Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

Задание 1. Синтез регулятора с заданной степенью устойчивости

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Управляемость и стабилизируемость

Найдем собственные числа матрицы A и определим управляемость каждого из них. Программа для вычислений в `MATLAB` представлена на листинге 1 в приложении 1

$$\sigma\left(A\right) = \{-2, 2 \pm i\}$$

Число $\lambda_1 = -2$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. Комплексная пара $\lambda_{2,3}$ имеет положительную действительную часть – эти собственные числа неустойчивые, нужна управляемость. Разложим A в вещественную жорданову форму, найдем вектор B в базисе собственных векторов матрицы A

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Только число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, так как первый элемент B_{Jre} равен нулю. Остальные собственные числа управляемые. Таким образом, система не полностью управляема, стабилизируема.

Степень устойчивости

Любой степени устойчивости при помощи регулятора $u = Kx$ добиться не получится, так как система не полностью управляема. Степень устойчивости системы α – самое близкое к правой комплексной полуплоскости собственное число матрицы A, находящееся в левой комплексной полуплоскости. Проверка на близость осуществляется через действительную часть собственного числа. Имеем

$$\mathrm{Re}\left\{\lambda_1 = -2\right\} = -2,$$

$$\mathrm{Re}\left\{\lambda_{2,3} = 2 \pm i\right\} = 2;$$

Таким образом, степень устойчивости системы $\alpha = 2$. Это максимум. Устойчивость в данном случае подразумевается экспоненциальная.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Построим схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$, замкнутой регулятором $u = Kx$, используя `SIMULINK`

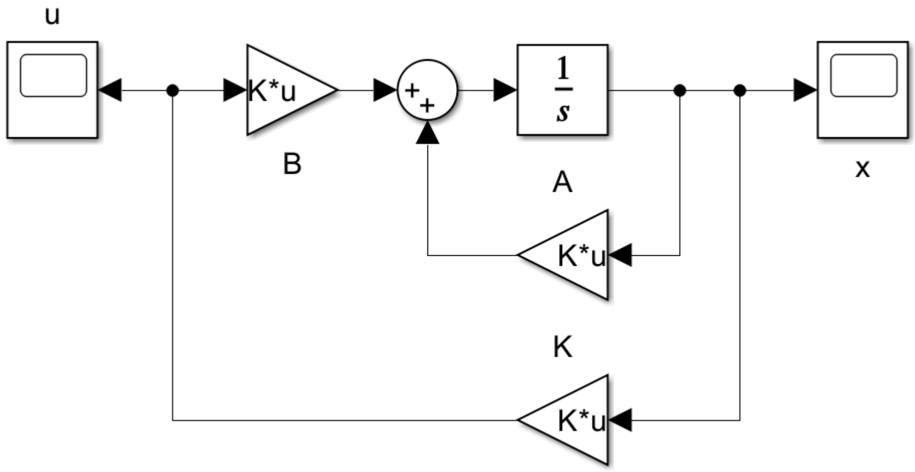

Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Значения желаемой степени устойчивости

Возьмем достаточно отличающиеся достижимые степени устойчивости в диапазоне $0 < \alpha \leq 2$

$$\alpha_1 = 2,$$
$$\alpha_2 = 0.1;$$

Синтез регулятора через матричное неравенство типа Ляпунова

Для каждого из выбранных значений α синтезируем регулятор, обеспечивающий заданную степень устойчивости, при помощи матричного неравенства типа Ляпунова

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \; K = YP^{-1};$$

Найдем для $\alpha_{1,2}$ соответствующие матрицы регулятора $K_{1\,\alpha_i}$ **без ограничений на управление**. Пользуемся пакетом `cvx` для `MATLAB`. Получаем

$$K_{1\,\alpha_1} = \begin{bmatrix} 2.5267 & -18.8652 & 1.7294 \end{bmatrix},$$

$$K_{1\,\alpha_2} = \begin{bmatrix} -2.0955 & -5.8106 & -2.6863 \end{bmatrix};$$

Найдем для $\alpha_{1,2}$ соответствующие матрицы регулятора $K_{2\,\alpha_i}$ **совместно с решением задачи минимизации управления**. Нам нужно найти минимальное μ, для которого при начальных условиях $x(0) = x_0$ выполняется $||u(t)|| \leq \mu$. Для этого нужно решить задачу выпуклой минимизации:

$$\begin{aligned}
&\text{минимизировать } \gamma = \mu^2 \\
&\text{при ограничениях } P \succ 0, \; PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \prec 0, \\
&\begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \; \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \gamma I \end{bmatrix};
\end{aligned}$$

