

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»



**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №А**  
**ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО**  
**УПРАВЛЕНИЯ»**  
**ТЕМА «ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ РАДОСТИ»**  
Вариант №2

Преподаватель:  
Пашенко А. В.

Выполнил:  
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР  
Группа: R3341  
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург  
2025

# Содержание

<b>1</b>	<b>Задание 1. Исследование LQR</b>	<b>2</b>
1.1	Стабилизируемость системы . . . . .	2
1.2	Схема моделирования системы . . . . .	2
1.3	Набор пар матриц для исследования . . . . .	3
1.4	Синтез регулятора . . . . .	3
1.5	Минимизированное значение функционала качества . . . . .	3
1.6	Компьютерное моделирование . . . . .	4
1.7	Сравнение результатов . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Вывод</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	<b>Приложение А</b>	<b>8</b>

## Задание 1. Исследование LQR

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

## Стабилизируемость системы

Проверим систему на стабилизируемость. Найдем собственные числа матрицы  $A$ . Ранее мы это делали в лабораторной работе №2 «Модальные регуляторы и наблюдатели». Код матлаб представлен в приложении А на листинге 1

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}$$

Собственное число  $\lambda_1 = -2$  асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. Комплексная пара  $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$  неустойчива, нужна управляемость. Разложим  $A$  в ЖНФ в вещественном виде, найдем  $B$  в базисе собственных векторов  $A$

$$A_{J_{re}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{J_{re}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Система не полностью управляема, стабилизируема (собственному значению  $-2$  соответствует ноль в матрице  $B_{J_{re}}$ ).

## Схема моделирования системы

Построим схему моделирования системы, замкнутой регулятором  $u = Kx$ , используя **SIMULINK**

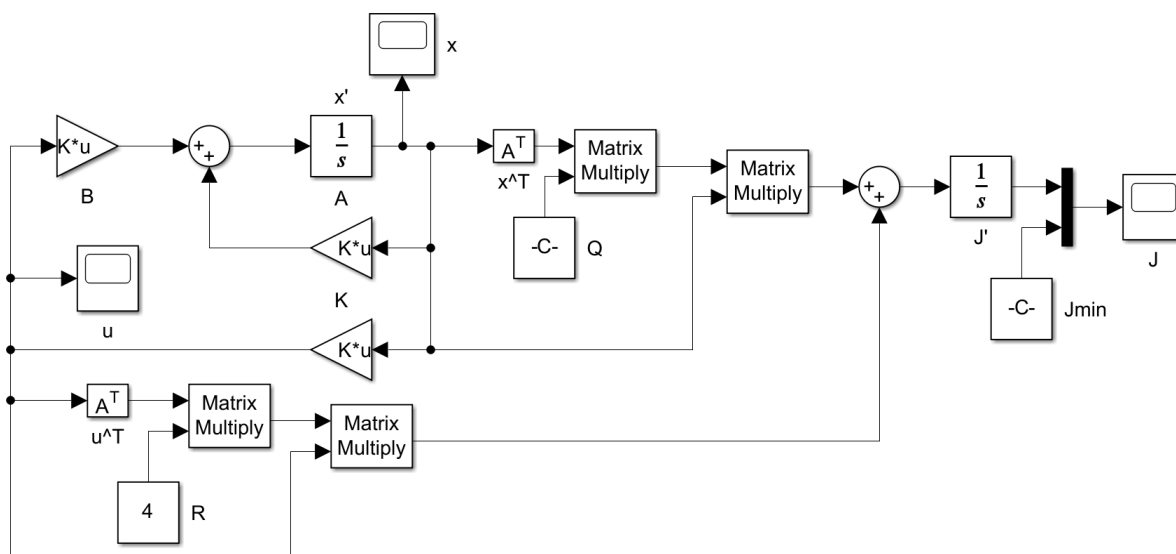


Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Снимаем осциллограммы  $u(t), x(t), J_{exp}(t)$ .

