Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

Задание 1. Синтез регулятора с заданной степенью устойчивости

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Управляемость и стабилизируемость

Найдем собственные числа матрицы A и определим управляемость каждого из них. Программа для вычислений в `MATLAB` представлена на листинге 1 в приложении 1

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}$$

Число $\lambda_1 = -2$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. Комплексная пара $\lambda_{2,3}$ имеет положительную действительную часть – эти собственные числа неустойчивые, нужна управляемость. Разложим A в вещественную жорданову форму, найдем вектор B в базисе собственных векторов матрицы A

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Только число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, так как первый элемент B_{Jre} равен нулю. Остальные собственные числа управляемые. Таким образом, система не полностью управляема, стабилизируема.

Степень устойчивости

Любой степени устойчивости при помощи регулятора $u = Kx$ добиться не получится, так как система не полностью управляема. Степень устойчивости системы α – самое близкое к правой комплексной полуплоскости собственное число матрицы A, находящееся в левой комплексной полуплоскости. Проверка на близость осуществляется через действительную часть собственного числа. Имеем

$$\mathrm{Re}\{\lambda_1 = -2\} = -2,$$

$$\mathrm{Re}\{\lambda_{2,3} = 2 \pm i\} = 2;$$

Таким образом, степень устойчивости системы $\alpha = 2$. Это максимум. Устойчивость в данном случае подразумевается экспоненциальная.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Построим схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$, замкнутой регулятором $u = Kx$, используя `SIMULINK`

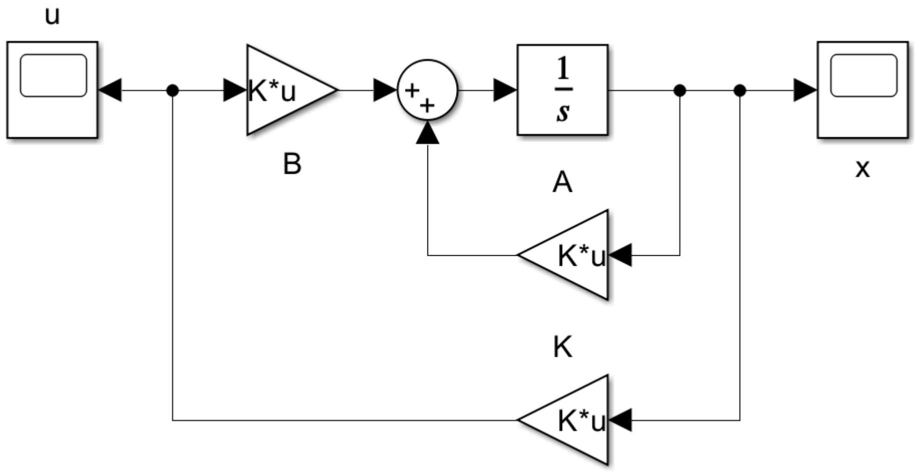

Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Значения желаемой степени устойчивости

Возьмем достаточно отличающиеся достижимые степени устойчивости в диапазоне $0 < \alpha \leq 2$

$$\alpha_1 = 2,$$
$$\alpha_2 = 0.1;$$

Синтез регулятора через матричное неравенство типа Ляпунова

Для каждого из выбранных значений α синтезируем регулятор, обеспечивающий заданную степень устойчивости, при помощи матричного неравенства типа Ляпунова

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \; K = YP^{-1};$$

Найдем для $\alpha_{1,2}$ соответствующие матрицы регулятора $K_{1\,\alpha_i}$ **без ограничений на управление**. Пользуемся пакетом `cvx` для `MATLAB`. Получаем

$$K_{1\,\alpha_1} = \begin{bmatrix} 2.5267 & -18.8652 & 1.7294 \end{bmatrix},$$

$$K_{1\,\alpha_2} = \begin{bmatrix} -2.0955 & -5.8106 & -2.6863 \end{bmatrix};$$

Найдем для $\alpha_{1,2}$ соответствующие матрицы регулятора $K_{2\,\alpha_i}$ **совместно с решением задачи минимизации управления**. Нам нужно найти минимальное μ, для которого при начальных условиях $x(0) = x_0$ выполняется $||u(t)|| \leq \mu$. Для этого нужно решить задачу выпуклой минимизации:

$$\begin{aligned}
&\text{минимизировать } \gamma = \mu^2 \\
&\text{при ограничениях } P \succ 0, \; PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \prec 0, \\
&\begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \; \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \gamma I \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

Зададим начальные условия

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Реализация представлена в `MATLAB`, для решения используется `cvx`. Получаем

$$K_{2\,\alpha_1} = \begin{bmatrix} 1.6000 & -11.2000 & 1.6000 \end{bmatrix}, \ \mu_1 = 8.0090,$$

$$K_{2\,\alpha_2} = \begin{bmatrix} -0.7565 & -2.6884 & -0.7552 \end{bmatrix}, \ \mu_2 = 4.2015;$$

Определим собственные числа матриц замкнутых систем $(A + BK_{j\,\alpha_i})$ и сравним с желаемой степенью устойчивости

$$\begin{aligned}
\sigma\left(A + BK_{1\,\alpha_1}\right) &= \{-2, -4.5072 \pm 3.2145i\}, \\
\sigma\left(A + BK_{1\,\alpha_2}\right) &= \{-2, -4.5455, -0.8653\}, \\
\sigma\left(A + BK_{2\,\alpha_1}\right) &= \{-2, -2.0000 \pm 4.1231i\}, \\
\sigma\left(A + BK_{2\,\alpha_2}\right) &= \{-2, -0.1013 \pm 2.3259i\};
\end{aligned}$$

Для $\alpha_1 = 2$ собственные числа при регуляторе $K_{2\,\alpha_1}$ получились более точными, чем при регуляторе $K_{1\,\alpha_1}$. То есть управление будет именно таким, каким мы его хотели ($\mathrm{Re}\,\{\lambda_i\} = -\alpha_1$). На графике увидим плавное поведение системы, стабилизирующееся к нулю. Для $\alpha_2 = 0.1$ ситуация аналогичная – при $K_{2\,\alpha_2}$ действительная часть комплексной пары почти достигла желаемого ограничения на степень устойчивости. При $K_{2\,\alpha_2}$ результат более хаотичный. Также в каждом спектре наблюдаем неуправляемое число -2, что подтверждает корректность расчетов.

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование для всех замкнутых систем, используя схему `SIMULINK`, представленную на рис. 1. Построим графики $u(t), x(t)$ при начальных условиях

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и сопоставим результаты.

Графики представлены далее на рис. 2–9

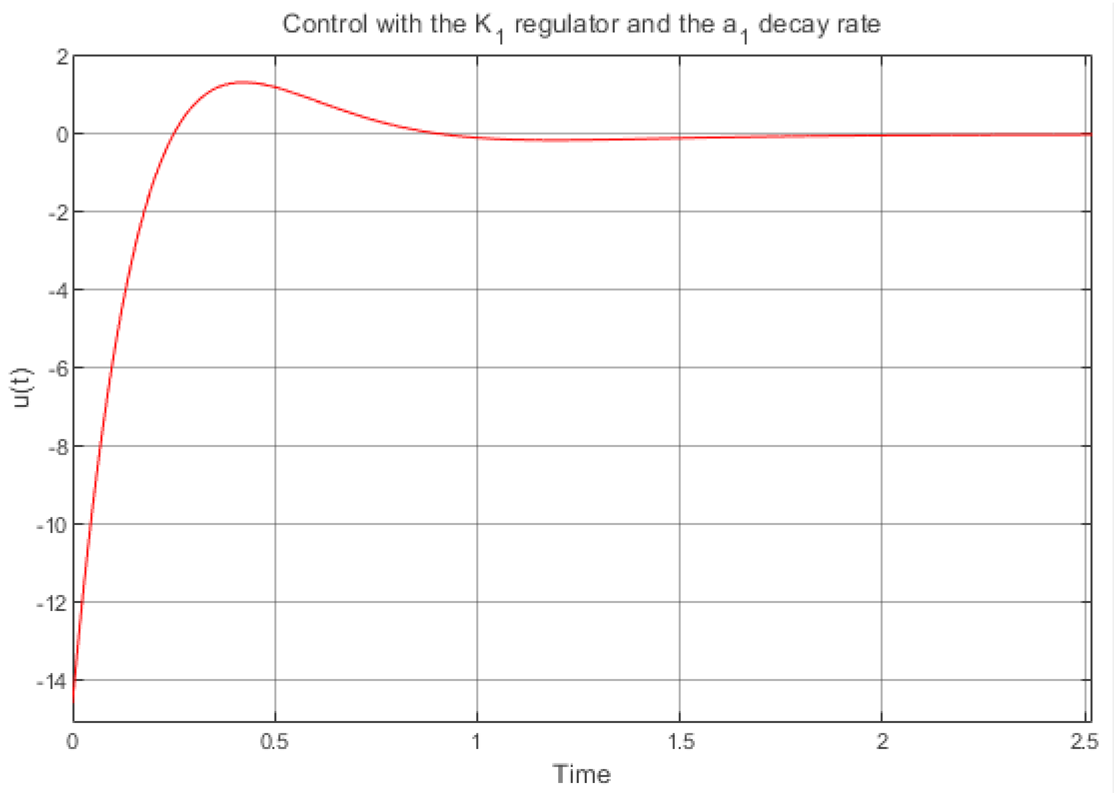

Рис. 2: График $u(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{1\alpha_1}$

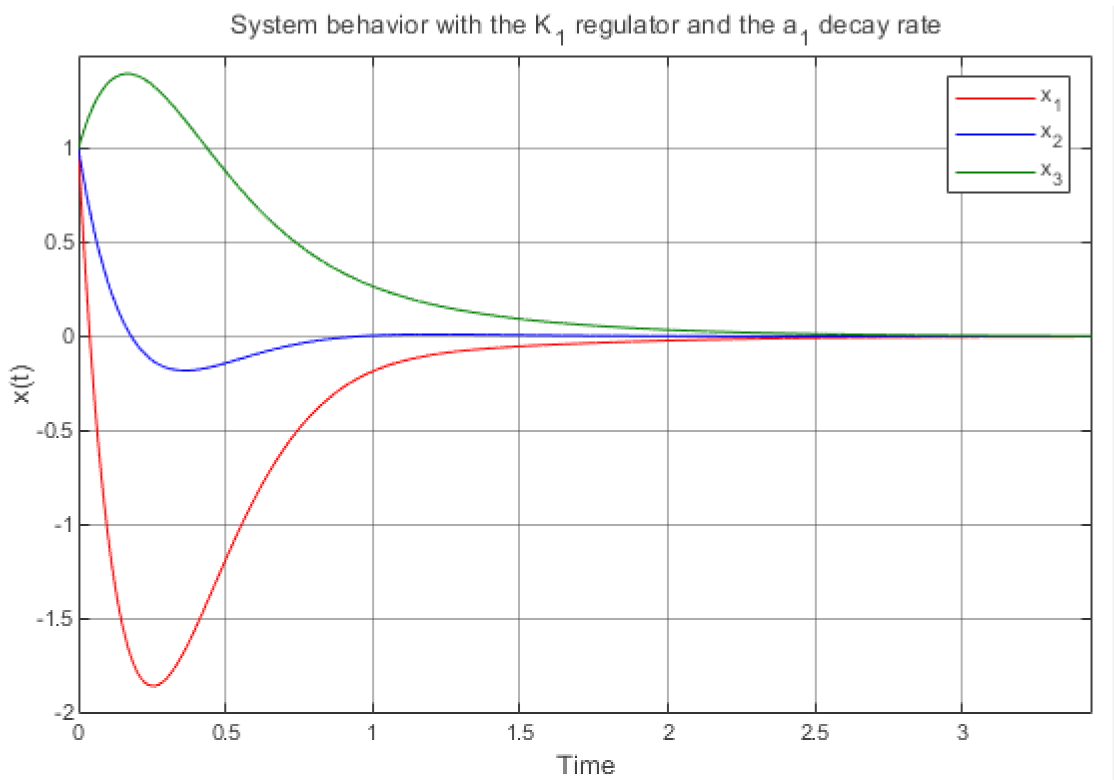

Рис. 3: График $x(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{1\alpha_1}$

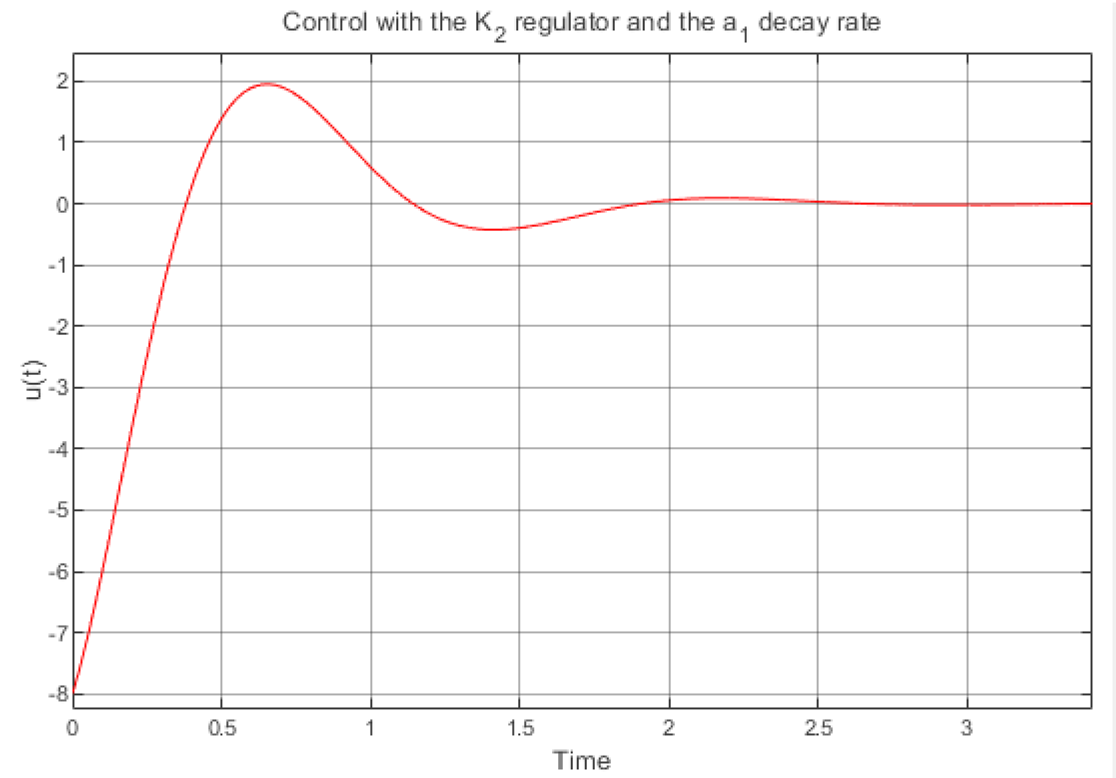

Рис. 4: График $u(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{2\alpha_1}$, $\mu_1 = 8.0090$

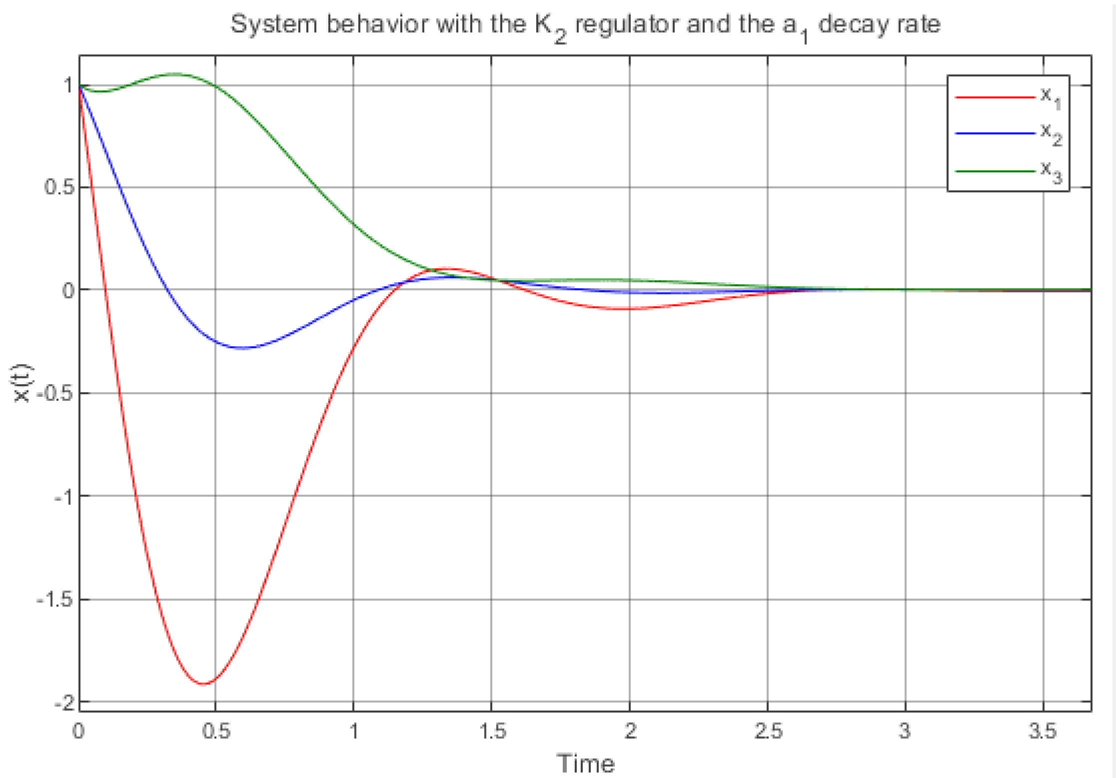

Рис. 5: График $x(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{2\alpha_1}$, $\mu_1 = 8.0090$

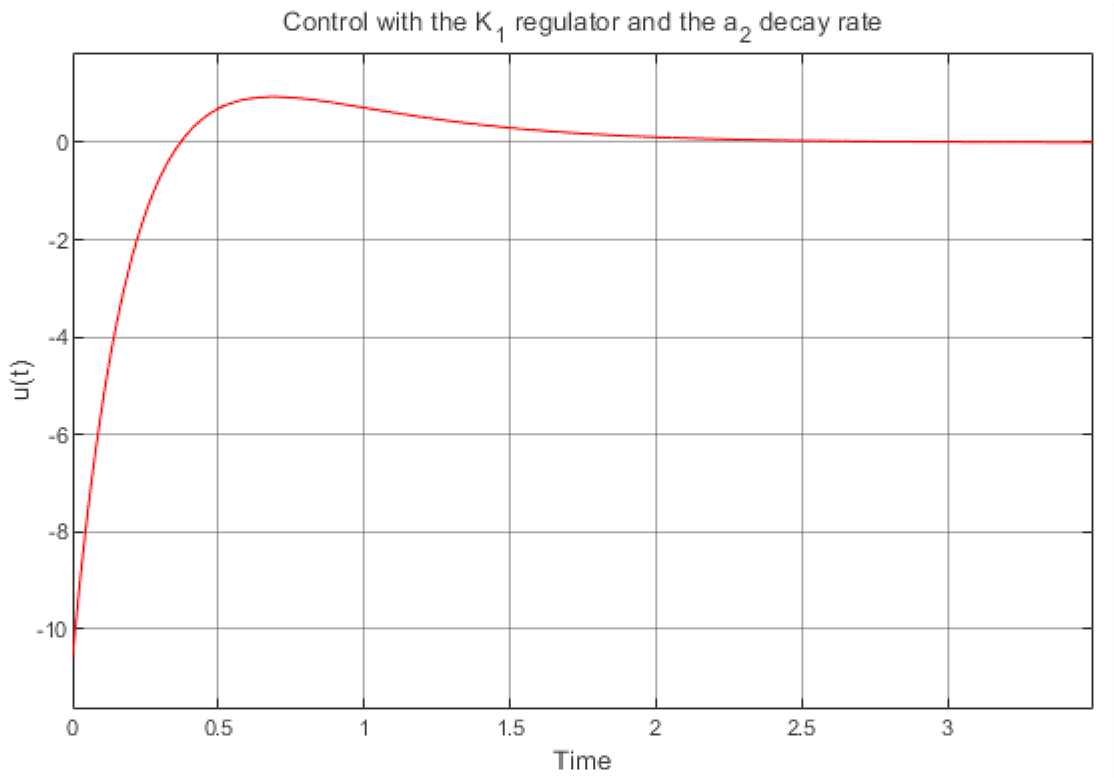

Рис. 6: График $u(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{1\,\alpha_2}$

