

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №С
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ: ФРАНКИС,
ДЭВИСОН И НАБЛЮДАТЕЛИ»
Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Задание 1. Слежение и компенсация: матричные уравнения	2
1.1	Характер внешнего возмущения	2
1.2	Генератор задающего воздействия	2
1.3	Схема моделирования системы	3
1.4	Синтез компоненты обратной связи	3
1.5	Общий вид матричных уравнений Франкиса-Дэвисона	4
1.6	Синтез компоненты слежения	4
1.7	Синтез компоненты компенсации по входу	4
1.8	Компьютерное моделирование	5
1.9	Сравнение результатов	7
2	Задание 2. Слежение и компенсация по выходу	7
2.1	Схема моделирования системы	7
2.2	Наблюдатель задающего воздействия	8
2.3	Синтез наблюдателя расширенной размерности	9
2.4	Компьютерное моделирование	9
2.5	Сравнение результатов	17
3	Приложение А	17
4	Приложение Б	19

Задание 1. Слежение и компенсация: матричные уравнения

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f, \\ y = Cx + Du + D_f f, \end{cases} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

генератор внешнего возмущения

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma_f w_f, \\ f = Y_f w_f, \end{cases} \quad w_f(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

и генератор задающего воздействия

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g, \\ g = Y_g w_g, \end{cases} \quad w_g(0) \quad (3)$$

при параметрах объекта управления

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_f = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}^T, \quad D = 2, \quad D_f = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}^T$$

и параметрах генератора

$$\Gamma_f = \begin{bmatrix} 25 & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3 & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31 & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad Y_f = \begin{bmatrix} 8 & -20 \\ 2 & -6 \\ -6 & 16 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}^T, \quad g(t) = 4 \sin(t) - 1;$$

Программа для задания 1 находится в приложении А на листинге [1](#)

Характер внешнего возмущения

Найдем собственные числа матрицы Γ_f , чтобы определить характер внешнего возмущения

$$\sigma(\Gamma_f) = \{\pm i, \pm 3i\}$$

Спектр состоит только из мнимых чисел. Характер возмущения – гармоника без роста и затухания амплитуды с течением времени.

Генератор задающего воздействия

Через модель осциллятора $x(t) = A \cos(\omega t) = 0, y(t) = A \sin(\omega t) = 4 \sin(t)$ и $\dot{z}(t) = 0, z(t) = -1$ при $g(t) = 4 \sin(t) - 1$ определим $\Gamma_g, Y_g, w_g(0)$

$$\Gamma_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_g = [4 \quad 0 \quad -1], \quad w_g(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Схема моделирования системы

Система замкнута регулятором

$$u = Kx + K_g w_g + K_f w_f,$$

обеспечивающим выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |g(t) - y(t)| = 0; \quad (4)$$

Построим схему моделирования системы в SIMULINK

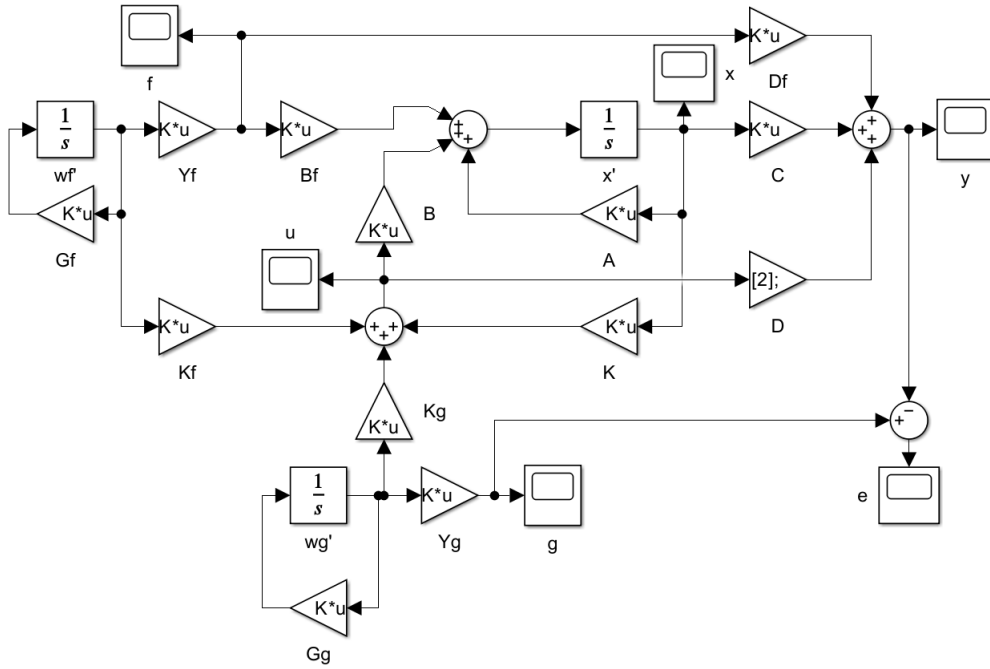


Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Строим графики $f(t), g(t), u(t), x(t), y(t), e(t)$.

Синтез компоненты обратной связи

Исследуем систему на стабилизируемость

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}, \quad A_{Jre} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Система не полностью управляема, стабилизируема. Максимальная степень устойчивости $\alpha = 2$.

Синтезируем компоненту обратной связи K с помощью матричного уравнения типа Риккати

$$A^T P + PA + Q - \nu P B R^{-1} B^T P + 2\alpha P = 0, \quad K = -R^{-1} B^T P;$$

при $Q = I, \nu = 2, R = 1, \alpha = 2$. Получаем

$$K = [2.1111 \quad -13.4448 \quad 1.6787],$$

$$\sigma(A + BK) = \{-2, -2.3951 \pm 4.3138i\};$$

Желаемая степень устойчивости достигнута – регулятор синтезирован корректно.

Общий вид матричных уравнений Франкиса-Дэвисона

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона в общем виде представляются системой

$$\begin{cases} AP + BK + Y_1 = P\Gamma, \\ CP + DK + Y_2 = 0; \end{cases}$$

Решение относительно P и K для произвольных Y_1 и Y_2 существует, если

$$\text{rank}(\mathcal{M}) = \text{rank} \begin{bmatrix} A - I\lambda_{i\Gamma} & B \\ C & D \end{bmatrix} = \text{число строк}$$

$\lambda_{i\Gamma}$ – собственные числа Γ .

Синтез компоненты слежения

Проверим условие существования решения системы уравнений

$$\begin{cases} P_g \Gamma_g - (A + BK) P_g = BK_g, \\ (C + DK) P_g + DK_g = Y_g; \end{cases} \quad (5)$$

Собственные числа матрицы Γ_g

$$\sigma(\Gamma_g) = \{0, \pm i\}$$

Проверим ранги матриц. Выясним количество строк

$$A_{3 \times 3}, I_{3 \times 3}, B_{3 \times 1}, C_{1 \times 3}, D_{1 \times 1} \Rightarrow \mathcal{M}_{4 \times 4}$$

Сравниваем ранг с $n = 4$

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} A - Ii & B \\ C & D \end{bmatrix} &= 4, \\ \text{rank} \begin{bmatrix} A + Ii & B \\ C & D \end{bmatrix} &= 4, \\ \text{rank} \begin{bmatrix} A + 0I & B \\ C & D \end{bmatrix} &= 4; \end{aligned}$$

Условие выполнено. Синтезируем компоненту слежения K_g через уравнения (5). Получаем

$$K_g = [-0.0932 \quad 18.6951 \quad -8.1152]$$

Синтез компоненты компенсации по входу

Проверим условие существования решения системы уравнений

$$\begin{cases} P_f \Gamma_f - (A + BK) P_f - B_f Y_f = BK_f, \\ (C + DK) P_f + DK_f = -D_f Y_f; \end{cases} \quad (6)$$

Собственные числа матрицы Γ_f

$$\sigma(\Gamma_f) = \{\pm i, \pm 3i\}$$

Сравниваем ранг с $n = 4$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - Ii & B \\ C & D \end{bmatrix} = 4,$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A + Ii & B \\ C & D \end{bmatrix} = 4,$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - 3Ii & B \\ C & D \end{bmatrix} = 4,$$

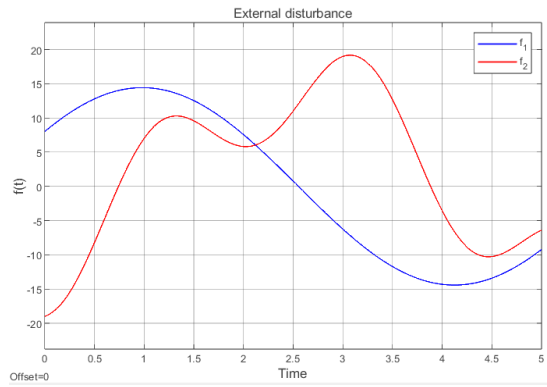
$$\text{rank} \begin{bmatrix} A + 3Ii & B \\ C & D \end{bmatrix} = 4;$$

Условие выполнено. Синтезируем компоненту компенсации K_f через уравнения (6).
Получаем

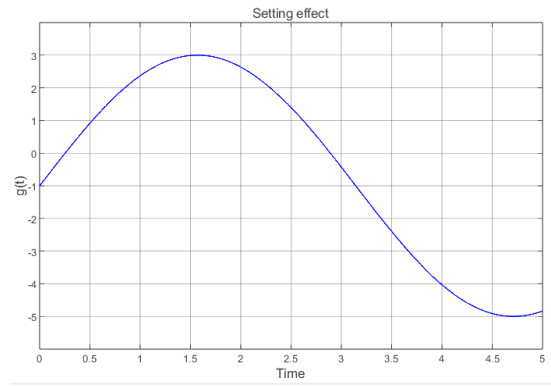
$$K_f = \begin{bmatrix} -725.9021 & -225.1491 & 586.1685 & -359.3897 \end{bmatrix}$$