## Набор пар матриц для исследования

Зададим значения матриц  $Q = I, R = 1$  (время процесса и затраты на управление принимаем одинаково значимыми) и параметр  $\alpha = 4$ . Таким образом, сформируем набор

- $\circ (Q = I, R = 1),$
- $\circ (Q = 4I, R = 1),$
- $\circ (Q = I, R = 4),$
- $\circ (Q = 4I, R = 4);$

## Синтез регулятора

Для каждой из пар значений матриц  $(Q, R)$  синтезируем регулятор, минимизирующий функционал качества

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt$$

путем решения соответствующего матричного уравнения Риккати при  $\nu = 1$

$$A^T P + PA + Q - \nu PBR^{-1}B^T P = 0, \quad K = -R^{-1}B^T P;$$

Воспользуемся `icare` и получим

$$\begin{aligned} (Q = I, R = 1), \quad K_{I,1} &= [-1.7473 \quad -5.4627 \quad -1.4004], \\ (Q = 4I, R = 1), \quad K_{4I,1} &= [-2.0000 \quad -6.9630 \quad -0.9630], \\ (Q = I, R = 4), \quad K_{I,4} &= [-1.6433 \quad -4.9797 \quad -1.5454], \\ (Q = 4I, R = 4), \quad K_{4I,4} &= [-1.7473 \quad -5.4627 \quad -1.4004]; \end{aligned}$$

Убедимся, что спектры замкнутых систем принадлежат левой комплексной плоскости

$$\begin{aligned} \sigma(A + BK_{I,1}) &= \{-2, -1.4413, -3.8630\}, \\ \sigma(A + BK_{4I,1}) &= \{-2, -1, -7\}, \\ \sigma(A + BK_{I,4}) &= \{-2, -2.1821 \pm 0.6216i\}, \\ \sigma(A + BK_{4I,4}) &= \{-2, -1.4413, -3.8630\}; \end{aligned}$$

Получили отрицательные действительные части собственных чисел и наличие в спектрах неуправляемого  $\lambda_1 = -2$ . Следовательно, регуляторы синтезированы корректно.

## Минимизированное значение функционала качества

Вычислим минимизированное значение функционала качества

$$J_{min} = x_0^T P x_0$$

для каждой пары  $(Q, R)$ .  $P_i$  получили при решении матричного уравнения типа Риккати

$$P_{I,1} = \begin{bmatrix} 2.4681 & -3.5514 & 2.1055 \\ -3.5514 & 13.4136 & -2.7033 \\ 2.1055 & -2.7033 & 2.2129 \end{bmatrix}, \quad P_{4I,1} = \begin{bmatrix} 4.0000 & -7.3333 & 2.6667 \\ -7.3333 & 24.9904 & -3.9726 \\ 2.6667 & -3.9726 & 3.0645 \end{bmatrix},$$

$$P_{I,4} = \begin{bmatrix} 8.2455 & -10.2978 & 7.8656 \\ -10.2978 & 41.3731 & -9.4392 \\ 7.8656 & -9.4392 & 7.9761 \end{bmatrix}, \quad P_{4I,4} = \begin{bmatrix} 9.8723 & -14.2056 & 8.4221 \\ -14.2056 & 53.6545 & -10.8133 \\ 8.4221 & -10.8133 & 8.8515 \end{bmatrix};$$

Получаем

$$\begin{aligned} Q = I, R = 1 : J_{min} &= 9.7962, \\ Q = 4I, R = 1 : J_{min} &= 14.7764, \\ Q = I, R = 4 : J_{min} &= 33.8518, \\ Q = 4I, R = 4 : J_{min} &= 39.1846; \end{aligned}$$

### Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование замкнутых систем и для каждого случая построим график управления  $u(t)$ , вектора состояния замкнутой системы  $x(t)$  и экспериментального значения функционала качества  $J_{exp}(t)$ . Моделирование  $u(t)$  и  $x(t)$  для случая

$$Q = 4I, R = 4, K_{4I,4} = [-1.7473 \quad -5.4627 \quad -1.4004]$$

делать не будем, так как регулятор для этой пары совпал с регулятором для случая

$$Q = I, R = 1, K_{I,1} = [-1.7473 \quad -5.4627 \quad -1.4004],$$

собственные числа тоже одинаковые. Результаты представлены на рис. 2–11

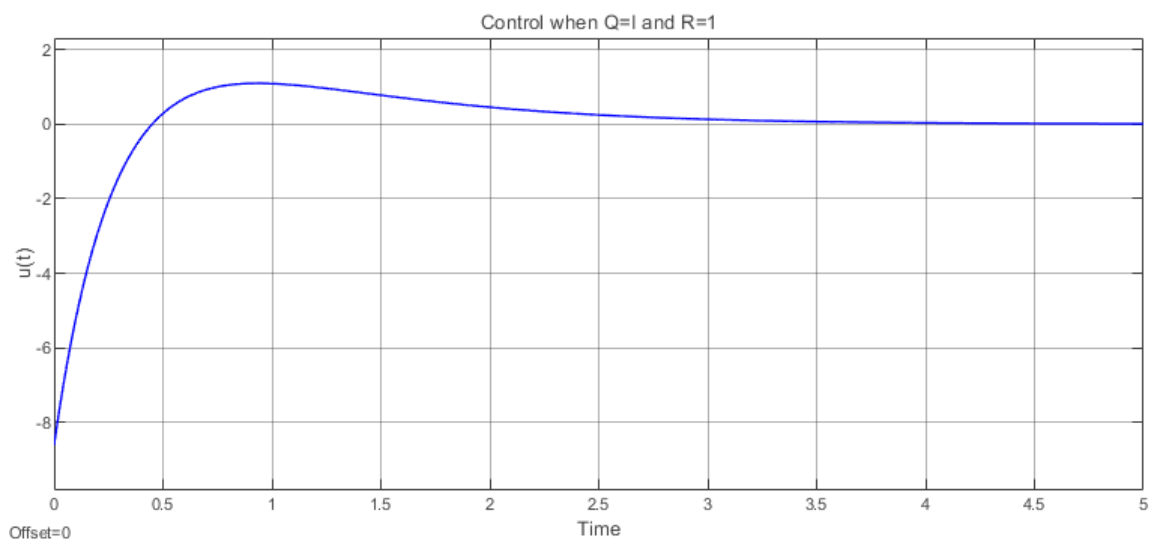


Рис. 2: График управления  $u(t)$  при  $K_{I,1}, K_{4I,4}$