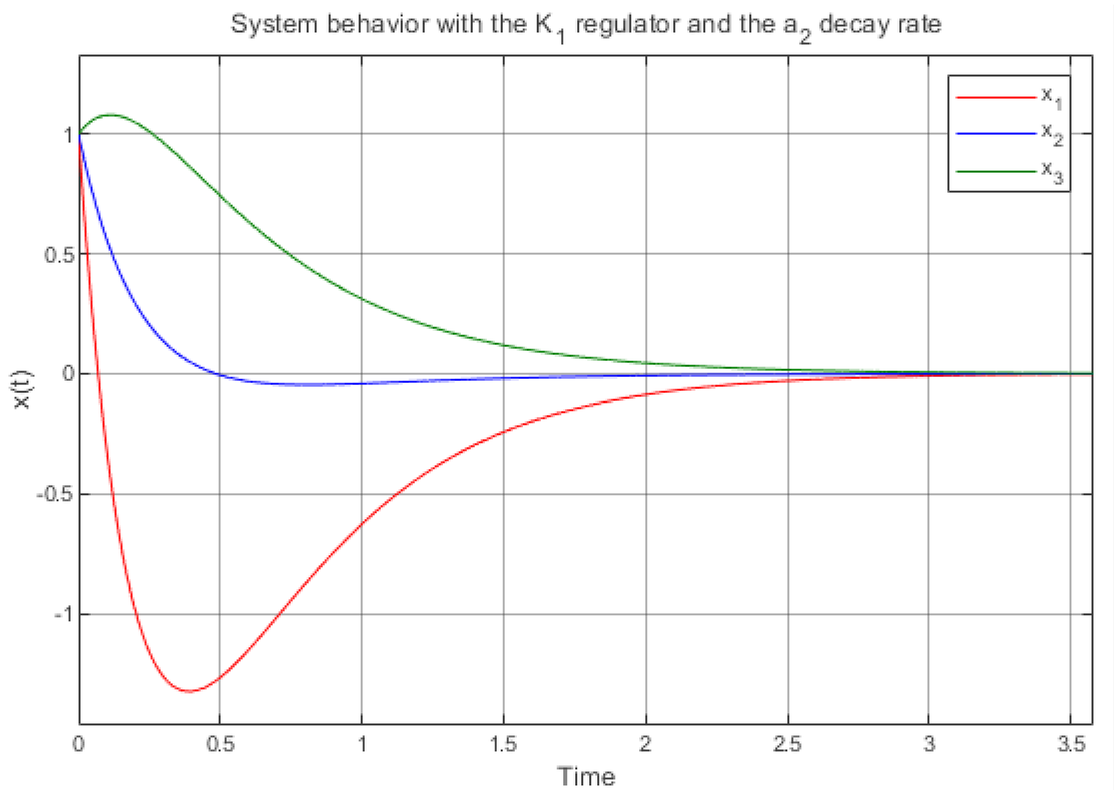

Рис. 7: График $x(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{1\,\alpha_2}$

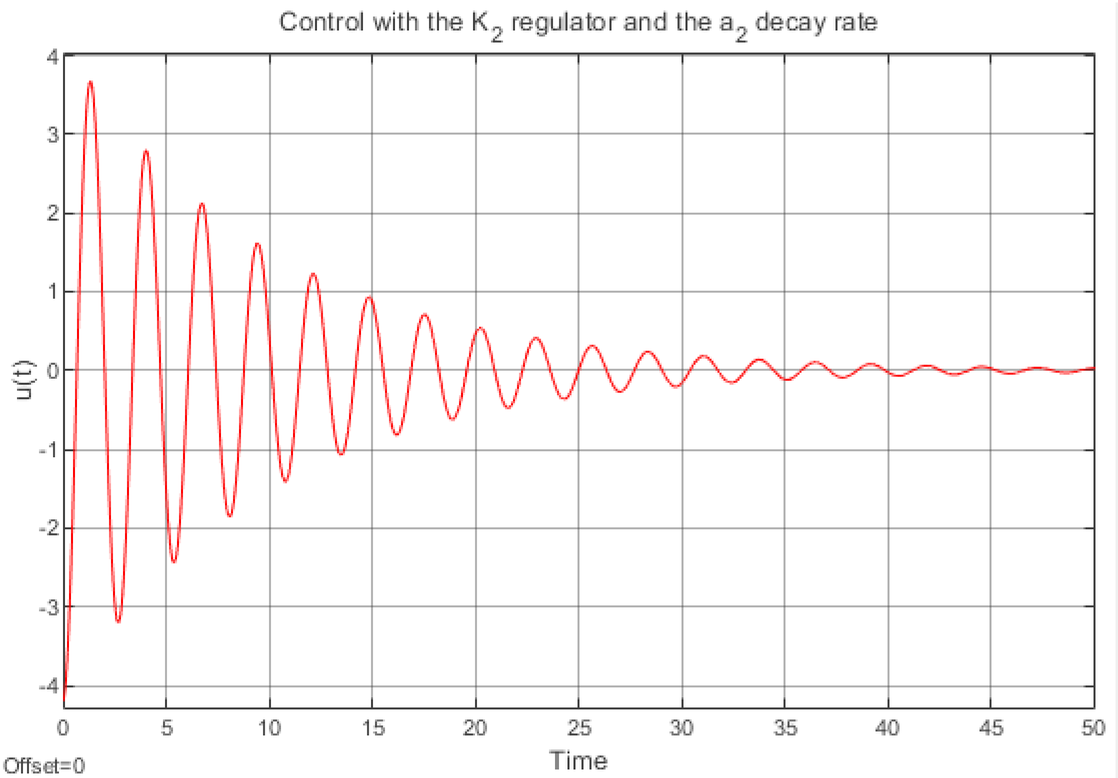

Рис. 8: График $u(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{2\alpha_2}$, $\mu_2 = 4.2015$

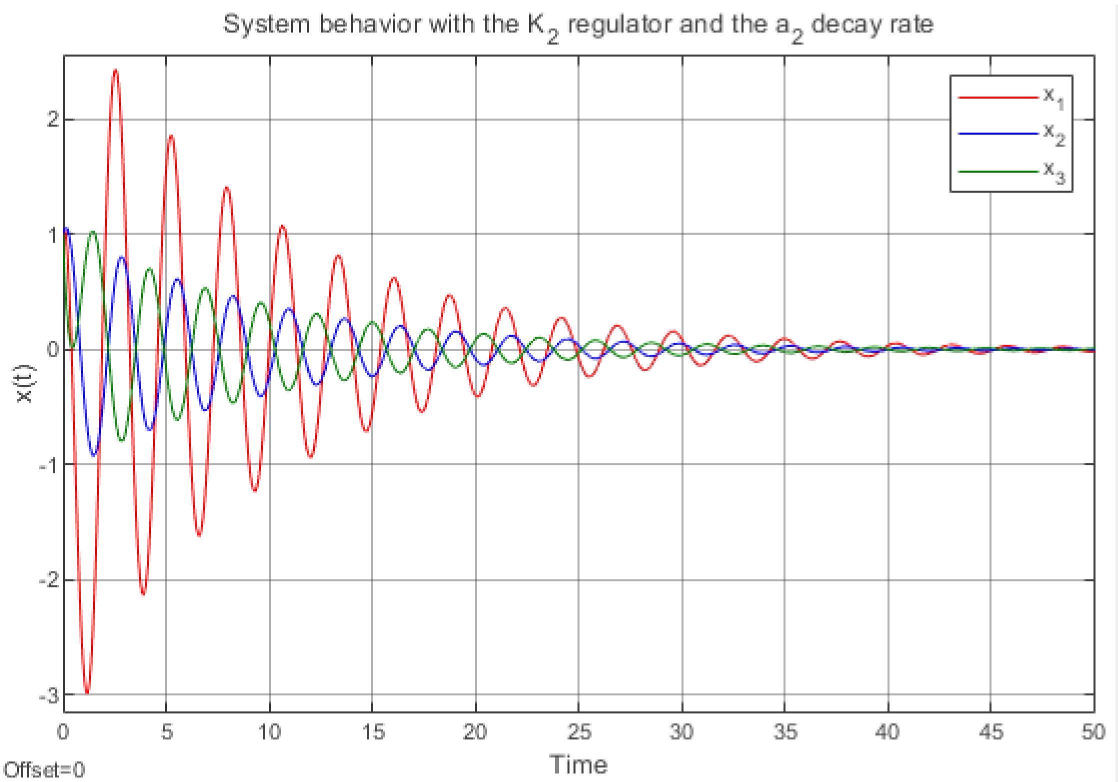

Рис. 9: График $x(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{2\alpha_2}$, $\mu_2 = 4.2015$

Сопоставление результатов

На рис. 4, 8 видим, что систему удается стабилизировать при помощи минимального управления, однако на это уходит больше времени, что наблюдается при сравнении поведения систем на рис. 9, 7. В случае с рис. 5, 3 это менее заметно. В общем результаты без ограничения на управление более гладкие и спокойные, но требуют больше управления.

Синтез регулятора через матричное уравнение типа Риккати

Для каждого α синтезируем регулятор при помощи матричного уравнения типа Риккати при $\nu = 2$ и $R = 1$

$$A^T P + PA + Q - \nu PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P = 0,\ K = -R^{-1}B^T P;$$

Пользуемся `MATLAB`. Найдем матрицы регулятора $K_{3\,\alpha_i}$ при $Q = I$

$$K_{3\,\alpha_1} = \begin{bmatrix} 2.1164 & -13.4942 & 1.6777 \end{bmatrix},$$

$$K_{3\,\alpha_2} = \begin{bmatrix} -0.8455 & -3.3716 & -0.5697 \end{bmatrix};$$

Найдем матрицы регулятора $K_{4\,\alpha_i}$ при $Q = 0$

$$K_{4\,\alpha_1} = \begin{bmatrix} 1.6000 & -11.2000 & 1.6000 \end{bmatrix},$$

$$K_{4\,\alpha_2} = \begin{bmatrix} -0.7560 & -2.6880 & -0.7560 \end{bmatrix};$$

Определим собственные числа замкнутых систем $(A + BK_{j\,\alpha_i})$

$$\begin{gathered} \sigma\left(A + BK_{3\,\alpha_1}\right) = \{-2, -2.4114 \pm 4.3116i\}, \\ \sigma\left(A + BK_{3\,\alpha_2}\right) = \{-2, -0.6692 \pm 2.3797i\}, \\ \sigma\left(A + BK_{4\,\alpha_1}\right) = \{-2, -2.0000 \pm 4.1231i\}, \\ \sigma\left(A + BK_{4\,\alpha_2}\right) = \{-2, -0.1000 \pm 2.3259i\}; \end{gathered}$$

В каждом спектре наблюдаем неуправляемое собственное число -2 – это верно. При $Q = 0$ желаемая степень устойчивости была достигнута – действительные части собственных чисел совпадают с соответствующими α_i. При $Q = I$ результат менее точный, чем при $Q = 0$, однако собственные числа ближе к желаемой степени устойчивости в сравнении с результатами для регуляторов $K_{1\,\alpha_i}$. Спектр $A+BK_{4\,\alpha_1}$ полностью совпадает с результатом для $K_{2\,\alpha_1}$, а в случае с α_2 – почти полностью. В общем решение через матричное уравнение типа Риккати дает более точные результаты.

Компьютерное моделирование для дополнительного пункта

Для замкнутых систем $A + BK_{j\,\alpha_i}$ выполним компьютерное моделирование – построим графики $u(t), x(t)$ при начальных условиях

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для $A + BK_{4\,\alpha_1}$ графики строить избыточно – результаты полностью совпали с результатом для $A + BK_{2\,\alpha_1}$. Достаточно посмотреть на рис. 4, 5.

Далее расположены графики $u(t), x(t)$, смоделированные по схеме, представленной на рис. 1

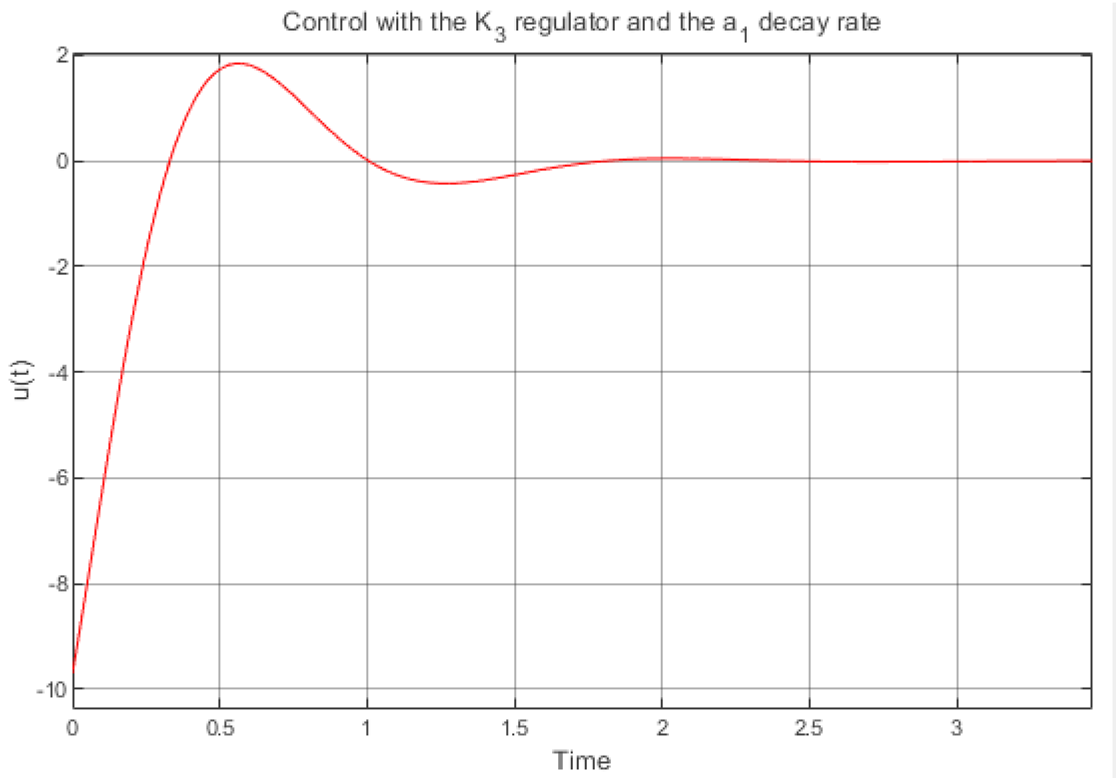

Рис. 10: График $u(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{3\alpha_1}$

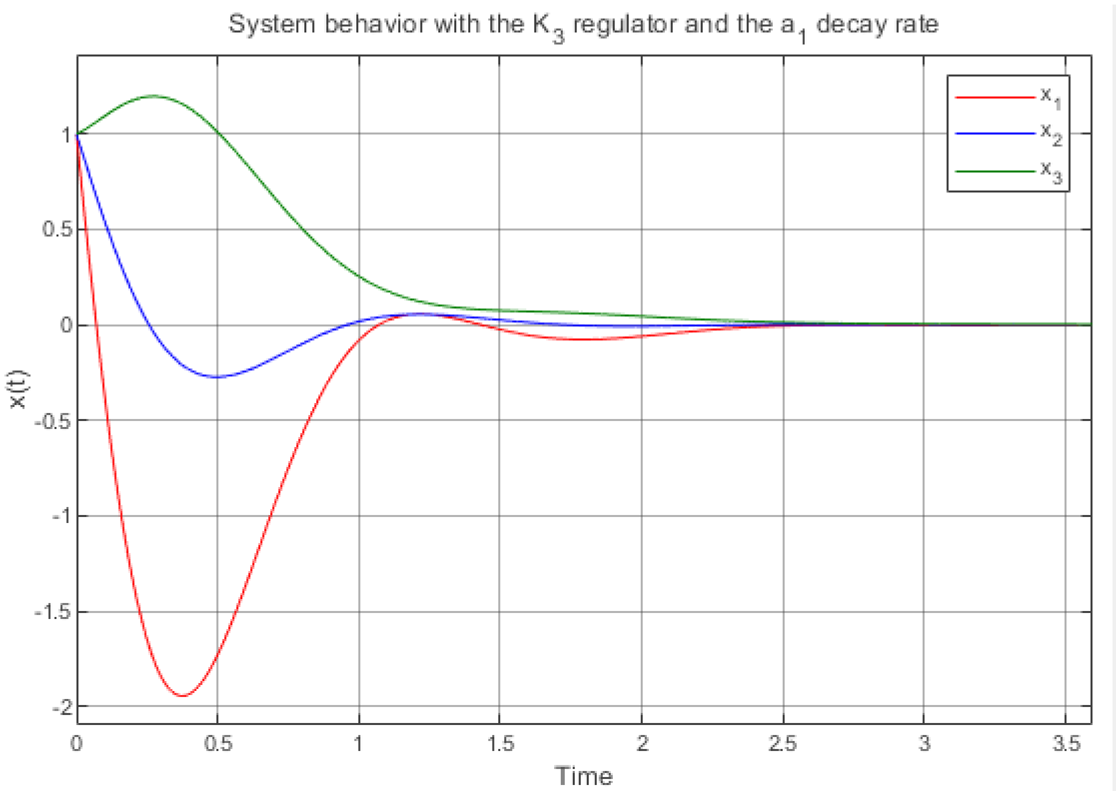

Рис. 11: График $x(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{3\alpha_1}$

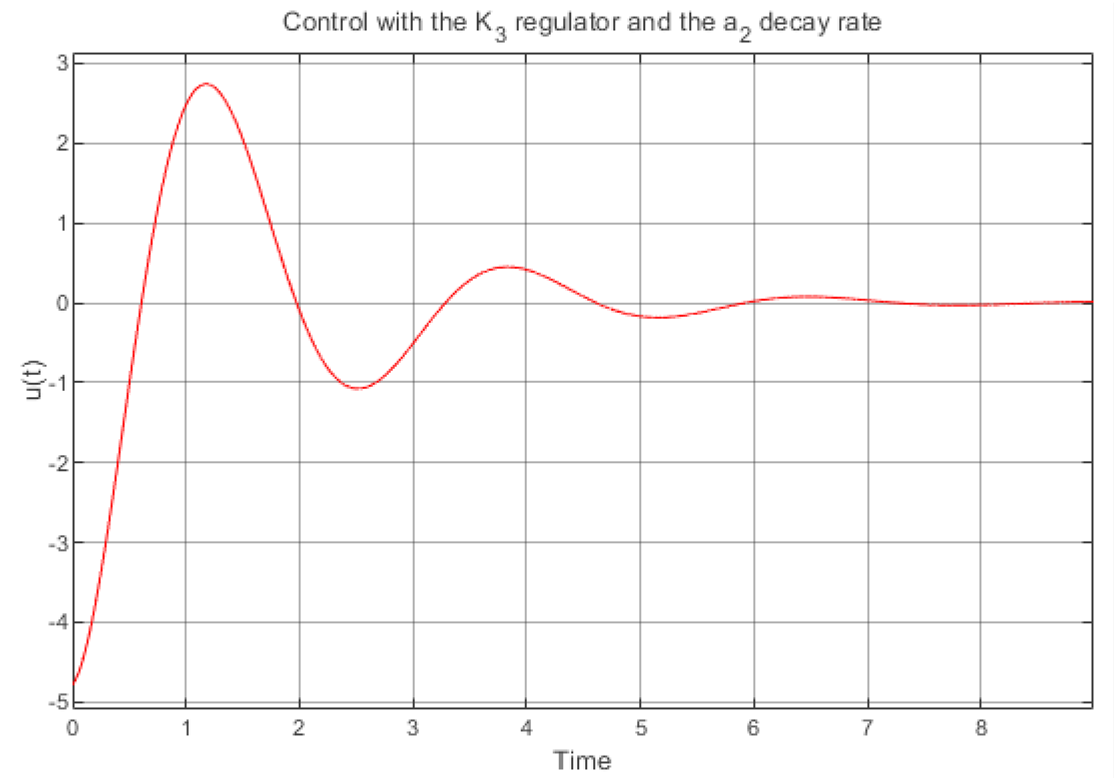

Рис. 12: График $u(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{3\alpha_2}$