Зададим начальные условия

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Реализация представлена в `MATLAB`, для решения используется `cvx`. Получаем

$$K_{2\,\alpha_1} = \begin{bmatrix} 1.6000 & -11.2000 & 1.6000 \end{bmatrix},\ \mu_1 = 8.0090,$$

$$K_{2\,\alpha_2} = \begin{bmatrix} -0.7565 & -2.6884 & -0.7552 \end{bmatrix},\ \mu_2 = 4.2015;$$

Определим собственные числа матриц замкнутых систем $(A + BK_{j\,\alpha_i})$ и сравним с желаемой степенью устойчивости

$$\begin{aligned} \sigma\left(A + BK_{1\,\alpha_1}\right) &= \{-2, -4.5072 \pm 3.2145i\}, \\ \sigma\left(A + BK_{1\,\alpha_2}\right) &= \{-2, -4.5455, -0.8653\}, \\ \sigma\left(A + BK_{2\,\alpha_1}\right) &= \{-2, -2.0000 \pm 4.1231i\}, \\ \sigma\left(A + BK_{2\,\alpha_2}\right) &= \{-2, -0.1013 \pm 2.3259i\}; \end{aligned}$$

Для $\alpha_1 = 2$ собственные числа при регуляторе $K_{2\,\alpha_1}$ получились более точными, чем при регуляторе $K_{1\,\alpha_1}$. То есть управление будет именно таким, каким мы его хотели ($\mathrm{Re}\,\{\lambda_i\} = -\alpha_1$). На графике увидим плавное поведение системы, стабилизирующееся к нулю. Для $\alpha_2 = 0.1$ ситуация аналогичная – при $K_{2\,\alpha_2}$ действительная часть комплексной пары почти достигла желаемого ограничения на степень устойчивости. При $K_{2\,\alpha_2}$ результат более хаотичный. Также в каждом спектре наблюдаем неуправляемое число -2, что подтверждает корректность расчетов.

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование для всех замкнутых систем, используя схему `SIMULINK`, представленную на рис. 1. Построим графики $u(t), x(t)$ при начальных условиях

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Результаты представлены на рис. 2–9 со следующей страницы

