

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №Е
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «УПРАВЛЕНИЕ МНОГОКАНАЛЬНОЙ
СИСТЕМОЙ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Задание 1. Исследование свойств многоканальной системы	2
1.1	Собственные числа матрицы системы	2
1.2	Передаточная матрица многоканальной системы, ее нули и полюса . .	2
1.3	Структурные свойства многоканальной системы	2
1.4	Временные характеристики системы	3
1.5	Графическое представление временных характеристик	5
1.6	Частотные характеристики системы	6
1.7	Графическое представление частотных характеристик	8
2	Задание 2. Синтез следящего управления в условиях внешних воз-	10
	мущений для многоканальной системы	
2.1	Структурные свойства многоканальной системы	11
2.2	Передаточные матрицы многоканальной системы	11
2.3	Матрицы и начальные условия генератора внешнего воздействия . . .	12
2.4	Схема моделирования системы	12
2.5	Синтез компоненты обратной связи	13
2.6	Синтез компоненты прямой связи регулятора	14
2.7	Синтез матрицы коррекции наблюдателя	15
2.8	Компьютерное моделирование	15
3	Общий вывод по работе	23
4	Приложение А	23
5	Приложение Б	28

Задание 1. Исследование свойств многоканальной системы

Рассмотрим многоканальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = 0;$$

Программа для задания находится в приложении А на листинге 1.

Собственные числа матрицы системы

Определим собственные числа λ_i матрицы системы A

$$\sigma[A] = \{1, 1\}$$

Получили кратные неустойчивые собственные числа.

Передающая матрица многоканальной системы, ее нули и полюса

Определим передаточную матрицу многоканальной системы по формуле

$$W(s) = C[sI - A]^{-1}B + D$$

Получаем

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{-s-11}{s^2-2s+1} & \frac{7s-4}{s^2-2s+1} \\ \frac{9s-13}{s^2-2s+1} & \frac{1}{s^2-2s+1} \end{bmatrix}$$

Нули и полюса квадратной передаточной матрицы определяются из корней числителя и знаменателя определителя передаточной матрицы. Найдем определитель

$$\det[W(s)] = \frac{-63}{s^2 - 2s + 1}$$

Так как числитель не зависит от s , то нули n_i отсутствуют. Определим полюса λ_i

$$s^2 - 2s + 1 = 0, \quad (s - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

Полюса совпали с собственными числами матрицы A .

Структурные свойства многоканальной системы

Структурные свойства многоканальной системы определяются таким же образом, как и для одноканальной. Найдем ЖНФ матрицы A , переведем B, C в базис собственных векторов A

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_J = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix};$$

Также найдем матрицу управляемости по выходу и вычислим ее ранг

$$U_{out} = [CU \quad D], \quad U = [B \quad AB] \Rightarrow U_{out} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -13 & 10 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}[U_{out}] = 2;$$

Таким образом,

- Система полностью управляема по состоянию и стабилизируема
- Система полностью наблюдаема и обнаруживаема
- Система полностью управляема по выходу

Временные характеристики системы

Для аналитического определения весовых функций воспользуемся обратным преобразованием Лапласа

$$w_k(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W_{l,m}(s)\}$$

Нам пригодятся эти формулы

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-a)} \right\} = e^{at}, \quad (1)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \right\} = t^n e^{at}; \quad (2)$$

Выведем $w_1(t)$

$$w_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W_{1,1}(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-s-11}{s^2-2s+1} \right\}$$

Упростим передаточную функцию $W_{1,1}(s)$

$$W_{1,1}(s) = \frac{-s-11}{s^2-2s+1} = -\frac{s-1+12}{(s-1)^2} = -\frac{s-1}{(s-1)^2} - \frac{12}{(s-1)^2} = -1 \cdot \frac{1}{(s-1)} - 12 \cdot \frac{1}{(s-1)^2}$$

Воспользуемся выражениями (1), (2) и свойствами линейности преобразования Лапласа и вычислим $w_1(t)$

$$w_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -1 \cdot \frac{1}{(s-1)} - 12 \cdot \frac{1}{(s-1)^2} \right\} = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)} \right\} - 12\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} \right\},$$

$$w_1(t) = -e^t - 12te^t;$$

Найдем $w_2(t)$

$$w_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W_{1,2}\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{7s-4}{(s-1)^2} \right\}$$

Упростим передаточную функцию $W_{1,2}(s)$

$$W_{1,2}(s) = \frac{7s-4}{(s-1)^2} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-1)^2} = \frac{As-A+B}{(s-1)^2},$$

$$As-A+B=7s-4 \Rightarrow \begin{cases} A=7, \\ -A+B=-4, \end{cases} \Rightarrow B=-4+A=-4+7=3,$$

$$W_{1,2}(s) = \frac{7}{(s-1)} + \frac{3}{(s-1)^2} = 7 \cdot \frac{1}{(s-1)} + 3 \cdot \frac{1}{(s-1)^2}$$

Таким образом, аналогично решению с $w_1(t)$, получаем $w_2(t)$

$$w_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ 7 \cdot \frac{1}{(s-1)} + 3 \cdot \frac{1}{(s-1)^2} \right\} = 7e^t + 3te^t$$

Определим $w_3(t)$

$$w_3(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W_{2,1}(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{9s-13}{(s-1)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ 9 \cdot \frac{1}{(s-1)} - 4 \cdot \frac{1}{(s-1)^2} \right\} = 9e^t - 4te^t$$

Выведем $w_4(t)$

$$w_4(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W_{2,2}(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} \right\} = te^t$$

Итого имеем

$$\begin{aligned}w_1(t) &= -e^t - 12te^t, \\w_2(t) &= 7e^t + 3te^t, \\w_3(t) &= 9e^t - 4te^t, \\w_4(t) &= te^t;\end{aligned}$$

Перейдем к переходным функциям. Весовая функция является производной от переходной функции (отличие образа Лапласа в s раз). Значит для поиска переходных функций нужно брать интегралы

$$h_k(t) = \int_0^t w_k(\tau) d\tau$$

Нам понадобится формула интегрирования по частям

$$u = u(x), \quad v = v(x) : \int u dv = uv - \int v du;$$

Вычислим $h_1(t)$

$$h_1(t) = \int_0^t w_1(\tau) d\tau = \int_0^t (-e^\tau - 12\tau e^\tau) d\tau = - \int_0^t e^\tau d\tau - 12 \int_0^t \tau e^\tau d\tau,$$

$$\int_0^t e^\tau d\tau = e^\tau \Big|_0^t = e^t - 1,$$

$$\int_0^t \tau e^\tau d\tau = \left[\begin{array}{ll} u = \tau & v = e^\tau \\ du = d\tau & dv = e^\tau d\tau \end{array} \right] = \tau e^\tau \Big|_0^t - \int_0^t e^\tau d\tau = te^t - e^t + 1,$$

$$h_1(t) = - (e^t - 1) - 12 (te^t - e^t + 1) = -12te^t + 11e^t - 11;$$

Найдем $h_2(t)$

$$h_2(t) = \int_0^t w_2(\tau) d\tau = \int_0^t (7e^\tau + 3\tau e^\tau) d\tau = 7 \int_0^t e^\tau d\tau + 3 \int_0^t \tau e^\tau d\tau$$

Видим вычисленные ранее интегралы. Подставим и получим

$$h_2(t) = 7 (e^t - 1) + 3 (te^t - e^t + 1) = 3te^t + 4e^t - 4$$

Вычислим $h_3(t)$

$$h_3(t) = \int_0^t w_3(\tau) d\tau = \int_0^t (9e^\tau - 4\tau e^\tau) d\tau = 9 \int_0^t e^\tau d\tau - 4 \int_0^t \tau e^\tau d\tau$$

Аналогично $h_1(t), h_2(t)$

$$h_3(t) = 9(e^t - 1) - 4(te^t - e^t + 1) = -4te^t + 13e^t - 13$$

Найдем $h_4(t)$

$$h_4(t) = \int_0^t w_4(\tau) d\tau = \int_0^t \tau e^\tau d\tau = te^t - e^t + 1$$

Таким образом, имеем

$$h_1(t) = -12te^t + 11e^t - 11,$$

$$h_2(t) = 3te^t + 4e^t - 4,$$

$$h_3(t) = -4te^t + 13e^t - 13,$$

$$h_4(t) = te^t - e^t + 1;$$

Графическое представление временных характеристик

Построим графики $w_i(t), h_i(t)$ по рассчитанным ранее характеристикам. Весовые функции представлены на рис. 1, переходные на рис. 2

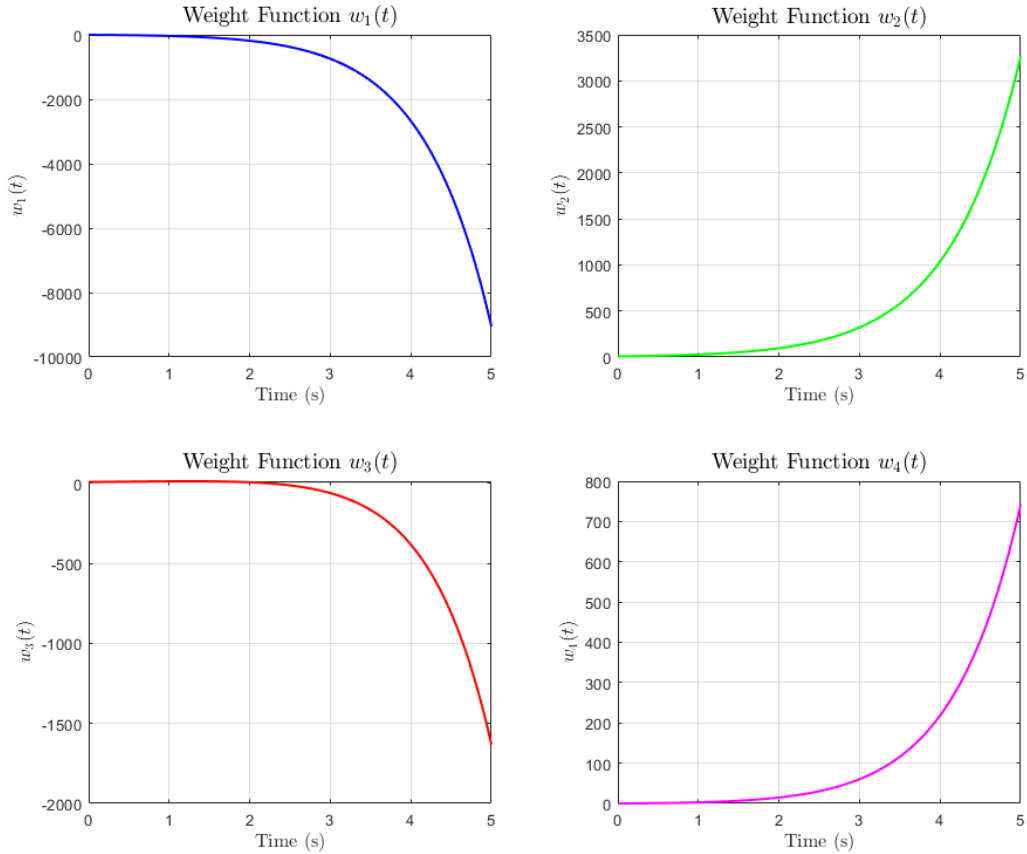


Рис. 1: Графики весовых функций $w_k(t)$

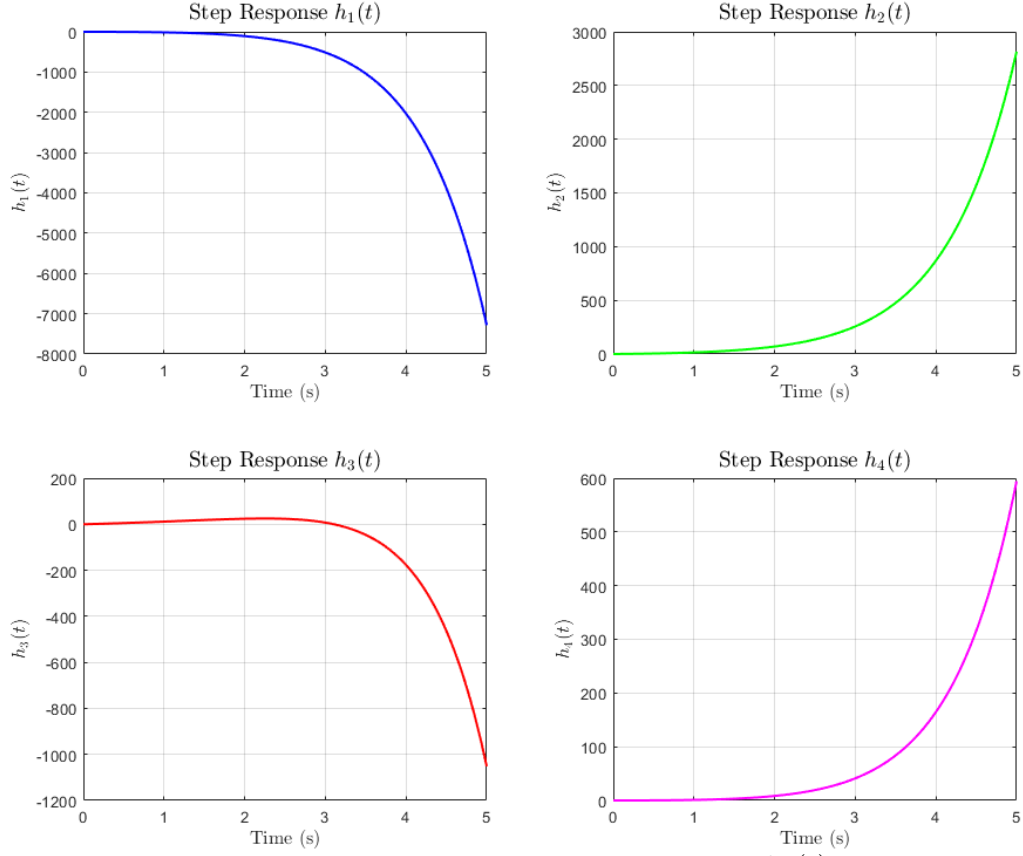


Рис. 2: Графики переходных функций $h_k(t)$

Частотные характеристики системы

Выведем аналитические выражения частотных характеристик системы, таких как АЧХ, ФЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ. АЧХ находим по формуле

$$A_k(\omega) = |W_{l,m}(i\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 \{W_{l,m}(i\omega)\} + \text{Im}^2 \{W_{l,m}(i\omega)\}}$$