Компьютерное моделирование

Промоделируем систему при $u = 0, u = Kx, u = Kx + K_f w_f, u = Kx + K_g w_g$ и $u = Kx + K_g w_g + K_f w_f$

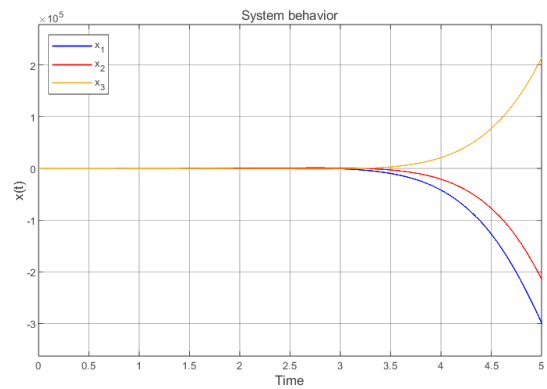


(a) График возмущений $f(t)$

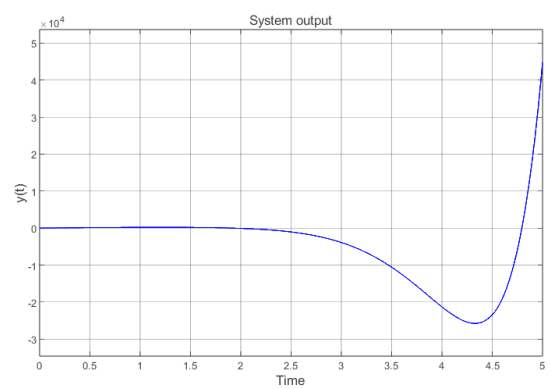


(b) График задающего воздействия $g(t)$

Рис. 2: Графики $f(t), g(t)$ для разомкнутой системы ($u = 0$)

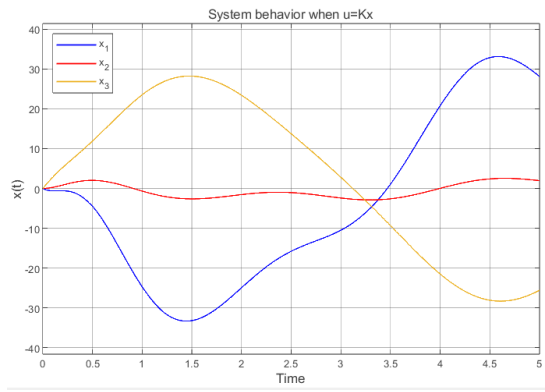


(a) График вектора состояния ОУ $x(t)$

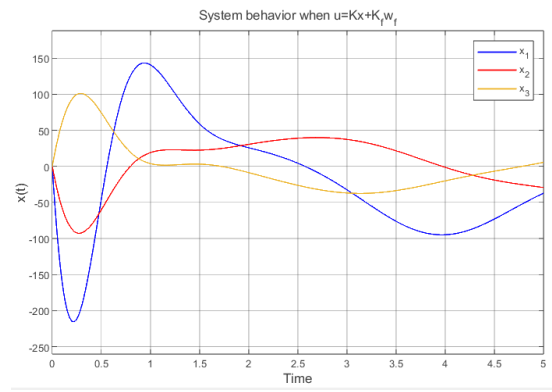


(b) График выхода системы $y(t)$

Рис. 3: Графики $x(t), y(t)$ для разомкнутой системы ($u = 0$)

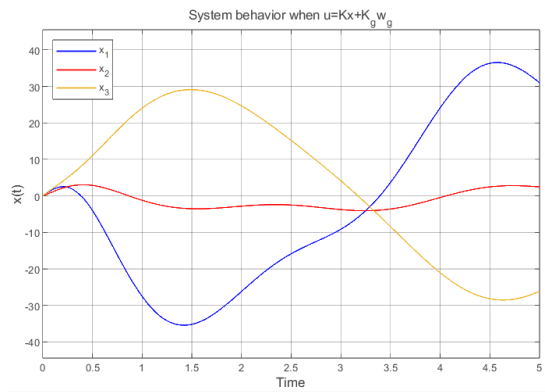


(a) График $x(t)$ при $u = Kx$

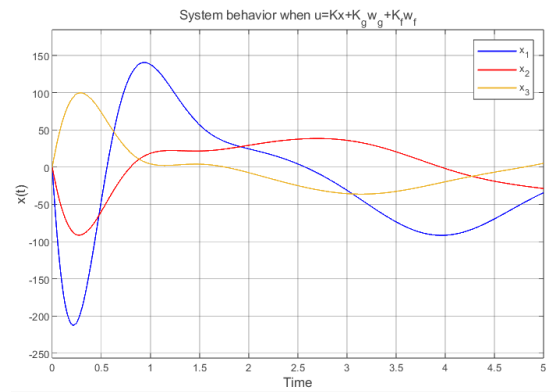


(b) График $x(t)$ при $u = Kx + K_f w_f$

Рис. 4: Графики $x(t)$ для замкнутой системы

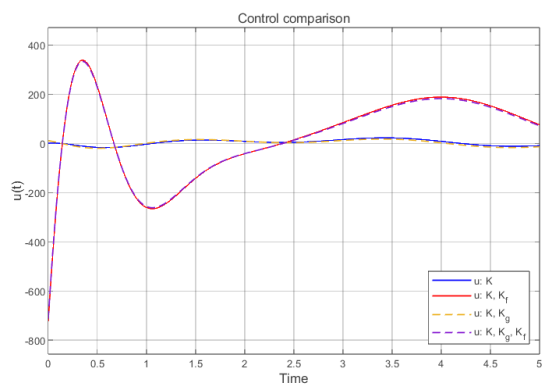


(a) График $x(t)$ при $u = Kx + K_g w_g$

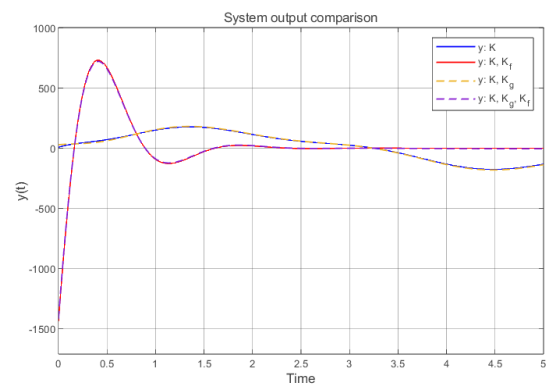


(b) График $x(t)$ при Kx, K_g, K_f

Рис. 5: Графики $x(t)$ для замкнутой системы



(a) Сравнение графиков $u(t)$



(b) Сравнение графиков $y(t)$

Рис. 6: Графики $u(t), y(t)$ для замкнутой системы

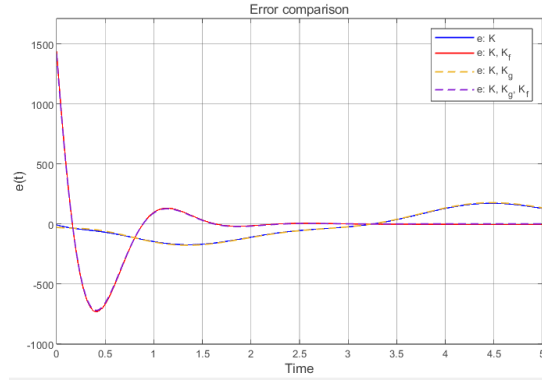


Рис. 7: Сравнение графиков $e(t) = g(t) - y(t)$ для замкнутой системы

Сравнение результатов

При отсутствии управления объект управления разошелся. При наличии в управлении всех компонент выход системы $y(t)$ удалось свести к задающему воздействию $g(t)$. Результат при K, K_f схож с результатом при всех компонентах. Также схожи результаты при K и K, K_g .

Задание 2. Слежение и компенсация по выходу

Рассмотрим систему (1), генератор внешнего возмущения (2) и генератор задающего воздействия (3). Матрицы K, K_g, K_f используем как в первом задании

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} 2.1111 & -13.4448 & 1.6787 \end{bmatrix}, \\ K_g &= \begin{bmatrix} -0.0932 & 18.6951 & -8.1152 \end{bmatrix}, \\ K_f &= \begin{bmatrix} -725.9021 & -225.1491 & 586.1685 & -359.3897 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

Программа для задания 2 представлена в приложении Б на листинге 2.

Схема моделирования системы

Система замкнута регулятором, состоящим из наблюдателя задающего воздействия, наблюдателя расширенной размерности и закона управления

$$u = K\hat{x} + K_g\hat{w}_g + K_f\hat{w}_f,$$

обеспечивающим выполнение целевого условия (4). Строим график формируемого регулятором управления $u(t)$, сравнительные графики

$$\begin{bmatrix} w_f(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \hat{w}_f(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix},$$

график ошибки наблюдателя расширенной размерности

$$e_f(t) = \begin{bmatrix} w_f(t) \\ x(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{w}_f(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix},$$

сравнительные графики $w_g(t)$ и $\hat{w}_g(t)$, график ошибки наблюдателя задающего воздействия $e_g(t) = w_g(t) - \hat{w}_g(t)$, график выхода $y(t)$ и график ошибки управления $e(t) = g(t) - y(t)$