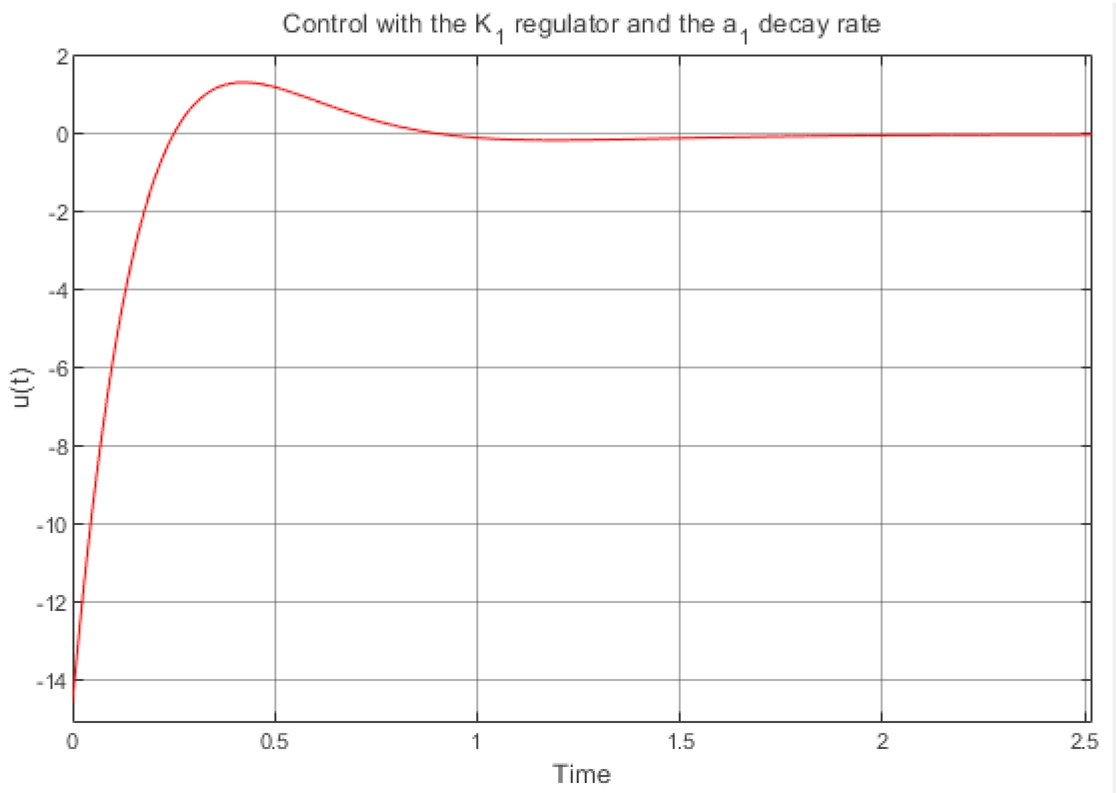

Рис. 2: График $u(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{1\alpha_1}$

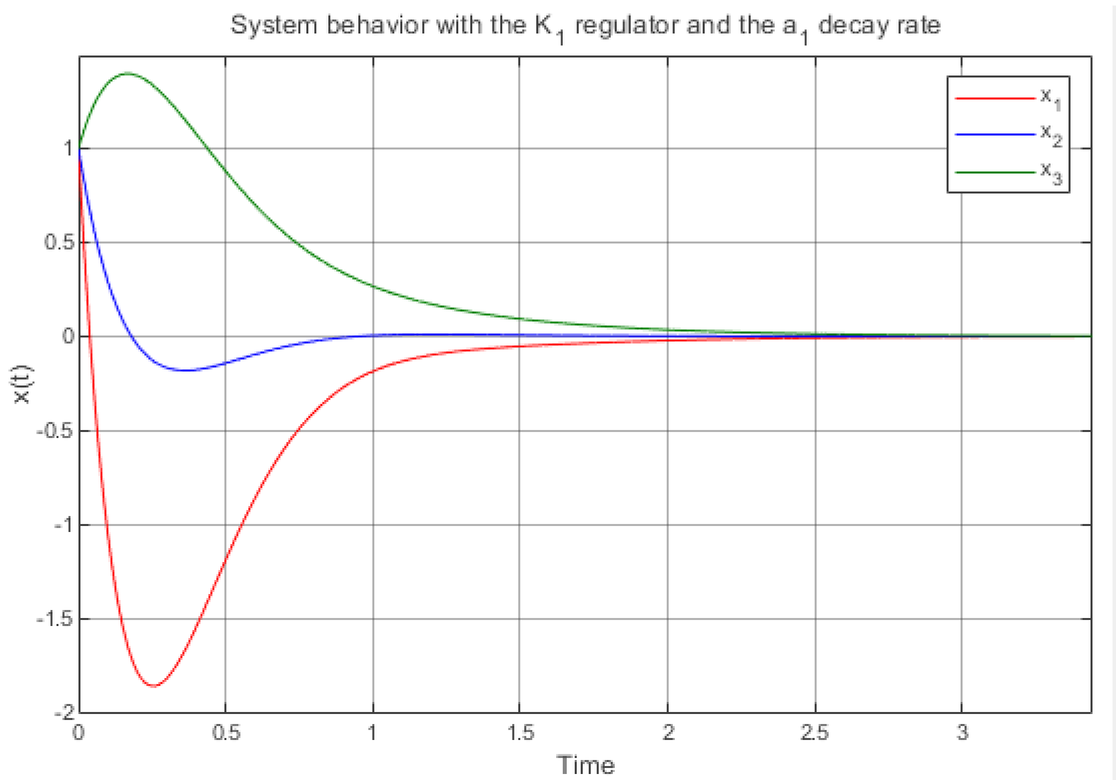

Рис. 3: График $x(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{1\alpha_1}$