Найдем $A_1(\omega)$

$$A_1(\omega) = |W_{1,1}(i\omega)| = \left| \frac{-i\omega - 11}{(i\omega - 1)^2} \right|,$$

Приведем $W_{1,1}(i\omega)$ к виду суммы реальной и мнимой частей. Домножим числитель и знаменатель на комплексно сопряженное к знаменателю число. Упростим выражение и выразим действительную и мнимую части. В конце вычислим $A_1(\omega)$

$$W_{1,1}(i\omega) = \frac{(-i\omega - 11)(i\omega + 1)^2}{(i\omega - 1)^2(i\omega + 1)^2} = \frac{13\omega^2 - 11 + (\omega^3 - 23\omega)i}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} = \frac{13\omega^2 - 11}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{\omega^3 - 23\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i,$$

$$A_1(\omega) = \sqrt{\left(\frac{13\omega^2 - 11}{(\omega^2 + 1)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega^3 - 23\omega}{(\omega^2 + 1)^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{\omega^6 + 123\omega^4 + 243\omega^2 + 121}}{(\omega^2 + 1)^2};$$

Вычислим оставшиеся $A_k(\omega)$ аналогично. Сначала приведем $W_{l,m}(i\omega)$ к нужному виду

$$W_{1,2}(i\omega) = \frac{(7i\omega - 4)(i\omega + 1)^2}{(i\omega - 1)^2(i\omega + 1)^2} = \frac{18\omega^2 - 4}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{-7\omega^3 + 15\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i,$$

$$W_{2,1}(i\omega) = \frac{(9i\omega - 13)(i\omega + 1)^2}{(i\omega - 1)^2(i\omega + 1)^2} = \frac{31\omega^2 - 13}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{-9\omega^3 + 35\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i,$$

$$W_{2,2}(i\omega) = \frac{(i\omega + 1)^2}{(i\omega - 1)^2(i\omega + 1)^2} = \frac{-\omega^2 + 1}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{2\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i;$$

Запишем оставшиеся $A_k(\omega)$

$$A_2(\omega) = |W_{1,2}(i\omega)| = \left| \frac{18\omega^2 - 4}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{-7\omega^3 + 15\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i \right|,$$

$$A_3(\omega) = |W_{2,1}(i\omega)| = \left| \frac{31\omega^2 - 13}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{-9\omega^3 + 35\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i \right|,$$

$$A_4(\omega) = |W_{2,2}(i\omega)| = \left| \frac{-\omega^2 + 1}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{2\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i \right|;$$

Вычислим АЧХ

$$A_2(\omega) = \frac{\sqrt{(18\omega^2 - 4)^2 + (-7\omega^3 + 15\omega)^2}}{(\omega^2 + 1)^2} = \frac{\sqrt{49\omega^6 + 114\omega^4 + 81\omega^2 + 16}}{(\omega^2 + 1)^2},$$

$$A_3(\omega) = \frac{\sqrt{(31\omega^2 - 13)^2 + (-9\omega^3 + 35\omega)^2}}{(\omega^2 + 1)^2} = \frac{\sqrt{81\omega^6 + 331\omega^4 + 419\omega^2 + 169}}{(\omega^2 + 1)^2},$$

$$A_4(\omega) = \frac{\sqrt{(-\omega^2 + 1)^2 + (2\omega)^2}}{(\omega^2 + 1)^2} = \frac{\omega^2 + 1}{(\omega^2 + 1)^2} = \frac{1}{\omega^2 + 1};$$

ЛАЧХ ищется по формуле

$$L_k(\omega) = 20 \log_{10} (A_k(\omega))$$

Запишем все $L_k(\omega)$

$$L_1(\omega) = 20 \log_{10} (A_1(\omega)) = 20 \log_{10} \left(\frac{\sqrt{\omega^6 + 123\omega^4 + 243\omega^2 + 121}}{(\omega^2 + 1)^2} \right),$$

$$L_2(\omega) = 20 \log_{10} (A_2(\omega)) = 20 \log_{10} \left(\frac{\sqrt{49\omega^6 + 114\omega^4 + 81\omega^2 + 16}}{(\omega^2 + 1)^2} \right),$$

$$L_3(\omega) = 20 \log_{10} (A_3(\omega)) = 20 \log_{10} \left(\frac{\sqrt{81\omega^6 + 331\omega^4 + 419\omega^2 + 169}}{(\omega^2 + 1)^2} \right),$$

$$L_4(\omega) = 20 \log_{10} (A_4(\omega)) = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{\omega^2 + 1} \right);$$

Таким образом, пользуясь свойствами логарифмов

$$L_1(\omega) = 10 \log_{10} (\omega^6 + 123\omega^4 + 243\omega^2 + 121) - 40 \log_{10} (\omega^2 + 1),$$

$$L_2(\omega) = 10 \log_{10} (49\omega^6 + 114\omega^4 + 81\omega^2 + 16) - 40 \log_{10} (\omega^2 + 1),$$

$$L_3(\omega) = 10 \log_{10} (81\omega^6 + 331\omega^4 + 419\omega^2 + 169) - 40 \log_{10} (\omega^2 + 1),$$

$$L_4(\omega) = -20 \log_{10} (\omega^2 + 1);$$

ФЧХ ищется по формуле

$$\varphi_k(\omega) = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} \{W_{l,m}(i\omega)\}}{\operatorname{Re} \{W_{l,m}(i\omega)\}} \right)$$

У всех $W_{l,m}(i\omega)$ одинаковые знаменатели у действительных и мнимых частей. При делении мнимой части на действительную знаменатели будут сокращаться. Останутся только отношения числителей. Таким образом, запишем φ_k

$$\begin{aligned} \varphi_1(\omega) &= \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}_{\text{ч}} \{W_{1,1}(i\omega)\}}{\operatorname{Re}_{\text{ч}} \{W_{1,1}(i\omega)\}} \right) = \arctan \left(\frac{\omega^3 - 23\omega}{13\omega^2 - 11} \right), \\ \varphi_1(\omega) &= \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}_{\text{ч}} \{W_{1,2}(i\omega)\}}{\operatorname{Re}_{\text{ч}} \{W_{1,2}(i\omega)\}} \right) = \arctan \left(\frac{-7\omega^3 + 15\omega}{18\omega^2 - 4} \right), \\ \varphi_1(\omega) &= \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}_{\text{ч}} \{W_{2,1}(i\omega)\}}{\operatorname{Re}_{\text{ч}} \{W_{2,1}(i\omega)\}} \right) = \arctan \left(\frac{-9\omega^3 + 35\omega}{31\omega^2 - 13} \right), \\ \varphi_1(\omega) &= \arctan \left(\frac{\operatorname{Im}_{\text{ч}} \{W_{2,2}(i\omega)\}}{\operatorname{Re}_{\text{ч}} \{W_{2,2}(i\omega)\}} \right) = \arctan \left(\frac{2\omega}{-\omega^2 + 1} \right); \end{aligned}$$

ЛФЧХ имеют такие же аналитические выражения, как и ФЧХ, только вместо частот ω используется логарифмическая шкала $\log_{10}(\omega)$.

