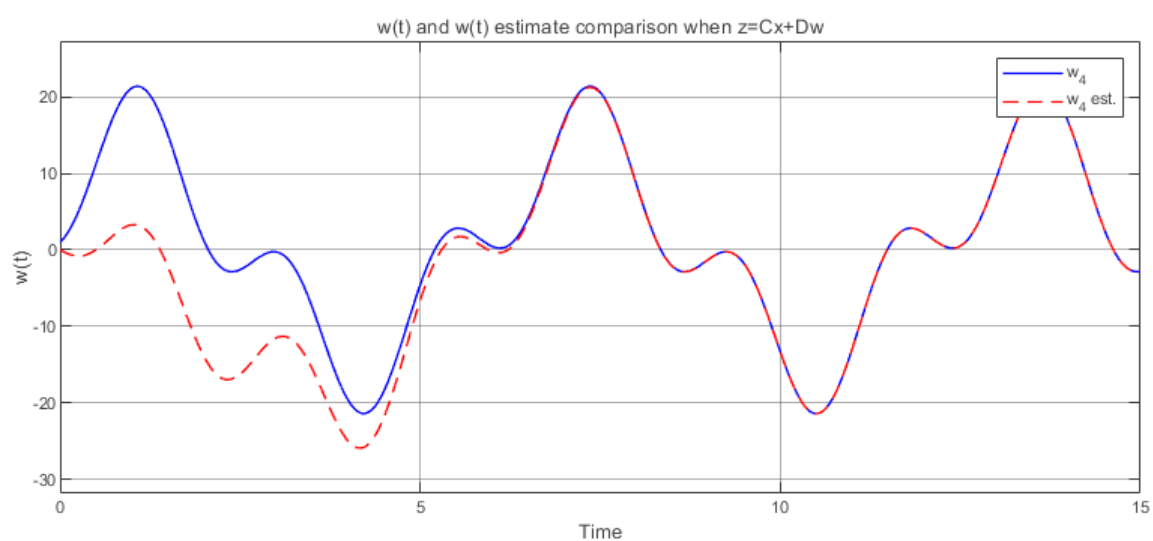


Рис. 48: График $w_4(t), \hat{w}_4(t)$ при K_{2z_2}

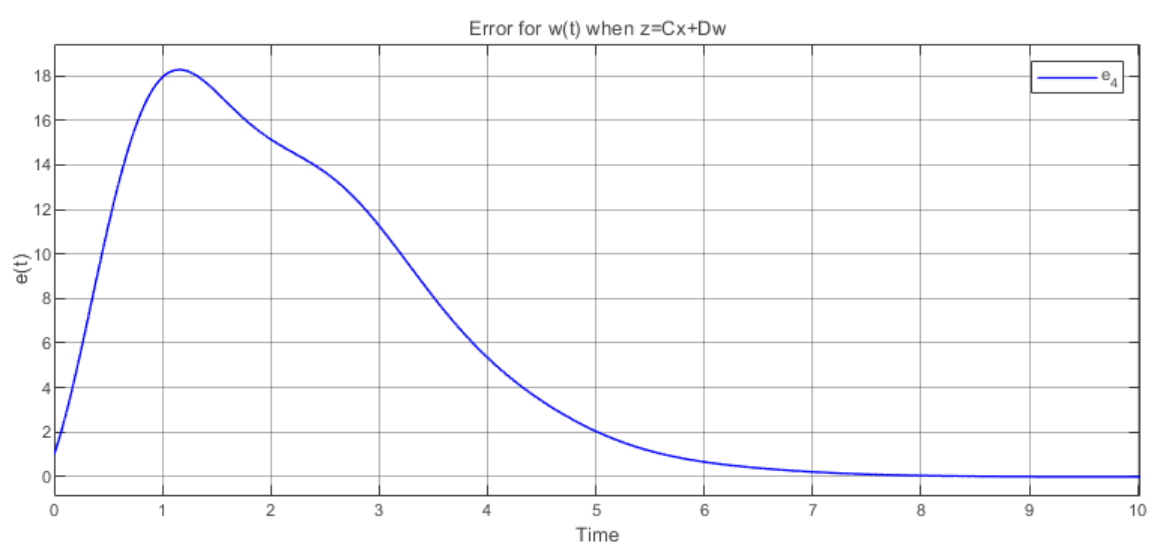


Рис. 49: График ошибки $e_4(t) = w_4(t) - \hat{w}_4(t)$ при K_{2z_2}

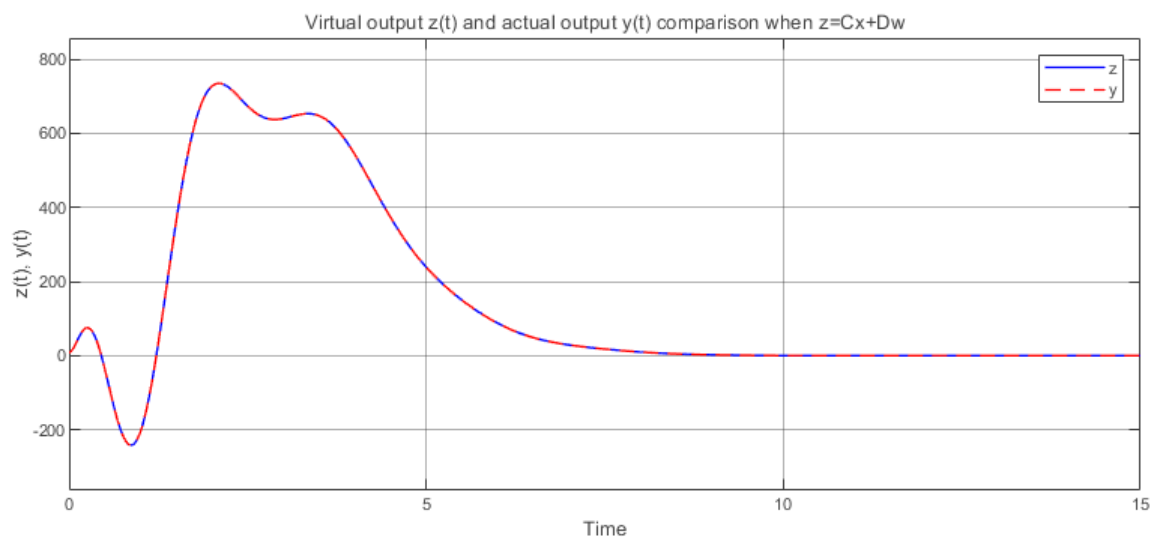


Рис. 50: График виртуального $z(t)$ и фактического $y(t)$ выходов при K_{2z2}

Вывод

Оценки возмущения \hat{w}_i сошлись к истинным возмущениям w_i во всех случаях. Оценки состояния объекта \hat{x}_i тоже сошлись к истинным x_i во всех случаях. Управление при z_1 почти не отличается от управления при z_2 . В обоих случаях виртуальный выход стремится к нулю, то есть регуляторы справляются с внешними возмущениями. Принцип внутренней модели выполняется только при $z_2 = Cx + Dw$.

Задание 4. Тележка и меандр

Рассмотрим объект управления «тележка», представленный на рис. 51

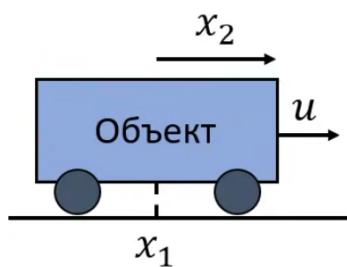


Рис. 51: Тележка

Математическая модель «тележки»