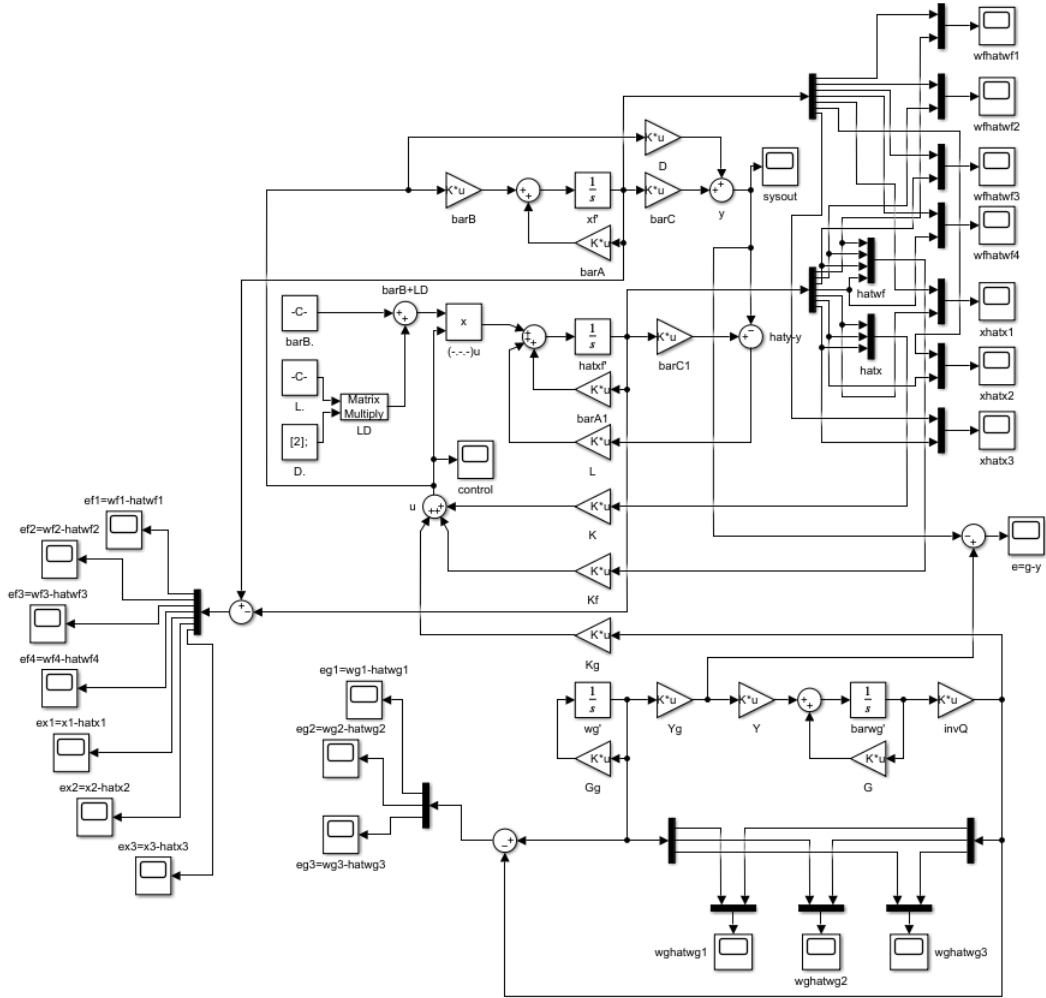


Рис. 8: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Наблюдатель задающего воздействия

Зададим желаемую динамику наблюдателя (Γ, Y) , где Γ – гурвицева

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Γ определяет скорость схождения ошибки $\tilde{w}_g = w_g - \hat{w}_g$ к 0. Цель

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|w_g(t) - \hat{w}_g(t)\| = 0$$

Наблюдатель сигнала задания

$$\dot{\tilde{w}}_g = \Gamma \tilde{w}_g + Y g$$

Найдем матрицу смены базиса Q

$$\tilde{w}_g = Q \hat{w}_g$$

через уравнение типа Сильвестра

$$Q\Gamma_g - \Gamma Q = YY_g$$

Получаем

$$Q = \begin{bmatrix} -0.6806 & 14.6250 & -22.4444 \\ 0.2083 & -17.8750 & 33.6667 \\ -2.7778 & 65.0000 & -112.2222 \end{bmatrix}$$

Синтез наблюдателя расширенной размерности

Сформируем расширенную систему

$$x_f = \begin{bmatrix} w_f \\ x \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \Gamma_f & 0_{4 \times 3} \\ B_f Y_f & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 1} \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [D_f Y_f \quad C];$$

Наблюдатель повышенной размерности

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_f = \bar{A}\hat{x}_f + (\bar{B} + LD)u + L(\hat{y} - y), \\ \hat{y} = \bar{C}\hat{x}_f; \end{cases}$$

Синтезируем матрицу коррекции наблюдателя путем решения матричного уравнения типа Риккати

$$\bar{A}P + P\bar{A}^T + Q_L - \nu P\bar{C}^T R^{-1} \bar{C}P = 0, \quad L = -P\bar{C}^T R^{-1}$$

При $Q_L = I_{7 \times 7}$, $R = 1$, $\nu = 1$ получаем

$$L = 10^3 \cdot [-0.0066 \quad 0.0219 \quad -0.0143 \quad -0.0229 \quad 1.7022 \quad 1.0491 \quad -1.0838]^T$$

Компьютерное моделирование

Зададим нулевые начальные условия наблюдателей и выполним компьютерное моделирование замкнутой системы