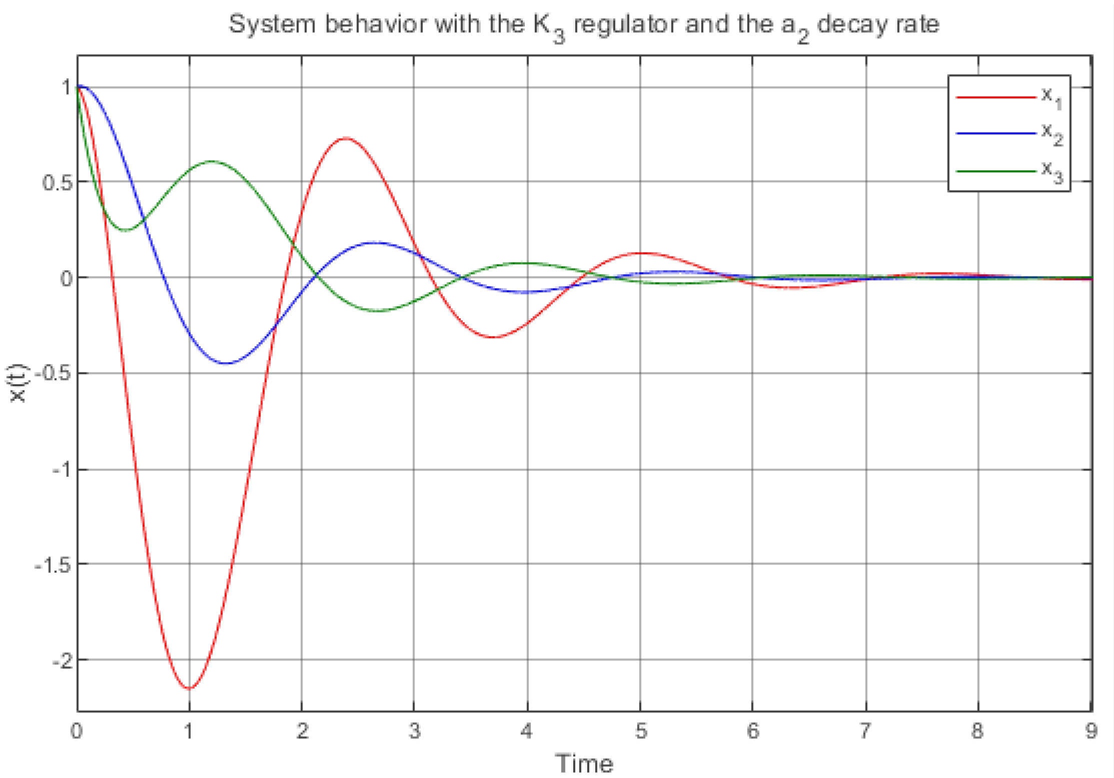

Рис. 13: График $x(t)$ для $\alpha_1 = 0.1$ при $K_{3\alpha_2}$

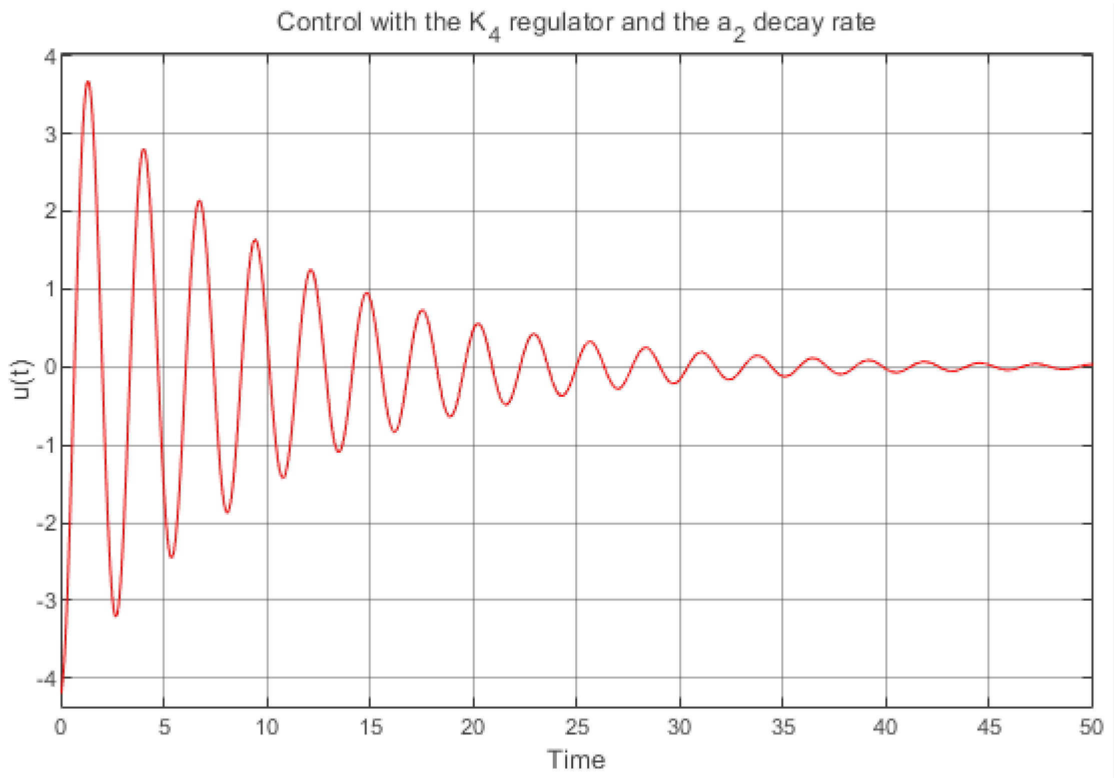

Рис. 14: График $u(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{4\alpha_2}$

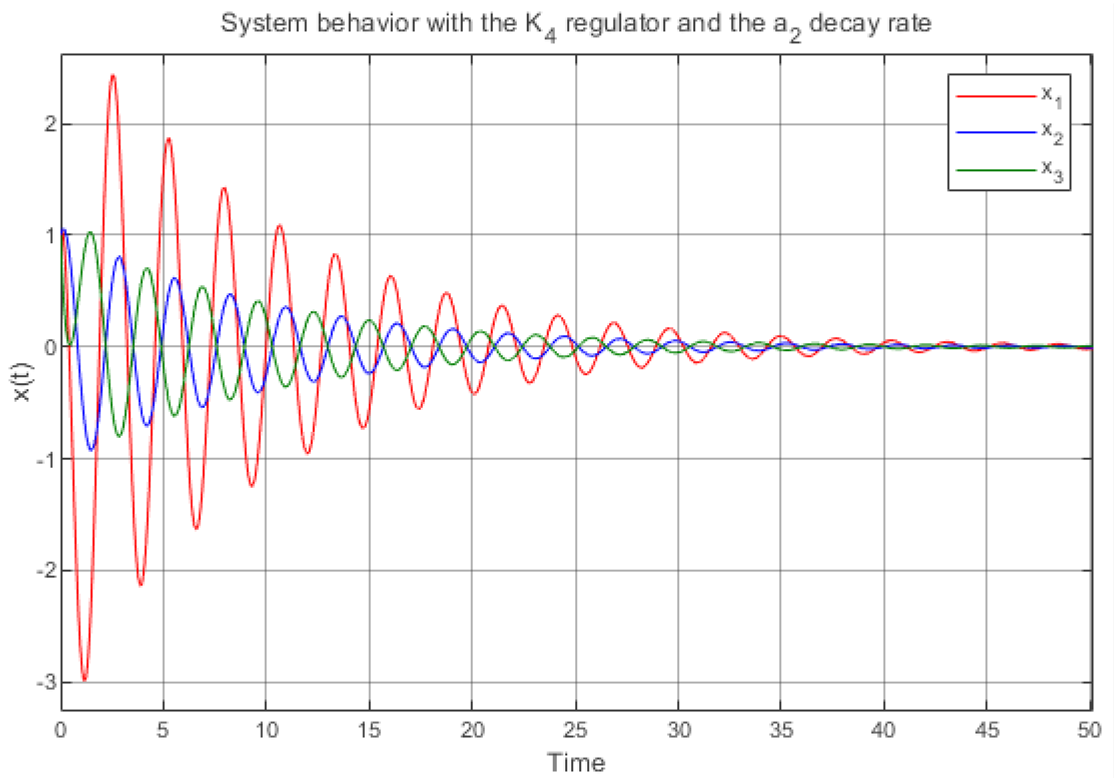

Рис. 15: График $x(t)$ для $\alpha_1 = 0.1$ при $K_{4\alpha_2}$

Сопоставление результатов для дополнительного пункта

Видим, что в случаях с K_4 система приобретает больше осцилляций, чем с K_3 (сравн. рис. 5, 11 и 15, 13). Время схождения системы к нулю быстрее с K_3, однако с K_4 требуется меньше управления. В общем графики почти совпадают с результатами для $K_{1,2}$ (в случае $K_{4\alpha_1}$ результаты полностью совпали с $K_{2\alpha_1}$). Таким образом, можно предположить, что синтез регулятора через матричное уравнение Риккати почти решает задачу минимизации управления.

Вывод

В данном задании был исследован синтез регулятора через матричное неравенство типа Ляпунова и матричное уравнение типа Риккати. Были получены графики, подтверждающие корректность расчетов и рассуждений. Удалось получить желаемую степень устойчивости с помощью неограниченного и минимального управлений. Результат решения через Риккати напоминает результат решения задачи минимизации управления.

Задание 2. Управление по выходу с заданной степенью устойчивости

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

Управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость и обнаруживаемость

Найдем собственные числа матрицы A. Программа для вычислений в `MATLAB` представлена на листинге 2 в приложении 2

$$\sigma(A) = \{0, -4, 4, 8\}$$

Собственное число $\lambda_2 = -4$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым и/или ненаблюдаемым. $\lambda_1 = 0$ устойчиво, но не асимптотически. Числа $\lambda_{3,4} > 0$ неустойчивые, нужна управляемость и наблюдаемость. Аналогично первому заданию найдем жорданово разложение матрицы A и матрицы B, C в базисе ее собственных векторов

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & -0.25 & -0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & -0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix},$$

$$B_J = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \; C_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. В матрице B_J отсутствуют нулевые элементы – все собственные числа управляемые. Следовательно, система полностью управляема и стабилизируема. В матрице C_J второй столбец нулевой – асимптотически устойчивое число -4 является ненаблюдаемым. Система не полностью наблюдаема, но обнаруживаема.

Степень устойчивости

Так как система полностью управляема, то с помощью регулятора вида $u = Kx$ можно добиться любой желаемой степени устойчивости.

Степень сходимости

Так как система не полностью наблюдаема, то от наблюдателя полной размерности не получится добиться любой желаемой степени сходимости. Максимально возможная $\alpha_L = 4$, так как ненаблюдаемое собственное число $\lambda_2 = -4$.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния и закона управления

Построим схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L\left(C\hat{x} - y\right)$ и закона управления $u = K\hat{x}$, используя `SIMULINK`. Данная схема позволяет построить график $u(t)$ и покомпонентно графики $e(t), (x(t), \hat{x}(t))$

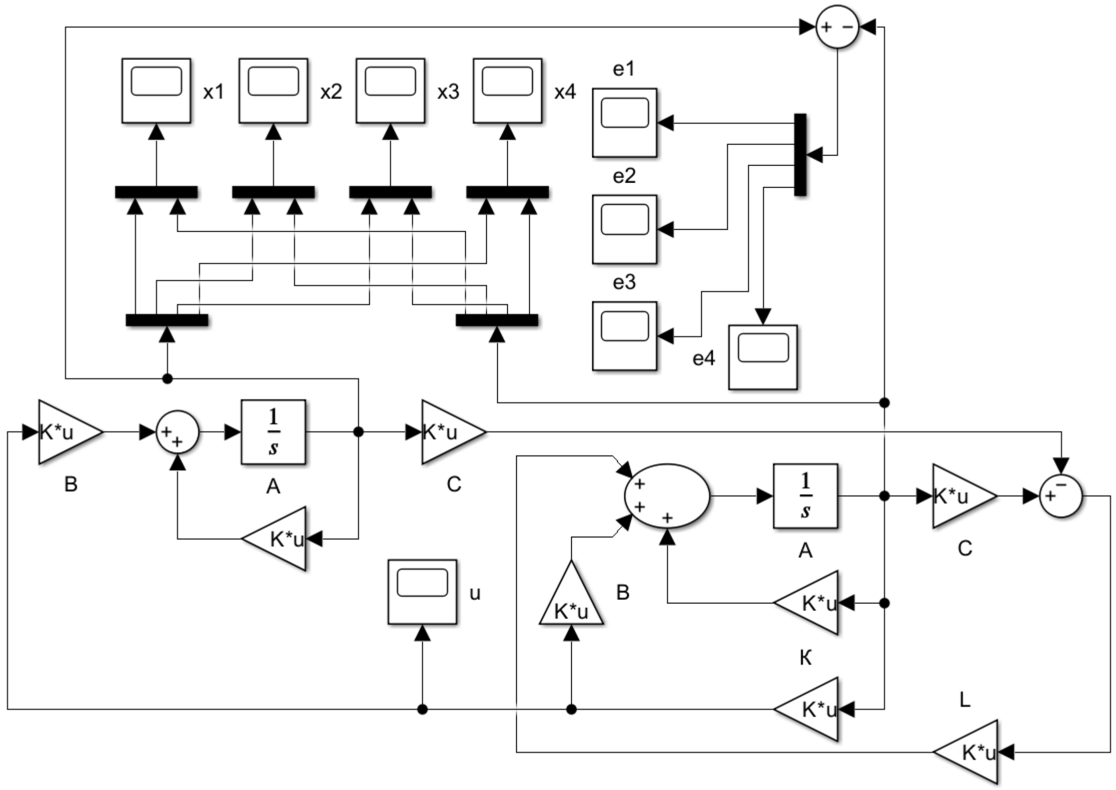

Рис. 16: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния и закона управления

Желаемые значения степени устойчивости и сходимости

Зададимся парой значений $\alpha > 0$, которые будут сильно отличаться, при этом одно из них будет максимально возможным, другое достижимым

$$\alpha_1 = 4,$$
$$\alpha_2 = 1;$$

Наборы значений желаемой степени устойчивости и сходимости

Составим 3 набора значений желаемых степеней устойчивости α_K и сходимости α_L

$$\alpha_K = \alpha_L = 4$$
$$\alpha_K > \alpha_L \Leftrightarrow 4 > 1$$
$$\alpha_K < \alpha_L \Leftrightarrow 1 < 4$$

Синтез регулятора

Процесс вычислений аналогичен первому заданию. Используем метод уравнений Риккати и `MATLAB`. Будем подбирать матрицу Q, при которой отклонения собственных чисел спектра замкнутой системы от желаемой степени устойчивости будут минимизированы.

Вычислим K_{α_1} для $\alpha_K = 4$ при $Q = 0$, $\nu = 2$, $R = 1$

$$K_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} -24.5000 & -5.5000 & 20.5000 & -9.5000 \end{bmatrix}$$

Проверим собственные числа замкнутой системы $A + BK_{\alpha_1}$

$$\sigma\left(A + BK_{\alpha_1}\right) = \{-4, -4, -4.0000 \pm 13.2665i\}$$

Действительные части всех собственных чисел совпадают с желаемой степенью устойчивости $\alpha_K = 4$. Регулятор синтезирован корректно.

Вычислим K_{α_2} для $\alpha_K = 1$ при $Q = 0.000001 \cdot I$, $\nu = 2$, $R = 1$:

$$K_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} -6.7188 & -3.1250 & 6.4063 & -3.4375 \end{bmatrix}$$

Выполним аналогичную проверку замкнутой системы

$$\sigma\left(A + BK_{\alpha_2}\right) = \{-4, -1, -1.0000 \pm 7.6812i\}$$

Действительные части трех собственных чисел совпадают с желаемой степенью устойчивости $\alpha_K = 1$. Одно из чисел всегда остается равным -4. Можем сделать вывод, что регулятор синтезирован корректно.

Синтез наблюдателя

Матрицы наблюдателя L будем искать с помощью матричных неравенств

$$Q \succ 0,\ A^T Q + QA + 2\alpha Q + C^T Y^T + YC \prec 0,\ L = Q^{-1} Y;$$

Алгоритм минимизации аналогичен первому заданию, разве что γ уже будет не скаляр, а матрица размера 2×2. Минимизировать будем ее норму. Решаем через `cvx`.

Так как размерность выхода C другая, то и Y станет другой размерности – 4×2. Для вычисления также понадобятся начальные условия для системы и наблюдателя

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Вычислим L_{α_1} для $\alpha_L = 4$

$$L_{\alpha_1} = \begin{bmatrix} 2.2450 & -4.0000 \\ -0.1281 & -8.0000 \\ -2.1222 & 8.0000 \\ -0.0089 & -4.0000 \end{bmatrix}$$

Проверим собственные числа замкнутой системы $A + BL_{\alpha_1}$

$$\sigma\left(A + BL_{\alpha_1}\right) = \{-5.0084, -4, -4.0000 \pm 6.9282i\}$$

Действительные части собственных чисел близки к желаемой степени сходимости $\alpha_L = 4$. Наблюдатель синтезирован корректно.

Вычислим L_{α_2} для $\alpha_L = 1$

$$L_{\alpha_2} = \begin{bmatrix} 1.3693 & -2.5000 \\ -0.0350 & -3.1253 \\ -1.3365 & 3.1273 \\ 0.0021 & -2.5020 \end{bmatrix}$$

Выполним аналогичную проверку замкнутой системы

$$\sigma\left(A + BL_{\alpha_2}\right) = \{-4, -1.4772, -1.0020 \pm 3.0000i\}$$

Действительные части собственных чисел близки к желаемой степени сходимости $\alpha_L = 1$. Наблюдаем в спектре неуправляемое собственное число $\lambda_1 = -4$ матрицы A. Можем сделать вывод, что наблюдатель синтезирован корректно.

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование с начальными условиями системы

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и наблюдателя

$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Построим графики формируемого управления $u(t)$, сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ (покомпонентно), а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$. Для построения пользуемся схемой, представленной на рис. 16.

Далее расположены перечисленные графики на рис. 17–43

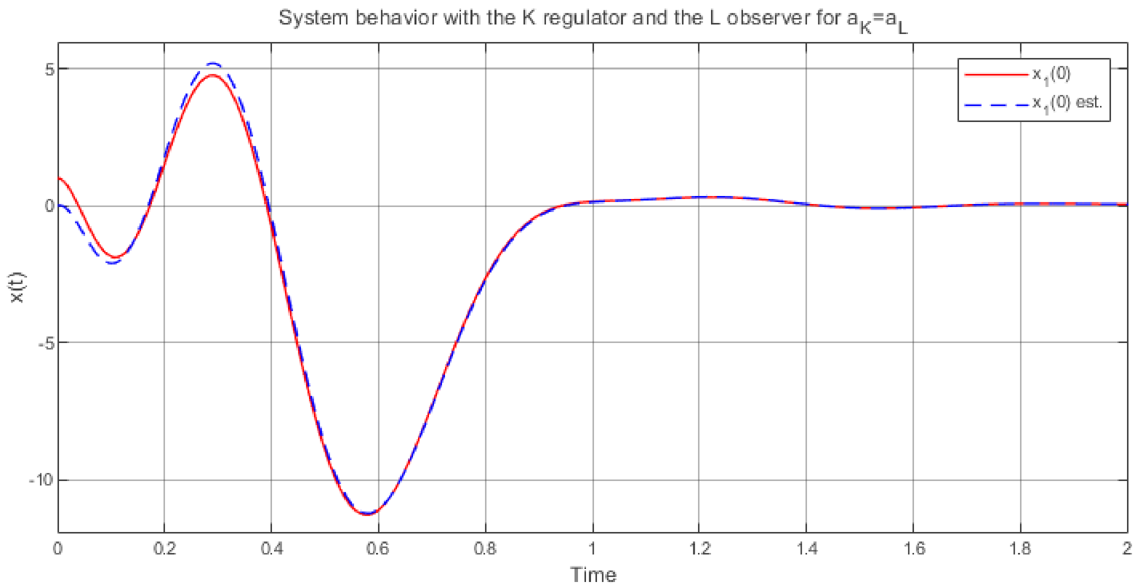

Рис. 17: Графики $x_1(t), \hat{x}_1(t)$ для $\alpha_K = \alpha_L = 4$

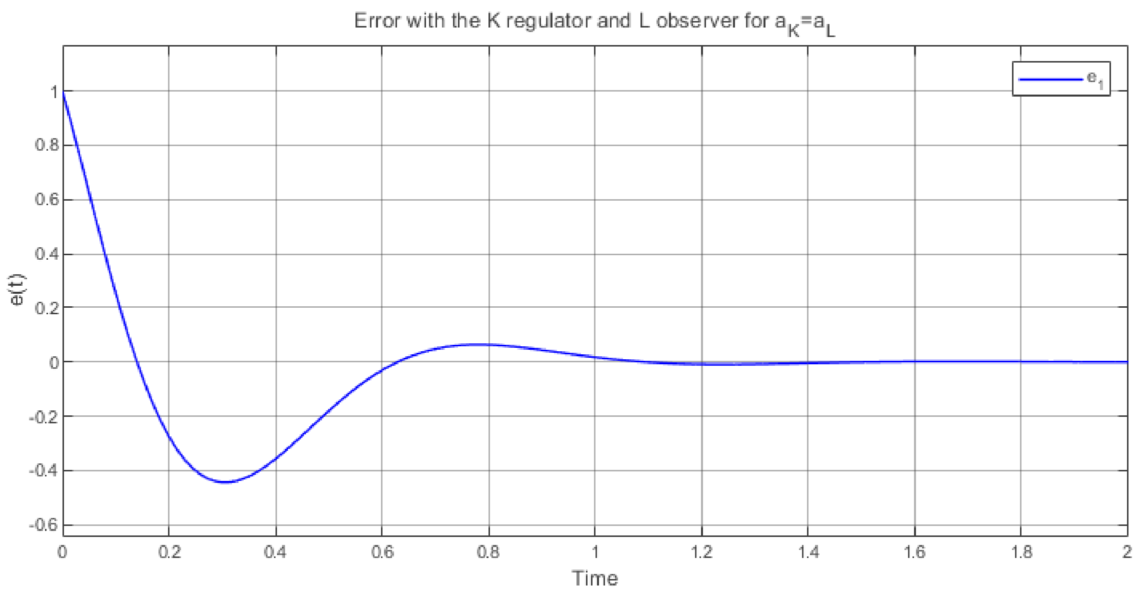

Рис. 18: График $e_1(t)$ для $\alpha_K = \alpha_L = 4$

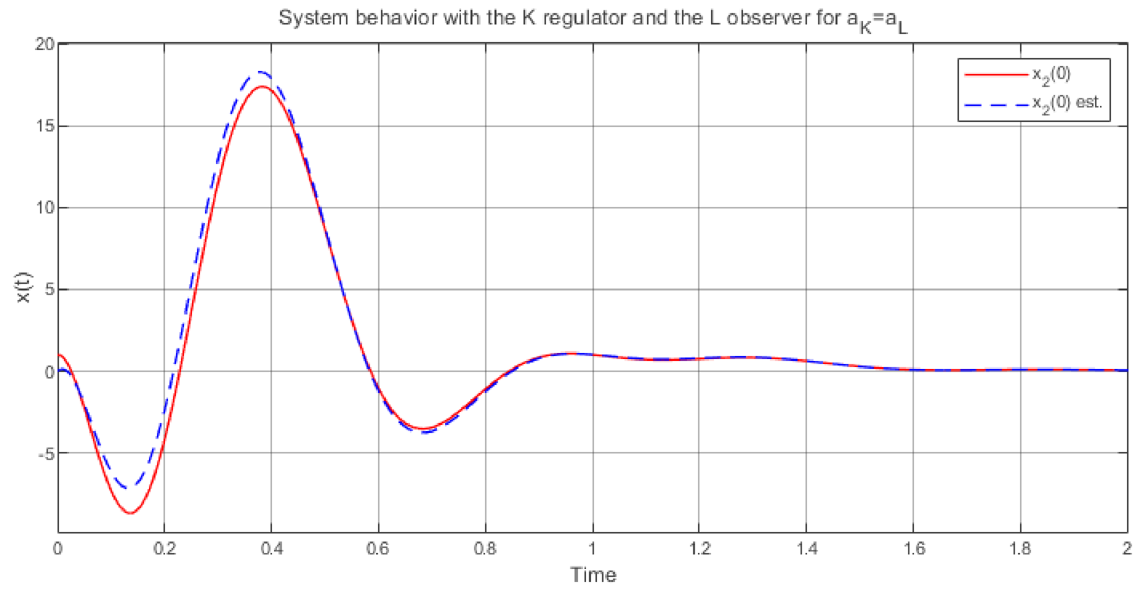

Рис. 19: Графики $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ для $\alpha_K = \alpha_L = 4$