Графическое представление частотных характеристик

Построим графики по рассчитанным ранее характеристикам

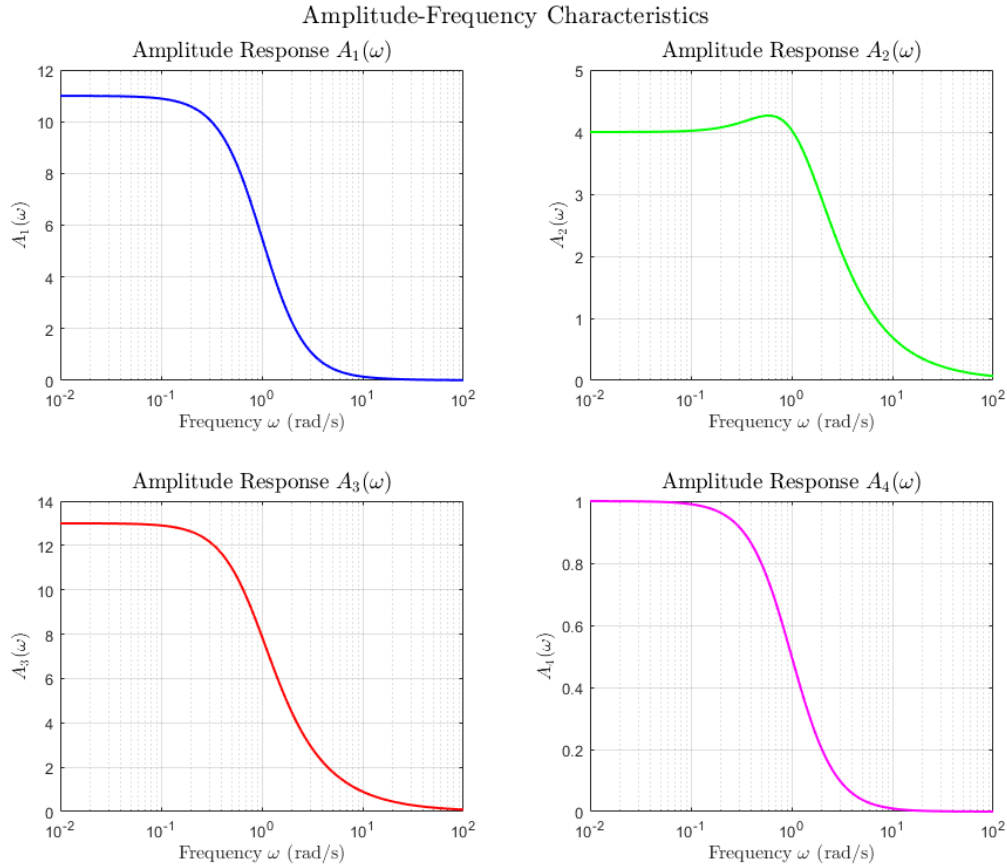


Рис. 3: Графики АЧХ $A_k(\omega)$

Logarithmic Amplitude-Frequency Characteristics

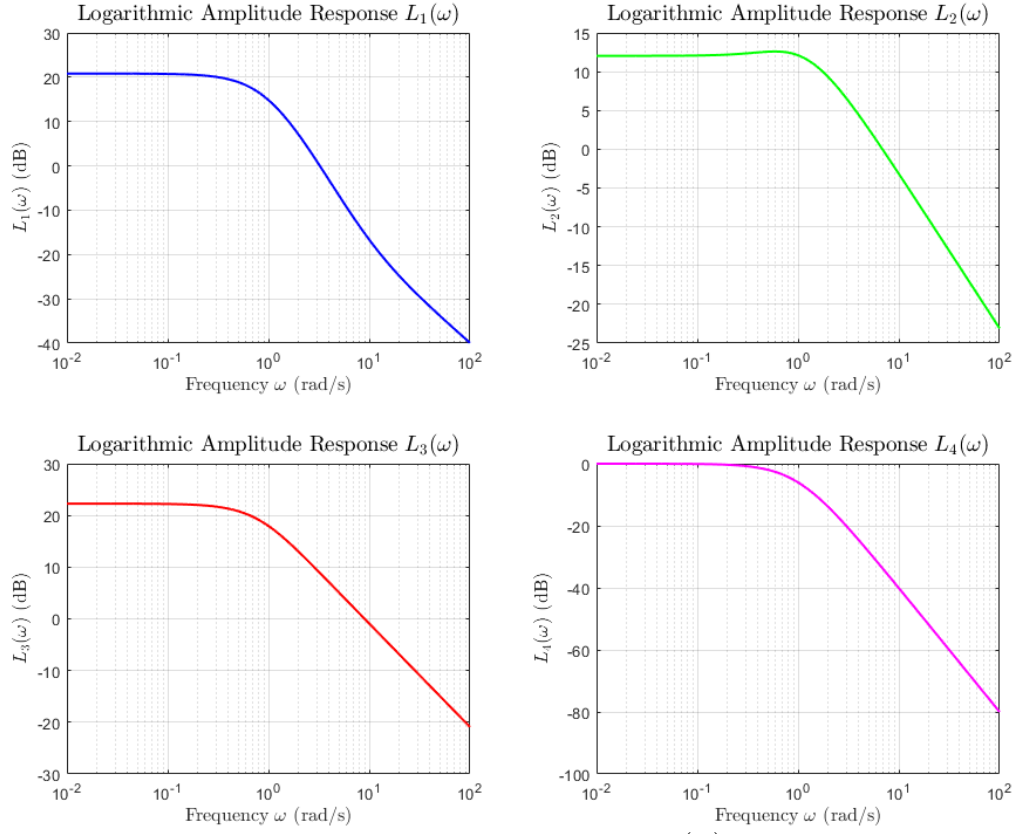


Рис. 4: Графики ЛАЧХ $L_k(\omega)$

Phase-Frequency Characteristics

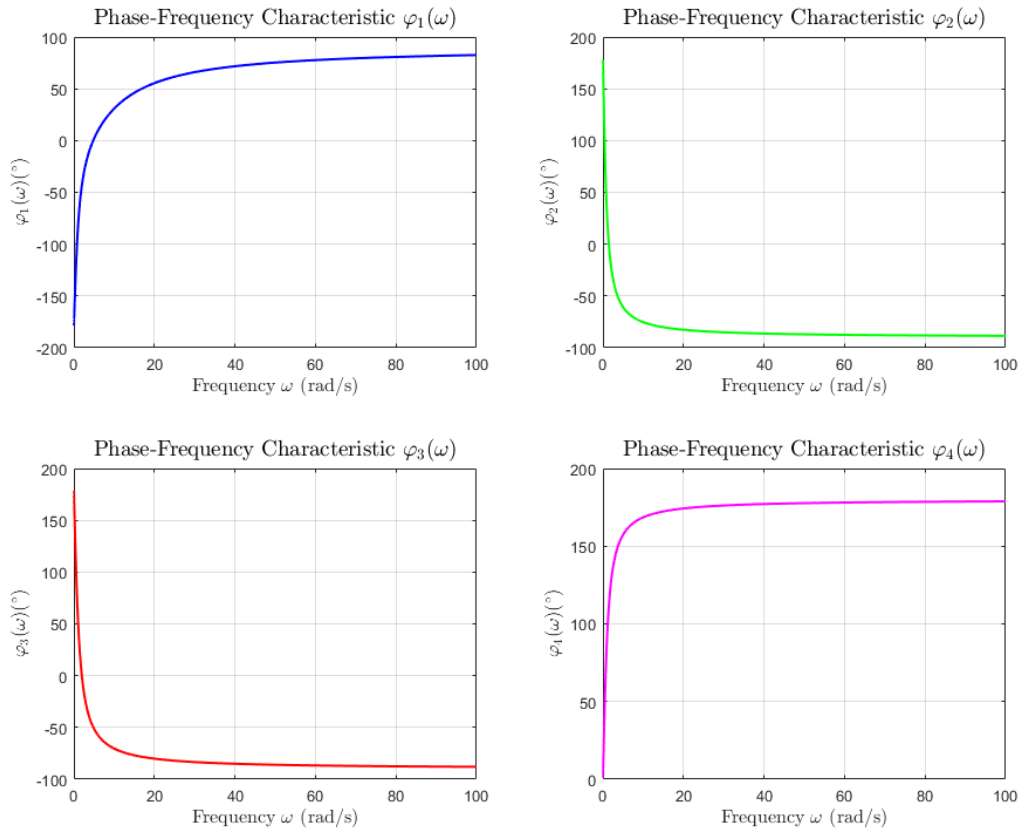
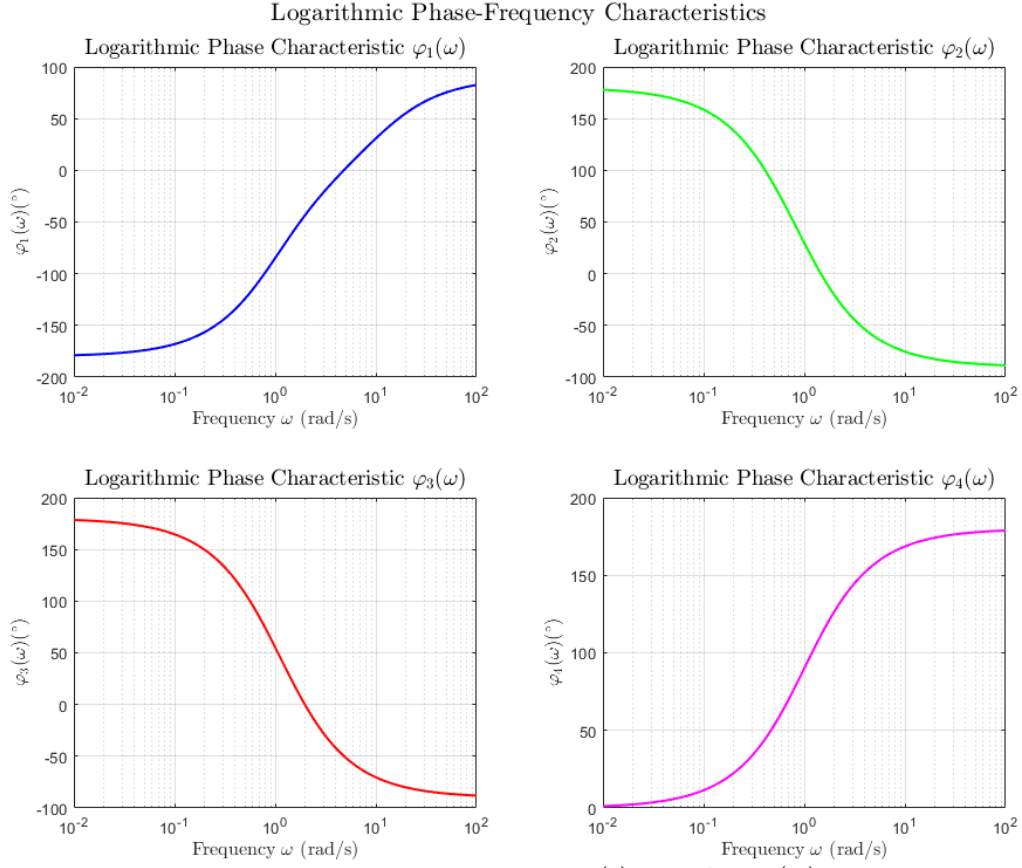


Рис. 5: Графики ФЧХ $\varphi_k(t)$



Результаты похожи на апериодические звенья 2-го порядка.

Задание 2. Синтез следящего управления в условиях внешних возмущений для многоканальной системы

Рассмотрим многоканальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f_1, \\ z = C_z x + D_z u - g, \\ y = Cx + Du + D_f f_2, \end{cases} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

при

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_f &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ f_1(t) &= \begin{bmatrix} 9 \sin(3t) \\ 3 \cos(2t) \end{bmatrix}, \quad f_2(t) = \begin{bmatrix} 6 \cos(2t) \\ 8 \sin(3t) \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} 3 \cos(4t) \\ 6 \sin(4t) \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

К измерению доступны только величины $y(t), g(t)$. Программа находится в приложении Б на листинге 2.

Структурные свойства многоканальной системы

В первом задании уже находили ЖНФ матрицы A и соответствующие ей B_J, C_{J_y}

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_{J_y} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix};$$

Найдем C_{J_z}

$$A = PJP^{-1}, \quad C_{J_z} = C_z \cdot P \Rightarrow C_{J_z} = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Найдем U_{out_y}, U_{out_z}

$$U = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix},$$

$$U_{out_y} = \begin{bmatrix} CU & D \end{bmatrix}, \quad U_{out_y} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -13 & 10 & -2 & 0 \\ 9 & 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}[U_{out_y}] = 2,$$

$$U_{out_z} = \begin{bmatrix} C_z U & D_z \end{bmatrix}, \quad U_{out_z} = \begin{bmatrix} -2 & 14 & -26 & 20 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}[U_{out_z}] = 2;$$

Таким образом,

- Система полностью управляема по состоянию и стабилизируема,
- Система полностью управляема по выходу $y(t)$,
- Система полностью управляема по виртуальному (регулируемому) выходу $z(t)$,
- Система полностью наблюдаема и обнаруживаема относительно выхода $y(t)$,
- Система полностью наблюдаема и обнаруживаема относительно виртуального (регулируемого) выхода $z(t)$;

Передаточные матрицы многоканальной системы

Составим передаточную матрицу многоканальной системы от управляющих воздействий $u(t)$ к выходу $y(t)$

$$W_y(s) = C[sI - A]^{-1}B + D,$$

$$W_y(s) = \begin{bmatrix} \frac{-2s^2 + 3s - 13}{s^2 - 2s + 1} & \frac{7s - 4}{s^2 - 2s + 1} \\ \frac{9s - 13}{s^2 - 2s + 1} & \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 - 2s + 1} \end{bmatrix};$$

Проверим на вырожденность

$$\det[W_y(s)] = \frac{-2s^2 + 3s - 78}{s^2 - 2s + 1} \neq 0$$

Матрица $W_y(s)$ невырожденная. Составим аналогично $W_z(s)$ к выходу $z(t)$

$$W_z(s) = C_z[sI - A]^{-1}B + D_z,$$

$$W_z(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s^2 - 6s - 20}{s^2 - 2s + 1} & \frac{14s - 8}{s^2 - 2s + 1} \\ \frac{-4}{s - 1} & \frac{s}{s - 1} \end{bmatrix};$$

Проверим на вырожденность

$$\det[W_z(s)] = \frac{2s^2 - 4s + 32}{s^2 - 2s + 1} \neq 0$$

Матрица $W_z(s)$ невырожденная.

Матрицы и начальные условия генератора внешнего воздействия

Генератор внешнего воздействия имеет вид

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma_w w, \\ g = Y_g w, \\ f_1 = Y_1 w, \\ f_2 = Y_2 w, \end{cases} \quad w(0);$$

Определим матрицы Γ_w, Y_g, Y_1, Y_2 и начальные условия генератора внешнего воздействия $w(0)$. Возмущения f_i, g содержат гармоники с частотами $\omega_1 = 2, \omega_2 = 3, \omega_3 = 4$. Вспомним модель осциллятора и запишем «большую» Γ_w , состоящую из «маленьких» Γ_{w_i}

$$\Gamma_{w_i} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma_w = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Таким образом, получится вектор возмущений с начальными условиями при $t = 0$

$$w(t) = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ \cos(3t) \\ \sin(3t) \\ \cos(4t) \\ \sin(4t) \end{bmatrix}, \quad w(t=0) = \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \\ \cos(0) \\ \sin(0) \\ \cos(0) \\ \sin(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Осталось матрицами задать амплитуду и гармоники для каждого возмущения. Выходов два, координат у $w(t)$ шесть – матрицы Y_i будут размера 2×6 . Зададим эти матрицы

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix};$$

Схема моделирования системы

Построим схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из необходимых для решения данной задачи управления наблюдателей и закона управления

$$u = K\hat{x} + K_w\hat{w} = \begin{bmatrix} K_w & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \bar{K}\hat{x}_f,$$

обеспечивающим выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

Строим графики $u(t), f_i(t), g(t), (x(t), \hat{x}(t)), e_x(t), (w(t), \hat{w}(t)), e_w(t), y(t), z(t)$. Схема расположена на рисунке [7](#)

Подберем Y такой, чтобы пара (Y, Γ) была наблюдаема. Проверим, вычислив ранг матрицы наблюдаемости

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank} \begin{bmatrix} Y \\ Y\Gamma \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2.5 & 1 \\ -1 & -2.5 \end{bmatrix} = 2;$$

Пара (Y, Γ) наблюдаема. Пара (A, B) управляема (выяснили ранее через ЖНФ) и $\sigma(A) \cap \sigma(\Gamma) = \emptyset$. Следовательно, существует единственное невырожденное решение уравнения Сильвестра

$$AP - P\Gamma = BY, \quad K = -YP^{-1};$$

Вычислим P , после чего найдем матрицу регулятора. Также проверим спектр замкнутой системы. Получаем

$$K = \begin{bmatrix} -0.8523 & 0.9009 \\ -0.9312 & -0.5275 \end{bmatrix}, \quad \sigma(A + BK) = \{-2.5 \pm i\};$$

Регулятор синтезирован корректно.