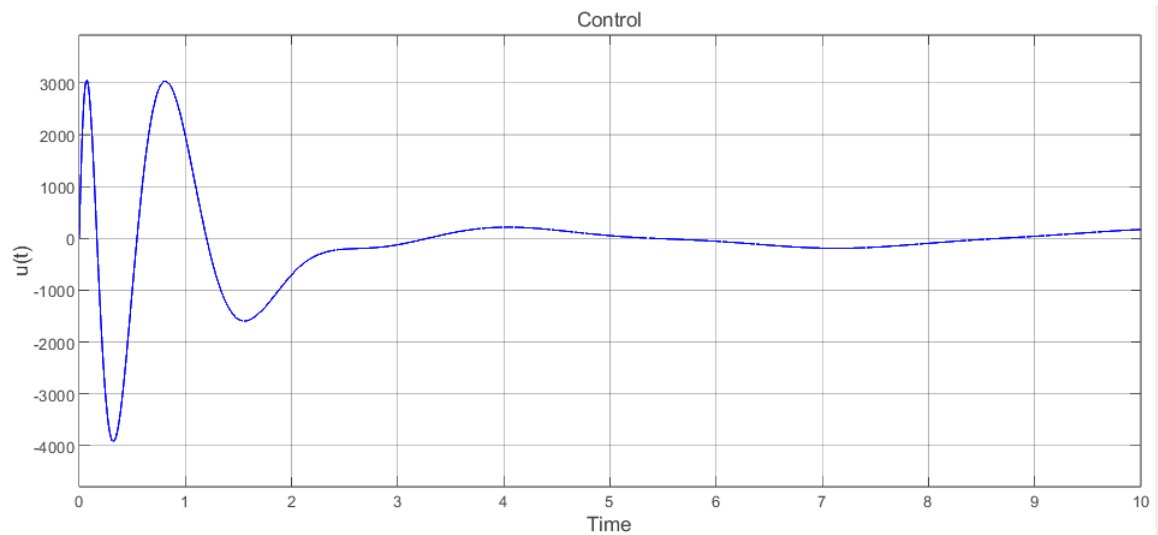


Рис. 9: График управления $u(t)$

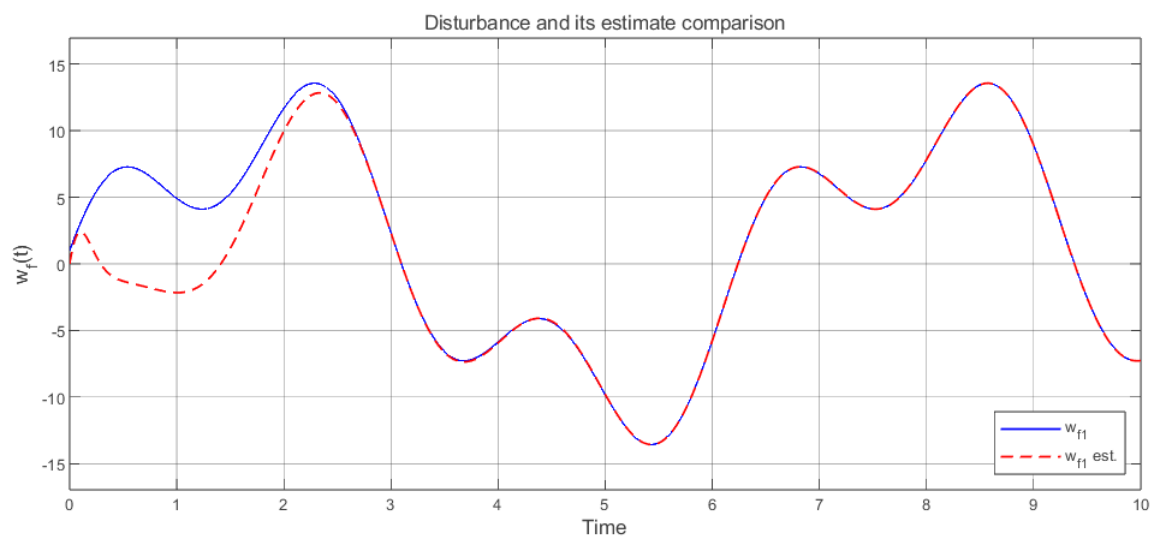


Рис. 10: График возмущения $w_{f1}(t)$ и его оценки $\hat{w}_{f1}(t)$

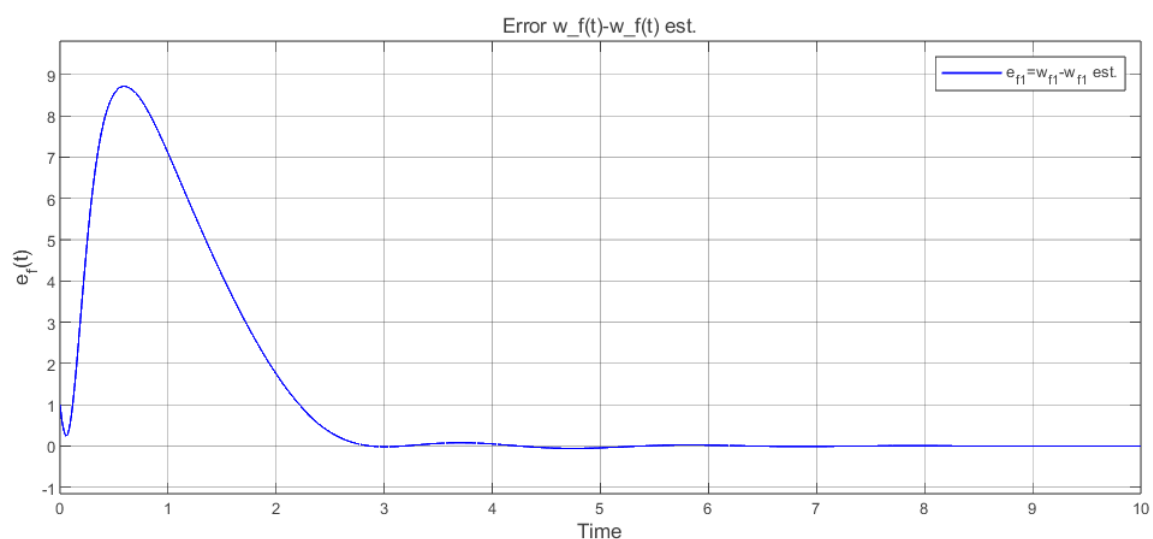


Рис. 11: График ошибки $e_{f1}(t) = w_{f1}(t) - \hat{w}_{f1}(t)$

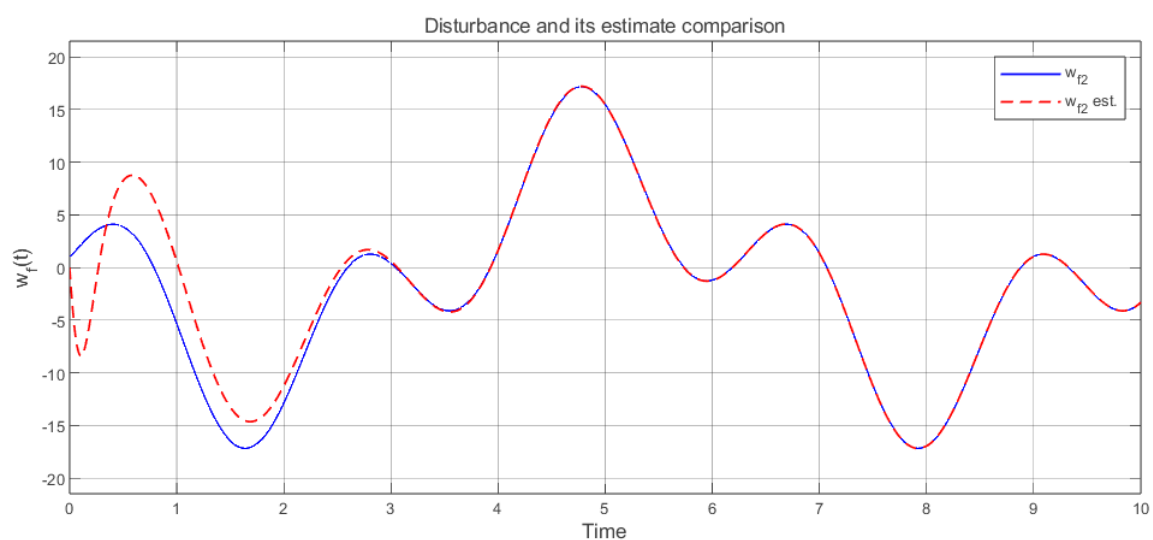


Рис. 12: График возмущения $w_{f2}(t)$ и его оценки $\hat{w}_{f2}(t)$

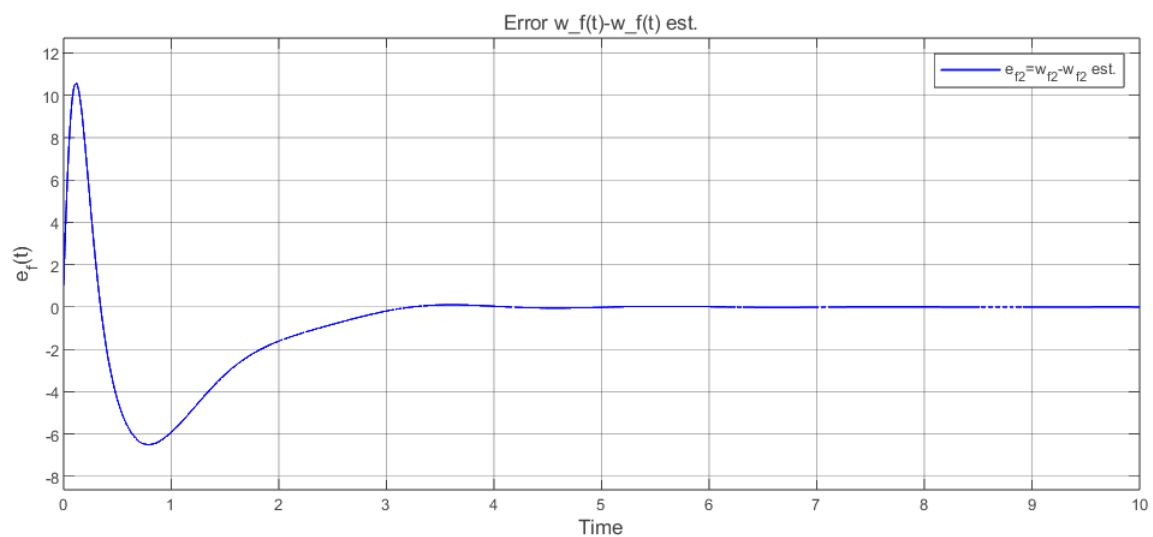


Рис. 13: График ошибки $e_{f_2}(t) = w_{f_2}(t) - \hat{w}_{f_2}(t)$

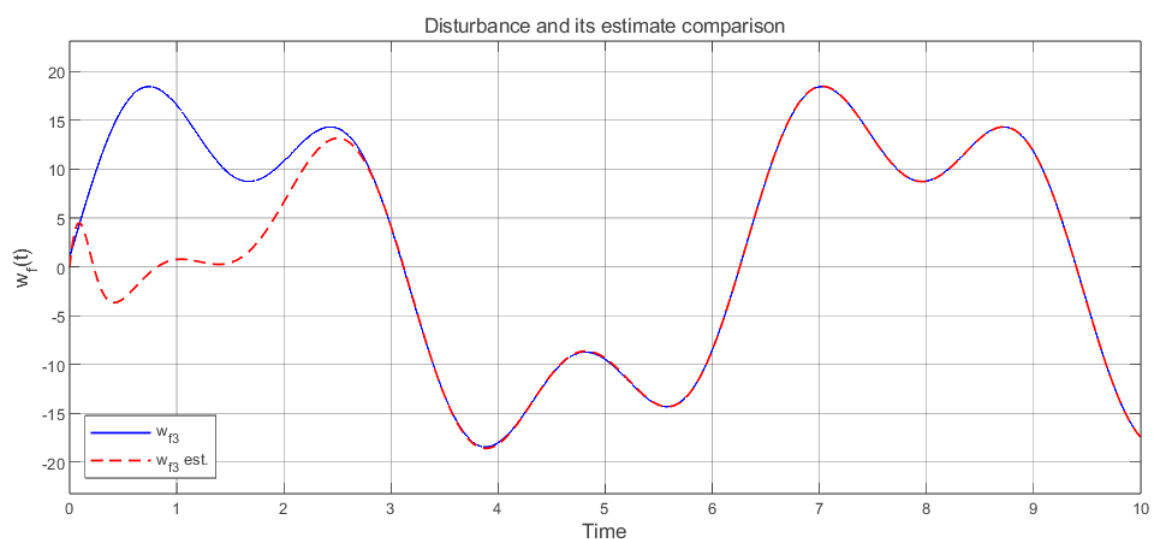


Рис. 14: График возмущения $w_{f_3}(t)$ и его оценки $\hat{w}_{f_3}(t)$

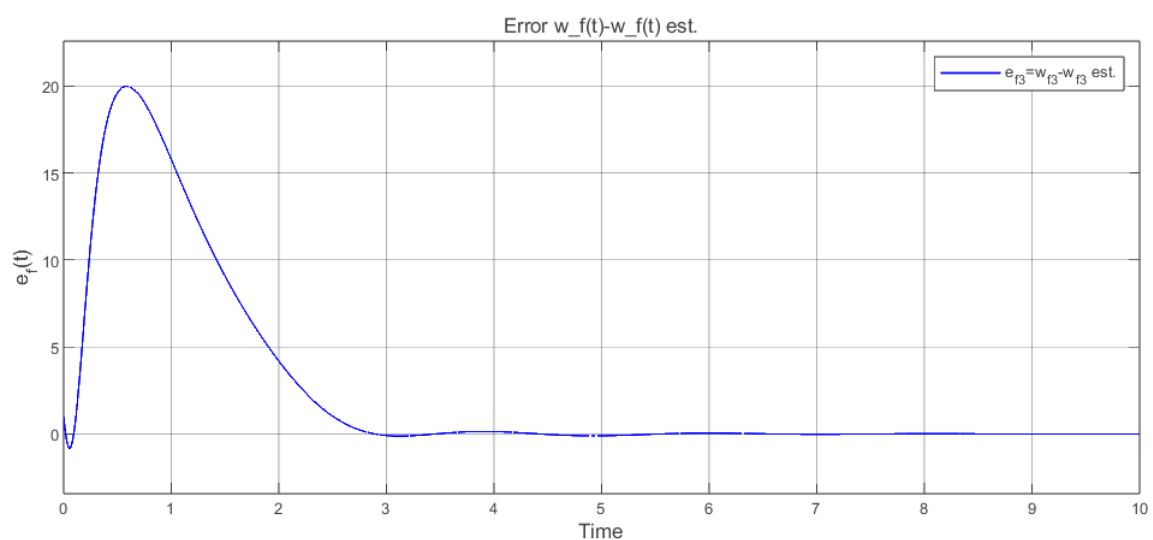