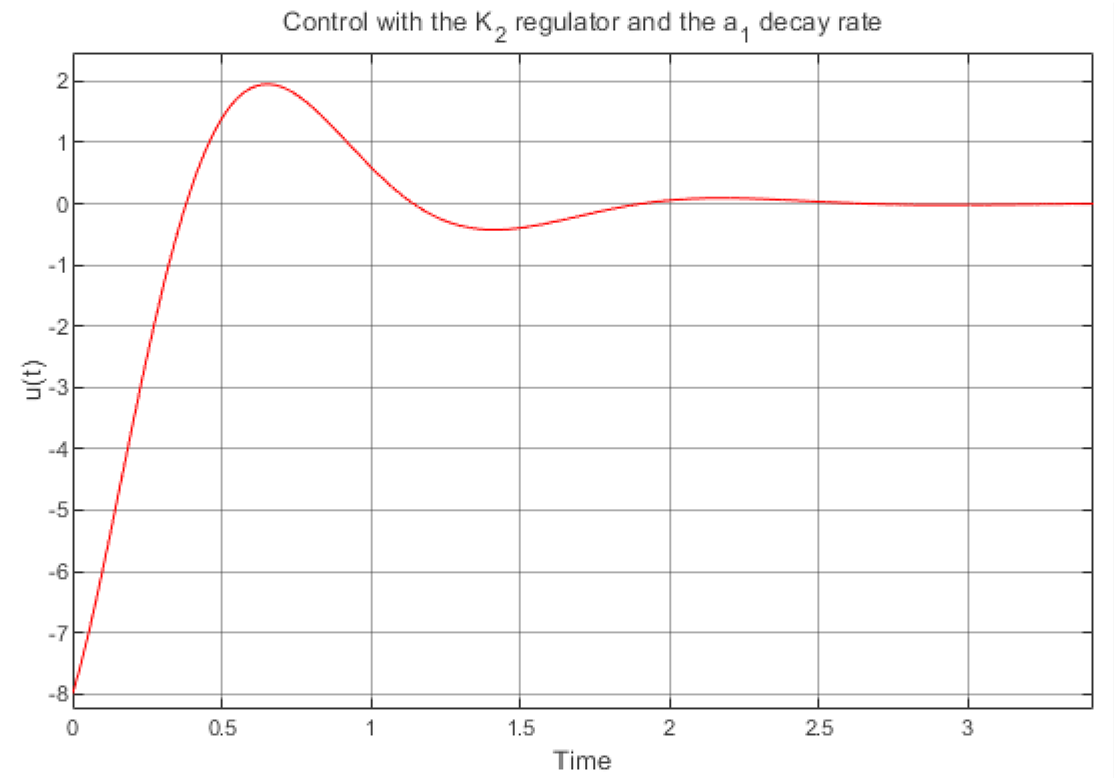

Рис. 4: График $u(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{2\alpha_1}$, $\mu_1 = 8.0090$