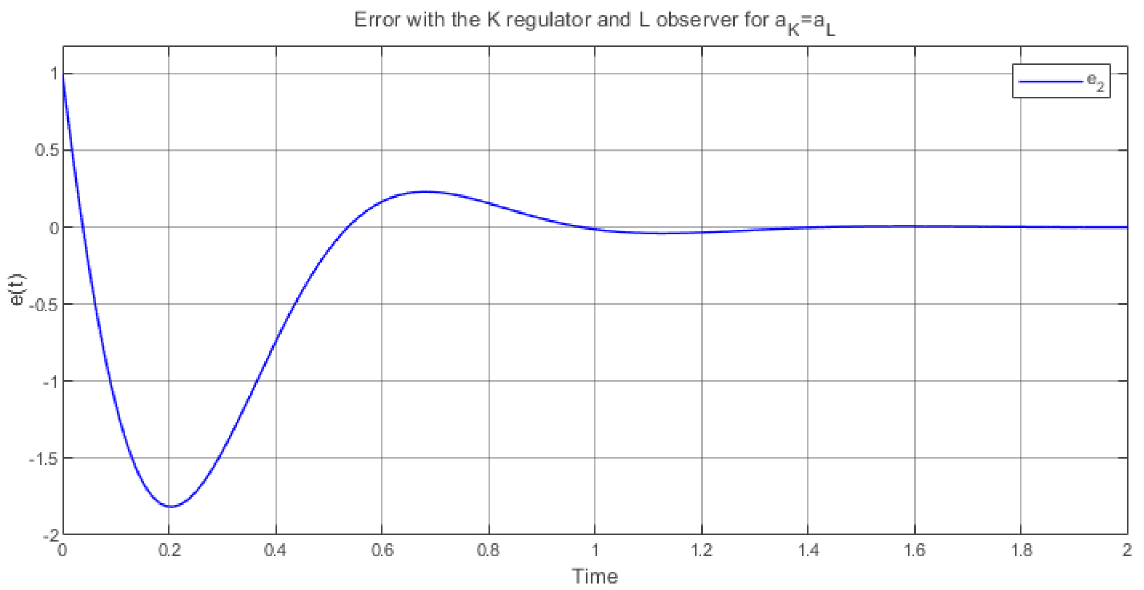

Рис. 20: График $e_2(t)$ для $\alpha_K = \alpha_L = 4$

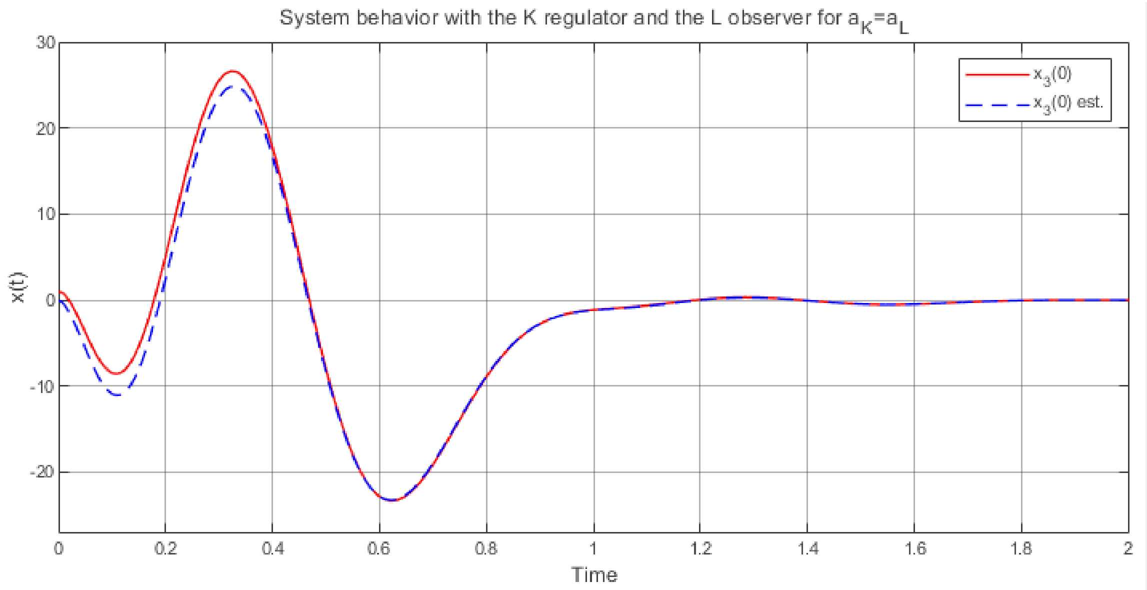

Рис. 21: Графики $x_3(t), \hat{x}_3(t)$ для $\alpha_K = \alpha_L = 4$

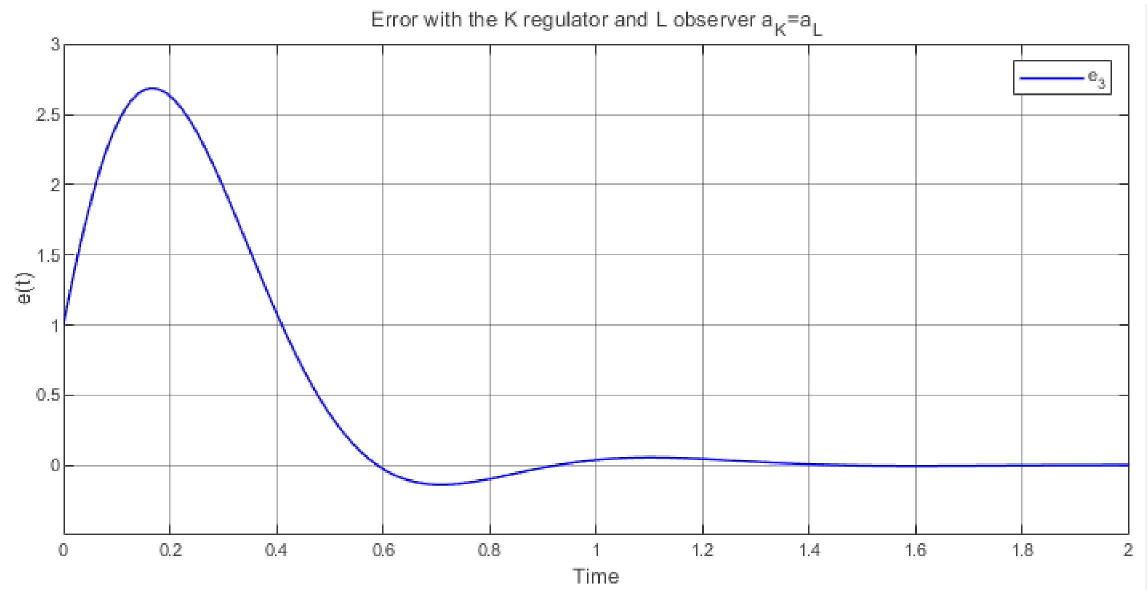

Рис. 22: График $e_3(t)$ для $\alpha_K = \alpha_L = 4$

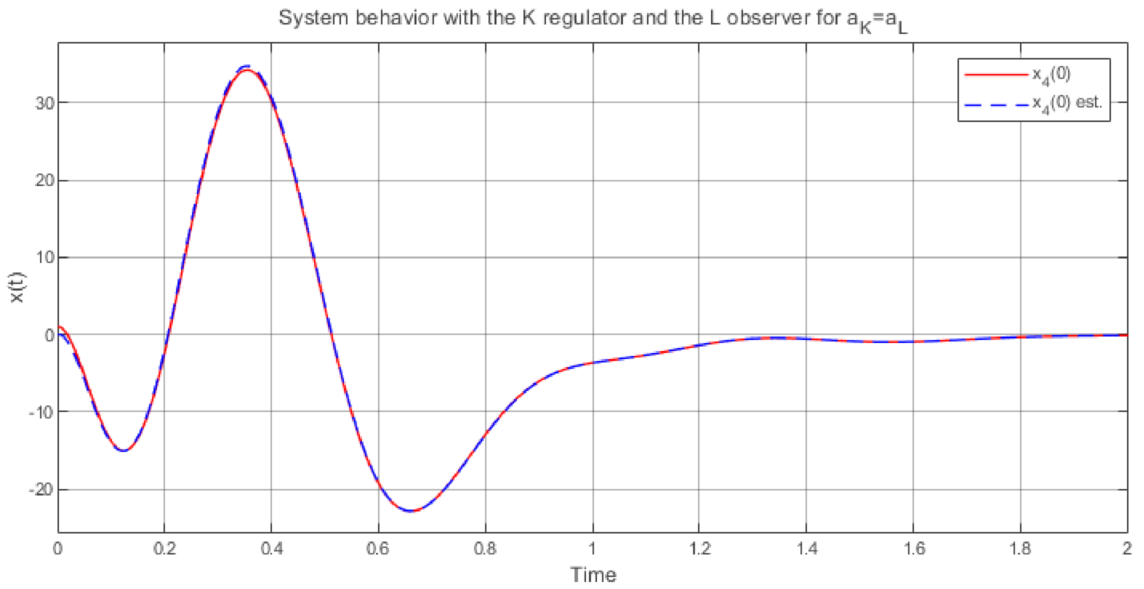

Рис. 23: Графики $x_4(t), \hat{x}_4(t)$ для $\alpha_K = \alpha_L = 4$

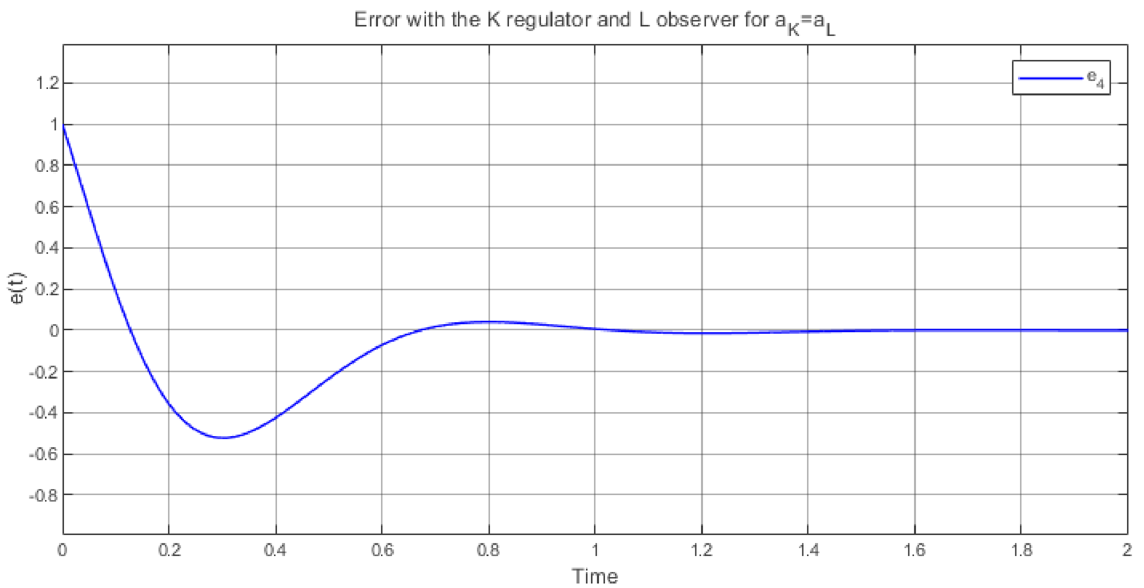

Рис. 24: График $e_4(t)$ для $\alpha_K = \alpha_L = 4$

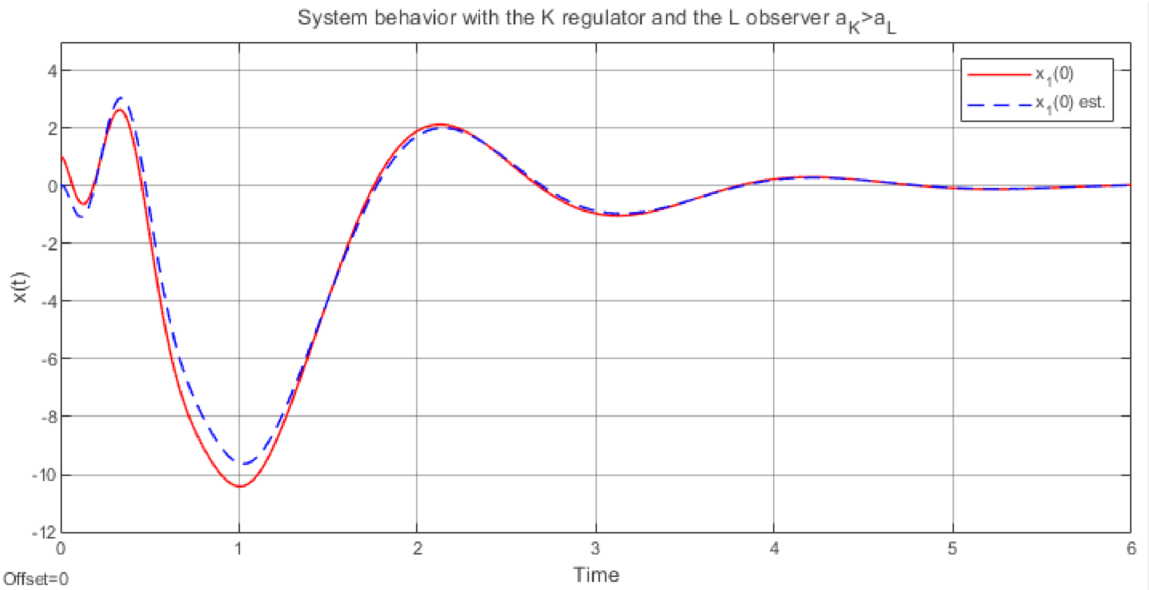

Рис. 25: Графики $x_1(t), \hat{x}_1(t)$ для $\alpha_K > \alpha_L \Leftrightarrow 4 > 1$

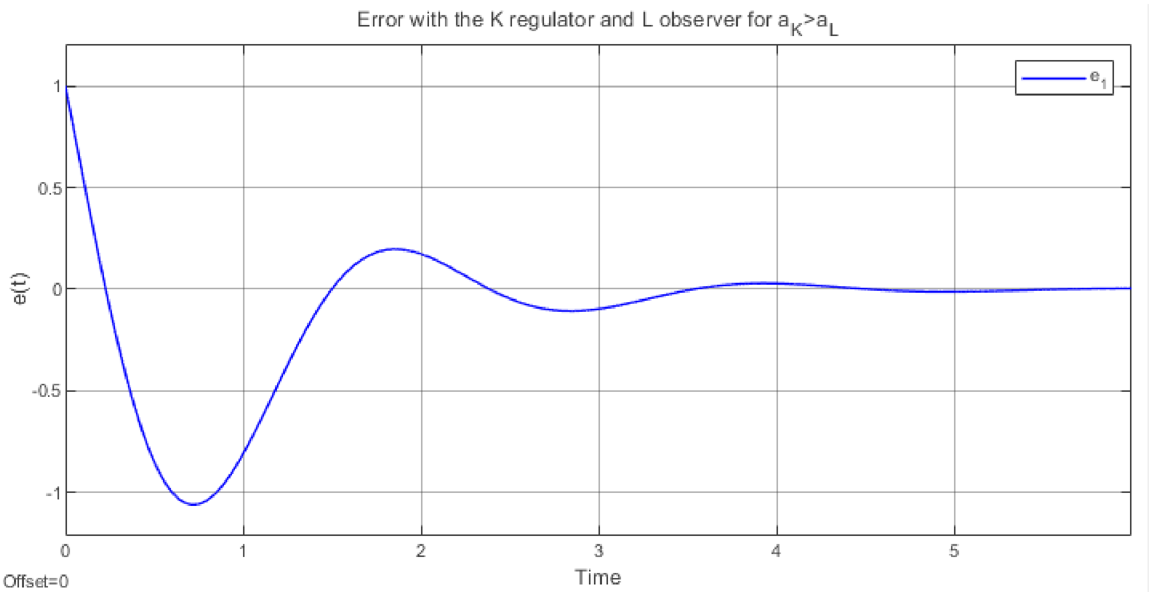

Рис. 26: График $e_1(t)$ для $\alpha_K > \alpha_L \Leftrightarrow 4 > 1$

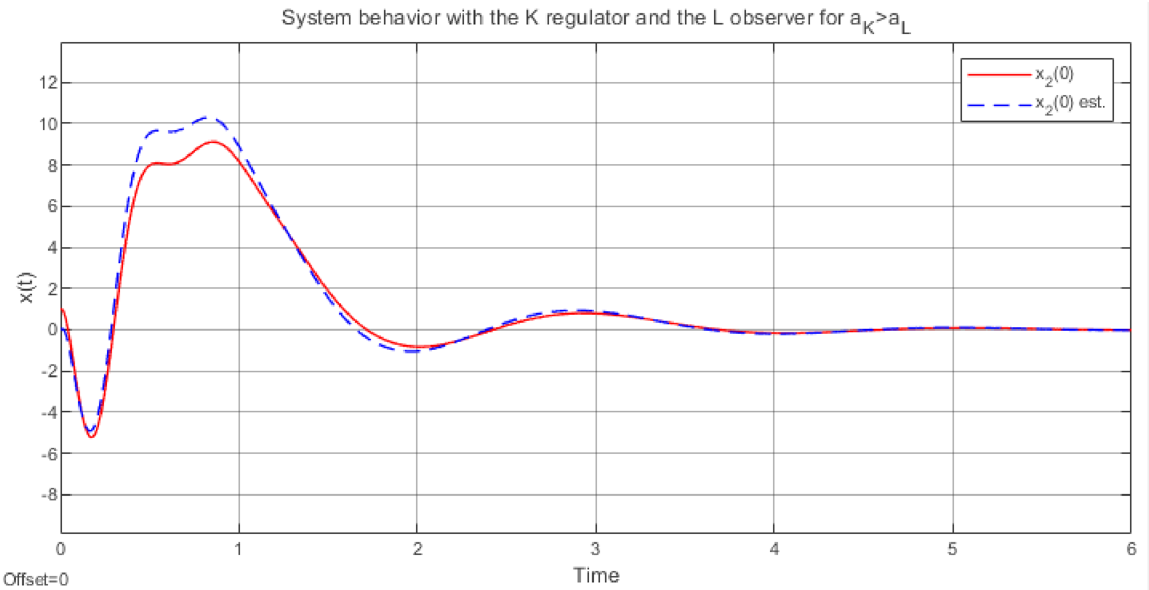

Рис. 27: Графики $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ для $\alpha_K > \alpha_L \Leftrightarrow 4 > 1$