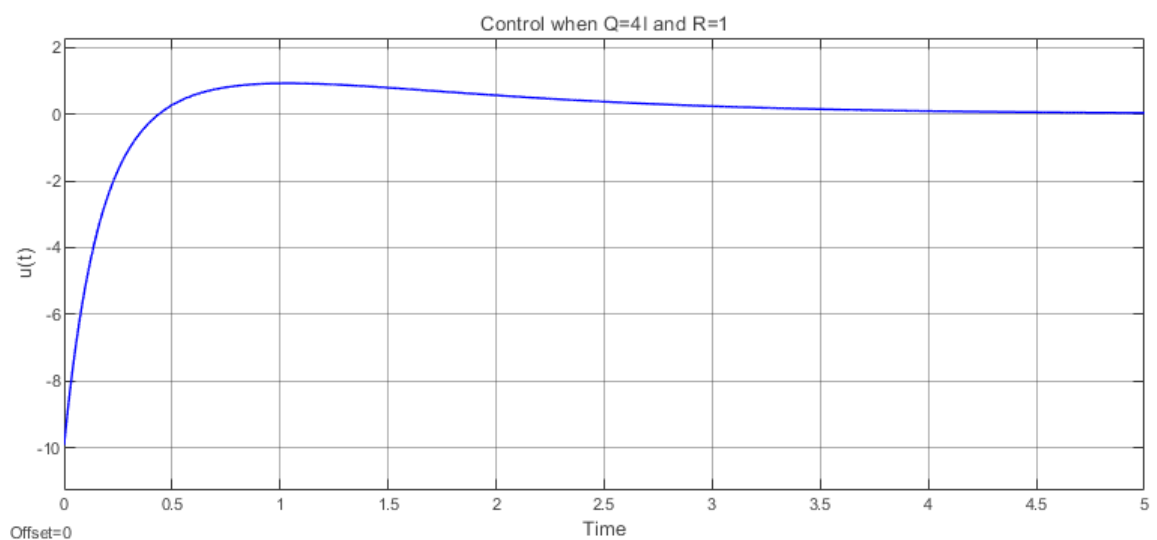


Рис. 3: График управления  $u(t)$  при  $K_{4I,1}$

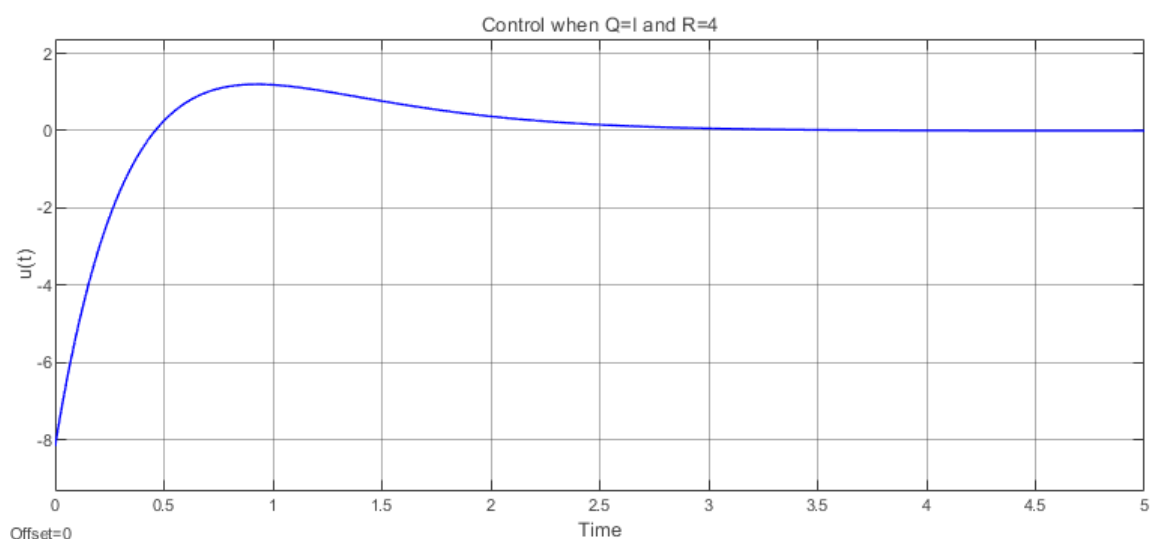


Рис. 4: График управления  $u(t)$  при  $K_{I,4}$

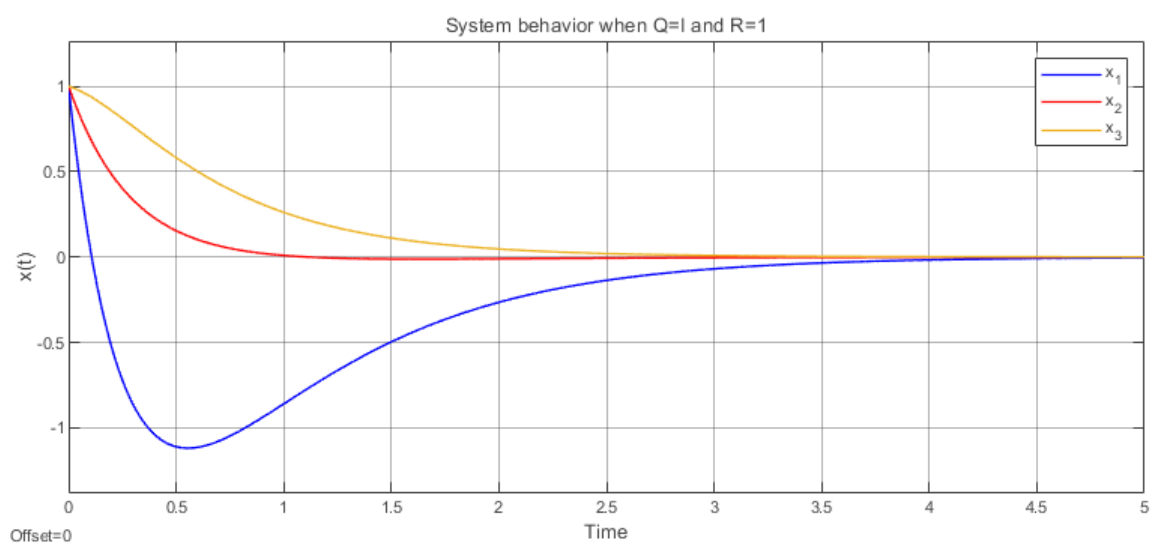


Рис. 5: График вектора состояния  $x(t)$  при  $K_{I,1}, K_{4I,4}$