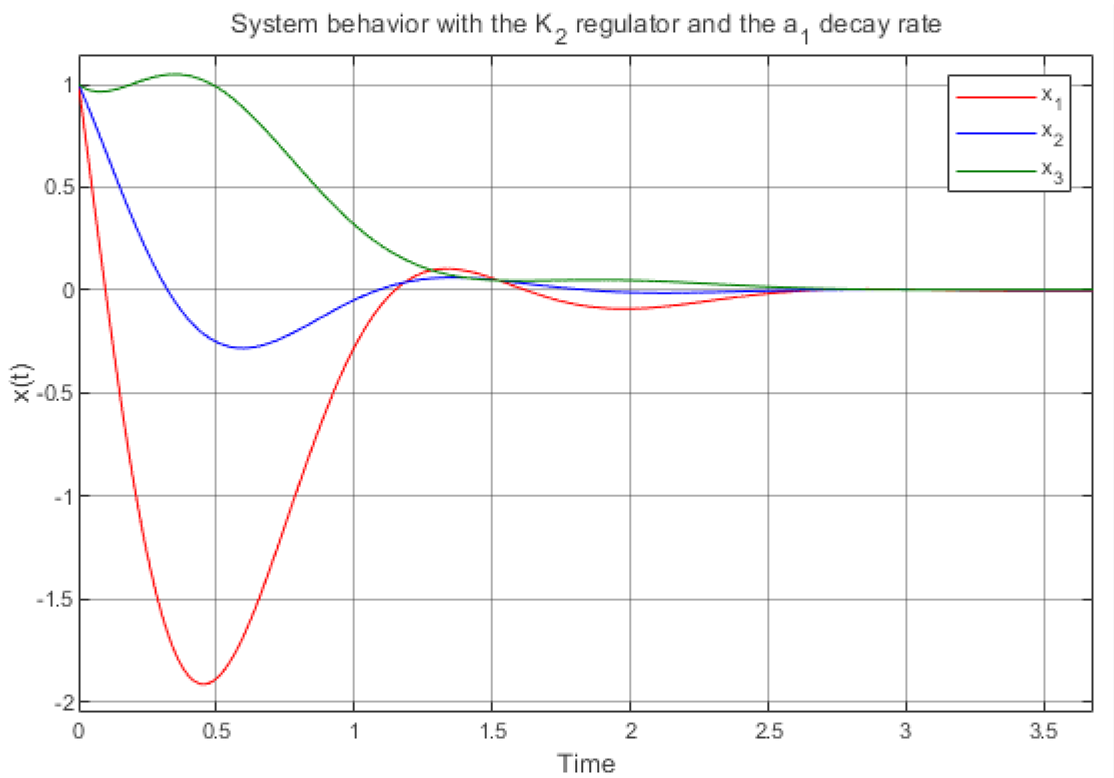

Рис. 5: График $x(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{2\alpha_1}$, $\mu_1 = 8.0090$

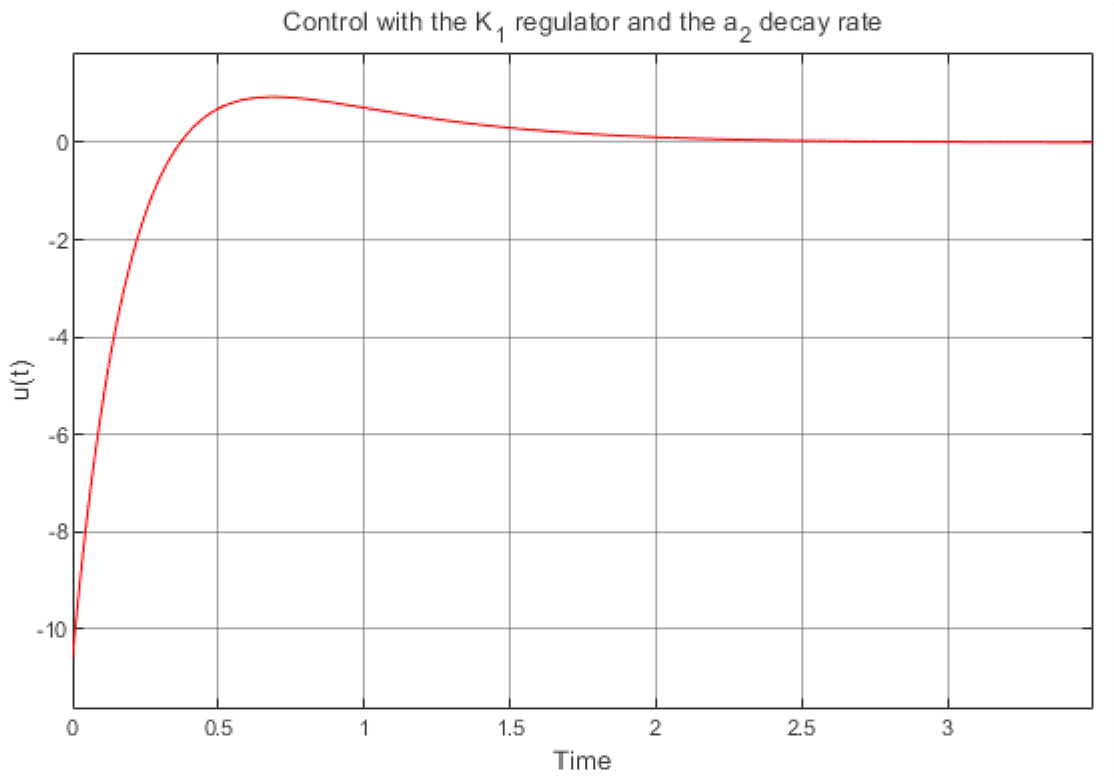

Рис. 6: График $u(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{1\alpha_2}$