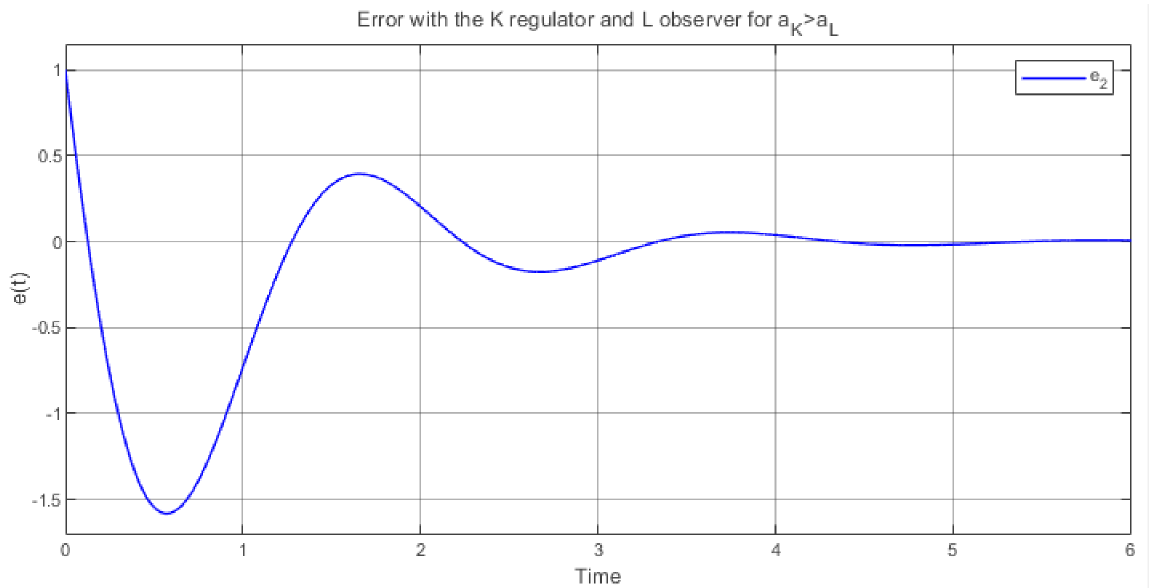

Рис. 28: График $e_2(t)$ для $\alpha_K > \alpha_L \Leftrightarrow 4 > 1$

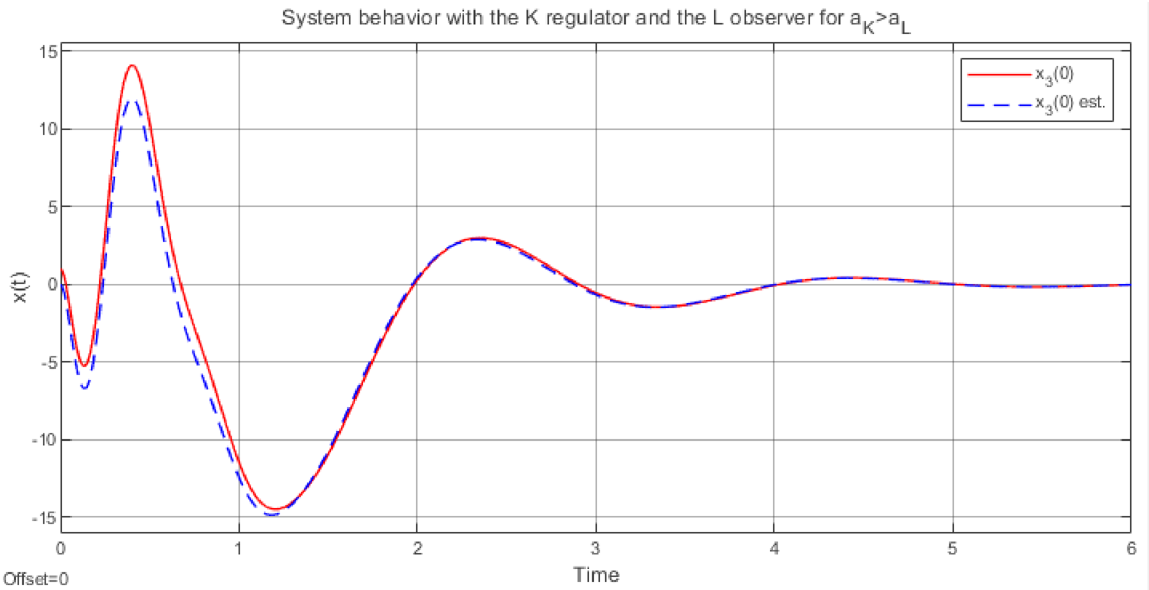

Рис. 29: Графики $x_3(t), \hat{x}_3(t)$ для $\alpha_K > \alpha_L \Leftrightarrow 4 > 1$

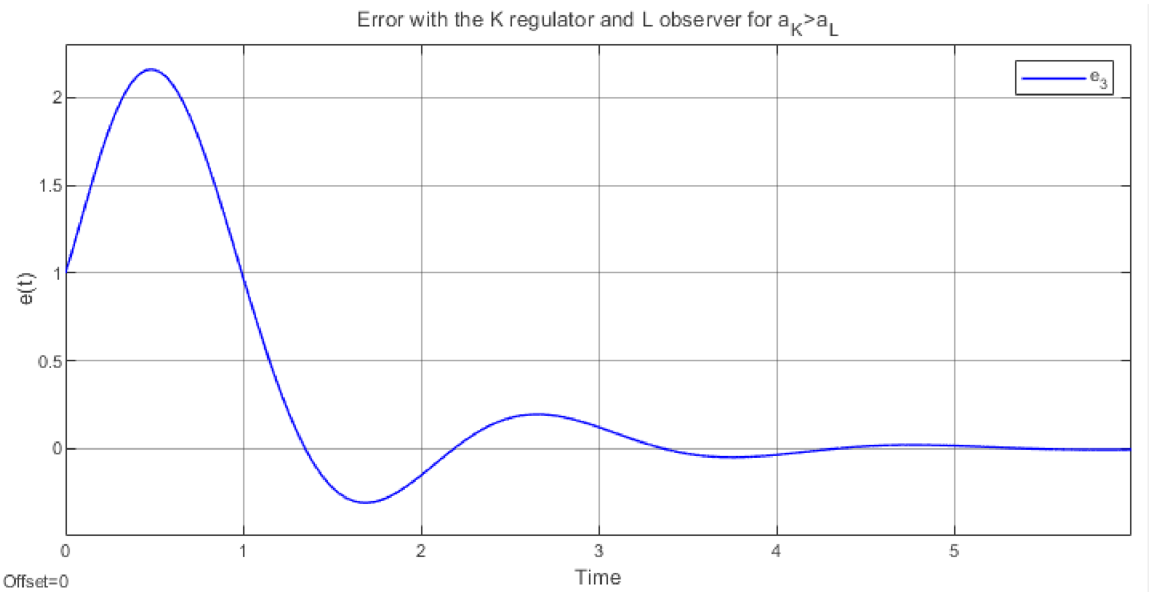

Рис. 30: График $e_3(t)$ для $\alpha_K > \alpha_L \Leftrightarrow 4 > 1$

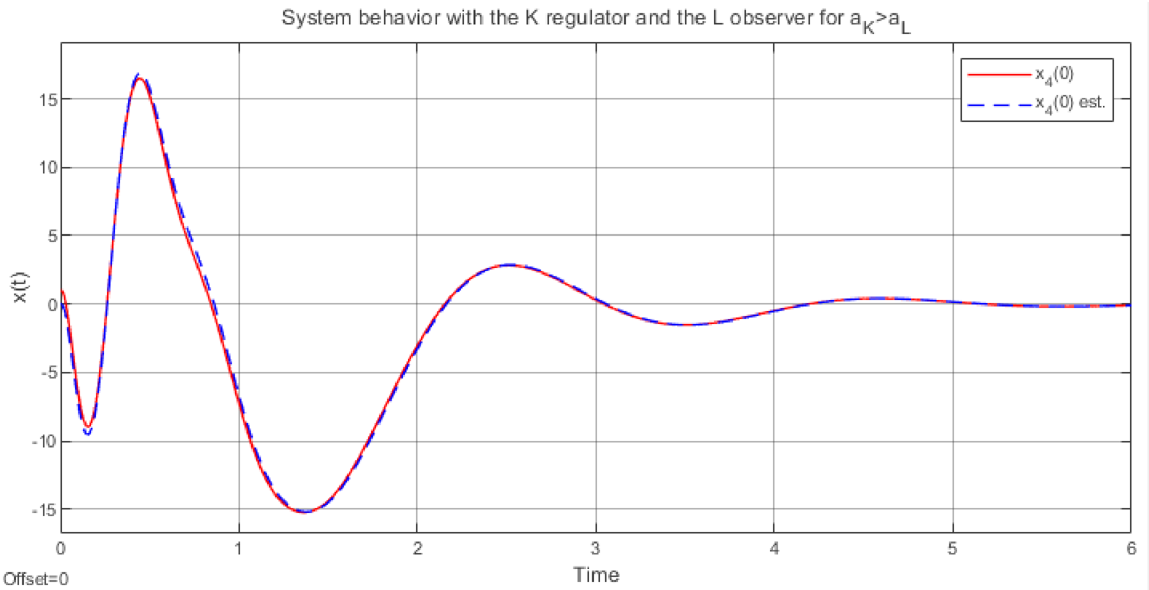

Рис. 31: Графики $x_4(t), \hat{x}_4(t)$ для $\alpha_K > \alpha_L \Leftrightarrow 4 > 1$

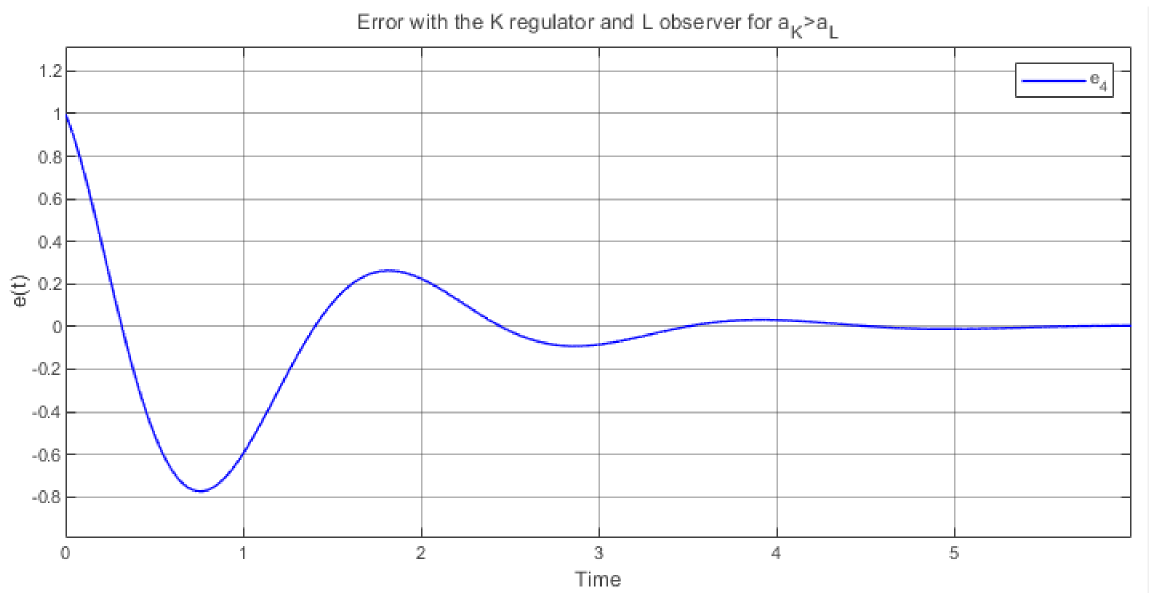

Рис. 32: График $e_4(t)$ для $\alpha_K > \alpha_L \Leftrightarrow 4 > 1$

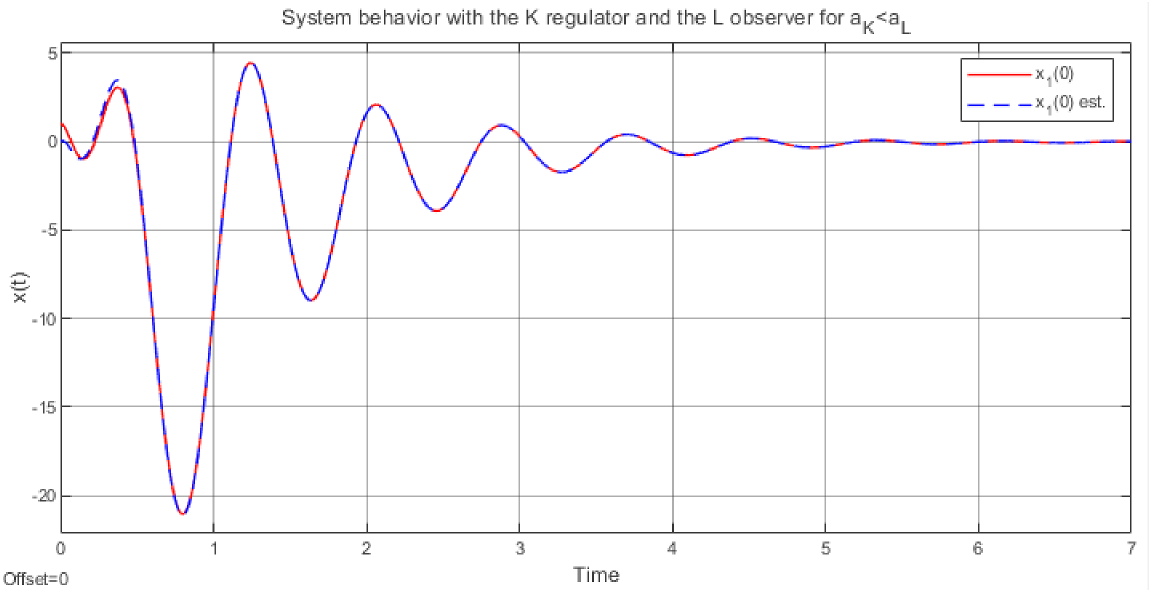

Рис. 33: Графики $x_1(t), \hat{x}_1(t)$ для $\alpha_K < \alpha_L \Leftrightarrow 1 < 4$

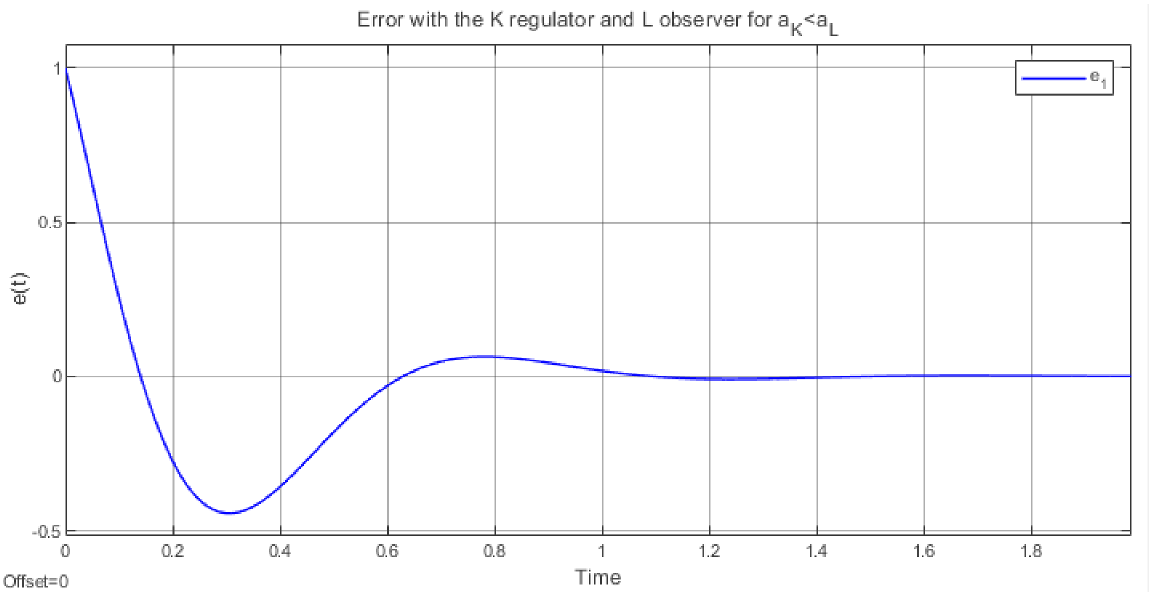

Рис. 34: График $e_1(t)$ для $\alpha_K < \alpha_L \Leftrightarrow 1 < 4$

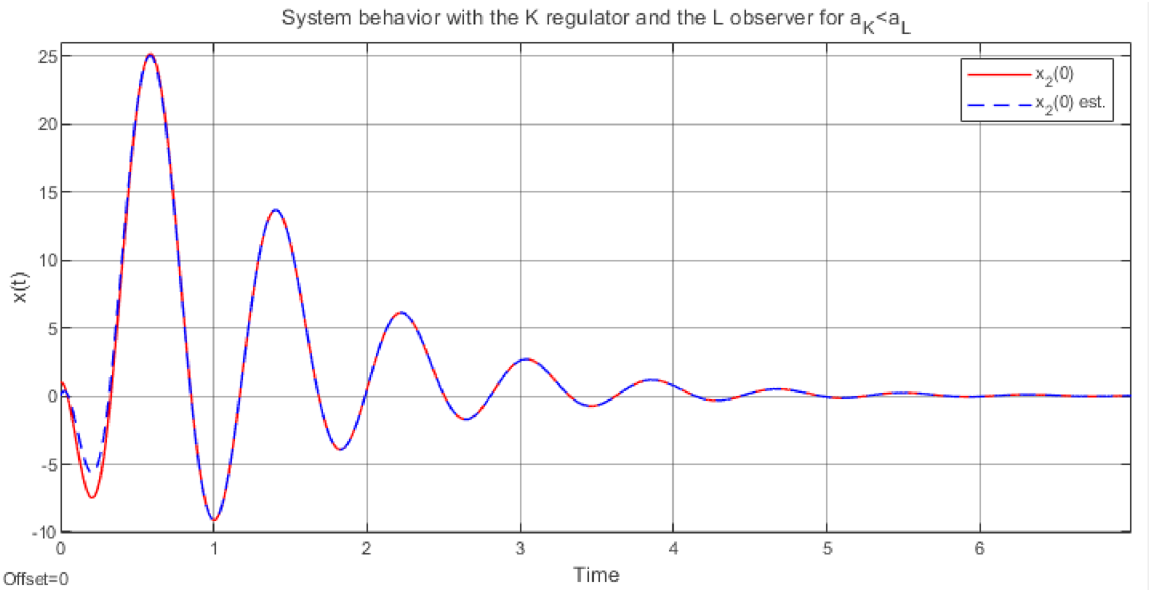

Рис. 35: Графики $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ для $\alpha_K < \alpha_L \Leftrightarrow 1 < 4$

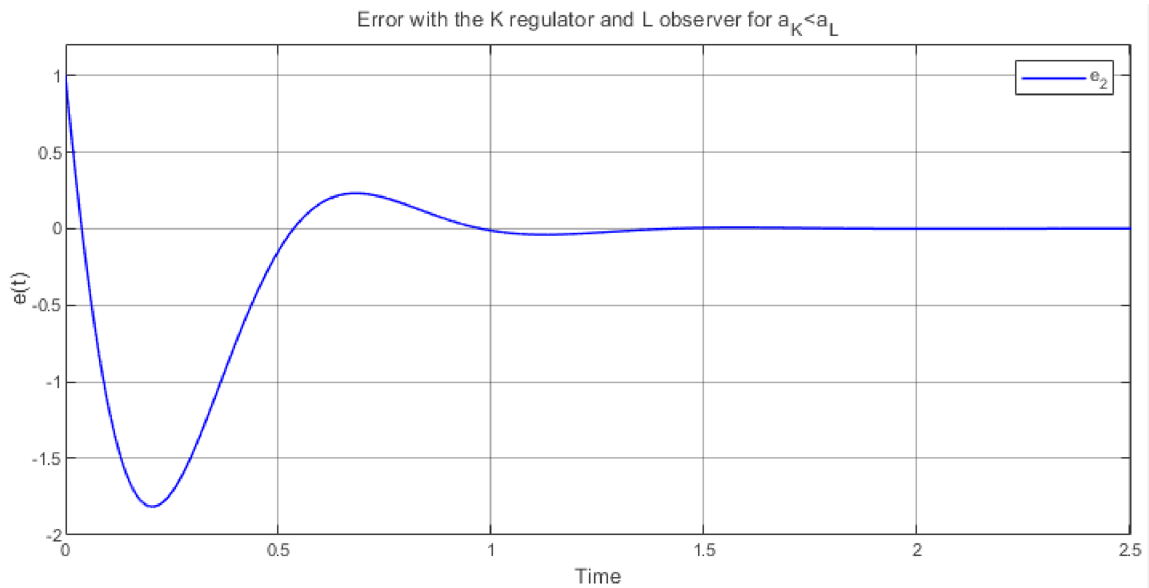

Рис. 36: График $e_2(t)$ для $\alpha_K < \alpha_L \Leftrightarrow 1 < 4$

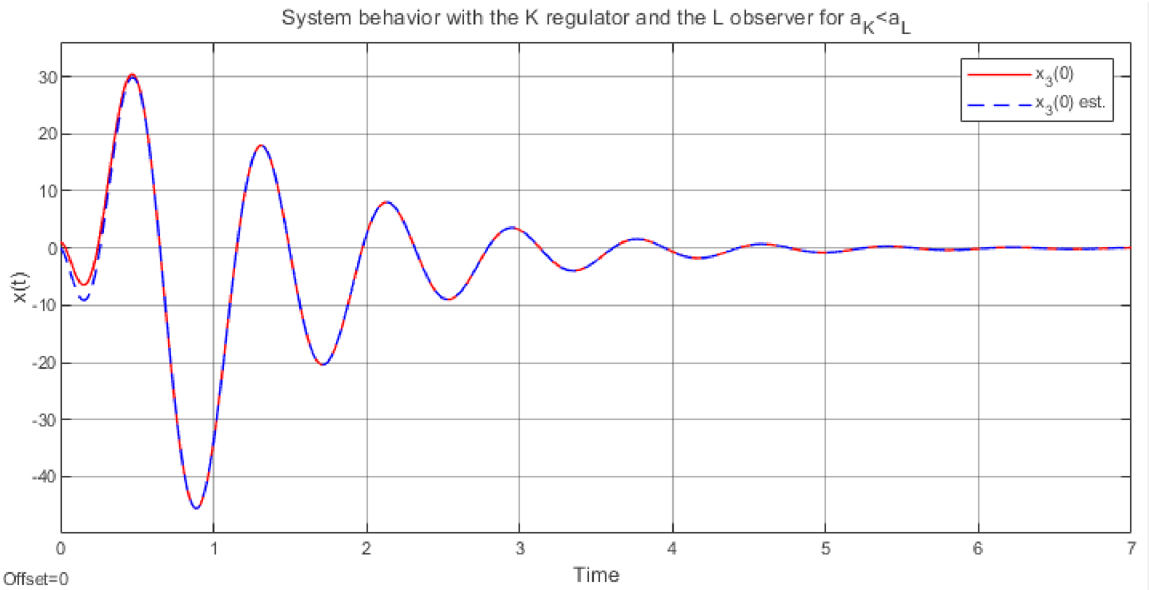

Рис. 37: Графики $x_3(t), \hat{x}_3(t)$ для $\alpha_K < \alpha_L \Leftrightarrow 1 < 4$