Синтезируем математическую модель «тележки», приняв в качестве выхода линейную координату $y(t) = x_1(t)$. На рисунке видим, что объект имеет координату x_1 и скорость $\vec{v} = x_2 = \dot{x}_1$. К объекту прилагается сила \vec{F} – управление $u(t)$, которое примем за ускорение $\vec{a} = \dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = u$. Измеряем только координату объекта x_1 . Таким образом, запишем систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ y = x_1; \end{cases}$$

Можем переписать в привычном нам виде

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix};$$

Задающий сигнал

Примем задающий сигнал $g(t)$ меандром с амплитудой $\alpha = 1$ и периодом $T = 1/f = 2\pi$

$$\alpha \cdot \operatorname{sgn}(\sin(2\pi ft)) = \operatorname{sgn}(\sin(t))$$

Ряд Фурье

Разложим сигнал $g(t)$ в ряд Фурье. Зададимся конечным числом гармоник $m = 3$ для использования конечной суммы ряда в качестве приближенного сигнала $\bar{g}(t)$. Программа MATLAB находится на листинге 4 в приложении Г. Получаем

$$\bar{g}(t) = \frac{4}{\pi} \sin(t) + \frac{4}{3\pi} \sin(3t) + \frac{4}{5\pi} \sin(5t)$$