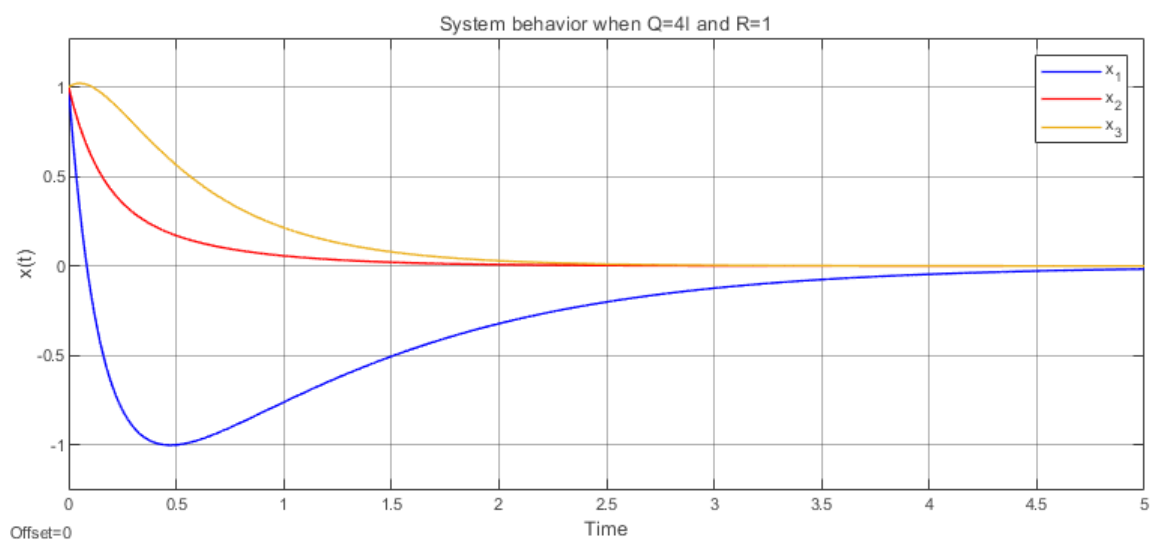


Рис. 6: График вектора состояния  $x(t)$  при  $K_{4I,1}$

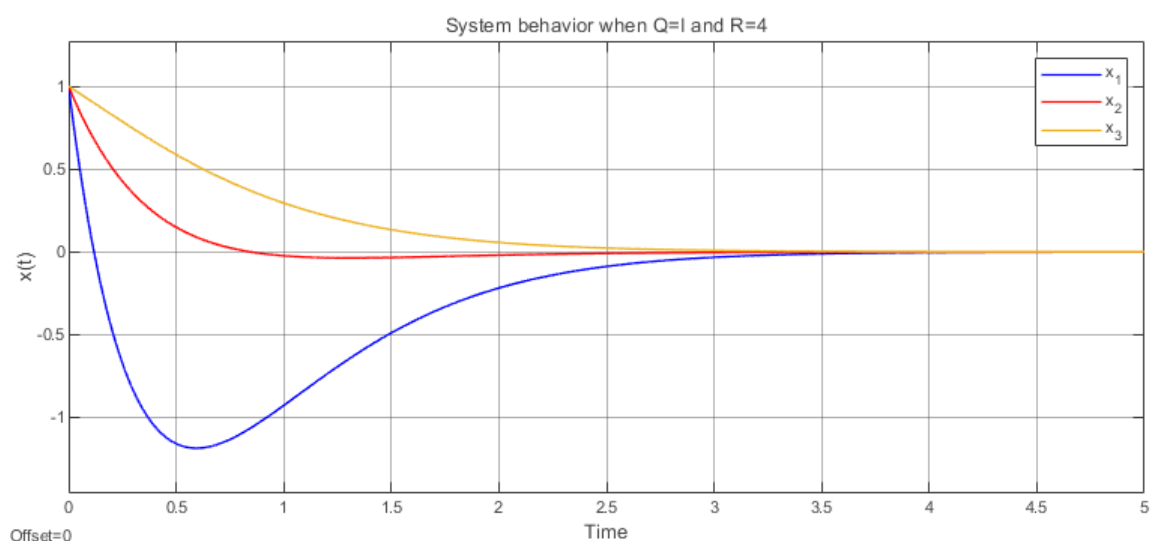


Рис. 7: График вектора состояния  $x(t)$  при  $K_{I,4}$

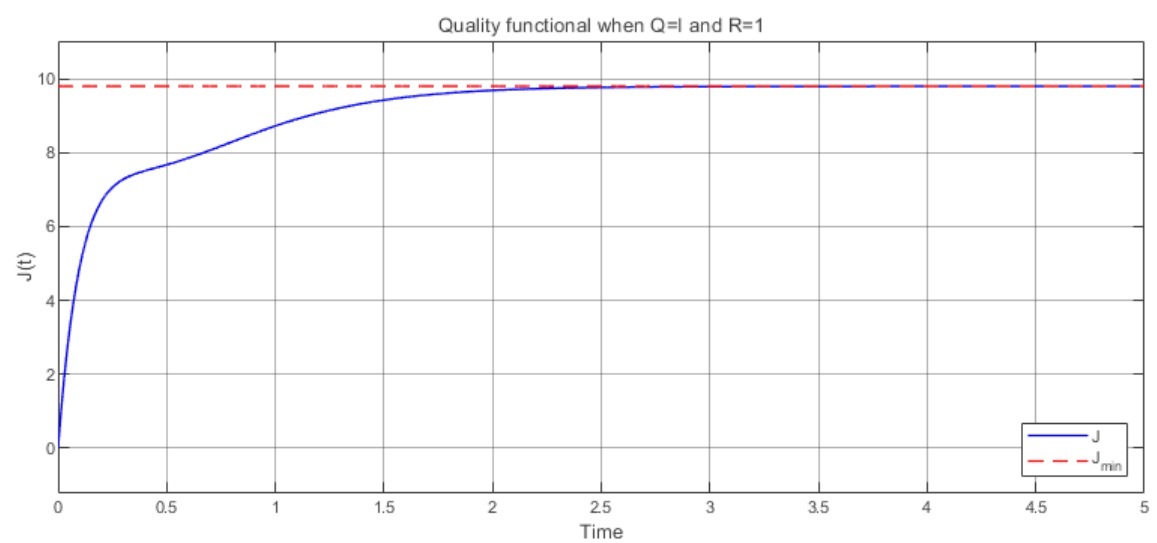


Рис. 8: График экспериментального значения функционала качества  $J(t)$  при  $K_{I,1}$