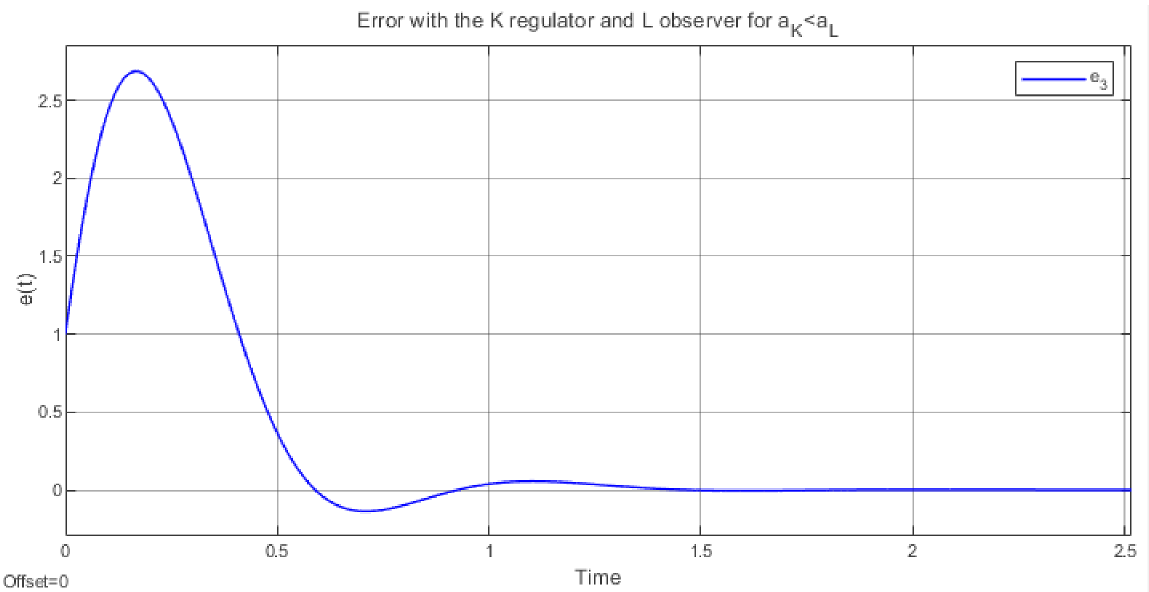

Рис. 38: График $e_3(t)$ для $\alpha_K < \alpha_L \Leftrightarrow 1 < 4$

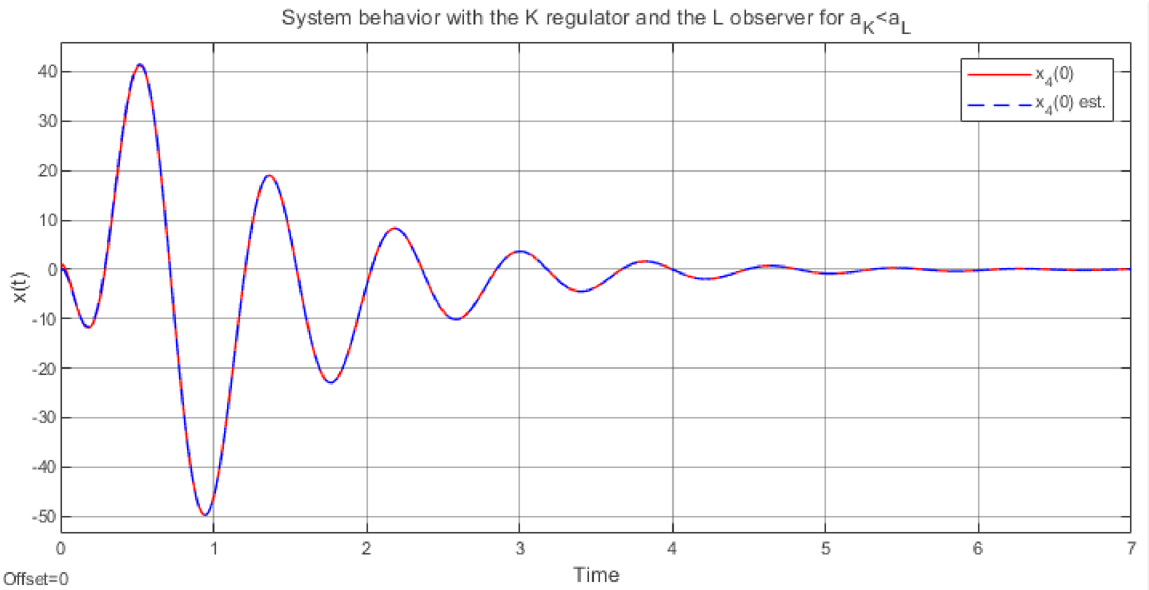

Рис. 39: Графики $x_4(t), \hat{x}_4(t)$ для $\alpha_K < \alpha_L \Leftrightarrow 1 < 4$

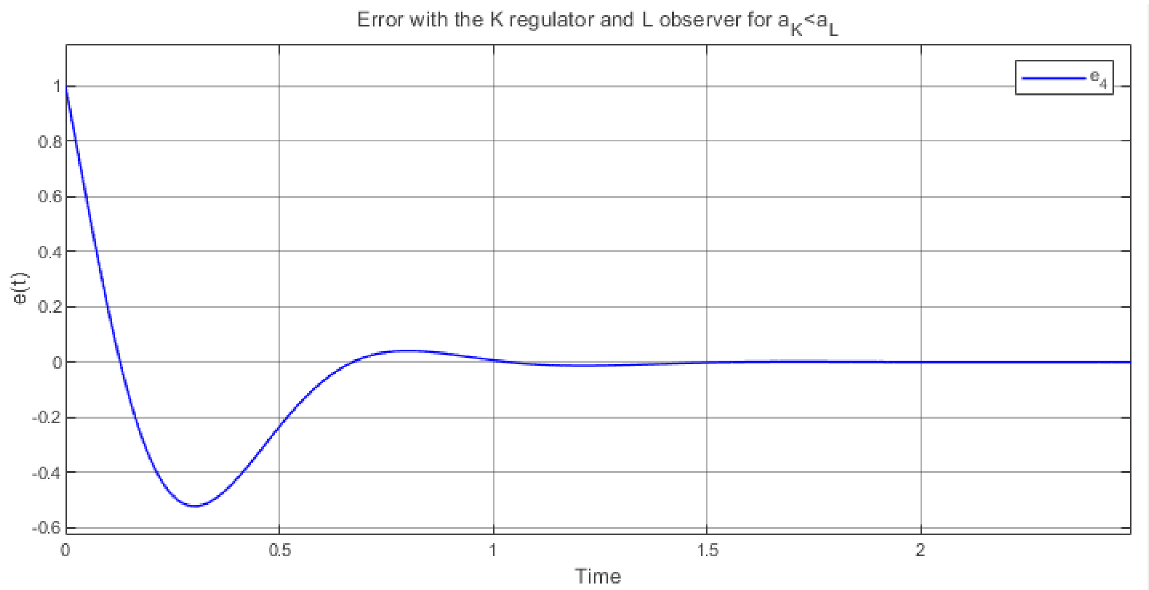

Рис. 40: График $e_4(t)$ для $\alpha_K < \alpha_L \Leftrightarrow 1 < 4$

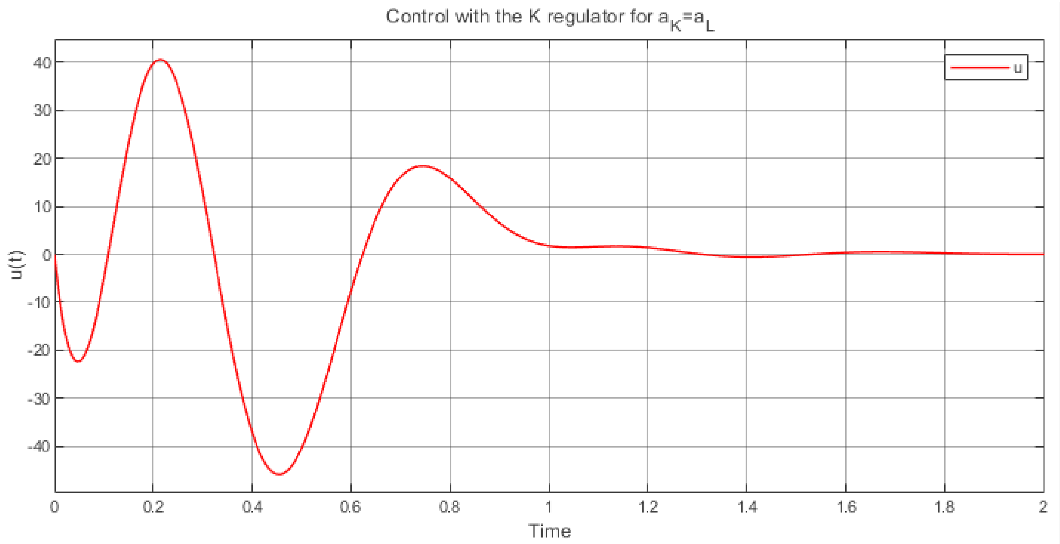

Рис. 41: График $u(t)$ для $\alpha_K = \alpha_L = 4$

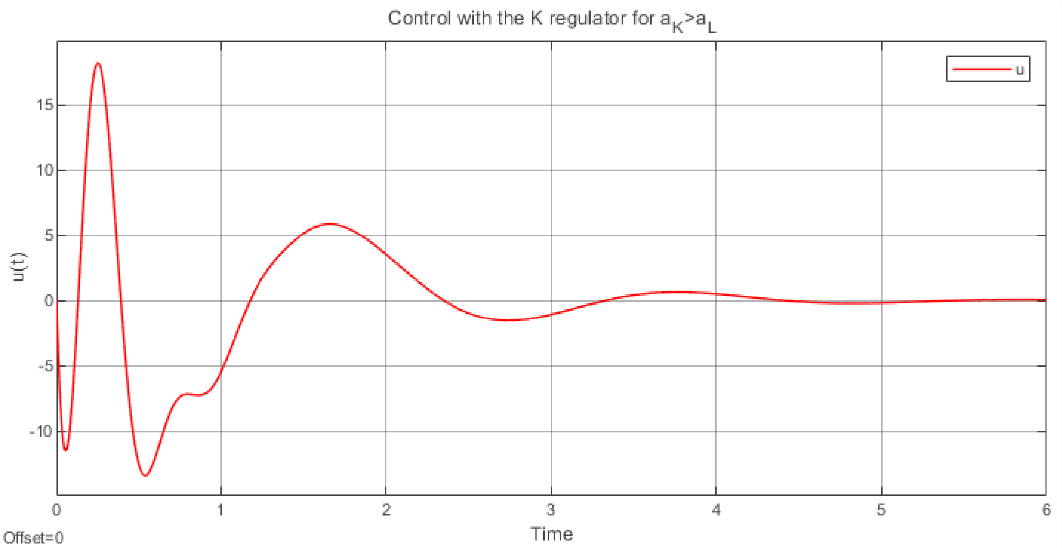

Рис. 42: График $u(t)$ для $\alpha_K > \alpha_L \Leftrightarrow 4 > 1$

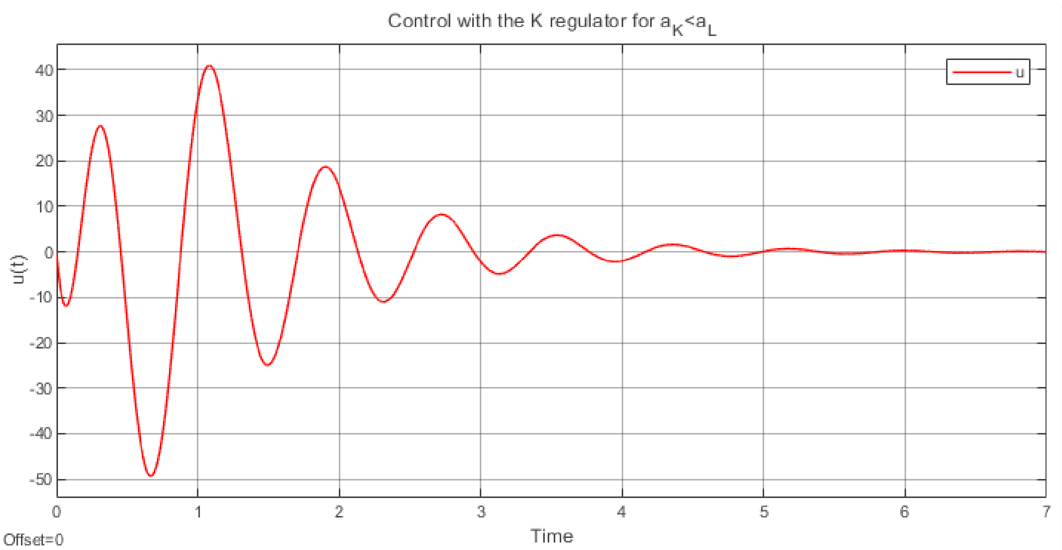

Рис. 43: График $u(t)$ для $\alpha_K < \alpha_L \Leftrightarrow 1 < 4$

Сравнение результатов

При $\alpha_K < \alpha_L$ система стабилизируется медленнее в сравнении с другими случаями, но наблюдатель раньше приходит к истинному состоянию системы (сравн. рис. 39, 31, 23). Быстрее всего система сошлась к нулю при сопоставимых значениях $\alpha_K = \alpha_L$ (сравн. рис. 17, 25, 33). Меньше всего управления потребовалось, когда $\alpha_K > \alpha_L$ (сравн. рис. 41, 42, 43). Медленнее всего наблюдатель сходится к истинным траекториям системы при $\alpha_K > \alpha_L$ (сравн. 27 с 19, 35; 29 с 21, 37).

Вывод

В данном задании мы выяснили, что система полностью управляема, стабилизируема, не полностью наблюдаема и обнаруживаема. Мы экспериментировали с влиянием регулятора и наблюдателя с различными наборами значений степени устойчивости и сходимости на систему. Были получены соответствующие матрицы K, L и проведено компьютерное моделирование. Результаты подтвердили корретность проведенных расчетов. По графикам были сделаны выводы об управлении и слежении.

Задание 3. Регулятор с качественной экспоненциальной устойчивостью

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Управляемость и стабилизируемость

В первом задании мы уже находили собственные числа матрицы A. Программа для третьего задания находится на листинге 3 в приложении 3

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}$$

Собственное число $\lambda_1 = -2$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. Комплексная пара неустойчивая, нужна управляемость. Найдем матрицу J_{re} из вещественного жорданова разложения матрицы $A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1}$. Переведем матрицу B в базис собственных векторов матрицы A

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Число $\lambda_1 = -2$ является неуправляемым, остальные управляемые (первый элемент B_{Jre} – ноль). Таким образом, система не полностью управляема, но стабилизируема.

Средняя степень устойчивости

Зададим следующие параметры: $\beta < 0$, характеризующий среднее значение поведения траекторий ($|\beta|$ как «средняя степень устойчивости»), и $r > 0$, характеризующий разброс поведения траекторий относительно среднего значения β. Будем соблюдать условия

$$\beta + r < 0,\ r = \frac{|\beta|}{k},\ 1.5 \le k \le 4;\ |\lambda_{\text{неупр.}} - \beta| \le r;$$

Пусть

$$\beta = -2,\ k = 4 \Rightarrow r = \frac{|-2|}{4} = 0.5;\ \lambda_{\text{неупр.}} = -2 \Rightarrow |-2-(-2)| = 0 \le r = 0.5;$$

Наборы параметров Q и R

Зададимся четырьмя наборами параметров Q, R

$$\circ\, Q = I,\ \ R = 1;$$
$$\circ\, Q = I,\ \ R = 0;$$
$$\circ\, Q = 0,\ \ R = 1;$$
$$\circ\, Q = 0,\ \ R = 0;$$

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Схема моделирования системы аналогична первому заданию – см. рис. 1.

Синтез регулятора

Для каждого набора параметров Q, R синтезируем регулятор, обеспечивающий качественную экспоненциальную устойчивость при помощи матричного уравнения типа Риккати

$$(A - BK - \beta I)^T P (A - BK - \beta I) - r^2 P = -Q,$$
$$K = -\left(R + B^T P B\right)^{-1} B^T P (A - \beta I);$$

Пользуемся `vpasolve()` в `MATLAB` и рассчитываем на элемент случайности.

Найдем K_1 при $Q = I,\ R = 1$

$$K_1 = \begin{bmatrix} -1.8110966785064287110220433888041 \\ -4.3160849593283698027780387510567 \\ -1.8110966785064287110220433888041 \end{bmatrix}^T$$

Проверим собственные числа замкнутой системы $A + BK_1$

$$\sigma(A + BK_1) =$$

$$\{-2, -1.9691391581706136124110627643325 \pm 0.072704192232709769030434861420894i\}$$

Действительные части собственных чисел отрицательны, похоже на правду. Выведем их на комплексную плоскость, чтобы проверить, находятся ли они в пределах круга с центром в точке $(\beta; 0)$ и радиусом r. Результат см. рис. 44

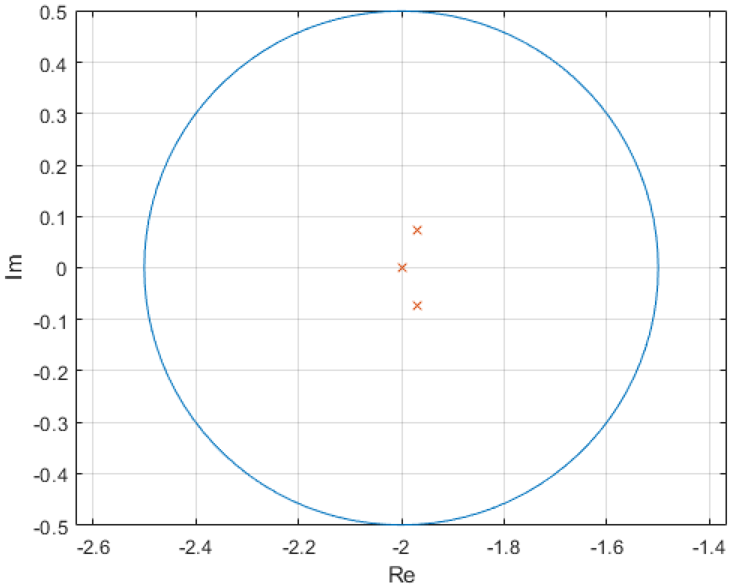

Рис. 44: Проверка собственных чисел з. с. $(A + BK_1)$ при $Q = I, \ R = 1$

Собственные числа находятся внутри круга, следовательно, регулятор синтезирован корректно.

Повторим шаги для K_2 при $Q = I, \ R = 0$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1.81175439513625413908515822228351 \\ -4.3177192340462210264038924401546 \\ -1.81175439513625413908515822228351 \end{bmatrix}^T$$

Проверка $\sigma\left(A + BK_2\right)$

$$\{-2, -2, -1.9412280243187293045742088858247\}$$

Отрицательные числа – похоже на правду. Проверим графиком (см. рис. 45)

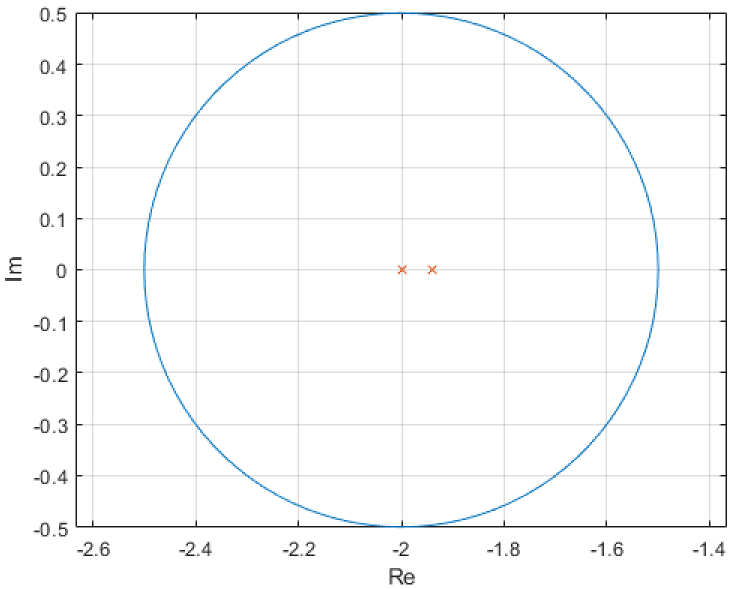

Рис. 45: Проверка собственных чисел з. с. $(A + BK_2)$ при $Q = I, \ R = 0$

Собственные числа находятся внутри круга, следовательно, регулятор синтезирован корректно.