Рис. 15: График ошибки $e_{f_3}(t) = w_{f_3}(t) - \hat{w}_{f_3}(t)$

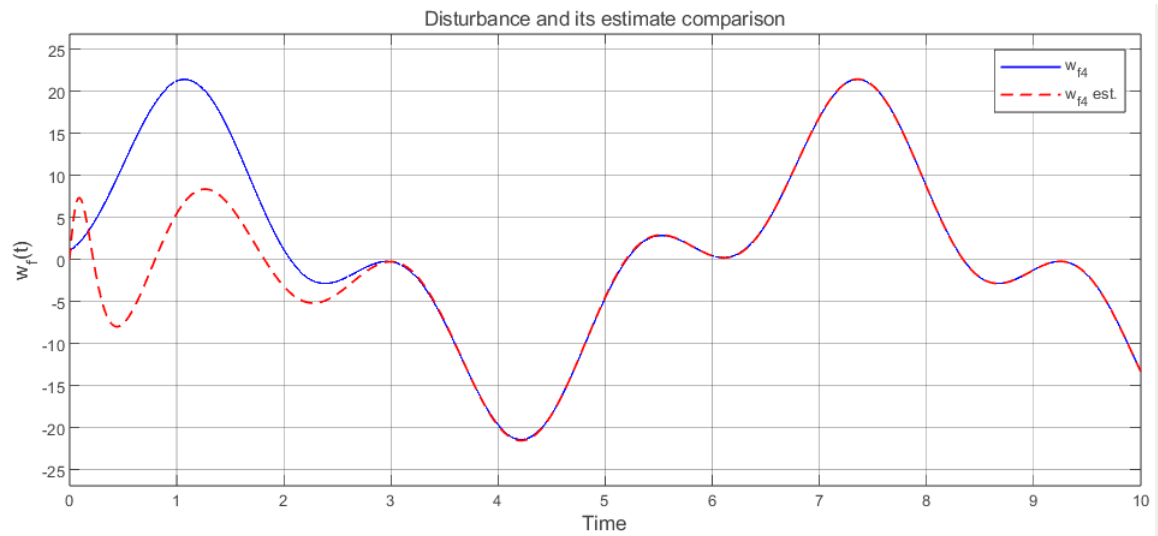


Рис. 16: График возмущения $w_{f_4}(t)$ и его оценки $\hat{w}_{f_4}(t)$

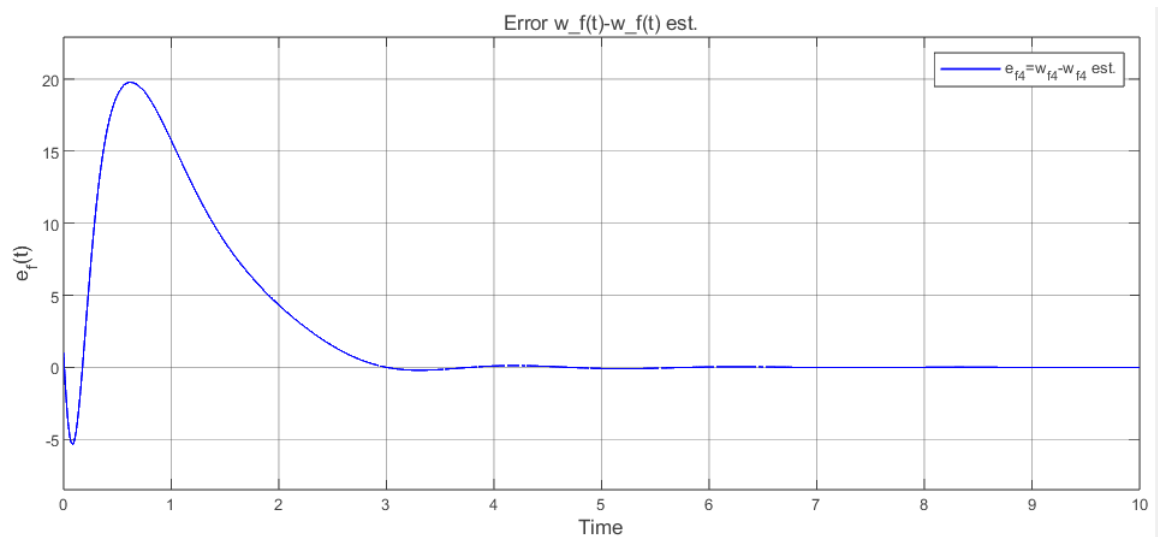


Рис. 17: График ошибки $e_{f_4}(t) = w_{f_4}(t) - \hat{w}_{f_4}(t)$

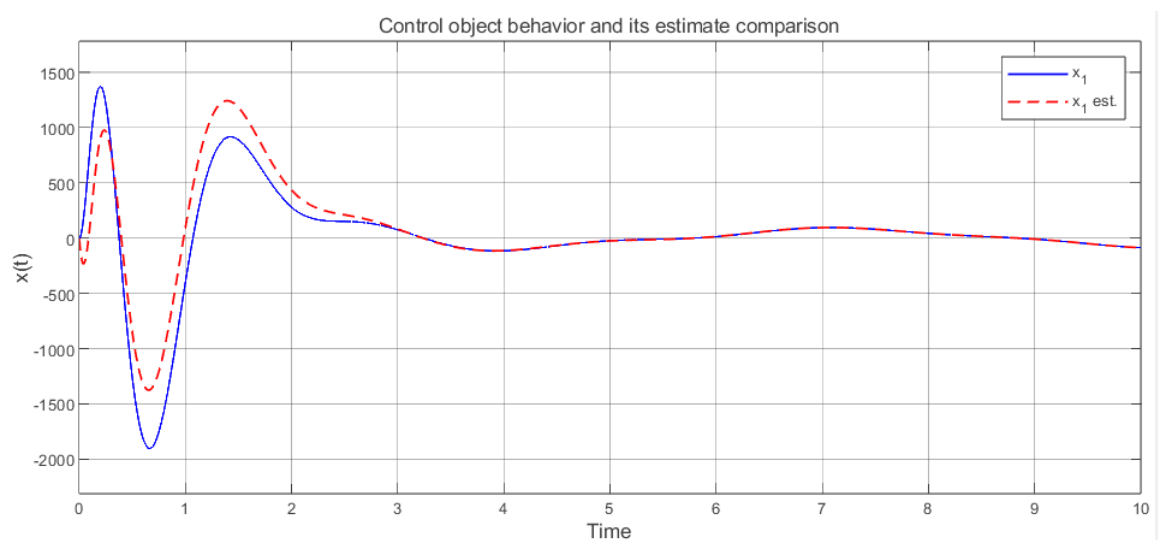


Рис. 18: График координаты вектора состояния ОУ $x_1(t)$ и ее оценки $\hat{x}_1(t)$

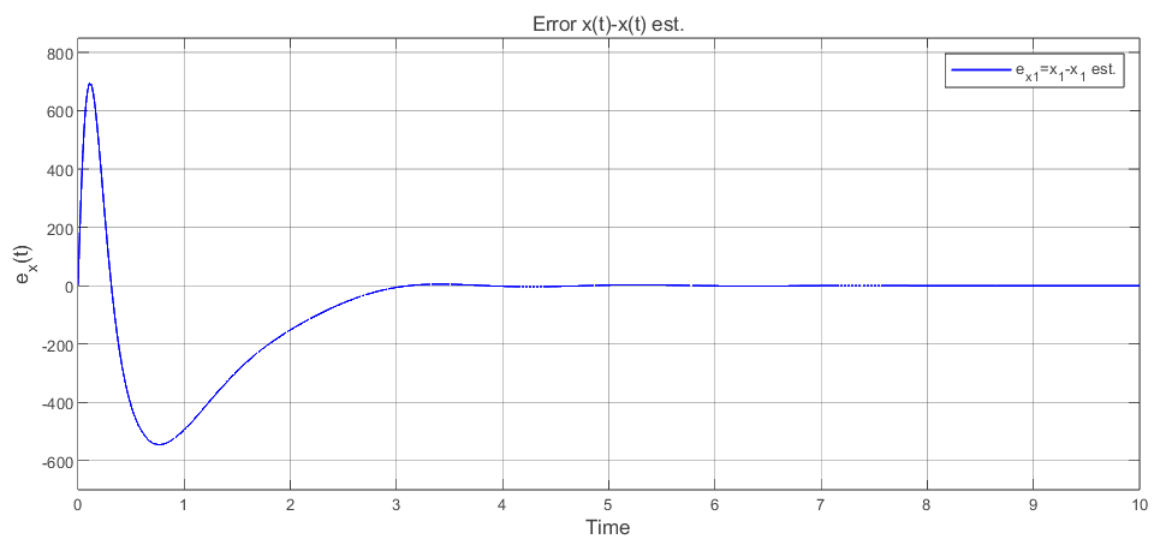


Рис. 19: График ошибки $e_{x_1}(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$

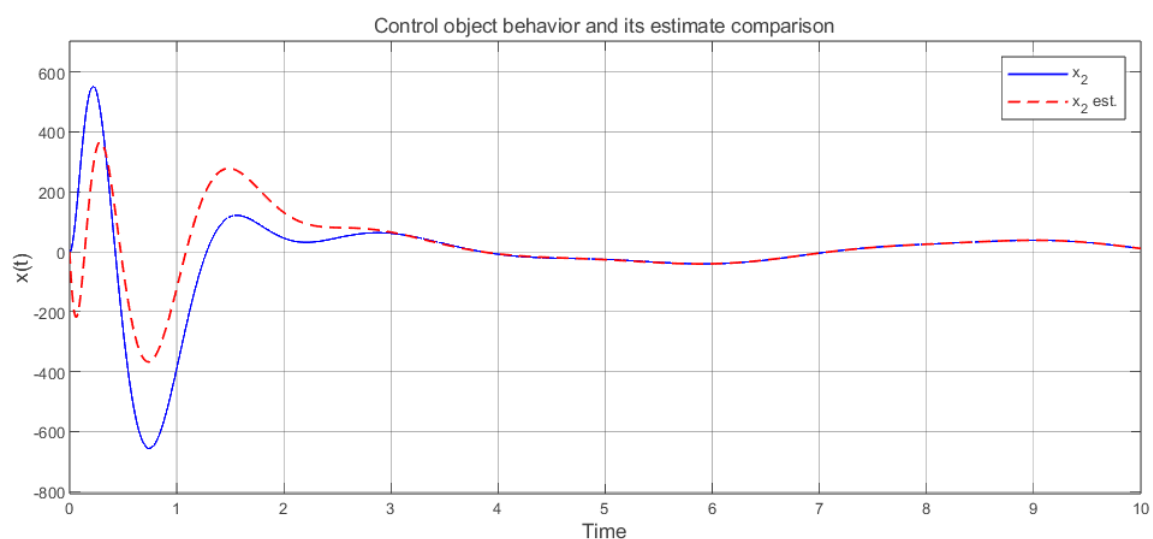


Рис. 20: График координаты вектора состояния ОУ $x_2(t)$ и ее оценки $\hat{x}_2(t)$