Синтез компоненты прямой связи регулятора

Составим систему матричных уравнений Франкиса-Дэвисона для синтеза компоненты K_w регулятора

$$\begin{cases} P\Gamma_w - (A + BK)P - B_f Y_1 = BK_w, \\ (C_z + D_z K)P + D_z K_w = Y_g; \end{cases}$$

В общем виде уравнения имеют вид

$$\begin{cases} AP + BK + Y_1 = P\Gamma, \\ CP + DK + Y_2 = 0; \end{cases}$$

Решение относительно P и K для произвольных Y_1 и Y_2 есть, если

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - I\lambda_{i\Gamma} & B \\ C & D \end{bmatrix} = \text{число строк}$$

и

- Множество нулей системы $W(s)$ не пересекается со спектром Γ ,
- Система $W(s)$ полностью управляема по выходу,
- Количество входов равно или больше количества выходов системы,
- Если количество входов равно количеству выходов, то система $W(s)$ должна быть невырожденной;

Ранее мы выяснили, что система полностью управляема по выходу $y(t)$ и $z(t)$; количество входов и выходов равно 2; $W_y(s), W_z(s)$ являются невырожденными. Проверим множества нулей $W_k(s)$

$$W_y(s) : n_{1,2} = 0.7500 \pm 6.1998i,$$

$$W_z(s) : n_{1,2} = 1 \pm 3.8730i;$$

Не пересекаются со спектром Γ . Осталось проверить ранги матриц

$$\text{rank} \begin{bmatrix} (A + BK) - I\lambda_{i\Gamma} & B \\ (C_z + D_zK) & D_z \end{bmatrix} = \text{число строк}$$

Проверим

$$\text{rank} \begin{bmatrix} (A + BK) - I(-2.5 \pm i) & B \\ (C_z + D_zK) & D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2147 \mp i & 0.8459 & 1 & 2 \\ -1.2367 & 0.2147 \mp i & -3 & 3 \\ 2.2954 & 3.8018 & 2 & 0 \\ -1.9312 & 0.4725 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4;$$

Все условия выполнены – можно синтезировать K_w . Используя MATLAB и `cvx`, получаем

$$K_w = \begin{bmatrix} -3.0612 & -5.0195 & 7.9863 & -12.7069 & 12.2869 & 20.2823 \\ -6.4128 & -0.9151 & -2.9433 & -7.3826 & 17.6422 & -0.5952 \end{bmatrix}$$

Синтез матрицы коррекции наблюдателя

Синтезируем необходимый для выполнения целевого условия наблюдатель. Составим расширенную систему

$$\begin{cases} \dot{x}_f = \bar{A}x_f + \bar{B}u, \\ y_f = y - g = \bar{C}x_f + Du, \end{cases} \quad x_f = \begin{bmatrix} w \\ x \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma_w & 0_{6 \times 2} \\ B_f Y_1 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 2} \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [D_f Y_2 - Y_g \quad C];$$

Тогда наблюдатель будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_f = \bar{A}\hat{x}_f + (\bar{B} + \bar{L}D)u + \bar{L}(\bar{C}\hat{x}_f - y_f), \\ \hat{y}_f = \bar{C}\hat{x}_f + Du, \end{cases} \quad \hat{x}_f = \begin{bmatrix} \hat{w} \\ \hat{x} \end{bmatrix},$$

Для нахождения \bar{L} воспользуемся матричным уравнением типа Риккати

$$\bar{A}P + P\bar{A}^T + Q - \nu P\bar{C}^T R^{-1} \bar{C}P = 0, \quad \bar{L} = -P\bar{C}^T R^{-1};$$

при $\nu = 1, Q = I_{8 \times 8}, R = I_{2 \times 2}$. Получаем

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} -1.3123 & -0.3266 & 0.4381 & 0.3777 & -0.4550 & 1.2212 & -0.3758 & -6.2985 \\ -0.3869 & -0.1466 & -0.5637 & -1.1609 & -0.5493 & -0.0019 & -3.2880 & 8.3707 \end{bmatrix}^T$$

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование замкнутой системы с нулевыми начальными условиями наблюдателей. Результаты расположены на рис. 8–29