Найдем K_3 при $Q = 0,\ R = 1$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -1.85 & -4.3 & -1.85 \end{bmatrix}$$

Проверка собственных чисел замкнутой системы $A + BK_3$

$$\sigma\left(A + BK_3\right) = \{-2.5, -2, -1.5\}$$

Собственные числа отрицательные – похоже на правду. Проверим графиком (см. рис. 46)

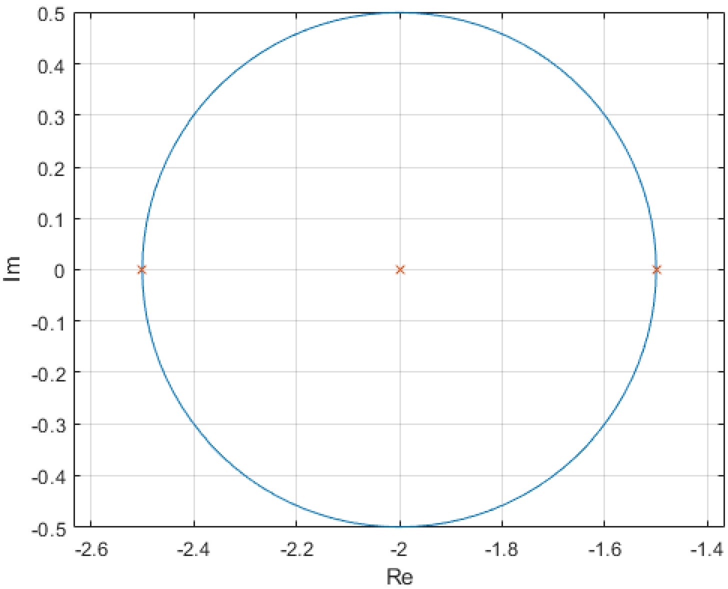

Рис. 46: Проверка собственных чисел з. с. $(A + BK_3)$ при $Q = 0,\ R = 1$

Собственное число -2 находится внутри круга, остальные на его границе. Следовательно, регулятор синтезирован корректно.

Повторим для K_4 при $Q = 0,\ R = 0$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -1.8534107402031930333817126269956 \\ -4.0261248185776487663280116110305 \\ -1.8534107402031930333817126269956 \end{bmatrix}^T$$

Проверим $\sigma\left(A + BK_4\right)$

$$\{-2, -2, -1.7329462989840348330914368650218\}$$

Наблюдаем отрицательные собственные числа – похоже на правду. Проверим графиком (см. рис. 47)

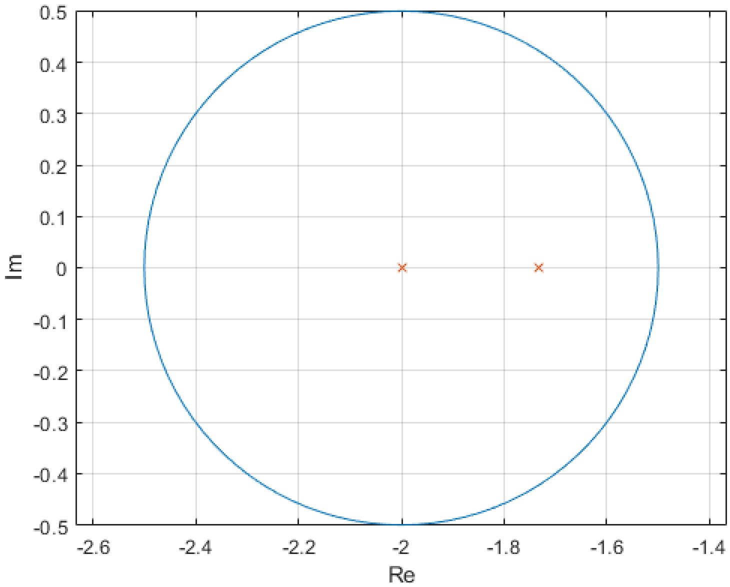

Рис. 47: Проверка собственных чисел з. с. $(A + BK_4)$ при $Q = 0,\ R = 0$

Собственные числа находятся внутри круга, следовательно, регулятор синтезирован корректно.

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование замкнутых систем по схеме, представленной на рис. 1. Построим графики формируемого регуляторами управления $u(t)$ и вектора состояния замкнутых систем $x(t)$ при начальных условиях

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Результаты представлены далее на рис. 48–57