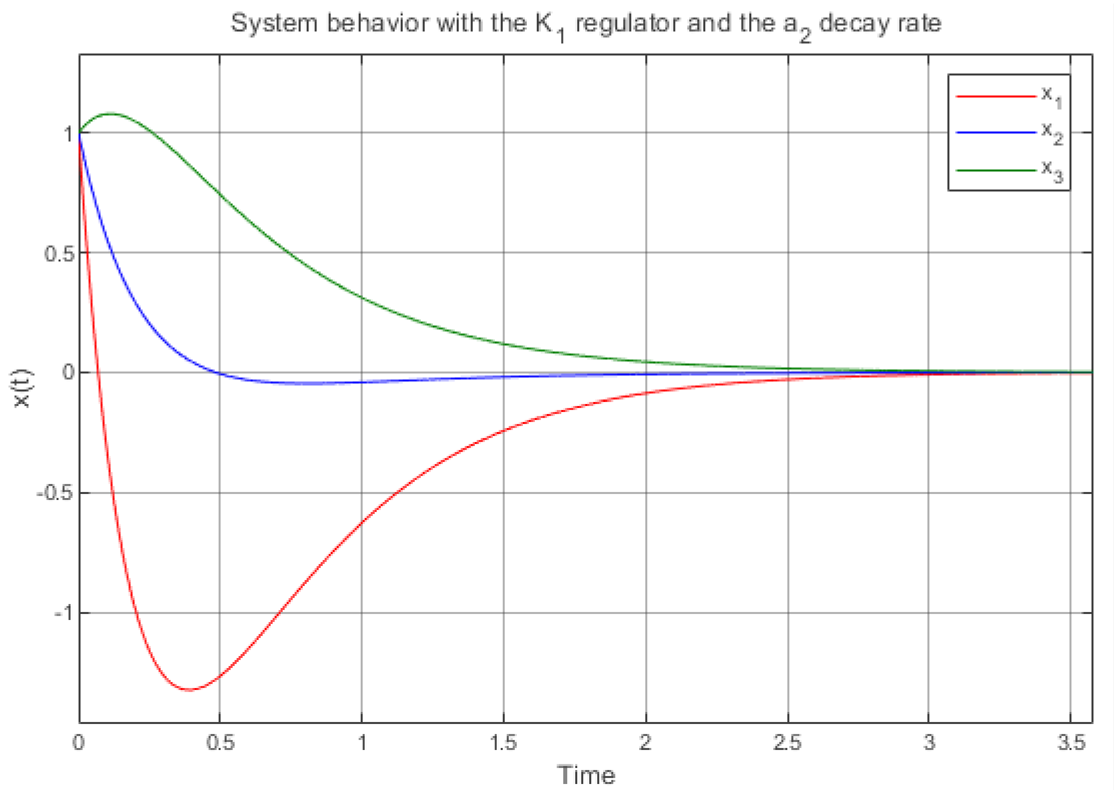

Рис. 7: График $x(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{1\alpha_2}$