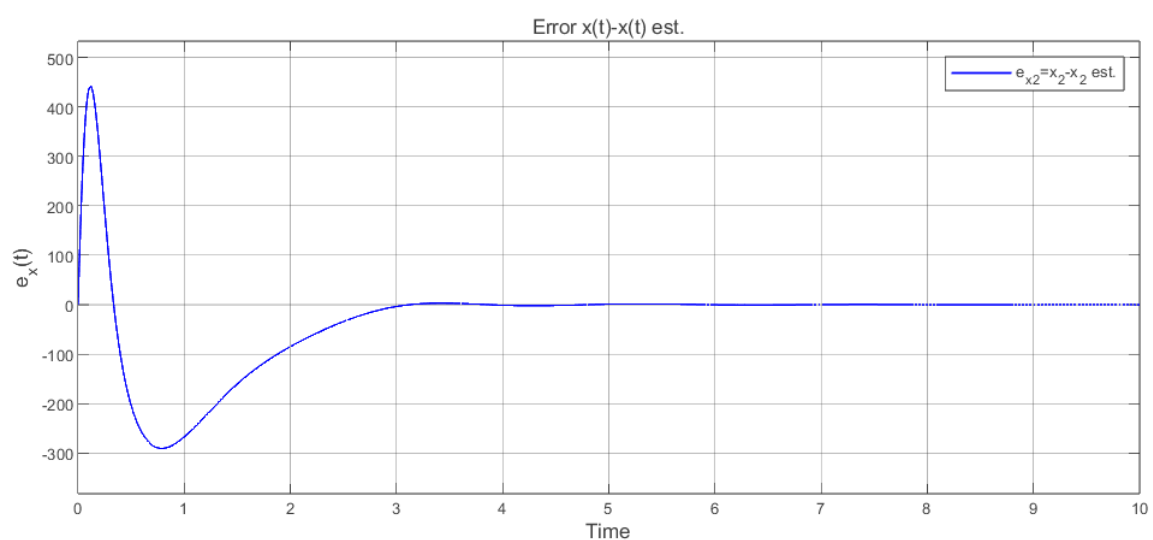


Рис. 21: График ошибки $e_{x_2}(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$

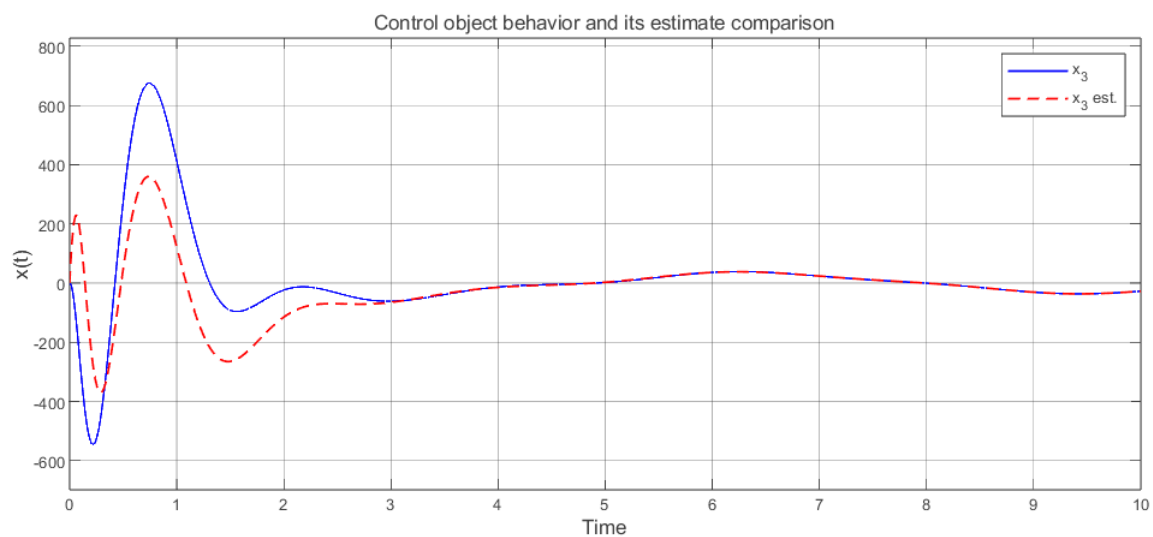


Рис. 22: График координаты вектора состояния ОУ $x_3(t)$ и ее оценки $\hat{x}_3(t)$

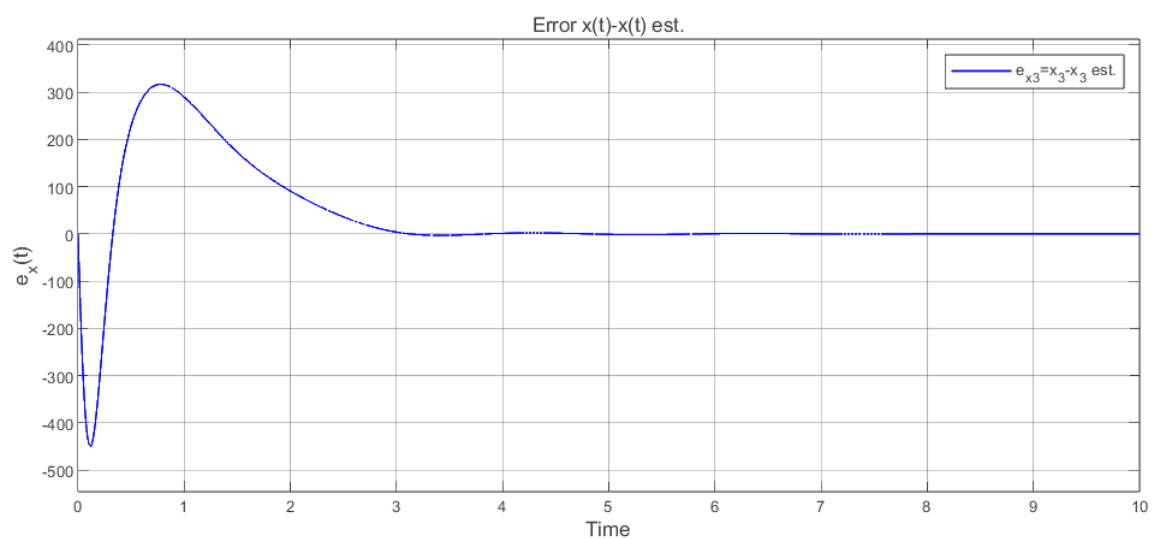


Рис. 23: График ошибки $e_{x_3}(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$