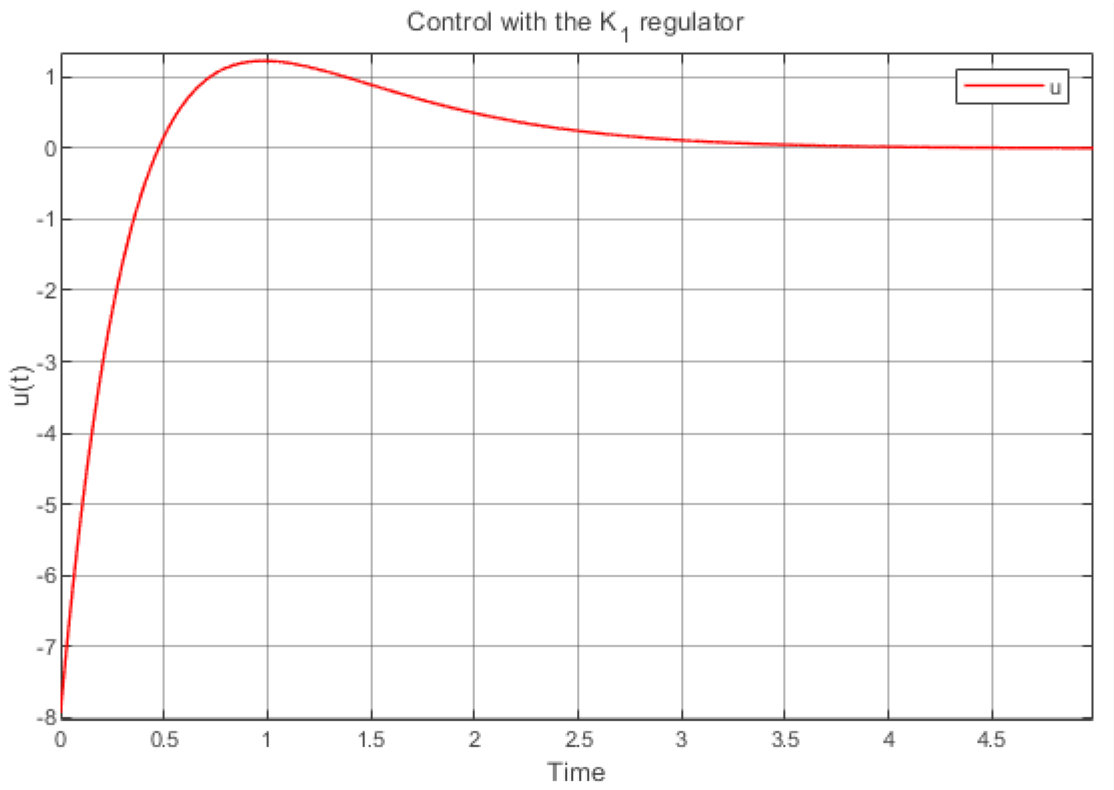

Рис. 48: График $u(t)$ при $K_1,\ Q = I,\ R = 1$

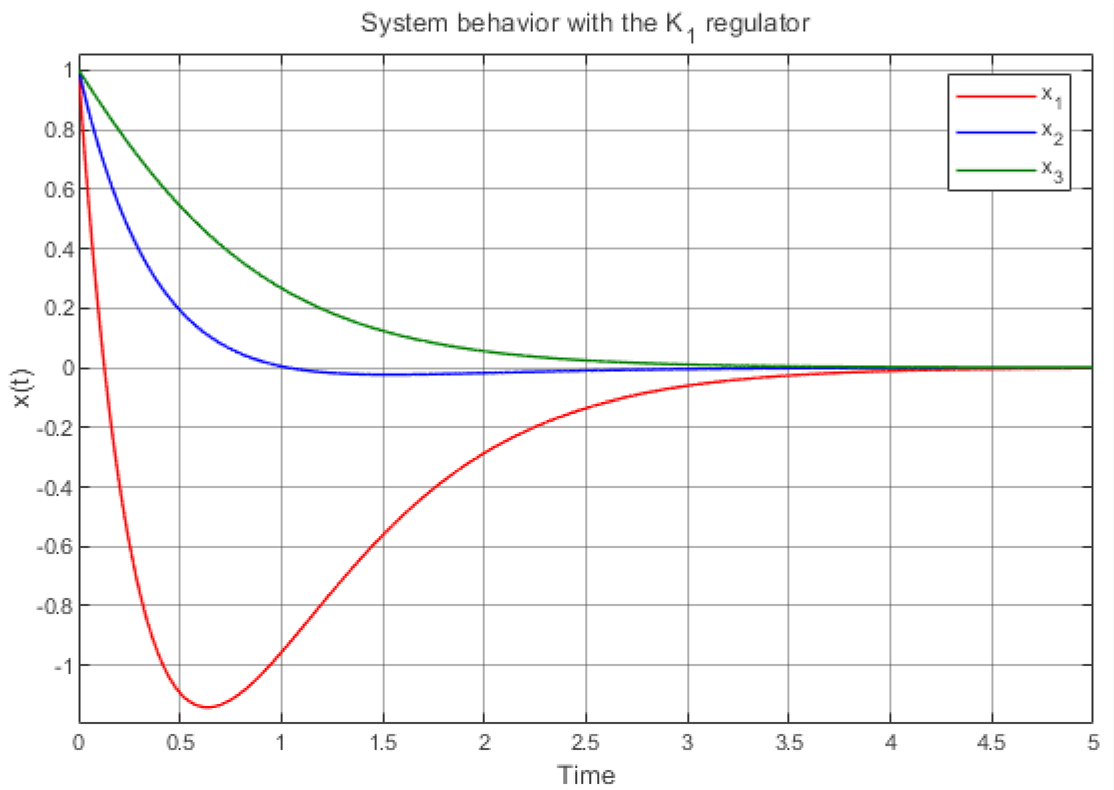

Рис. 49: График $x(t)$ при $K_1,\ Q = I,\ R = 1$

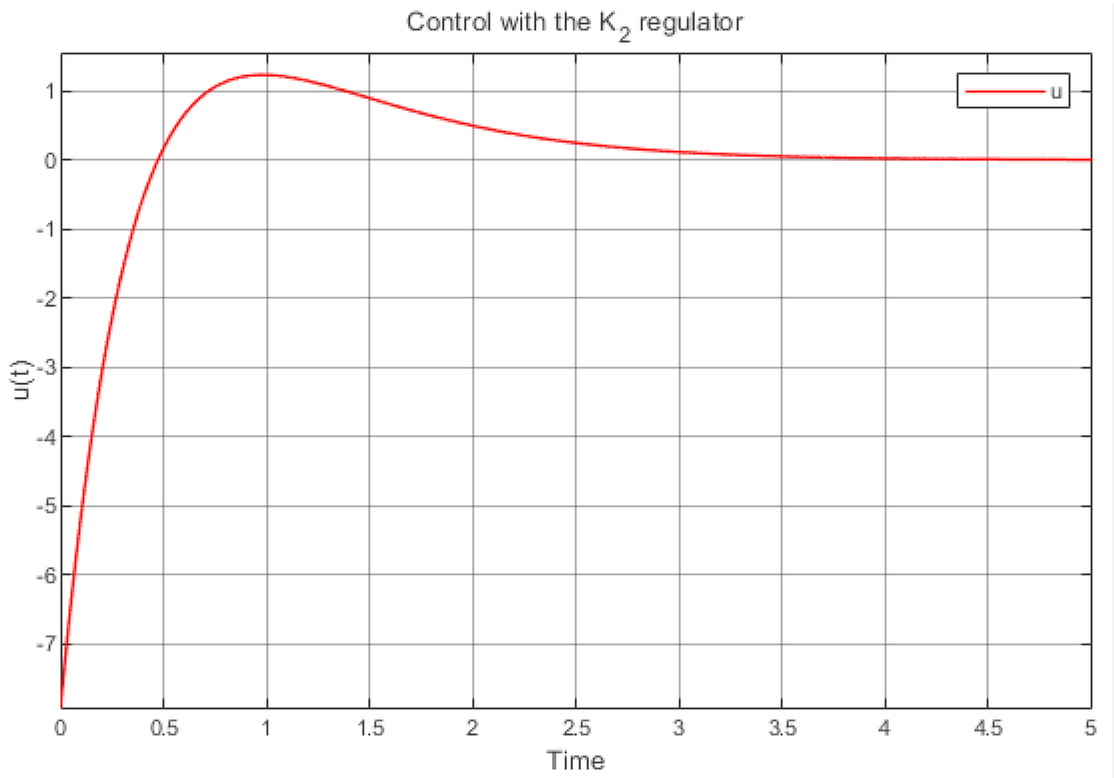

Рис. 50: График $u(t)$ при $K_2,\ Q = I,\ R = 0$

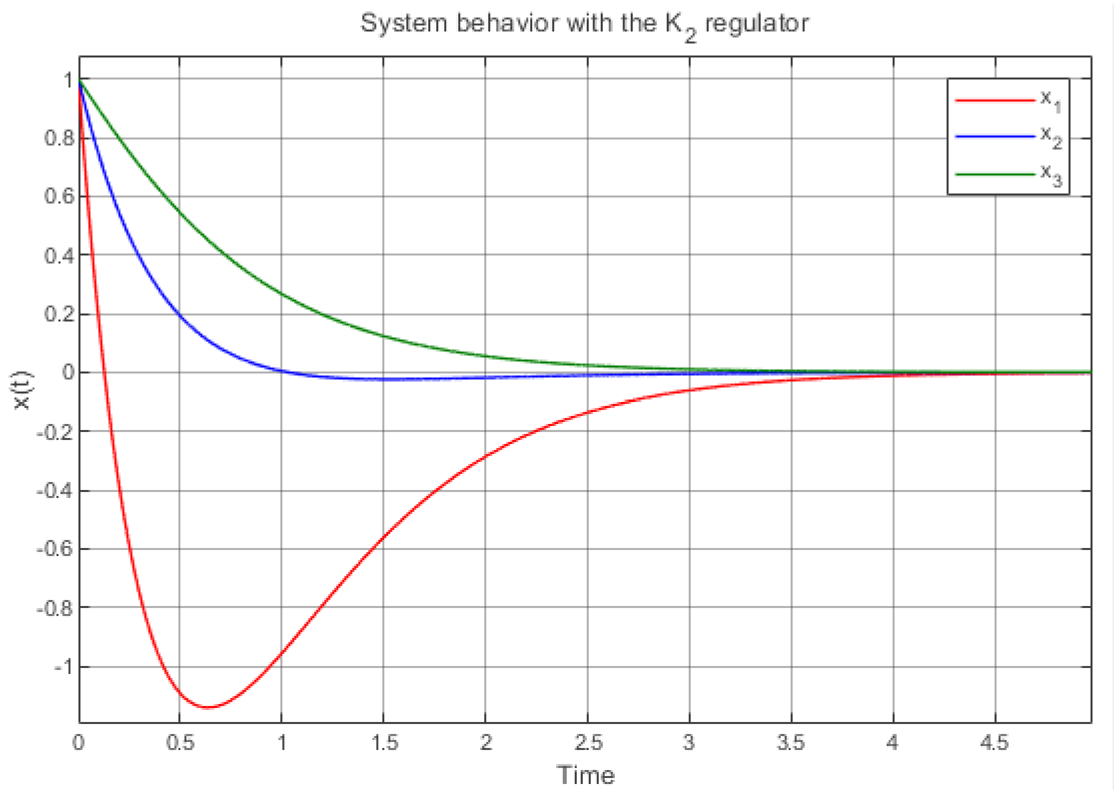

Рис. 51: График $x(t)$ при $K_2,\ Q = I,\ R = 0$

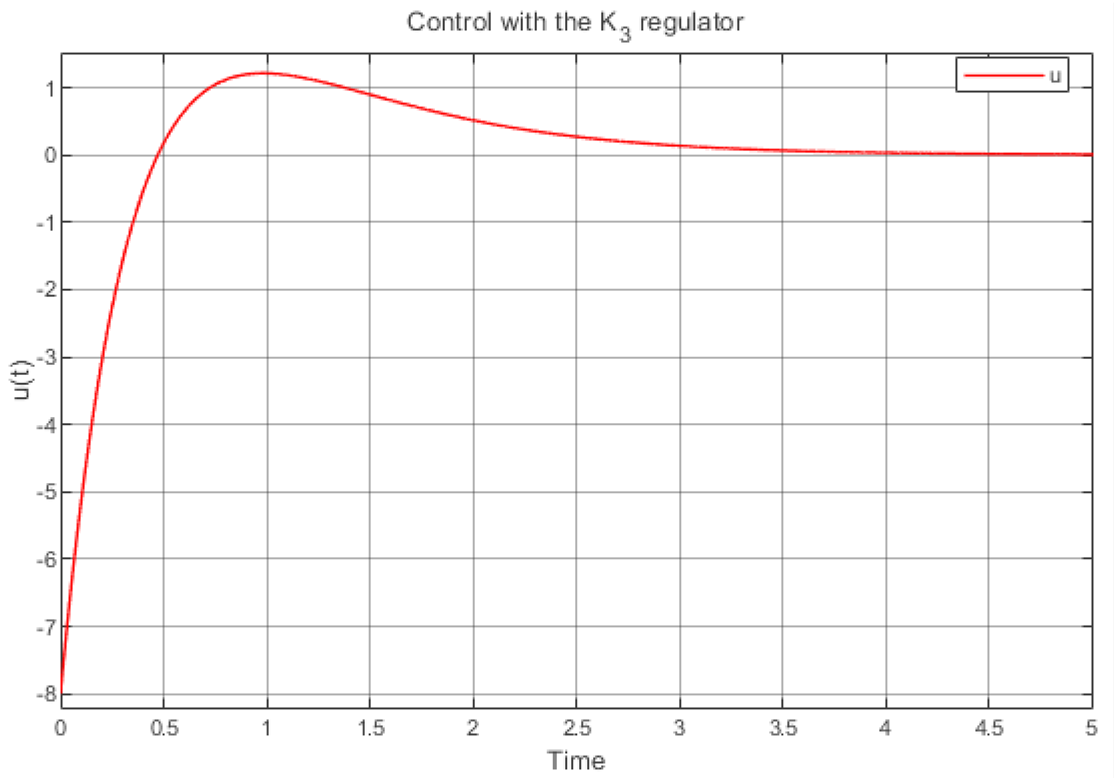

Рис. 52: График $u(t)$ при $K_3,\ Q = 0,\ R = 1$

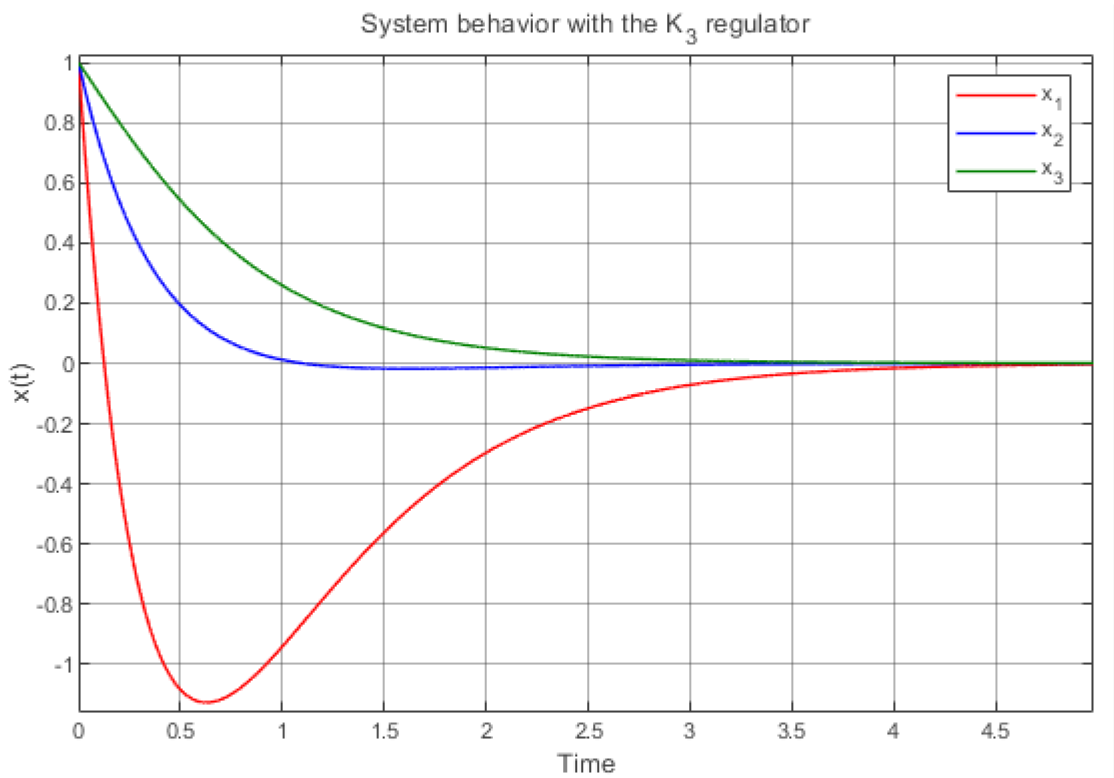

Рис. 53: График $x(t)$ при $K_3,\ Q = 0,\ R = 1$

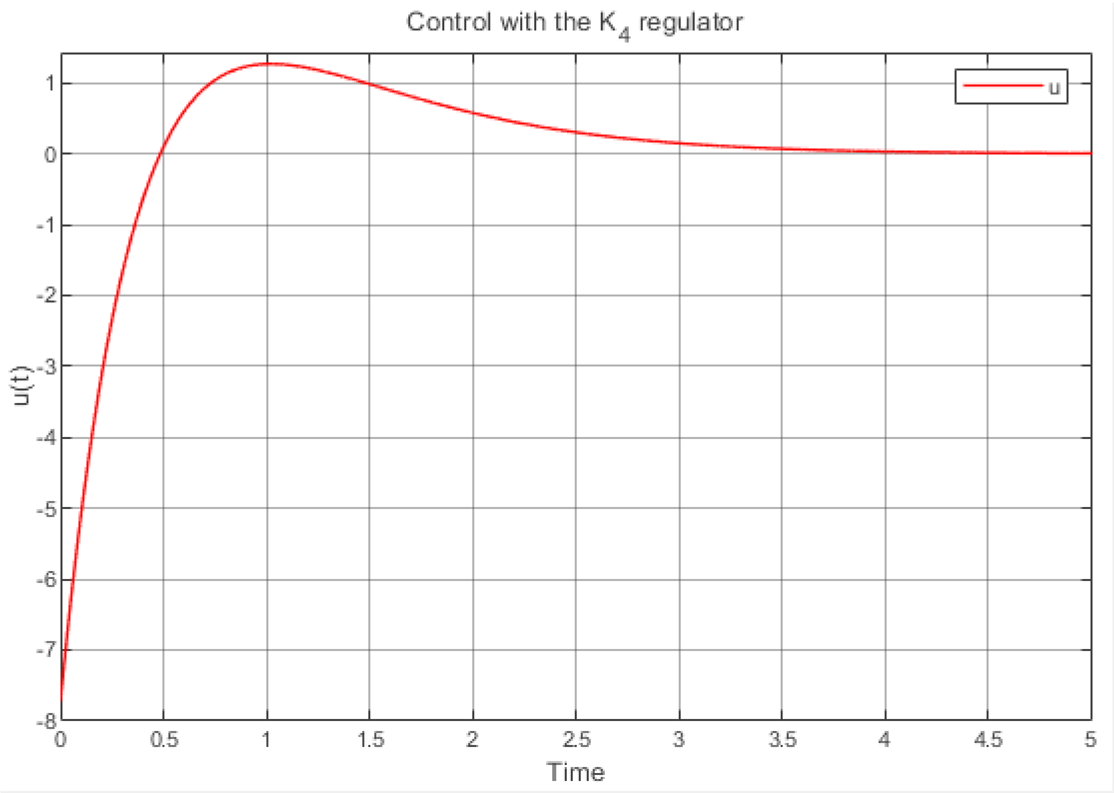

Рис. 54: График $u(t)$ при $K_4,\ Q = 0,\ R = 0$

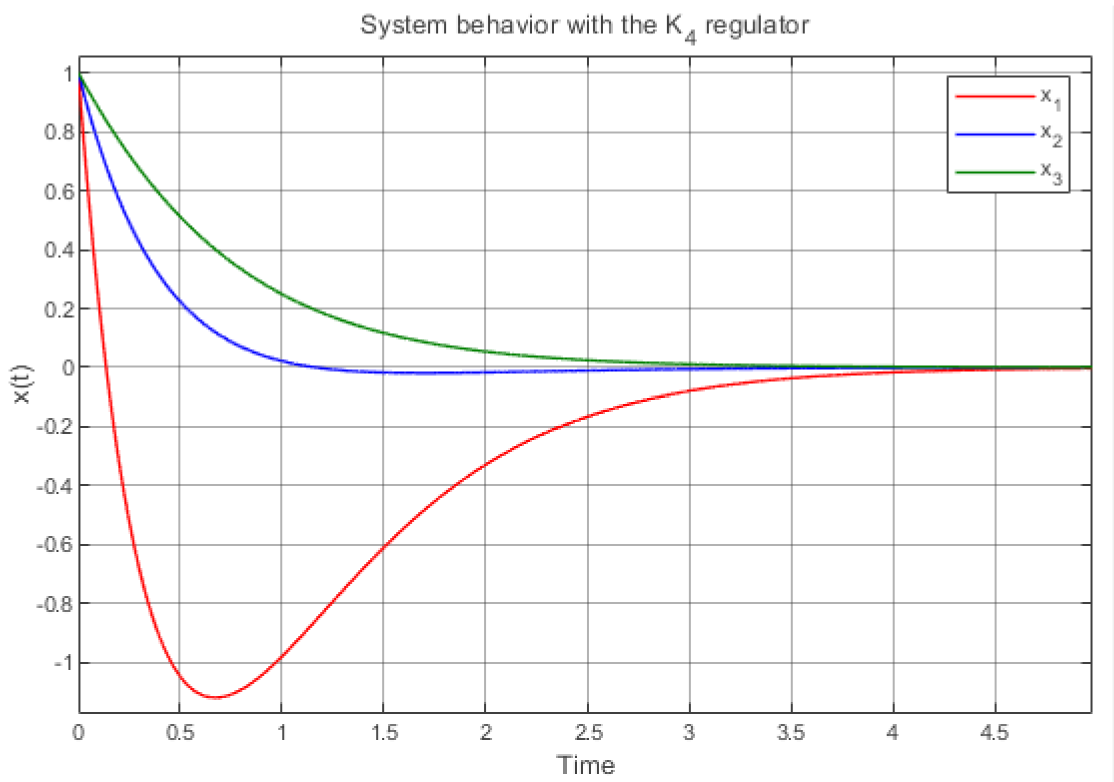

Рис. 55: График $x(t)$ при $K_4,\ Q = 0,\ R = 0$

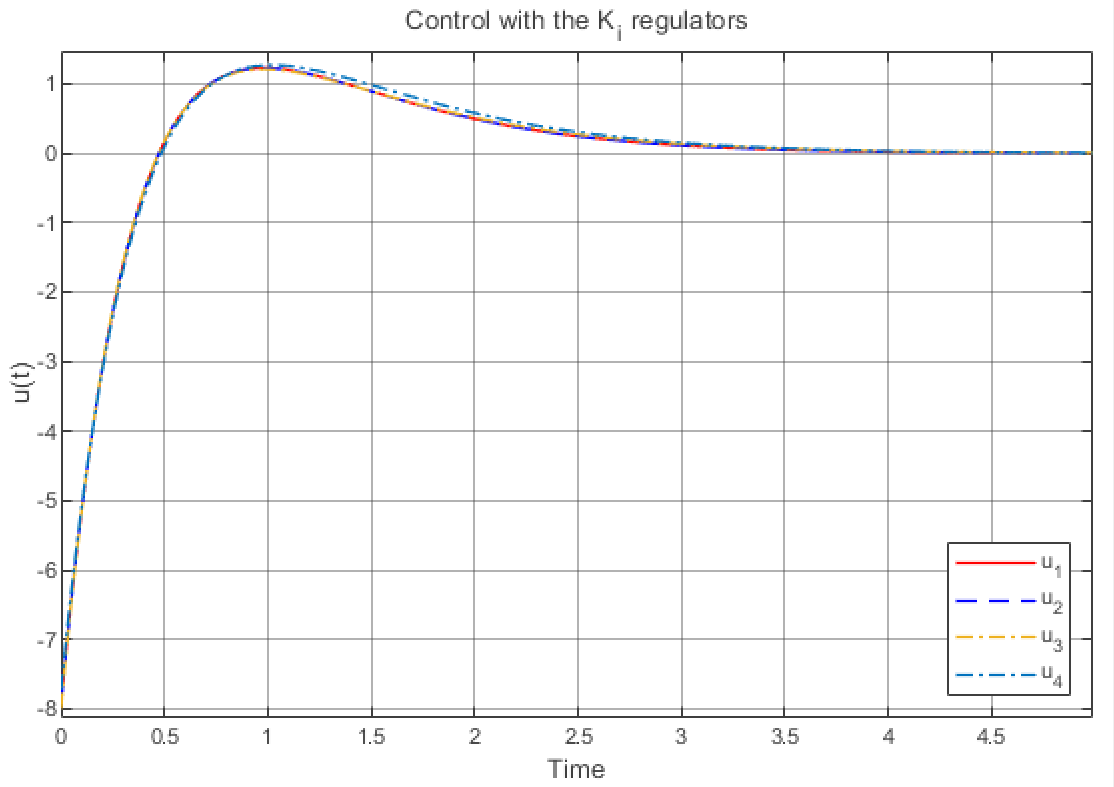

Рис. 56: Графики $u(t)$ при различных K_i (им соответствуют $u_i(t)$)

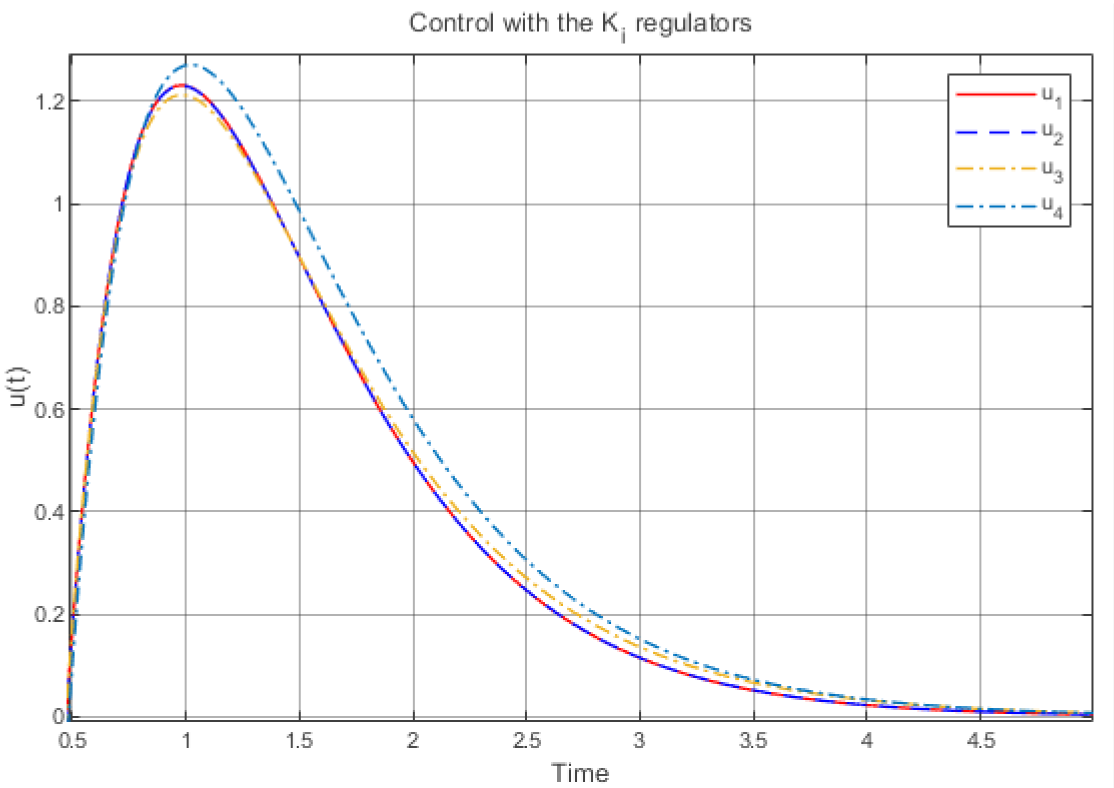

Рис. 57: Графики $u(t)$ при различных K_i в приближении

Сравнение результатов

Поведения систем при различных K_i очень похожи. По рис. 57, 56 можно сделать вывод, что при K_1 и K_2 управление быстрее приводит систему к нулю в сравнении с другими K_i, при этом требуется немного меньше управления. Медленнее всего при K_4, при этом затрачивается немного больше управления несмотря на то, что оно начинается с меньшего по модулю числа (сравн. рис. 54 с 52, 50, 48).

Вывод

В данном задании было определено, что система не полностью управляема, но стабилизируема. Были синтезированы регуляторы с качественной экспоненциальной устойчивостью и проведено компьютерное моделирование, подтверждающее корректность расчетов.

Общий вывод по работе

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены немодальные методы стабилизации систем. Были использованы методы матричных неравенств и уравнений Риккати. Было проведено исследование управления по выходу с заданной степенью устойчивости, вклада регулятора и наблюдателя в результат. Были синтезированы различные регуляторы с качественной степенью устойчивости. Для каждого задания было выполнено компьютерное моделирование, подтверждающее корректность расчетов и рассуждений.

Приложения

Приложение 1

```
% plant parameters
A = [5 2 7; 2 1 2; -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A)

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
Pre(:,1) = P(:,1);
Pre(:,2) = imag(P(:,2));
Pre(:,3) = real(P(:,3))
Pre_inv = Pre^-1
J_re = Pre_inv * A * Pre
B_jre = Pre_inv * B

% Desired decay rate
a1 = 2;
a2 = 0.1;

% solving LMI no restrictions on control
cvx_begin sdp
% a1
```

```
variable P1(3,3) symmetric
variable Y1(1,3)
P1 > 0.0001*eye(3);
P1*A' + A*P1 + 2*a1*P1 + Y1'*B'+ B*Y1 <= 0;
cvx_end

cvx_begin sdp
% a2
variable P2(3,3) symmetric
variable Y2(1,3)
P2 > 0.0001*eye(3);
P2*A' + A*P2 + 2*a2*P2 + Y2'*B'+ B*Y2 <= 0;
cvx_end

K1_a1 = Y1*inv(P1)
K1_a2 = Y2*inv(P2)

% A+BK1_ai eigenvalues
ABK1_a1 = A+B*K1_a1;
ABK1_a2 = A+B*K1_a2;
eig(ABK1_a1)
eig(ABK1_a2)

% solving LMI with control constraint
x0 = [1; 1; 1];

% a1
cvx_begin sdp
variable P12(3,3) symmetric
variable Y12(1,3)
variable mumu_a1
minimize mumu_a1
P12 > 0.0001*eye(3);
P12*A' + A*P12 + 2*a1*P12 + Y12'*B'+ B*Y12 <= 0;
[P12 x0;
x0' 1] > 0;
[P12 Y12';
Y12 mumu_a1] > 0;
cvx_end

cvx_begin sdp
% a2
variable P22(3,3) symmetric
variable Y22(1,3)
variable mumu_a2
minimize mumu_a2
P22 > 0.0001*eye(3);
P22*A' + A*P22 + 2*a2*P22 + Y22'*B'+ B*Y22 <= 0;
[P22 x0;
x0' 1] > 0;
[P22 Y22';
Y22 mumu_a2] > 0;
cvx_end

mu_a1 = sqrt(mumu_a1)
mu_a2 = sqrt(mumu_a2)

K2_a1 = Y12*inv(P12)
```

```
K2_a2 = Y22*inv(P22)

% A+BK2_ai eigenvalues
ABK2_a1 = A+B*K2_a1;
ABK2_a2 = A+B*K2_a2;
eig(ABK2_a1)
eig(ABK2_a2)

% solving Riccati
Q1 = eye(3);
v = 2;
R = 1;

% a1
Aa1 = A + eye(3) * (a1-0.0000000001);
[P,K,e]=icare(Aa1,sqrt(2)*B,Q1,R);
K3_a1=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K3_a1)

% a2
Aa2 = A + eye(3) * a2;
[P,K,e]=icare(Aa2,sqrt(2)*B,Q1,R);
K3_a2=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K3_a2)

Q2 = 0;
% a1
Aa12 = A + eye(3) * (a1-0.0000000001);
[P,K,e]=icare(Aa12,sqrt(2)*B,Q2,R);
K4_a1=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K4_a1)

% a2
Aa22 = A + eye(3) * a2;
[P,K,e]=icare(Aa22,sqrt(2)*B,Q2,R);
K4_a2=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K4_a2)
```

Листинг 1: Программа для задания 1

Приложение 2

```
% plant parameters
A=[2 0 -4 2;
   0 2 -2 4;
   -4 -2 2 0;
   2 4 0 2];
B=[2; 4; 6; 8];
C=[-2 2 2 2;
2 0 0 2];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A)

% Jordan decomposition
[PA, JA] = jordan(A)
PA_inv = inv(PA)
```

```
BA = PA_inv * B
CA = C * PA

% Desired decay rate
a1 = 4;
a2 = 1;

% case 1: ak == al
ak = a1;
al = a1;

% solving Riccati
Q = 0;
v = 2;
R = 1;

% find K
Aak = A + eye(4) * (ak-0.0000000001);
[P,K,e]=icare(Aak,sqrt(2)*B,Q,R);
K_case1=-inv(R)*B'*P
eK_case1=eig(A+B*K_case1)

% find L
x0=[1;1;1;1];
x0_est=[0;0;0;0];
e0=x0-x0_est;

% solving LMI with control constraint
% mumu 2x2, not scalar anymore
% minimizing matrix by its norm
cvx_begin sdp
variable Q(4,4)
variable Y(4,2)
variable mumu(2,2)
minimize norm(mumu)
Q>0.0001*eye(4);
A'*Q + Q*A+ 2*al*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
[Q e0;
e0' 1]>0;
[Q Y;
Y' mumu]>0;
cvx_end
L_case1=inv(Q)*Y
eL_case1=eig(A+L_case1*C)

% case 2: ak > al
ak = a1;
al = a2;

% K found case 1
K_case2 = K_case1
eK_case2 = eK_case1

% find L
cvx_begin sdp
variable Q(4,4)
variable Y(4,2)
variable mumu(2,2)
```

```
minimize norm(mumu)
Q>0.0001*eye(4);
A'*Q + Q*A+ 2*al*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
[Q e0;
e0' 1]>0;
[Q Y;
Y' mumu]>0;
cvx_end
L_case2=inv(Q)*Y
eL_case2=eig(A+L_case2*C)

% case 3: ak < al
ak = a2;
al = a1;

% find K
Q = eye(4)*0.000001;
Aak = A + eye(4) * ak;
[P,K,e]=icare(Aak,sqrt(2)*B,Q,R);
K_case3=-inv(R)*B'*P
eK_case3=eig(A+B*K_case3)

% L found case 1
L_case3 = L_case1
eL_case3 = eL_case1
```

Листинг 2: Программа для задания 2

Приложение 3

```
% plant parameters
A = [5 2 7; 2 1 2; -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A)

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
Pre(:,2) = imag(P(:,2));
Pre(:,3) = real(P(:,3))
Pre_inv = Pre^-1
Jre = Pre_inv * A * Pre
Bjre = Pre_inv * B

% truncation
Jre_less = Jre;
Jre_less(1,:)=[];
Jre_less(:,1)=[]
Bjre_less = Bjre;
Bjre_less(1,:)=[]

% plant parameters b,k,r
b = -2;
k = 4;
r = abs(b)/k;
```

```
% aftermath
% Q=I, R=1
% K_1 = [-1.8110966785064287110220433888041,
   -4.3160849593283698027780387510567,
   -1.8110966785064287110220433888041]
% Q=I, R=0
% K_2 = [-1.8117543951362541390851582228351,
   -4.3177192340462210264038924401546,
   -1.8117543951362541390851582228351]
% Q=0, R=1
% K_3 = [-1.85, -4.3, -1.85]
% Q=0, R=0
% K_4 = [-1.8534107402031930333817126269956,
   -4.0261248185776487663280116110305,
   -1.8534107402031930333817126269956]

% Riccati
Q = 0;
R = 0;

syms P_ [2 2]
K_ = -(inv(R+Bjre_less'*P_*Bjre_less)*Bjre_less'*P_*(Jre_less-b*eye
   (2)));
eqs = (Jre_less+Bjre_less*K_-b*eye(2))'*P_*(Jre_less+Bjre_less*K_-b*
   eye(2))-r^2*P_==-Q;

s = vpasolve(eqs, [P_], Random=true);
P_=[s.P_1_1 s.P_1_2;
    s.P_2_1 s.P_2_2];
K=[0 -(inv(R+Bjre_less'*P_*Bjre_less)*Bjre_less'*P_*(Jre_less-b*eye
   (2)))]*Pre^-1
e=eig(A+B*K)

% eigen check
th = 0:pi/50:2*pi;
xunit = r * cos(th)+ b;
yunit = r * sin(th);
plot(xunit, yunit);
hold on
plot(real(e),imag(e),"x")
axis equal
grid on
xlabel("Re")
ylabel("Im")
hold off
```
Листинг 3: Программа для третьего задания