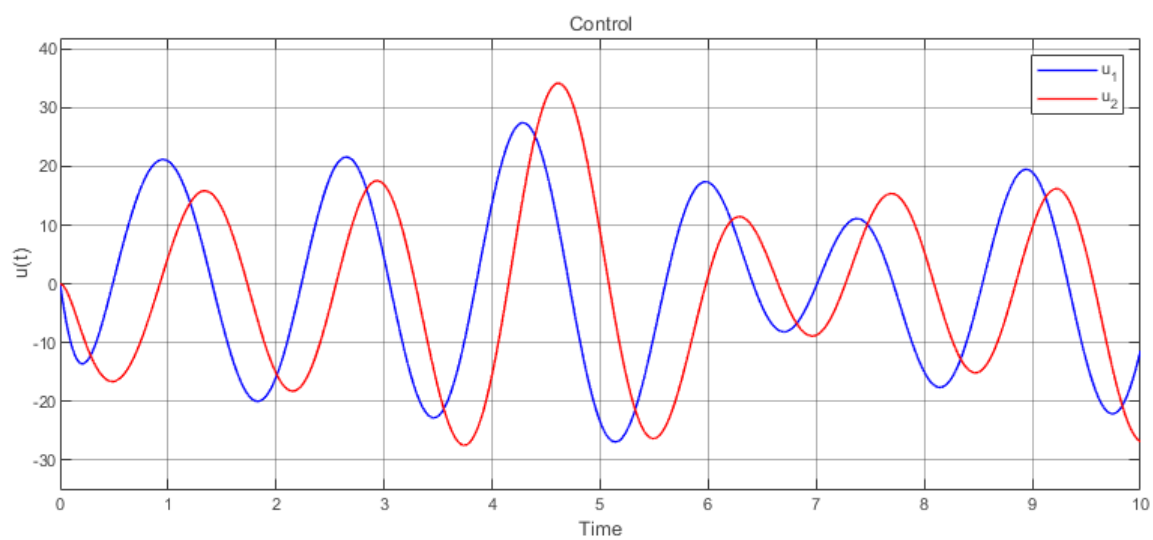


Рис. 8: График управления $u(t)$

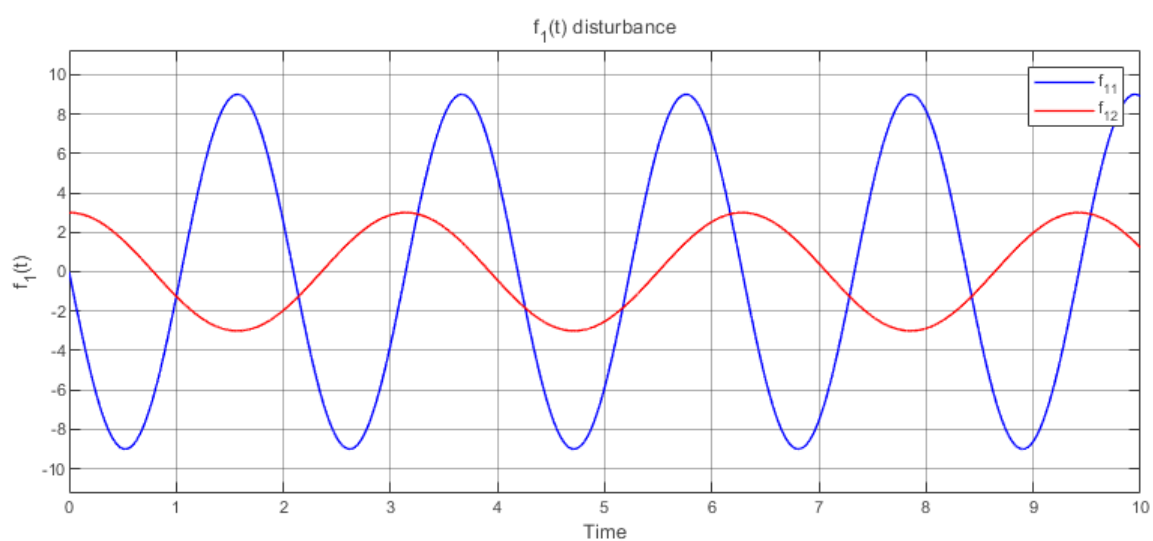


Рис. 9: График возмущений $f_1(t)$

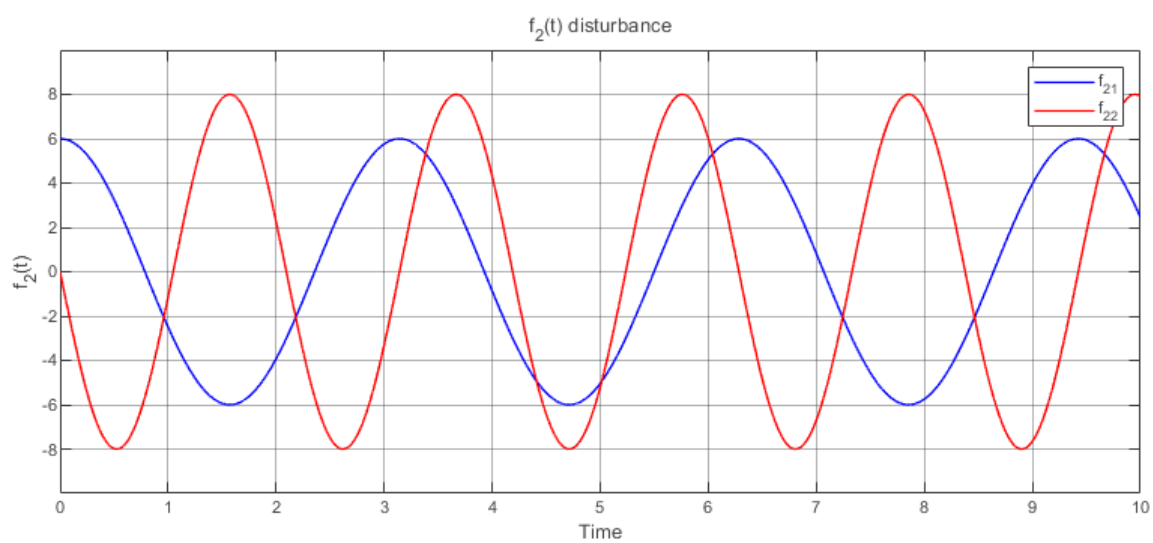


Рис. 10: График возмущений $f_2(t)$

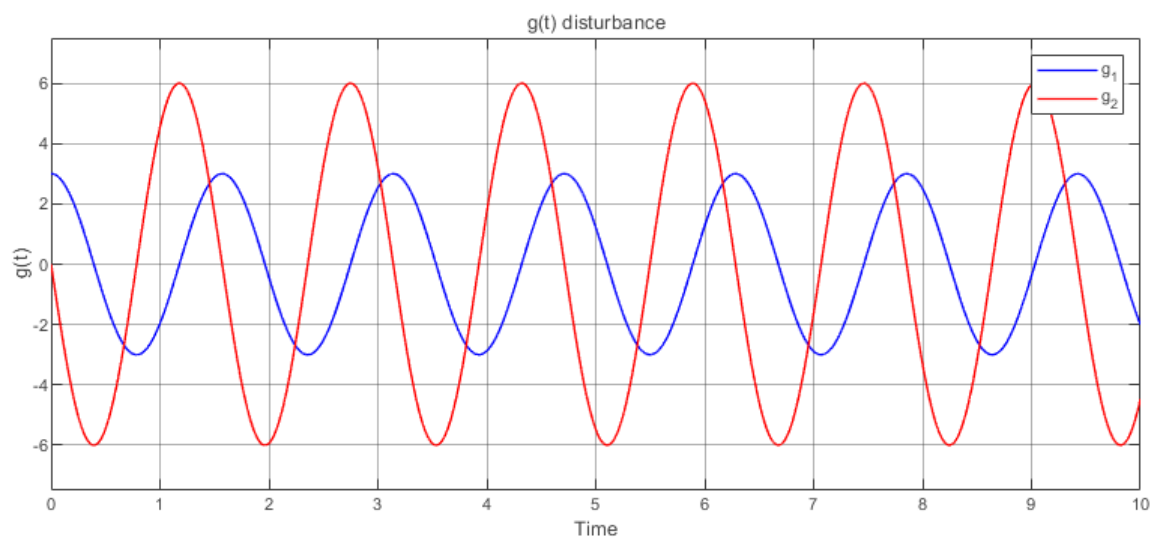


Рис. 11: График возмущений $g(t)$

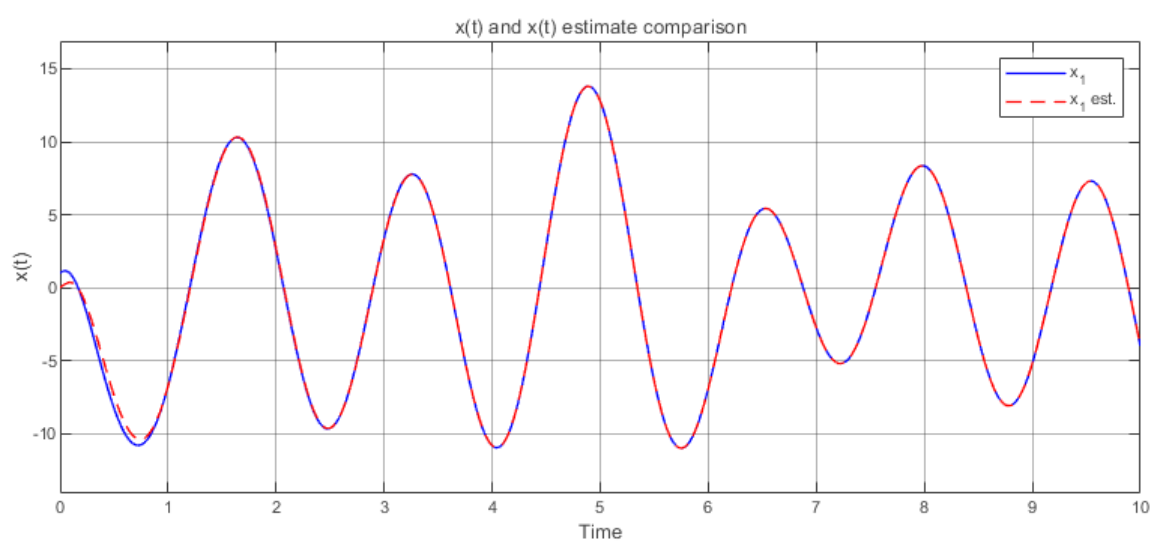


Рис. 12: График $(x_1(t), \hat{x}_1(t))$

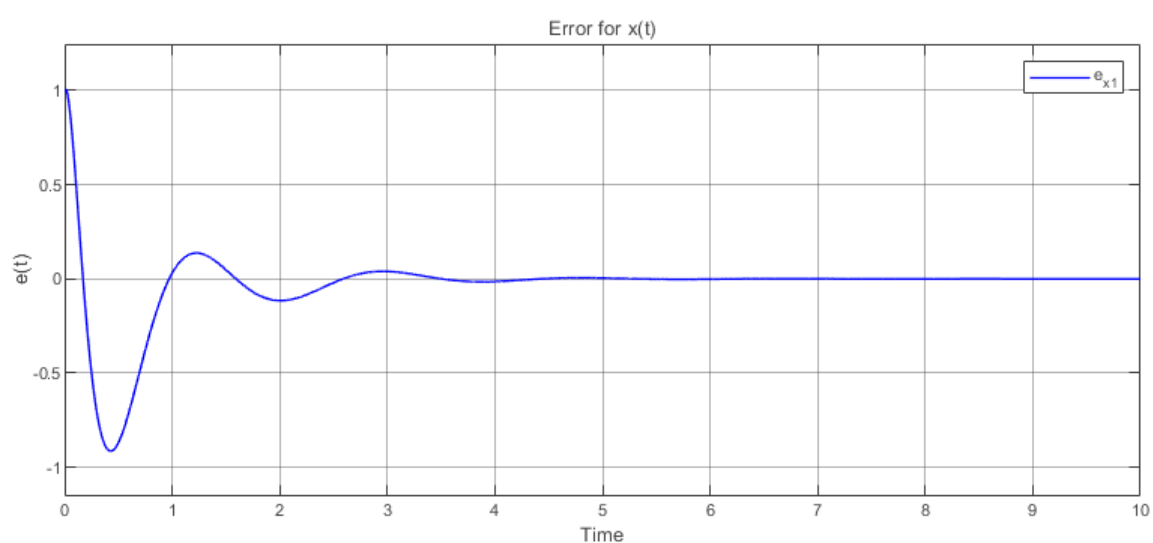


Рис. 13: График ошибки $e_{x_1} = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$

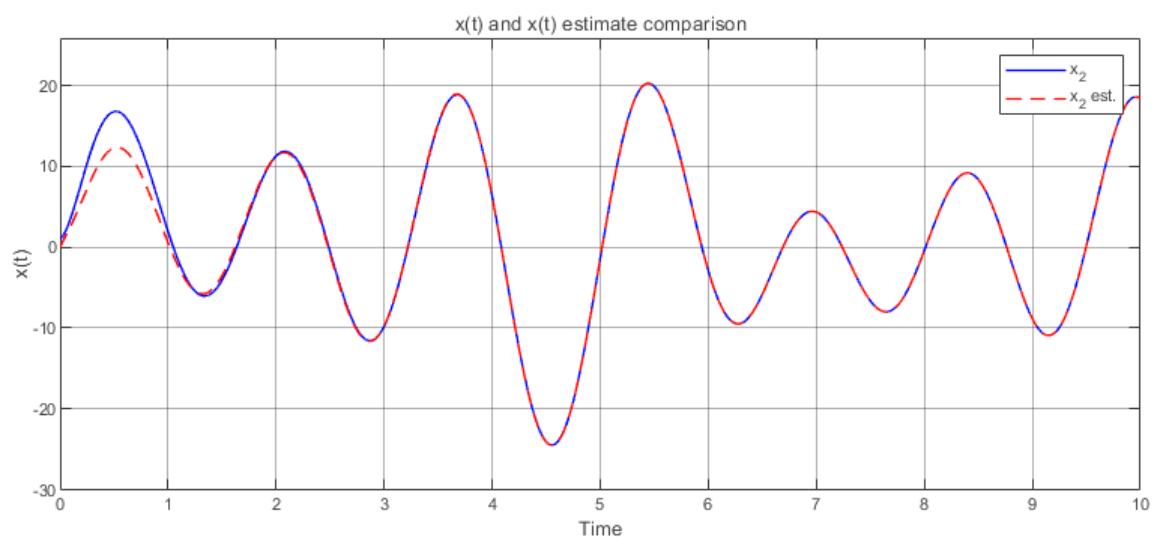


Рис. 14: График $(x_2(t), \hat{x}_2(t))$

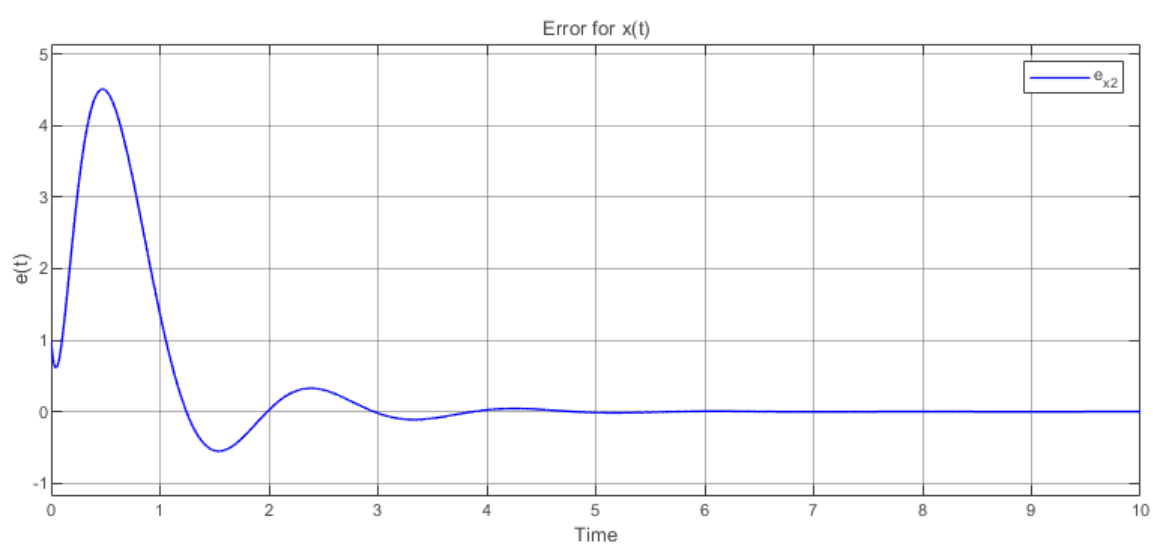


Рис. 15: График ошибки $e_{x_2} = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$