Формирование генератора

Сформируем генератор типа

$$\dot{w}_g = \Gamma w_g, \quad w_g(0) = w_0,$$

способный порождать выбранные гармоники-компоненты $\bar{g}(t)$. На каждый синус в $\bar{g}(t)$ приходится косинус с нулевым коэффициентом. Размерность матрицы Γ будет 6×6 . Модель осциллятора имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad x(t) = \cos(\omega t), \quad y(t) = \sin(\omega t);$$

Таким образом, запишем матрицу $\Gamma \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ по $\omega = 1, 3, 5$ в $\bar{g}(t)$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

У косинусов в $\bar{g}(t)$ нулевые коэффициенты, поэтому извлекаем только синусы (см. модель осциллятора при $x = 0, y \neq 0$)

$$w_g(0) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{\pi} & 0 & \frac{4}{3\pi} & 0 & \frac{4}{5\pi} \end{bmatrix}^T$$

Виртуальный выход

Зададимся виртуальным выходом

$$z(t) = C_Z x + D_Z w_g$$

Зададим матрицы C_Z, D_Z такими, чтобы при выполнении целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

было справедливо

$$\bar{g}(t) = D_Z w_g(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{g}(t) - y(t)| = 0;$$

Так как $y = [1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2]$ (см. матрица C), то нужно взять C_Z «инвертирующую», то есть чтобы $z = [-1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2] + D_Z w_g$. Таким образом, получаем

$$C_Z = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Чтобы $\bar{g}(t) = D_Z w_g(t)$, необходимо забрать из $w_g(t)$ только синус-гармоники. Так как эти колебания уже были умножены на свои коэффициенты через $w_g(0)$, то имеем

$$D_Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$z(t) = -y(t) + \bar{g}(t)$$

Решается задача слежения.

Исследование системы перед синтезом регулятора

Матрица A и она же в жордановой форме J будут одинаковые. Имеем

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

В матрице J кратные собственные числа $\lambda_{1,2} = 0$. Они создают одну единственную клетку. Достаточным условием полной управляемости системы является не равенство нулю последнего элемента матрицы входных воздействий B . Условие выполнено – система полностью управляема, стабилизируема.

Синтез следящего регулятора

Синтезируем K_1, K_2 . Рассмотрим компоненту обратной связи. Решим матричное уравнение Риккати при степени устойчивости $\alpha = 2$ аналогично заданию 1. Получаем

$$K_1 = \begin{bmatrix} -8 & -4 \end{bmatrix}$$

Проверим замкнутую систему $A + BK_1$

$$\sigma(A + BK_1) = \{-2 \pm i\}$$

Желаемая степень устойчивости достигнута. Регулятор синтезирован корректно.

Рассмотрим компоненту прямой связи. Синтезируем аналогично заданию 2. Решаемая система была представлена в задании 1. Получаем

$$K_2 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 & 12 & -17 & 20 \end{bmatrix}$$

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы. Зададим нулевые начальные условия системы. Схема моделирования представлена ниже