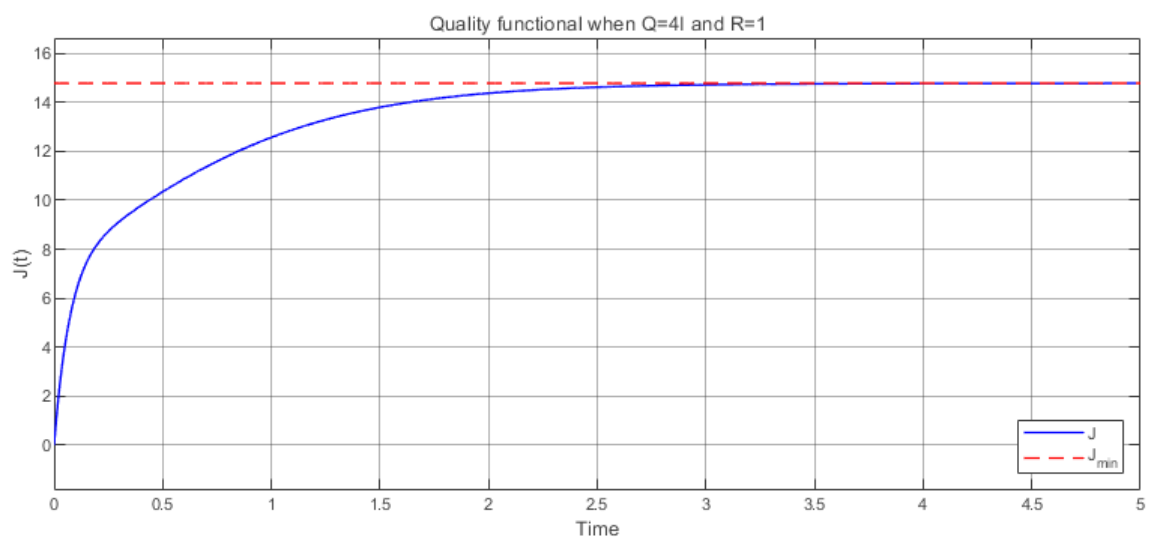


Рис. 9: График экспериментального значения функционала качества  $J(t)$  при  $K_{4I,1}$

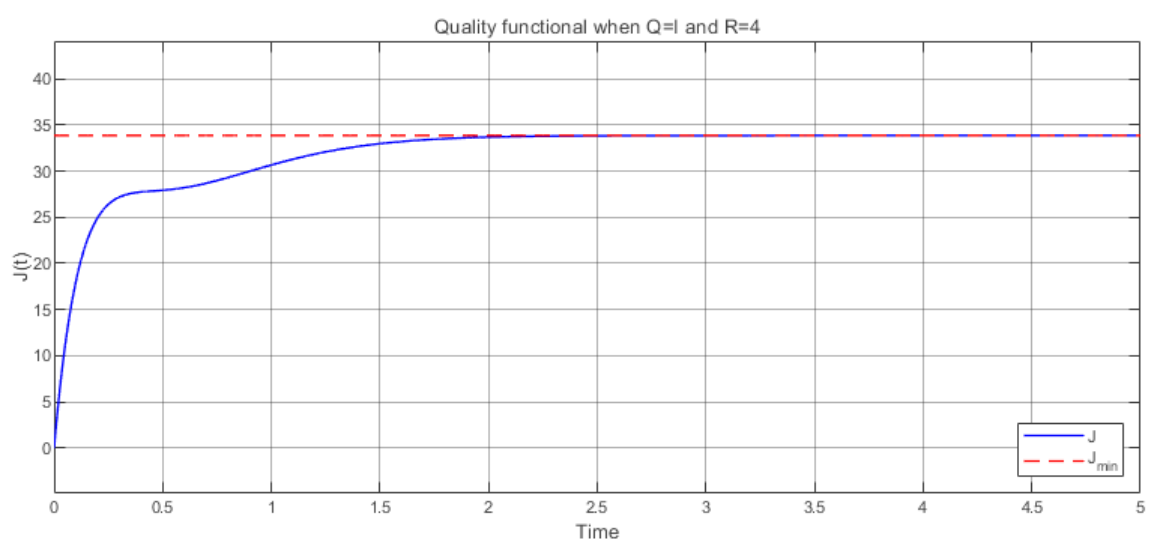


Рис. 10: График экспериментального значения функционала качества  $J(t)$  при  $K_{I,4}$