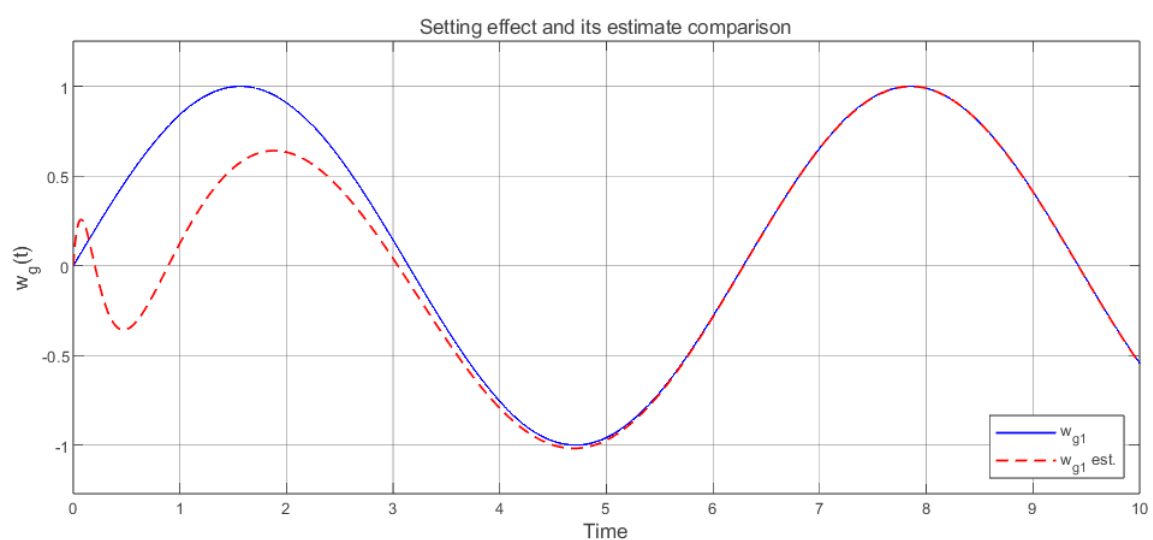


Рис. 24: График задающего воздействия $w_{g1}(t)$ и его оценки $\hat{w}_{g1}(t)$

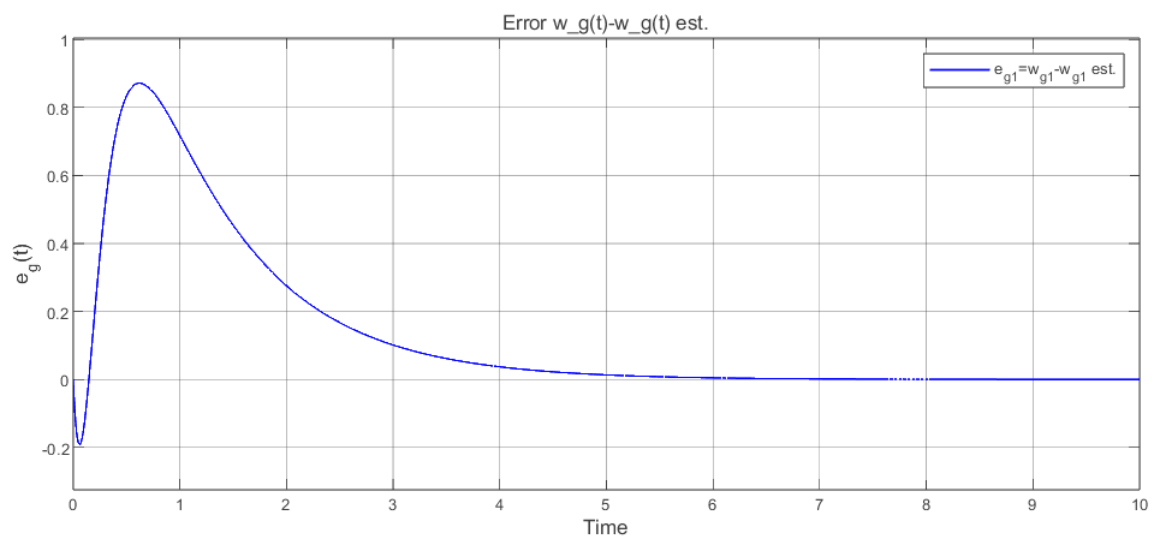


Рис. 25: График ошибки $e_{g1}(t) = w_{g1}(t) - \hat{w}_{g1}(t)$

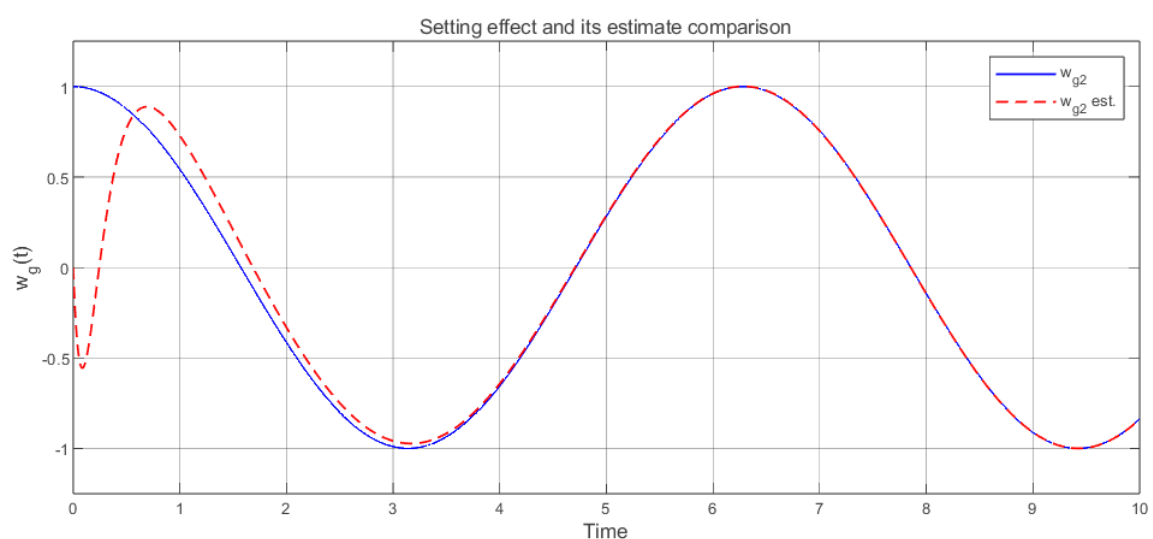


Рис. 26: График задающего воздействия $w_{g2}(t)$ и его оценки $\hat{w}_{g2}(t)$

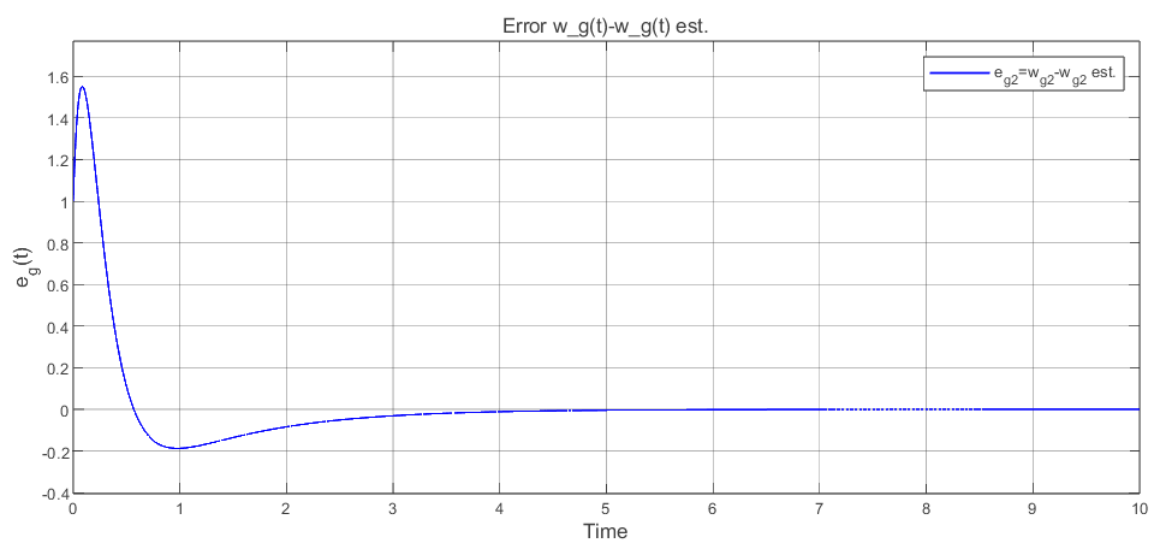


Рис. 27: График ошибки $e_{g2}(t) = w_{g2}(t) - \hat{w}_{g2}(t)$

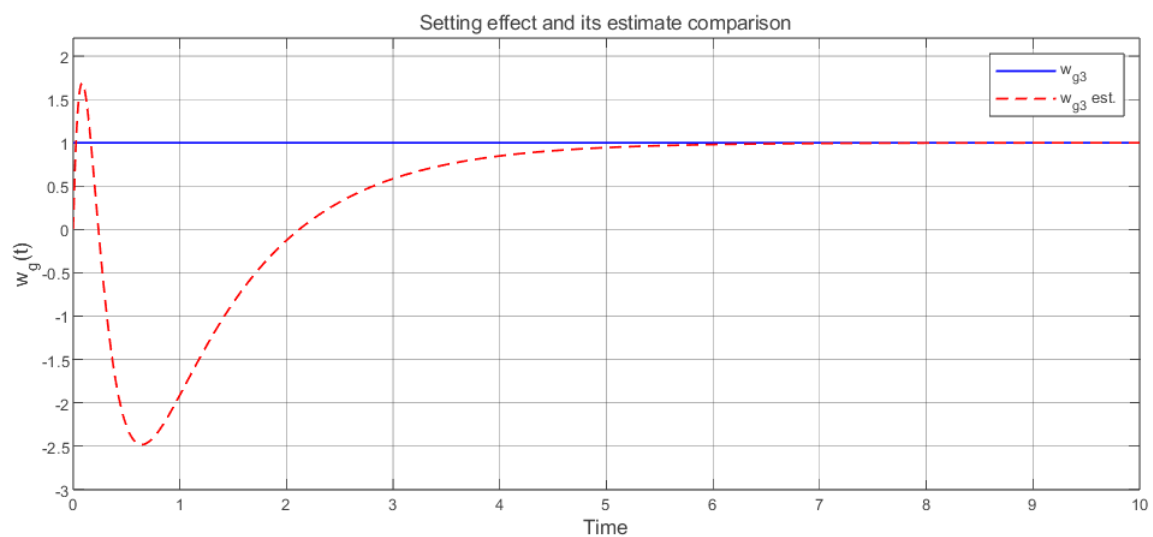


Рис. 28: График задающего воздействия $w_{g3}(t)$ и его оценки $\hat{w}_{g3}(t)$

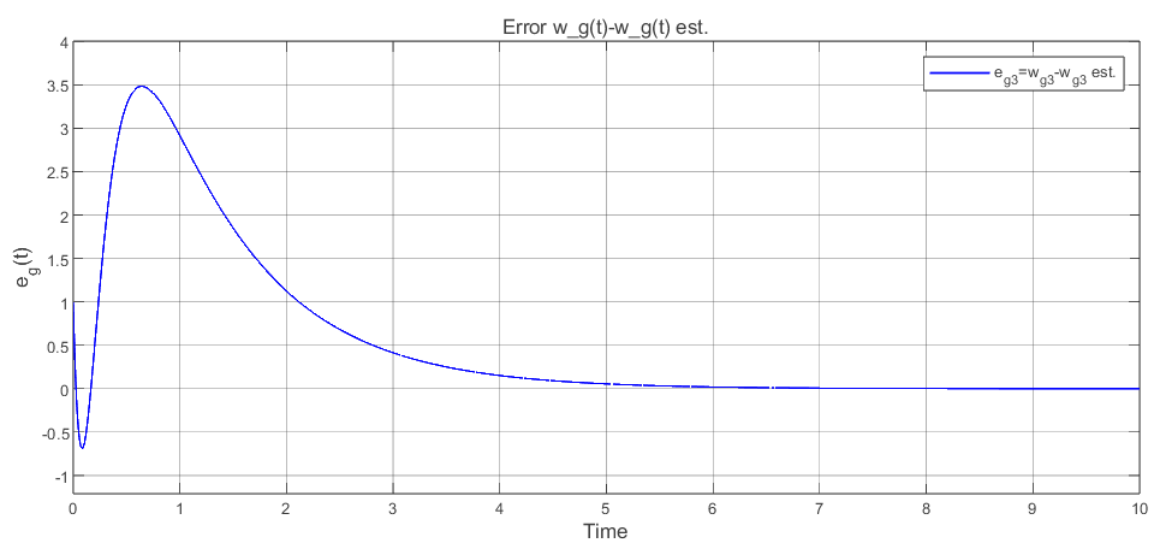


Рис. 29: График ошибки $e_{g3}(t) = w_{g3}(t) - \hat{w}_{g3}(t)$

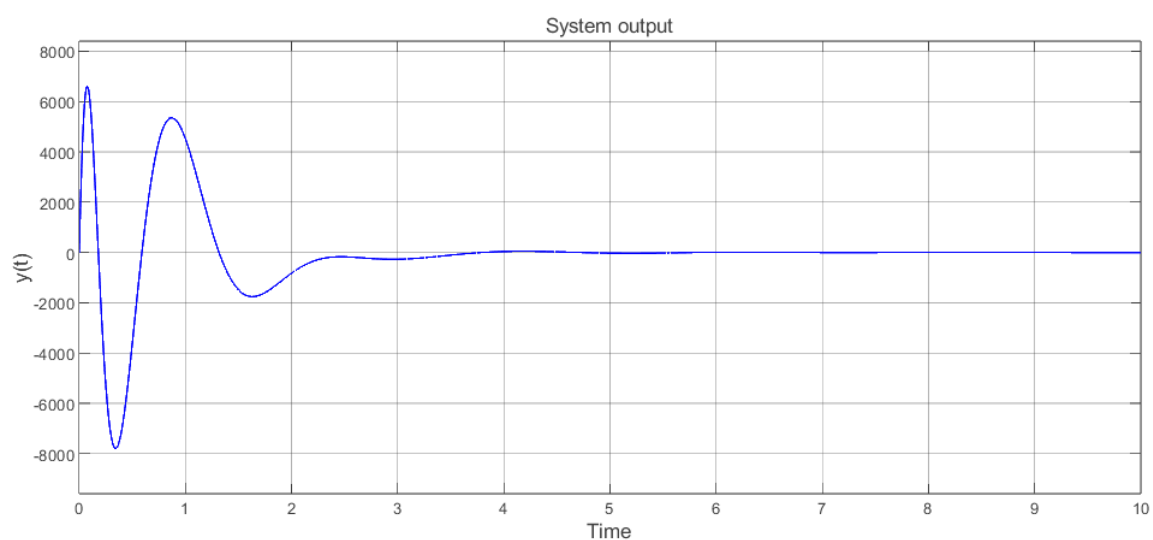


Рис. 30: График выхода $y(t)$

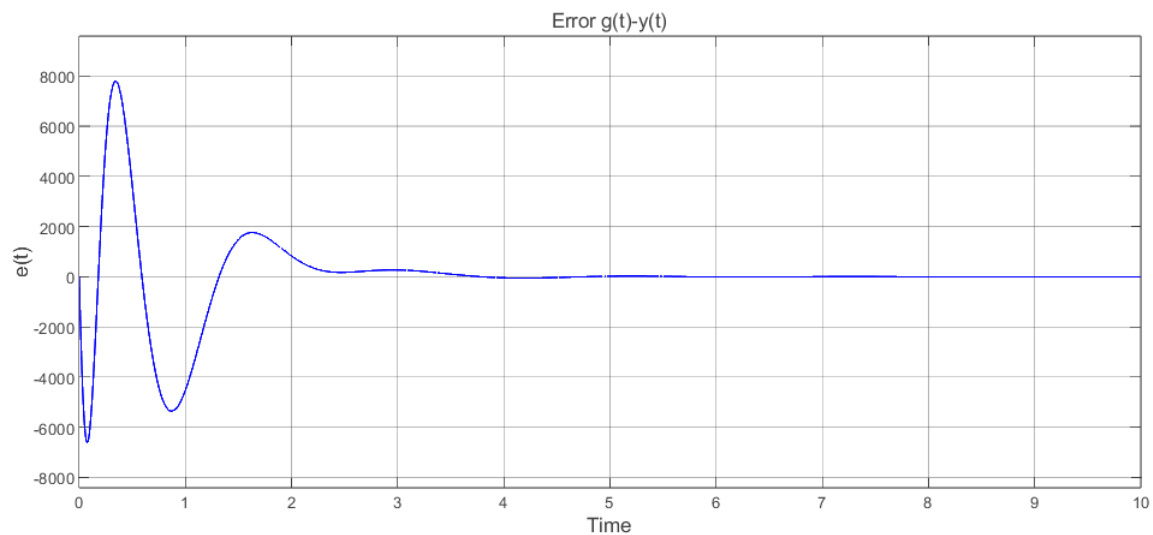


Рис. 31: График ошибки $e(t) = g(t) - y(t)$

Сравнение результатов

Все оценки наблюдателей сошлись к соответствующим истинным траекториям. Все ошибки со временем свелись к нулю. В сравнении с заданием 1 выход системы имеет больше осцилляций, управления затрачивается сравнительно больше. Тем не менее такая модель лучше, так как мы не используем истинные метки, а оцениваем их по некоторой доступной информации.

Приложение А

```
% plant parameters
A=[5 2 7;
  2 1 2;
  -2 -3 -4];
B=[3;1;-1];
Bf=[-4 -1;
  0 0;
  4 0];
C=[2 0 3];
D=2;
Df=[8 3];

Gf=[25 6 -20 11;
  14 3 -10 4;
  40 11 -31 17;
  6 4 -4 3];
Yf=[8 2 -6 4;
  -20 -6 16 -9];

Gg = [0 1 0;
  -1 0 0;
  0 0 0];
Yg=[4 0 -1];
wg0 = [0;1;1];

% A eigenvalues
```

```

A_eig = eig(A)

% Jordan matrix
[P1, J] = jordan(A);
Pjre(:,1) = P1(:,1);
Pjre(:,2) = imag(P1(:,2));
Pjre(:,3) = real(P1(:,3))
Pjre_inv = Pjre^-1
Aj_re = Pjre_inv * A * Pjre
B_jre = Pjre_inv * B

% G eigenvalues
Gf_eig = eig(Gf)
Gg_eig = eig(Gg)

% solving Riccati: feedback comp
Q = eye(3);
v = 2;