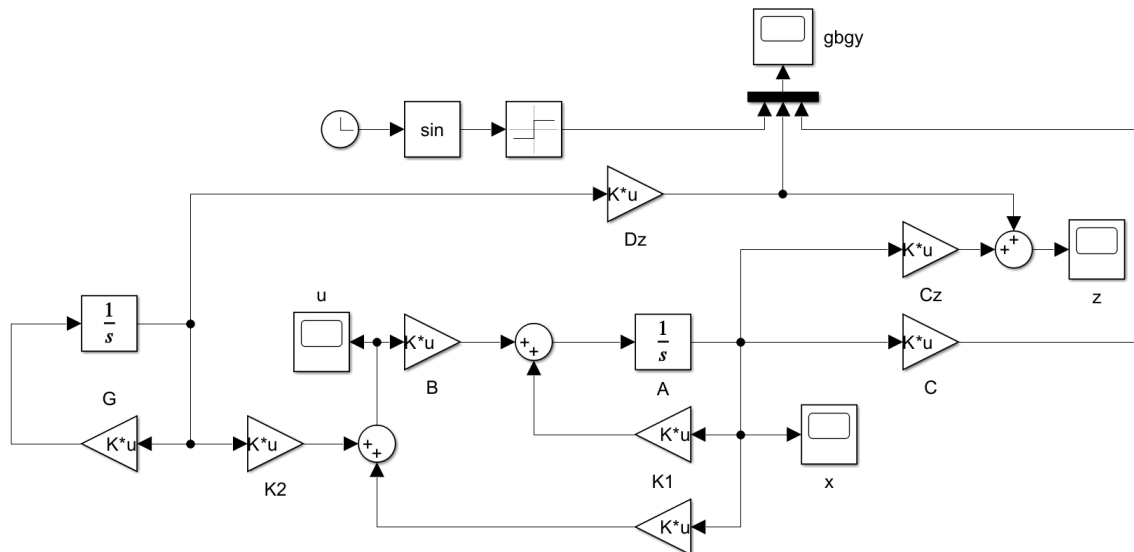


Рис. 52: Схема моделирования системы для задачи слежения

Построим графики формируемого регулятором управления $u(t)$, вектора состояния замкнутой системы $x(t)$, задающего сигнала $g(t)$, приближенного задающего сигнала $\bar{g}(t)$ и фактического и виртуального выходов $y(t), z(t)$ соответственно. Результаты представлены на рис. 53–56