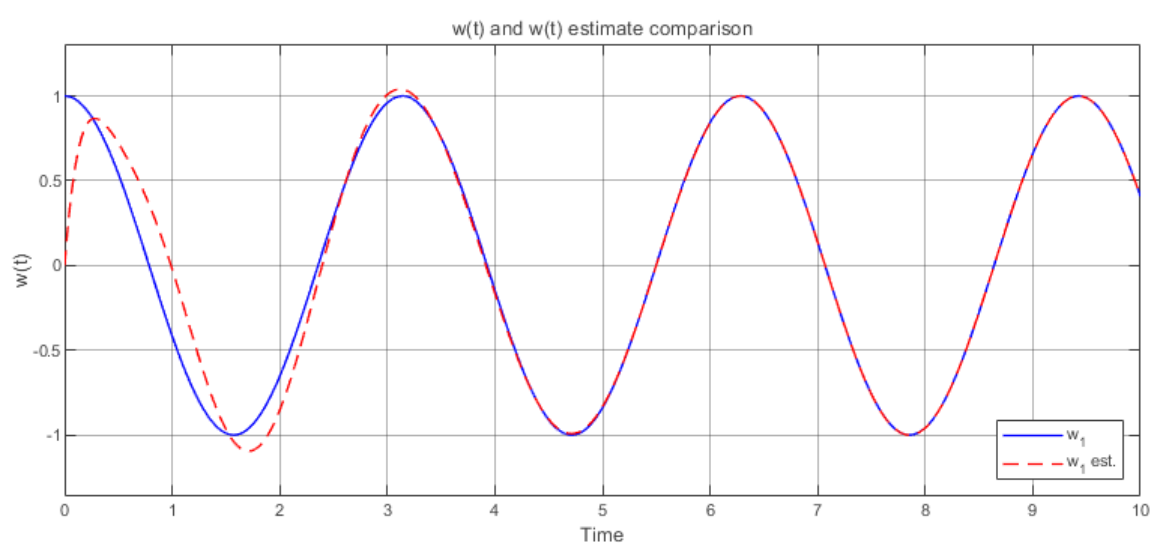


Рис. 16: График $(w_1(t), \hat{w}_1(t))$

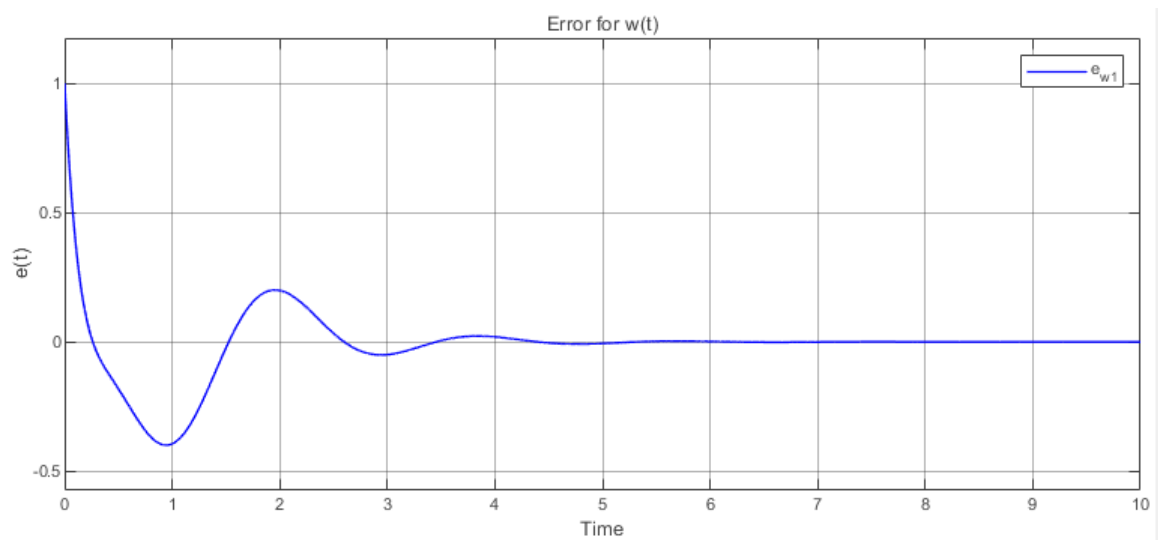


Рис. 17: График ошибки $e_{w_1} = w_1(t) - \hat{w}_1(t)$

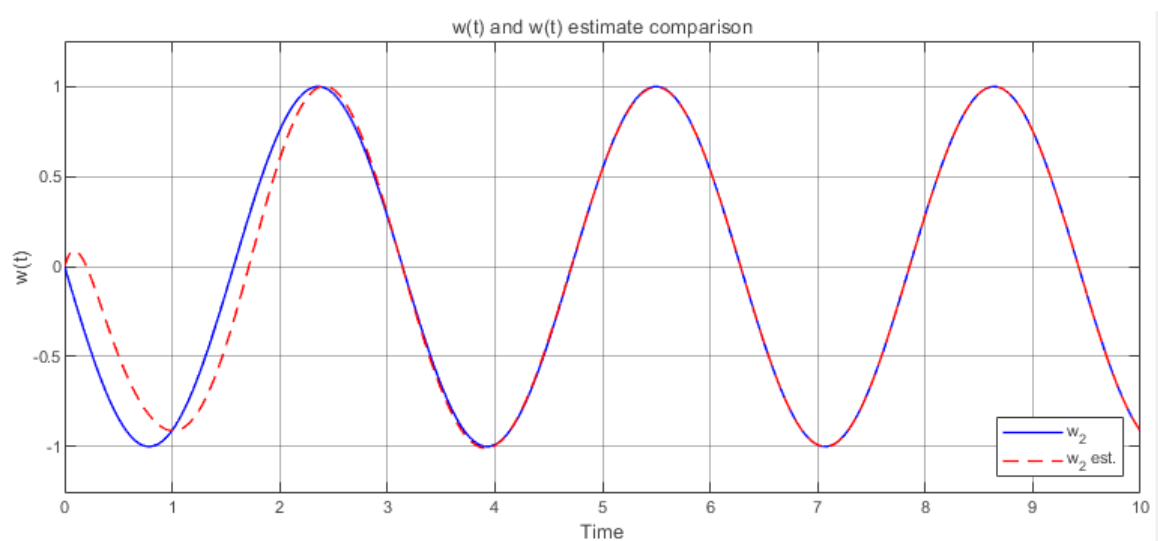


Рис. 18: График $(w_2(t), \hat{w}_2(t))$

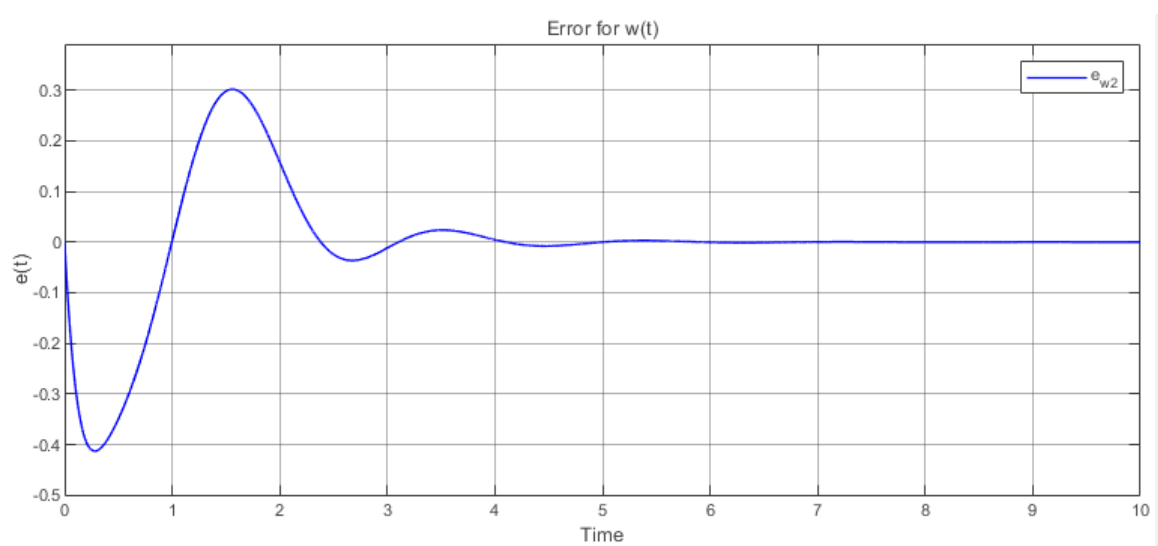


Рис. 19: График ошибки $e_{w_2} = w_2(t) - \hat{w}_2(t)$

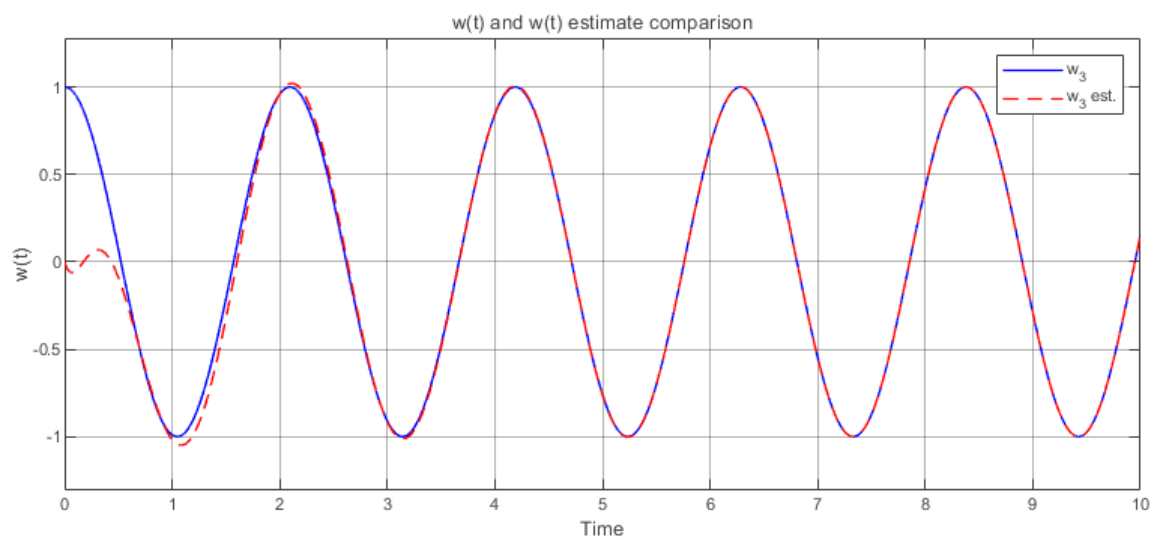


Рис. 20: График $(w_3(t), \hat{w}_3(t))$

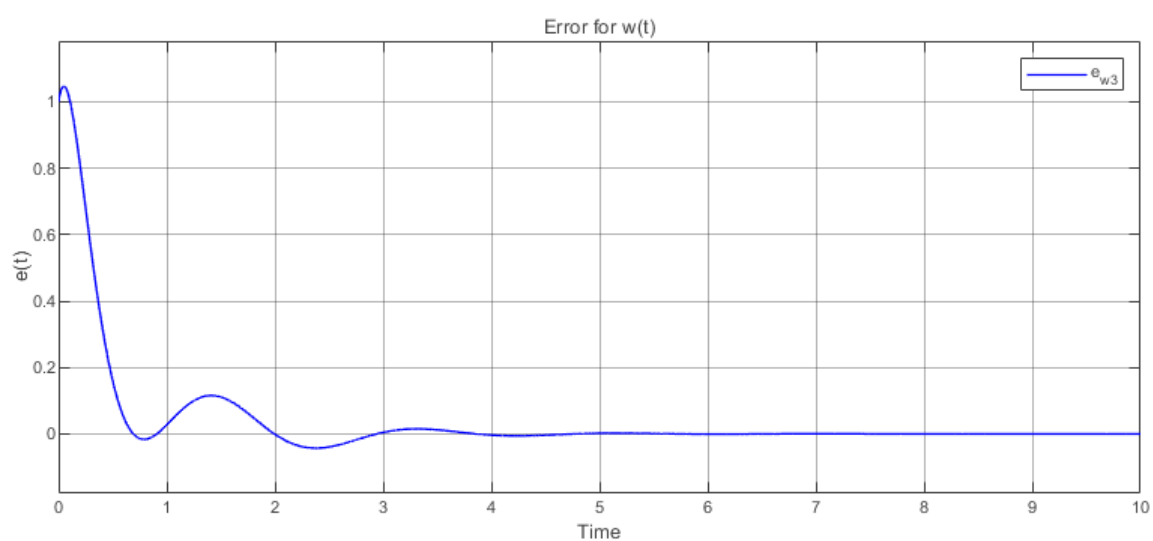


Рис. 21: График ошибки $e_{w_3} = w_3(t) - \hat{w}_3(t)$

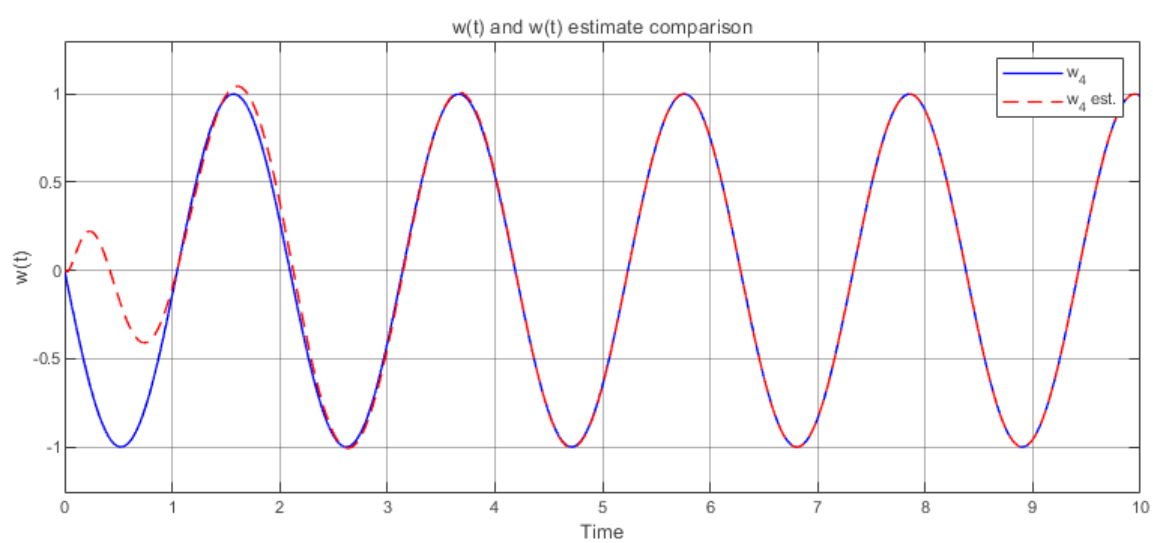


Рис. 22: График $(w_4(t), \hat{w}_4(t))$

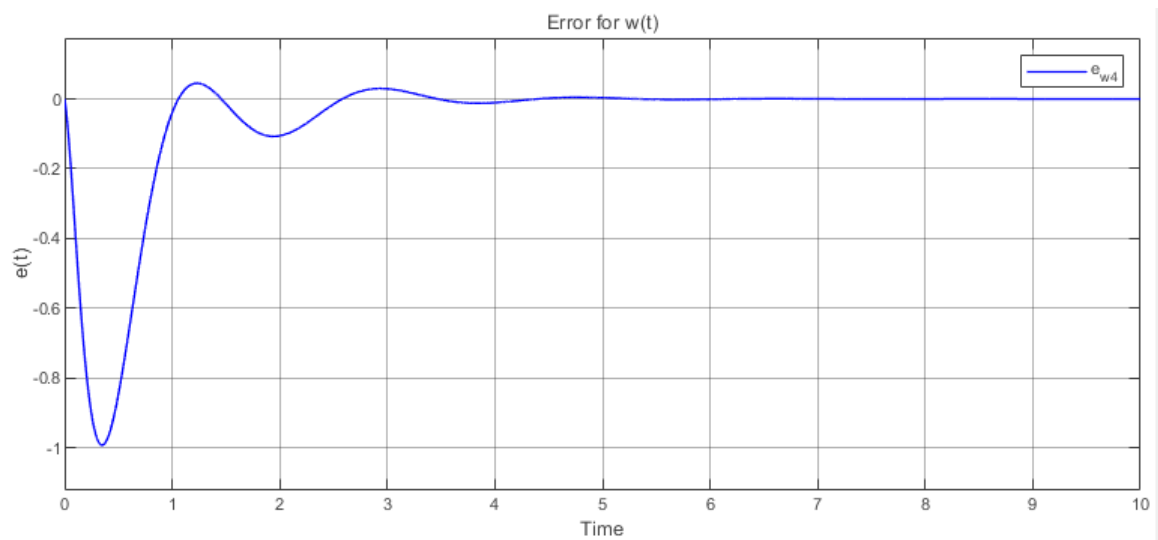