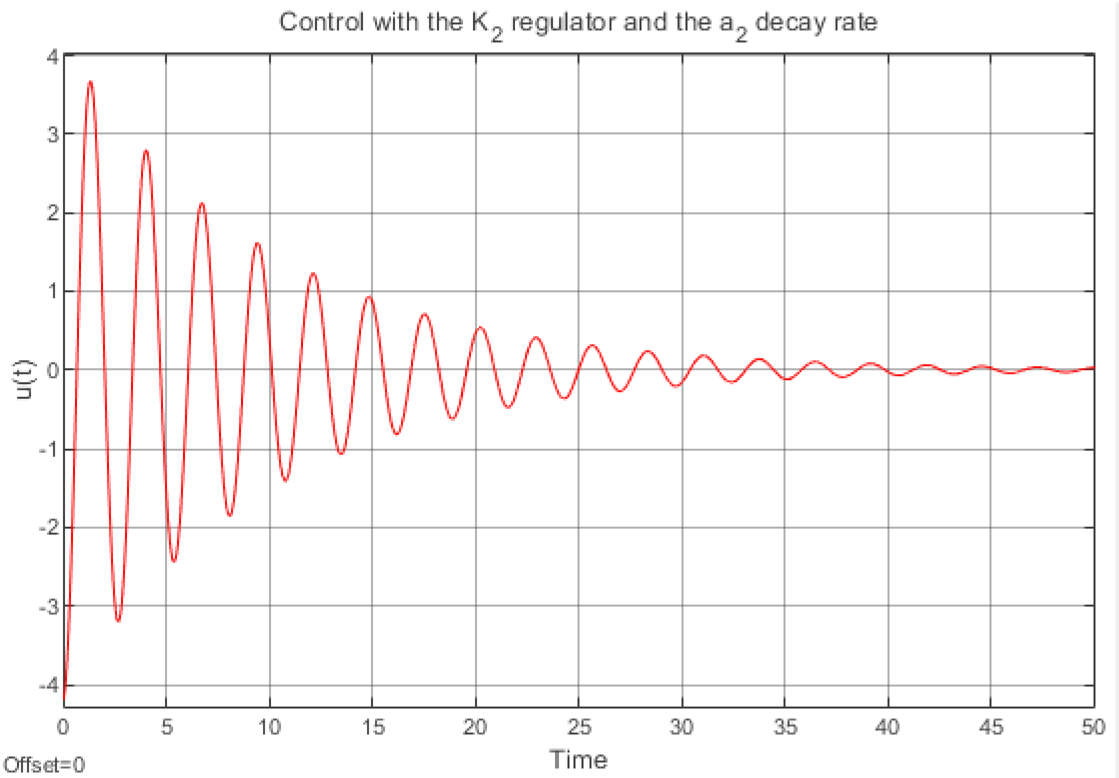

Рис. 8: График $u(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{2\alpha_2}$, $\mu_2 = 4.2015$