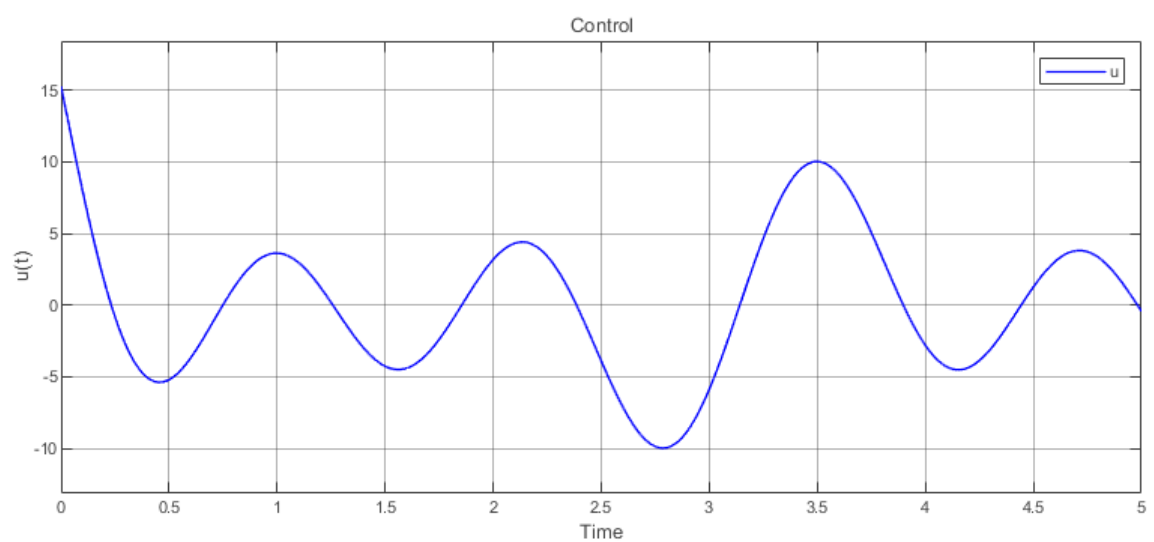


Рис. 53: График управления $u(t)$

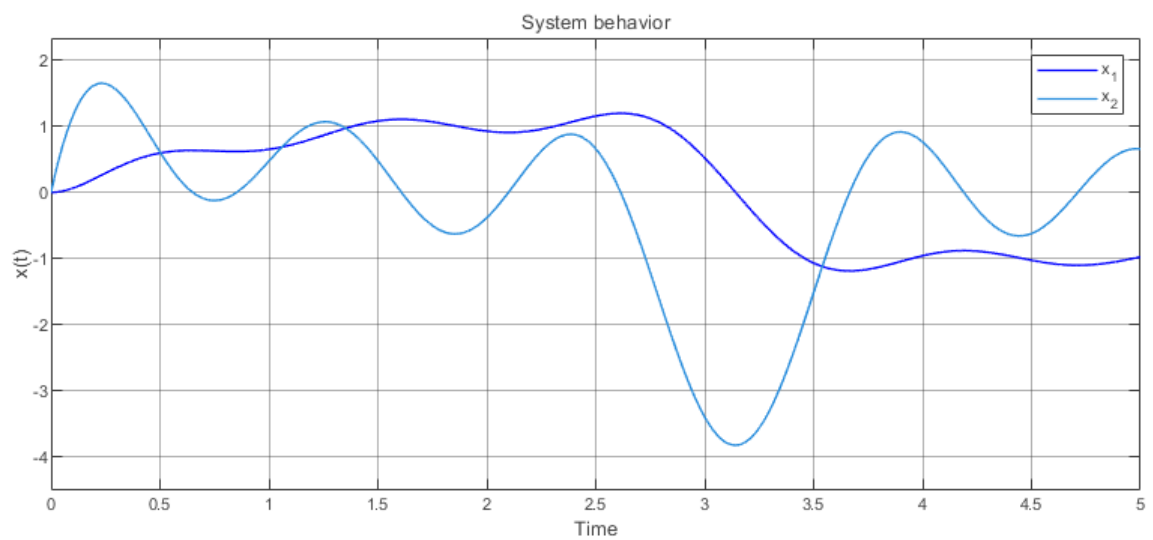


Рис. 54: График вектора состояния $x(t)$

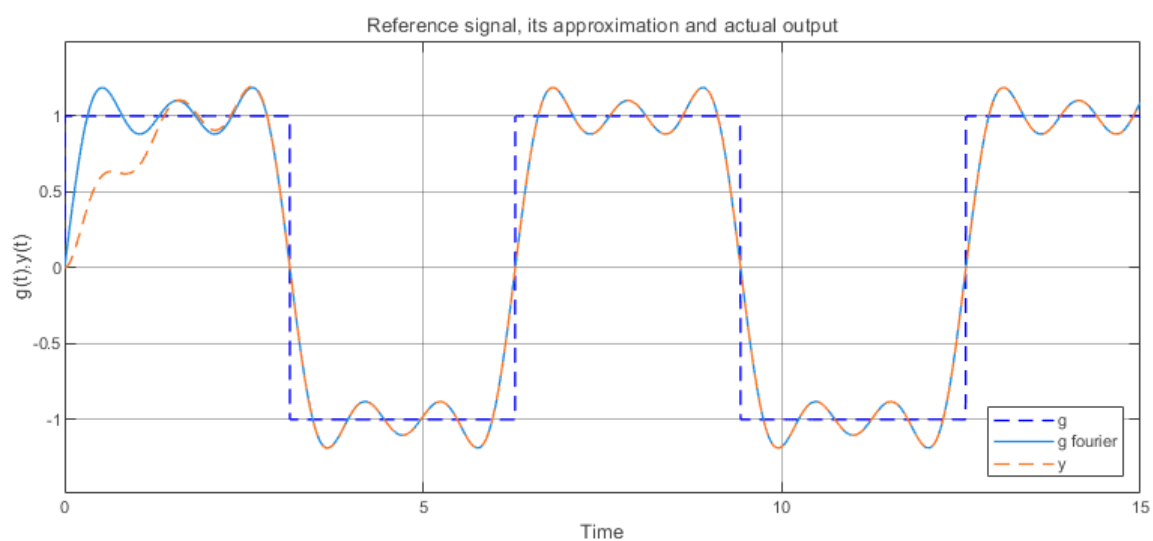


Рис. 55: Графики $g(t), \bar{g}(t), y(t)$

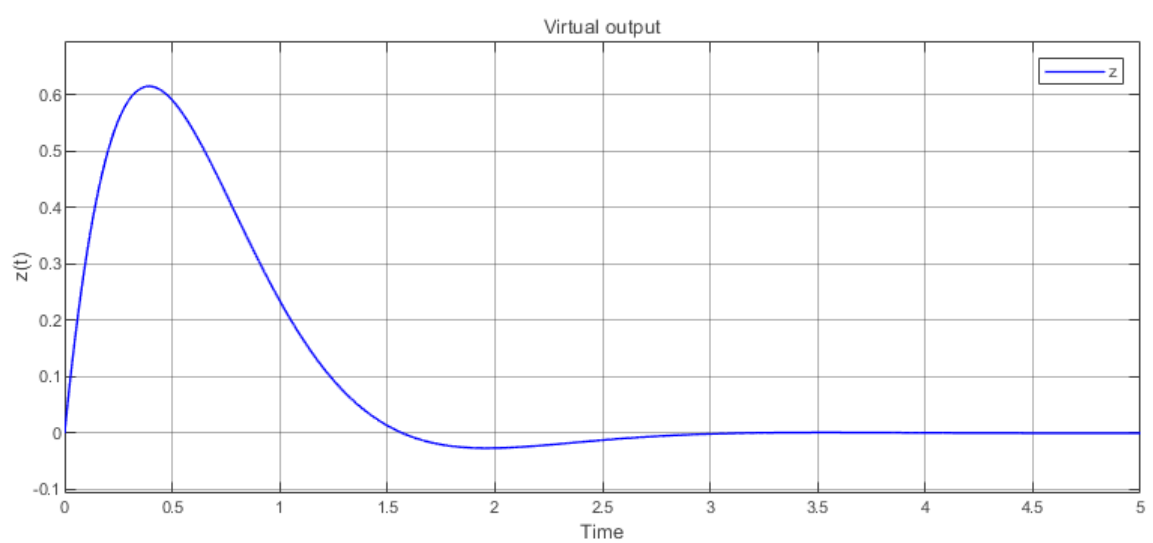


Рис. 56: График виртуального выхода $z(t)$

Условие $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ выполнено. Регулятор смог свести выходной сигнал $y(t)$ к приближенному $\bar{g}(t)$. Достоинства метода: относительно недорогой и простой метод. Недостатки: аппроксимация зависит от количества взятых гармоник и может быть недостаточно близкой к исходному сигналу.

Вывод

В данном задании был рассмотрен объект «тележка». Была построена математическая модель объекта, были сформированы задающий сигнал и его аппроксимация. В соответствии с условиями был задан виртуальный выход. Был синтезирован следящий регулятор. Результаты компьютерного моделирования подтвердили корректность расчетов и рассуждений.

Общий вывод по работе

В ходе выполнения работы были рассмотрены различные виды регуляторов, такие как компенсирующий и следящий регуляторы по состоянию, а также одновременно компенсирующий и следящий регулятор по выходу. Был промоделирован объект «тележка». В каждом случае были синтезированы соответствующие регуляторы. Для каждого случая было проведено компьютерное моделирование, подтверждающее корректность синтеза регуляторов и корректность проведенных рассуждений.