Рис. 23: График ошибки $e_{w_4} = w_4(t) - \hat{w}_4(t)$

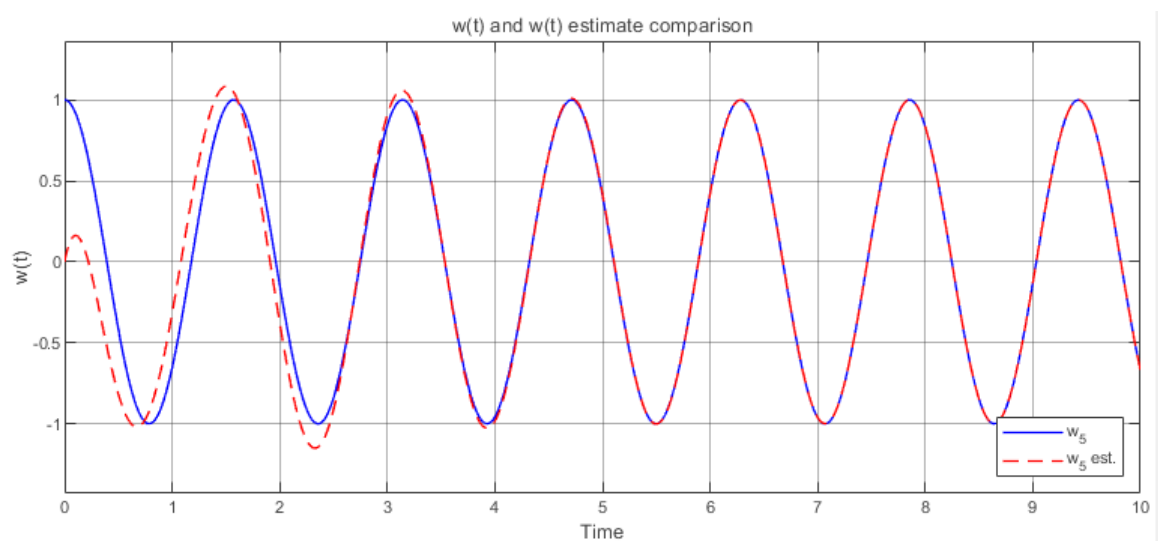


Рис. 24: График $(w_5(t), \hat{w}_5(t))$

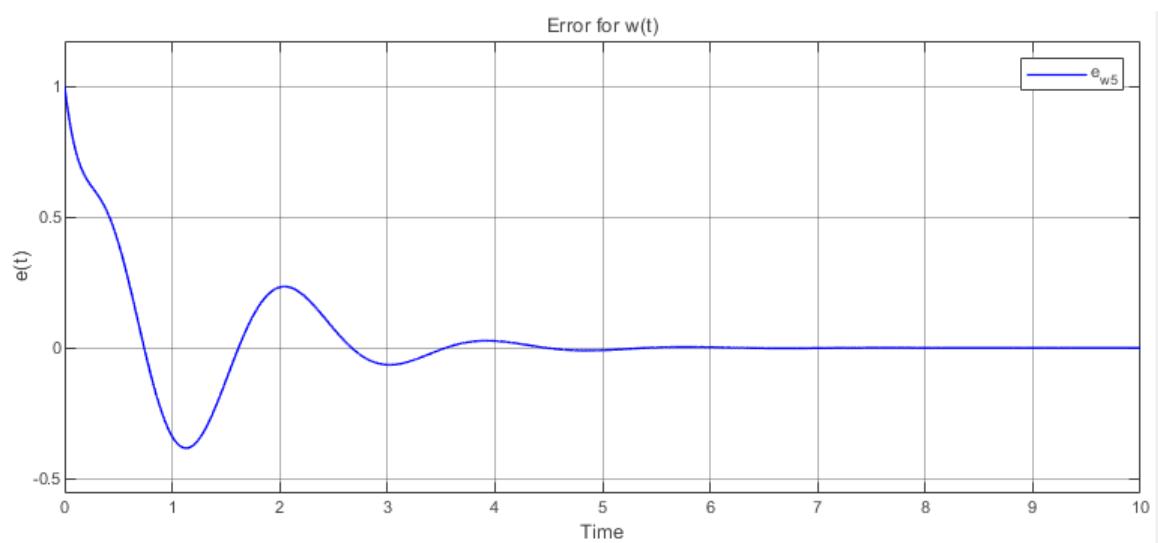


Рис. 25: График ошибки $e_{w_5} = w_5(t) - \hat{w}_5(t)$

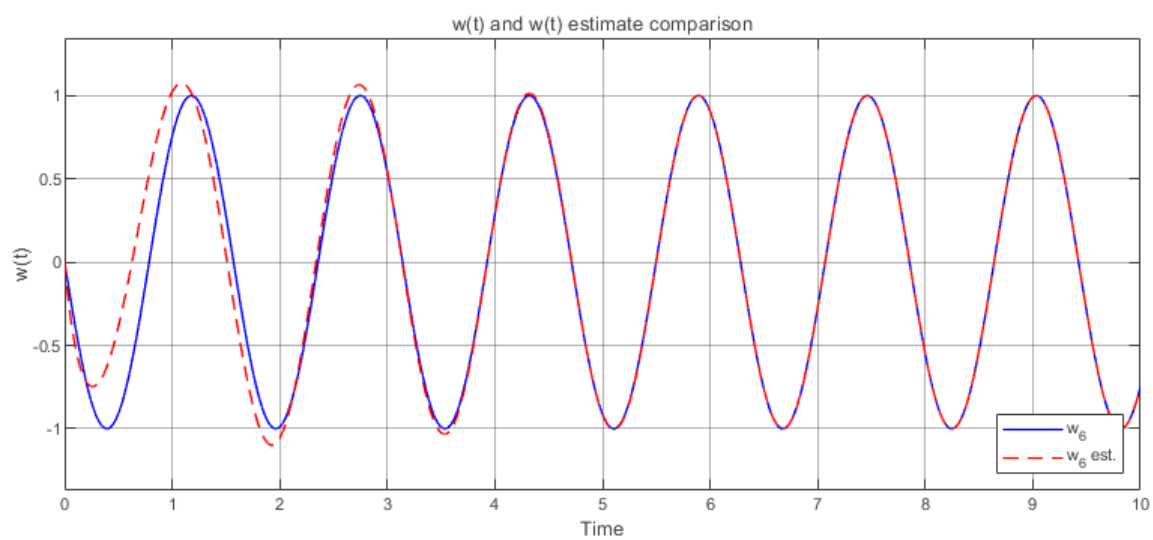


Рис. 26: График $(w_6(t), \hat{w}_6(t))$

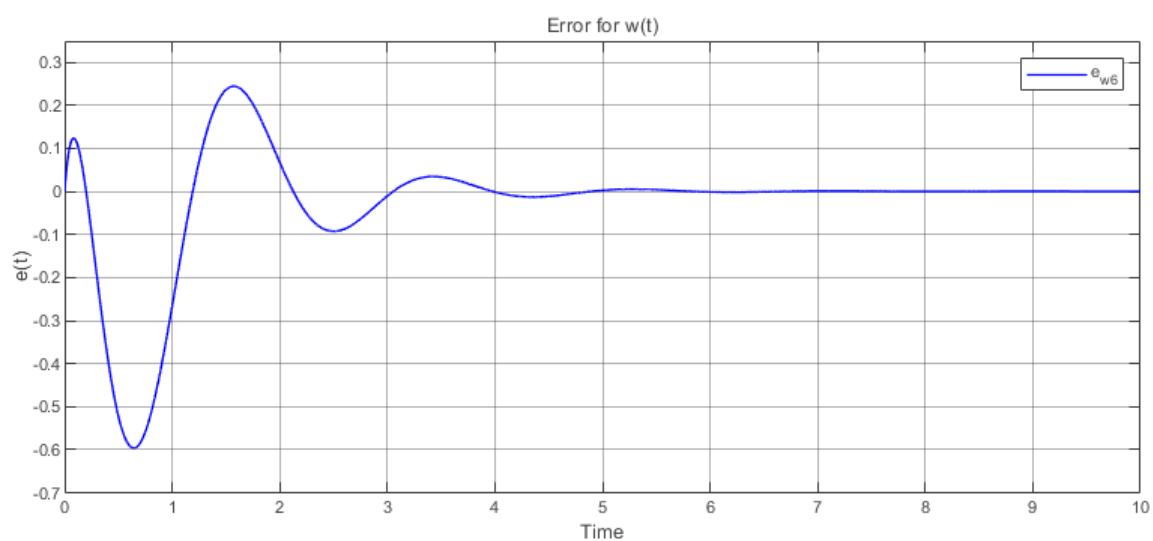


Рис. 27: График ошибки $e_{w_6} = w_6(t) - \hat{w}_6(t)$

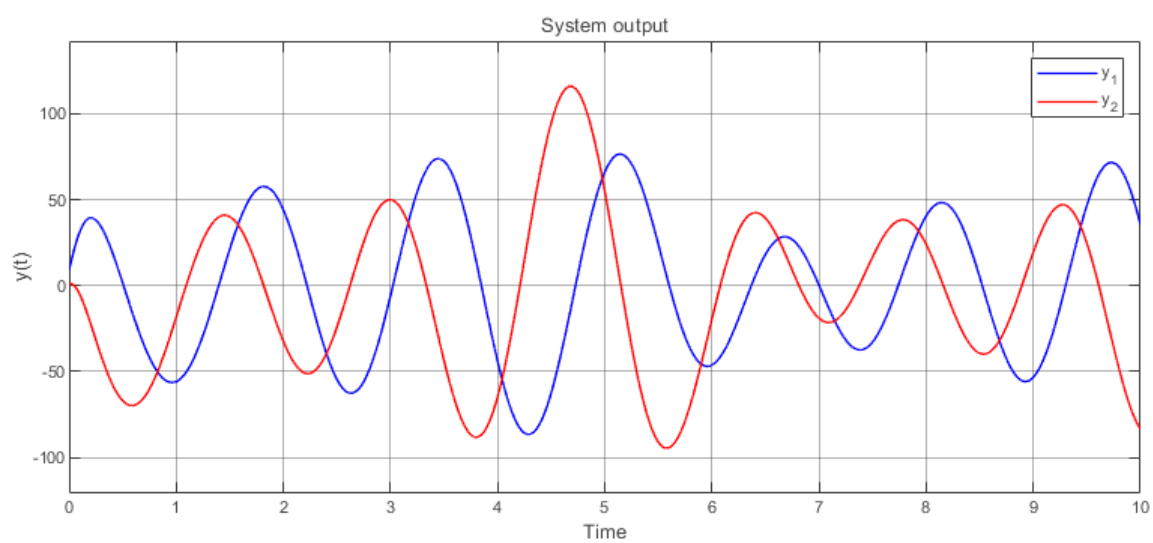


Рис. 28: График фактического выхода $y(t)$

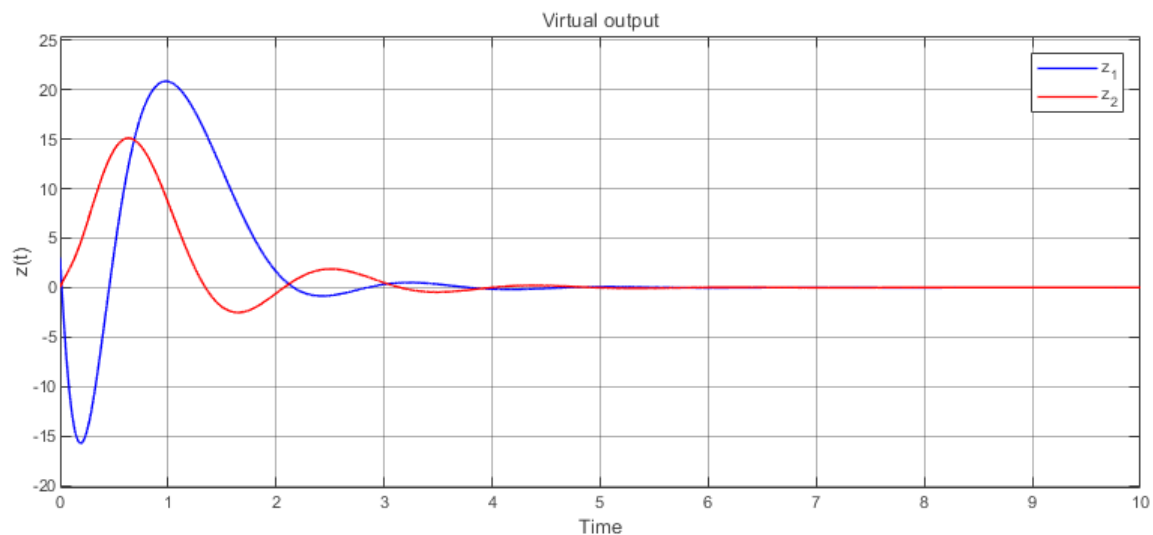


Рис. 29: График виртуального выхода $z(t)$

Все оценки сошлись к истинным траекториям, все ошибки стремятся к нулю, целевое условие достигается – виртуальный выход стремится к нулю.