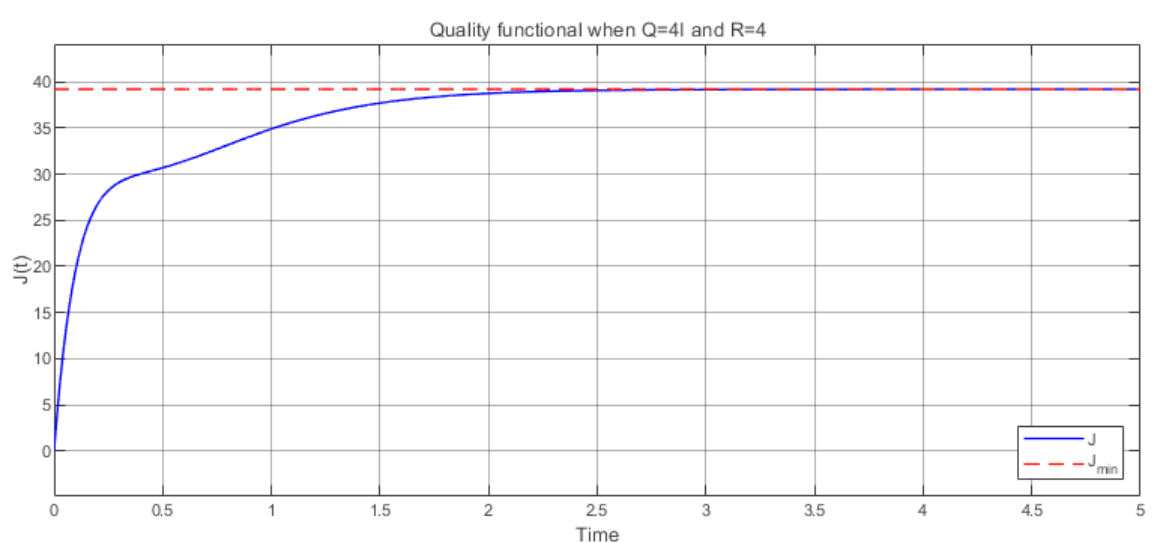


Рис. 11: График экспериментального значения функционала качества  $J(t)$  при  $K_{4I,4}$



## Сравнение результатов

Когда нам важнее время процесса, чем затраты на управление ( $Q > R$ ), то ожидаемо управления применяется больше (сравн. рис. 3, 4), при этом координаты  $x_2(t), x_3(t)$  вектора состояния объекта быстрее сходятся к нулю (сравн. рис. 6, 7; примечание: координата  $x_1(t)$  сравнительно быстрее бы сошлась к нулю при большем коэффициенте  $\alpha$ ). При  $Q < R$  ситуация обратная – время процесса не так важно, как затраты на управление (сравн. те же графики). При равнозначных (равносильных) значениях  $Q, R$  результат усредненный между временем процесса и затратами на управление. Результаты  $J_{exp}(t)$  примерно совпадают с вычисленными  $J_{min}$ . При этом

$$J_{min,I,1} = \frac{J_{min,4I,4}}{4}, \quad 9.7962 \approx \frac{39.1846}{4} = 9.79615,$$

то есть при увеличении  $Q, R$  в один и тот же коэффициент  $\alpha$ , минимизированное значение функционала качества увеличится в  $\alpha$  раз.

## Вывод

...

## Приложение А

```
% plant parameters
A = [5 2 7; 2 1 2; -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];
x0 = [1;1;1];

% A matrix eigenvalues
eig_A = eig(A)

% Jordan matrix
[P_J, A_J] = jordan(A);
P_Jre(:,1) = P_J(:,1);
P_Jre(:,2) = imag(P_J(:,2));
P_Jre(:,3) = real(P_J(:,3));
A_Jre = P_Jre^-1 * A * P_Jre
B_jre = P_Jre^-1 * B

% solving Riccati
a = 4;
Q = a*eye(3);
R = a*1;

% a1
[P,K,e]=icare(A,B,Q,R);
P
K=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K)

% quality functional
J_min = x0'*P*x0
```

Листинг 1: Программа для задания 1