R = 1;
a = 2;

Aa = A + eye(3) * (a-0.0000000000000001);
[Pk,K,e]=icare(Aa,sqrt(v)*B,Q,R);
K=-inv(R)*B'*Pk
eK=eig(A+B*K)

% check Frankis-Davison: Kg
Gg_eig(1)
check_Kg1 = [A-eye(3)*Gg_eig(1) B; C D]
rank(check_Kg1)

Gg_eig(2)
check_Kg2 = [A-eye(3)*Gg_eig(2) B; C D]
rank(check_Kg2)

Gg_eig(3)
check_Kg3 = [A-eye(3)*Gg_eig(3) B; C D]
rank(check_Kg3)

% solving Frankis-Davison: Kg
cvx_begin sdp
variable Pg(3,3)
variable Kg(1,3)
Pg*Gg-(A+B*K)*Pg == B*Kg;
(C+D*K)*Pg+D*Kg == Yg;
cvx_end

Pg=Pg
Kg=Kg

% check Frankis-Davison: Kf
Gf_eig(1)
check_Kf1 = [A-eye(3)*Gf_eig(1) B; C D]
rank(check_Kf1)

Gf_eig(2)
check_Kf2 = [A-eye(3)*Gf_eig(2) B; C D]
rank(check_Kf2)

```

```

Gf_eig(3)
check_Kf3 = [A-eye(3)*Gf_eig(3) B; C D]
rank(check_Kf3)

Gf_eig(4)
check_Kf4 = [A-eye(3)*Gf_eig(4) B; C D]
rank(check_Kf4)

% solving Frankis-Davison: Kf
cvx_begin sdp
variable Pf(3,4)
variable Kf(1,4)
Pf*Gf-(A+B*K)*Pf-Bf*Yf == B*Kf;
(C+D*K)*Pf+D*Kf == -Df*Yf;
cvx_end

Pf=Pf
Kf=Kf

```

Листинг 1: Программа для задания 1

Приложение Б

```

% plant parameters
A=[5 2 7;
   2 1 2;
   -2 -3 -4];
B=[3;1;-1];
Bf=[-4 -1;
     0 0;
     4 0];
C=[2 0 3];
D=2;
Df=[8 3];

Gf=[25 6 -20 11;
    14 3 -10 4;
    40 11 -31 17;
    6 4 -4 3];
Yf=[8 2 -6 4;
    -20 -6 16 -9];

Gg = [0 1 0;
      -1 0 0;
       0 0 0];
Yg=[4 0 -1];
wg0 = [0;1;1];

K=[2.1111 -13.4448 1.6787];
Kg=[-0.0932 18.6951 -8.1152];
Kf=[-725.9021 -225.1491 586.1685 -359.3897];

G=[-1 0 0;
   0 -5 0;
   0 0 -10];

```

```

Y=[1; 1; 1];

% find Q
cvx_begin sdp
variable Q(3,3)
Q*Gg-G*Q == Y*Yg;
cvx_end

Q=Q
invQ=inv(Q)

null1=[0 0 0;
        0 0 0;
        0 0 0;
        0 0 0];
null2=[0;0;0;0];
barA = [Gf null1;
        Bf*Yf A]
barB = [null2;B]
barC=[Df*Yf C]

% solving Riccati
QL = eye(7);
v = 1;
R = 1;

[P,L,e]=icare(barA',barC',QL,R);
L=-P*barC'*R^-1

```

Листинг 2: Программа для задания 2