Общий вывод по работе

В ходе выполнения работы были исследованы многоканальные системы, определены их передаточные функции. Были рассмотрены временные и частотные характеристики системы, приведены их графические представления. Был синтезирован следящий регулятор при наличии внешних возмущений. Моделирование системы подтвердило корректность расчетов и рассуждений.

Приложение А

```
% plant parameters
A=[0 1; -1 2];
B=[1 2; -3 3];
C=[2 1; 3 -2];
D=[0 0; 0 0];

% A eig
A_eig = eig(A)

% W(s)
sys = ss(A, B, C, D);
W_s = tf(sys)

% zeros
zeros = zero(sys)

% poles
poles = pole(sys)

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A)
B_J = inv(P) * B
```



```

C_J = C * P

% out
U = [B A*B];
U_out = [C*U D]
rank(U_out)

% time
t = 0:0.01:5;

% w(t)
w1 = -exp(t) - 12*t.*exp(t);
w2 = 7*exp(t) + 3*t.*exp(t);
w3 = 9*exp(t) - 4*t.*exp(t);
w4 = t.*exp(t);

% h(t)
h1 = -12*t.*exp(t) + 11*exp(t) - 11;
h2 = 3*t.*exp(t) + 4*exp(t) - 4;
h3 = -4*t.*exp(t) + 13*exp(t) - 13;
h4 = t.*exp(t) - exp(t) + 1;

% w(t) renders
figure;
subplot(2,2,1)
plot(t, w1, 'b', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('$w_1(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Weight Function $w_1(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

subplot(2,2,2)
plot(t, w2, 'g', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('$w_2(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Weight Function $w_2(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

subplot(2,2,3)
plot(t, w3, 'r', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('$w_3(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Weight Function $w_3(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

subplot(2,2,4)
plot(t, w4, 'm', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('$w_4(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Weight Function $w_4(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

% h(t) renders
figure;
subplot(2,2,1)
plot(t, h1, 'b', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('$h_1(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);

```

```

title('Step Response  $h_1(t)$ ', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

subplot(2,2,2)
plot(t, h2, 'g', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('  $h_2(t)$  ', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Step Response  $h_2(t)$ ', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

subplot(2,2,3)
plot(t, h3, 'r', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('  $h_3(t)$  ', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Step Response  $h_3(t)$ ', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

subplot(2,2,4)
plot(t, h4, 'm', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('  $h_4(t)$  ', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Step Response  $h_4(t)$ ', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

% freq
omega = logspace(-2, 2, 1000);

% A(w)
A1 = sqrt(omega.^6 + 123*omega.^4 + 243*omega.^2 + 121) ./ (omega.^2
+ 1).^2;
A2 = sqrt(49*omega.^6 + 114*omega.^4 + 81*omega.^2 + 16) ./ (omega
.^2 + 1).^2;
A3 = sqrt(81*omega.^6 + 331*omega.^4 + 419*omega.^2 + 169) ./ (omega
.^2 + 1).^2;
A4 = 1 ./ (omega.^2 + 1);

% A(w) renders
figure;

subplot(2,2,1)
semilogx(omega, A1, 'b', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
FontSize', 12);
ylabel('  $A_1(\omega)$  ', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Amplitude Response  $A_1(\omega)$ ', 'Interpreter','latex', '
FontSize', 14);

subplot(2,2,2)
semilogx(omega, A2, 'g', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
FontSize', 12);
ylabel('  $A_2(\omega)$  ', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Amplitude Response  $A_2(\omega)$ ', 'Interpreter','latex', '
FontSize', 14);

subplot(2,2,3)
semilogx(omega, A3, 'r', 'LineWidth', 1.5); grid on;

```

```

xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('$A_3(\omega)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Amplitude Response  $A_3(\omega)$ ', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 14);

subplot(2,2,4)
semilogx(omega, A4, 'm', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('$A_4(\omega)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Amplitude Response  $A_4(\omega)$ ', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 14);

sgtitle('Amplitude-Frequency Characteristics', 'Interpreter','latex',
    'FontSize', 16);

% L(w)
L1 = 10 * log10(omega.^6 + 123*omega.^4 + 243*omega.^2 + 121) - 40 *
    log10(omega.^2 + 1);
L2 = 10 * log10(49*omega.^6 + 114*omega.^4 + 81*omega.^2 + 16) - 40
    * log10(omega.^2 + 1);
L3 = 10 * log10(81*omega.^6 + 331*omega.^4 + 419*omega.^2 + 169) -
    40 * log10(omega.^2 + 1);
L4 = -20 * log10(omega.^2 + 1);

% L(w) renders
figure;

subplot(2,2,1)
semilogx(omega, L1, 'b', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('$L_1(\omega)$ (dB)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Logarithmic Amplitude Response  $L_1(\omega)$ ', 'Interpreter',
    'latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,2)
semilogx(omega, L2, 'g', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('$L_2(\omega)$ (dB)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Logarithmic Amplitude Response  $L_2(\omega)$ ', 'Interpreter',
    'latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,3)
semilogx(omega, L3, 'r', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('$L_3(\omega)$ (dB)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Logarithmic Amplitude Response  $L_3(\omega)$ ', 'Interpreter',
    'latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,4)
semilogx(omega, L4, 'm', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('$L_4(\omega)$ (dB)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);

```

```

title('Logarithmic Amplitude Response  $L_4(\omega)$ ', 'Interpreter',
      'latex', 'FontSize', 14);

sgtitle('Logarithmic Amplitude-Frequency Characteristics', '
      Interpreter', 'latex', 'FontSize', 16);

% phi(w)
phi1 = atan2(omega.^3 - 23*omega, 13*omega.^2 - 11);
phi2 = atan2(-7*omega.^3 + 15*omega, 18*omega.^2 - 4);
phi3 = atan2(-9*omega.^3 + 35*omega, 31*omega.^2 - 13);
phi4 = atan2(2*omega, -omega.^2 + 1);

% rad to deg
phi1 = rad2deg(phi1);
phi2 = rad2deg(phi2);
phi3 = rad2deg(phi3);
phi4 = rad2deg(phi4);

% phi(w)
figure;

subplot(2,2,1)
plot(omega, phi1, 'b', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
      FontSize', 12);
ylabel('Phase  $\varphi_1(\omega)$  (deg)', 'Interpreter','latex', '
      FontSize', 12);
title('Phase-Frequency Characteristic  $\varphi_1(\omega)$ ', '
      Interpreter','latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,2)
plot(omega, phi2, 'g', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
      FontSize', 12);
ylabel('Phase  $\varphi_2(\omega)$  (deg)', 'Interpreter','latex', '
      FontSize', 12);
title('Phase-Frequency Characteristic  $\varphi_2(\omega)$ ', '
      Interpreter','latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,3)
plot(omega, phi3, 'r', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
      FontSize', 12);
ylabel('Phase  $\varphi_3(\omega)$  (deg)', 'Interpreter','latex', '
      FontSize', 12);
title('Phase-Frequency Characteristic  $\varphi_3(\omega)$ ', '
      Interpreter','latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,4)
plot(omega, phi4, 'm', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
      FontSize', 12);
ylabel('Phase  $\varphi_4(\omega)$  (deg)', 'Interpreter','latex', '
      FontSize', 12);
title('Phase-Frequency Characteristic  $\varphi_4(\omega)$ ', '
      Interpreter','latex', 'FontSize', 14);

```

```

sgtitle('Phase-Frequency Characteristics', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 16);

% log phi(w)
figure;

subplot(2,2,1)
semilogx(omega, phi1, 'b', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('  $\varphi_1(\omega)$  ( $^\circ$ )', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
title('Logarithmic Phase Characteristic  $\varphi_1(\omega)$ ', '
    Interpreter','latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,2)
semilogx(omega, phi2, 'g', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('  $\varphi_2(\omega)$  ( $^\circ$ )', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
title('Logarithmic Phase Characteristic  $\varphi_2(\omega)$ ', '
    Interpreter','latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,3)
semilogx(omega, phi3, 'r', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('  $\varphi_3(\omega)$  ( $^\circ$ )', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
title('Logarithmic Phase Characteristic  $\varphi_3(\omega)$ ', '
    Interpreter','latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,4)
semilogx(omega, phi4, 'm', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('  $\varphi_4(\omega)$  ( $^\circ$ )', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
title('Logarithmic Phase Characteristic  $\varphi_4(\omega)$ ', '
    Interpreter','latex', 'FontSize', 14);

sgtitle('Logarithmic Phase-Frequency Characteristics', 'Interpreter'
    , 'latex', 'FontSize', 16);

```

Листинг 1: Программа для задания 1

Приложение Б

```

% plant parameters
A=[0 1; -1 2];
B=[1 2; -3 3];
C=[2 1; 3 -2];
D=[-2 0; 0 1];

Bf=[1 2; -1 3];

```

```

Df=[1 0; 0 -1];
Cz=[4 2; -1 1];
Dz=[2 0; 0 1];

G=[-2.5 1;
-1 -2.5];
Y=[1 0; 0 1];

Gw=[0 2 0 0 0 0;
-2 0 0 0 0 0;
0 0 0 3 0 0;
0 0 -3 0 0 0;
0 0 0 0 0 4;
0 0 0 0 -4 0];
Y1=[0 0 0 9 0 0;
3 0 0 0 0 0];
Y2=[6 0 0 0 0 0;
0 0 0 8 0 0];
Yg=[0 0 0 0 3 0;
0 0 0 0 0 6];

% out y
U = [B A*B];
U_out_y = [C*U D]
rank(U_out_y)

% out z
U_out_z = [Cz*U Dz]
rank(U_out_z)

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A)
B_J = inv(P) * B
C_J_y = C * P
C_J_z = Cz * P

% W_y(s)
sys_y = ss(A, B, C, D);
W_y_s = tf(sys_y)

% W_z(s)
sys_z = ss(A, B, Cz, Dz);
W_z_s = tf(sys_z)

% zeros
zeros_y = zero(sys_y)
zeros_z = zero(sys_z)

% check 0(Y,G)
O_Y_G = [Y; Y*G]
rank_O_Y_G=rank(O_Y_G)

% K regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P(2,2)
A*P-P*G == B*Y;
cvx_end

```

```

K = -Y*inv(P)
ApBK=A+B*K;
eig_ApBK=eig(ApBK)

% check rank for K_w
CzpDzK=Cz+Dz*K;
eig_G=eig(G);
mat1 = [ApBK-eye(2)*eig_G(1) B; CzpDzK Dz]
mat2 = [ApBK-eye(2)*eig_G(2) B; CzpDzK Dz]
check_mat1=rank(mat1)
check_mat2=rank(mat2)

% solving Frankis-Davison: Kw
cvx_begin sdp
variable Pw(2,6)
variable Kw(2,6)
Pw*Gw-(A+B*K)*Pw-Bf*Y1 == B*Kw;
(Cz+Dz*K)*Pw+Dz*Kw == Yg;
cvx_end

Kw=Kw

% observer
null = [0 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0; 0 0];
barA=[Gw null; Bf*Y1 A]
barB=[null; B]
barC=[Df*Y2-Yg C]

Q1 = eye(8);
R1 = eye(2);

[P1,barL,e]=icare(barA',barC',Q1,R1);
barL=-P1*barC'*R1^-1
e1=eig(barA+barL*barC)

barK=[Kw K]

```

Листинг 2: Программа для задания 2