Приложение А

```
% plant parameters
A = [5 2 7;
     2 1 2;
     -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];
Bf = [-4 0 0 -1;
      0 0 0 0;
      4 0 0 0];

G = [25 6 -20 11;
     14 3 -10 4;
     40 11 -31 17;
     6 4 -4 3];

Cz = [-2 1 -1];
D = 0;

% G eigenvalues
G_eig = eig(G)

% A eigenvalues
A_eig = eig(A)

% Jordan matrix
[P1, J] = jordan(A);
Pjre(:,1) = P1(:,1);
Pjre(:,2) = imag(P1(:,2));
Pjre(:,3) = real(P1(:,3))
Pjre_inv = Pjre^-1
```

```

Aj_re = Pjre_inv * A * Pjre
B_jre = Pjre_inv * B

% solving Riccati
Q = 0;
v = 2;
R = 1;
a = 2;

Aa = A + eye(3) * a;
[Pk,K,e]=icare(Aa,sqrt(2)*B,Q,R);
K1=-inv(R)*B'*Pk
eK1=eig(A+B*K1)

% K2 regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P(3,4)
variable Y(1,4)
P*G-A*P == B*Y+Bf;
Cz*P + D == 0;
cvx_end

K2 = Y-K1*P

```

Листинг 1: Программа для задания 1

Приложение Б

```

% plant parameters
A = [5 2 7;
      2 1 2;
      -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];
Bg = 0;

G = [25 6 -20 11;
      14 3 -10 4;
      40 11 -31 17;
      6 4 -4 3];

Cz = [-2 1 -1];
Dz = [-20 -6 16 -9];

% solving Riccati
Q = 0;
v = 2;
R = 1;
a = 2;

Aa = A + eye(3) * a;
[Pk,K,e]=icare(Aa,sqrt(2)*B,Q,R);
K1=-inv(R)*B'*Pk
eK1=eig(A+B*K1)

% K2 regulator synthesis
cvx_begin sdp

```

```

variable P(3,4)
variable Y(1,4)
P*G-A*P == B*Y+Bg;
Cz*P + Dz == 0;
cvx_end

K2 = Y-K1*P

```

Листинг 2: Программа для задания 2

Приложение В

```

% plant parameters
A = [5 2 7;
     2 1 2;
     -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];
Bf = [-4 0 0 -1;
      0 0 0 0;
      4 0 0 0];

G = [25 6 -20 11;
     14 3 -10 4;
     40 11 -31 17;
     6 4 -4 3];

Cz = [-2 1 -1];
Dz = [-20 -6 16 -9];

C = [2 0 3];
D = [8 2 -6 4];

% matrices
bigC = [C Dz];
bigA = [A Bf;
        zeros(4,3) G];

% eig bigA
eig_bigA = eig(bigA)

% re jordan
[P, J] = jordan(bigA);
P_re(:,1) = P(:,1);
P_re(:,2) = imag(P(:,2));
P_re(:,3) = real(P(:,3));
P_re(:,4) = imag(P(:,4));
P_re(:,5) = real(P(:,5));
P_re(:,6) = imag(P(:,6));
P_re(:,7) = real(P(:,7))
Pre_inv = P_re^-1
bigA_J_re = Pre_inv * bigA * P_re
C_J_re = bigC * P_re

% solving Riccati
Q = 0;
v = 2;

```

```

R = 1;
a = 2;

Aa = A + eye(3) * a;
[Pk,K,e]=icare(Aa,sqrt(2)*B,Q,R);
K1=-inv(R)*B'*Pk
eK1=eig(A+B*K1)

% find L: solving LMI with control constraint
al = 1;
xw0=[0;0;0;1;1;1;1];
xw0_est=[0;0;0;0;0;0;0];
xwe0=xw0-xw0_est;

cvx_begin sdp
variable Q(7,7)
variable Y(7,1)
variable mumu
minimize mumu
Q>0.0001*eye(7);
bigA'*Q + Q*bigA+ 2*al*Q + bigC'*Y' + Y*bigC <= 0;
[Q xwe0;
 xwe0' 1]>0;
[Q Y;
 Y' mumu]>0;
cvx_end
mu = sqrt(mumu)
bigL=inv(Q)*Y
e_bigL=eig(bigA+bigL*bigC)

% K2_CD regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P1(3,4)
variable Y1(1,4)
P1*G-A*P1 == B*Y1+Bf;
C*P1 + D == 0;
cvx_end

K2_CD = Y1-K1*P1

% K2_CzDz regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P2(3,4)
variable Y2(1,4)
P2*G-A*P2 == B*Y2+Bf;
Cz*P2 + Dz == 0;
cvx_end

K2_CzDz = Y2-K1*P2

L1 = [bigL(1); bigL(2); bigL(3)]
L2 = [bigL(4); bigL(5); bigL(6); bigL(7)]

% the principle of the internal model
eig_G = eig(G)
bar_A_CD = [A+B*K1+L1*C B*K2_CD+Bf+L1*D;
            L2*C G+L2*D]
bar_A_CzDz = [A+B*K1+L1*C B*K2_CzDz+Bf+L1*D;

```

```

                                L2*C G+L2*D]
eig_bar_A_CD = eig(bar_A_CD)
eig_bar_A_CzDz = eig(bar_A_CzDz)

```

Листинг 3: Программа для задания 3

Приложение Г

```

% plant parameters
A= [0 1; 0 0];
B=[0;1];
C=[1 0];
G = [0 1 0 0 0 0;
     -1 0 0 0 0 0;
       0 0 0 3 0 0;
       0 0 -3 0 0 0;
       0 0 0 0 0 5;
       0 0 0 0 -5 0];
Cz = [-1 0];
Dz = [1 0 1 0 1 0];
Bg = 0;

[P1, J] = jordan(A)

% K1 regulator synthesis
Q = 0;
v = 2;
R = 1;
a = 2;

Aa = A + eye(2) * a;
[Pk,K,e]=icare(Aa,sqrt(2)*B,Q,R);
K1=-inv(R)*B'*Pk
eK1=eig(A+B*K1)

% K2
cvx_begin sdp
variable P(2,6)
variable Y(1,6)
P*G-A*P == B*Y+Bg;
Cz*P + Dz == 0;
cvx_end

K2 = Y-K1*P

```

Листинг 4: Программа для задания 4