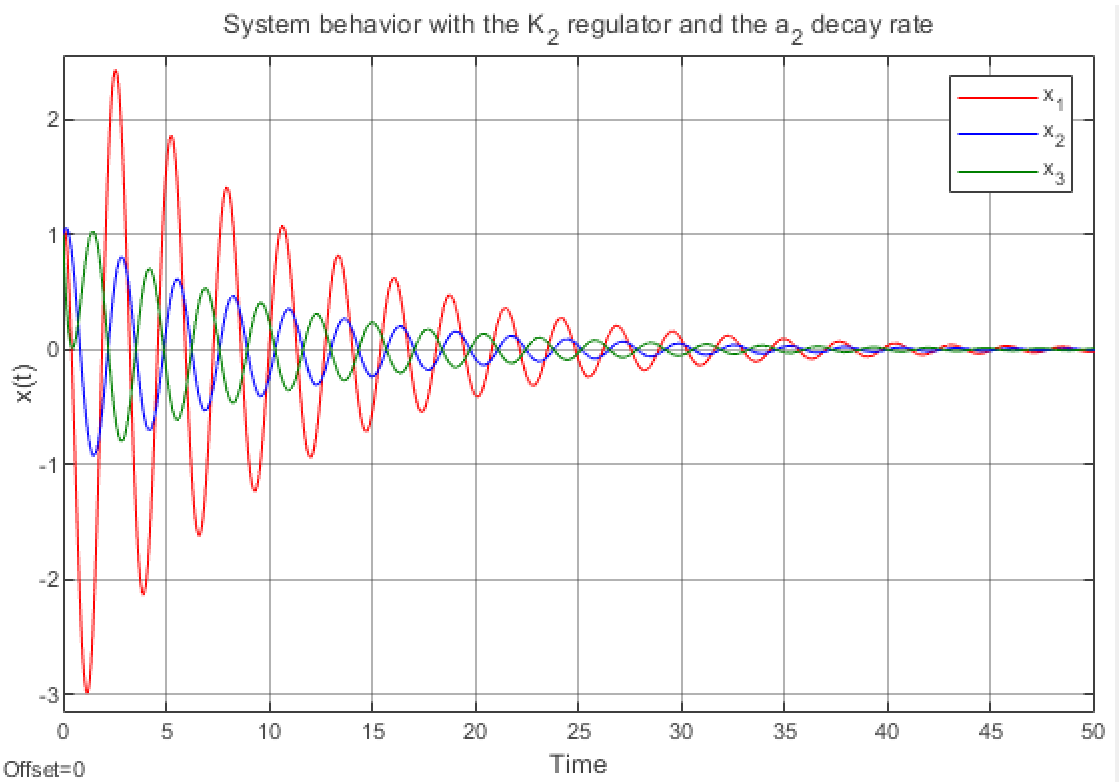

Рис. 9: График $x(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{2\alpha_2}$, $\mu_2 = 4.2015$

Сопоставление результатов

На рис. 4, 8 видим, что систему удается стабилизировать при помощи минимального управления, однако на это уходит больше времени, что наблюдается при сравнении поведения систем на рис. 9, 7. В случае с рис. 5, 3 это менее заметно. В общем результаты без ограничения на управление более гладкие и спокойные, но требуют больше управления.

Синтез регулятора через матричное уравнение типа Риккати

Для каждого α синтезируем регулятор при помощи матричного уравнения типа Риккати при $\nu = 2$ и $R = 1$

$$A^T P + PA + Q - \nu PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P = 0,\ K = -R^{-1}B^T P;$$

Пользуемся `MATLAB`. Найдем матрицы регулятора $K_{3\,\alpha_i}$ при $Q = I$

$$K_{3\,\alpha_1} = \begin{bmatrix} 2.1164 & -13.4942 & 1.6777 \end{bmatrix},$$

$$K_{3\,\alpha_2} = \begin{bmatrix} -0.8455 & -3.3716 & -0.5697 \end{bmatrix};$$

Найдем матрицы регулятора $K_{4\,\alpha_i}$ при $Q = 0$

$$K_{4\,\alpha_1} = \begin{bmatrix} 1.6000 & -11.2000 & 1.6000 \end{bmatrix},$$

$$K_{4\,\alpha_2} = \begin{bmatrix} -0.7560 & -2.6880 & -0.7560 \end{bmatrix};$$

Определим собственные числа замкнутых систем $(A + BK_{j\,\alpha_i})$

$$\begin{aligned}
\sigma\left(A + BK_{3\,\alpha_1}\right) &= \{-2, -2.4114 \pm 4.3116i\},\\
\sigma\left(A + BK_{3\,\alpha_2}\right) &= \{-2, -0.6692 \pm 2.3797i\},\\
\sigma\left(A + BK_{4\,\alpha_1}\right) &= \{-2, -2.0000 \pm 4.1231i\},\\
\sigma\left(A + BK_{4\,\alpha_2}\right) &= \{-2, -0.1000 \pm 2.3259i\};
\end{aligned}$$

В каждом спектре наблюдаем неуправляемое собственное число -2 – это верно. При $Q = 0$ желаемая степень устойчивости была достигнута – действительные части собственных чисел совпадают с соответствующими α_i. При $Q = I$ результат менее точный, чем при $Q = 0$, однако собственные числа ближе к желаемой степени устойчивости в сравнении с результатами для регуляторов $K_{1\,\alpha_i}$. Спектр $A + BK_{4\,\alpha_1}$ полностью совпадает с результатом для $K_{2\,\alpha_1}$, а в случае с α_2 – почти полностью. В общем решение через матричное уравнение типа Риккати дает более точные результаты.

Компьютерное моделирование для дополнительного пункта

Для замкнутых систем $A + BK_{j\,\alpha_i}$ выполним компьютерное моделирование – построим графики $u(t), x(t)$ при начальных условиях

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Для $A + BK_{4\,\alpha_1}$ графики строить избыточно – результаты полностью совпали с результатом для $A + BK_{2\,\alpha_1}$. Достаточно посмотреть на рис. 4, 5.

Далее расположены графики $u(t), x(t)$, смоделированные по схеме, представленной на рис. 1

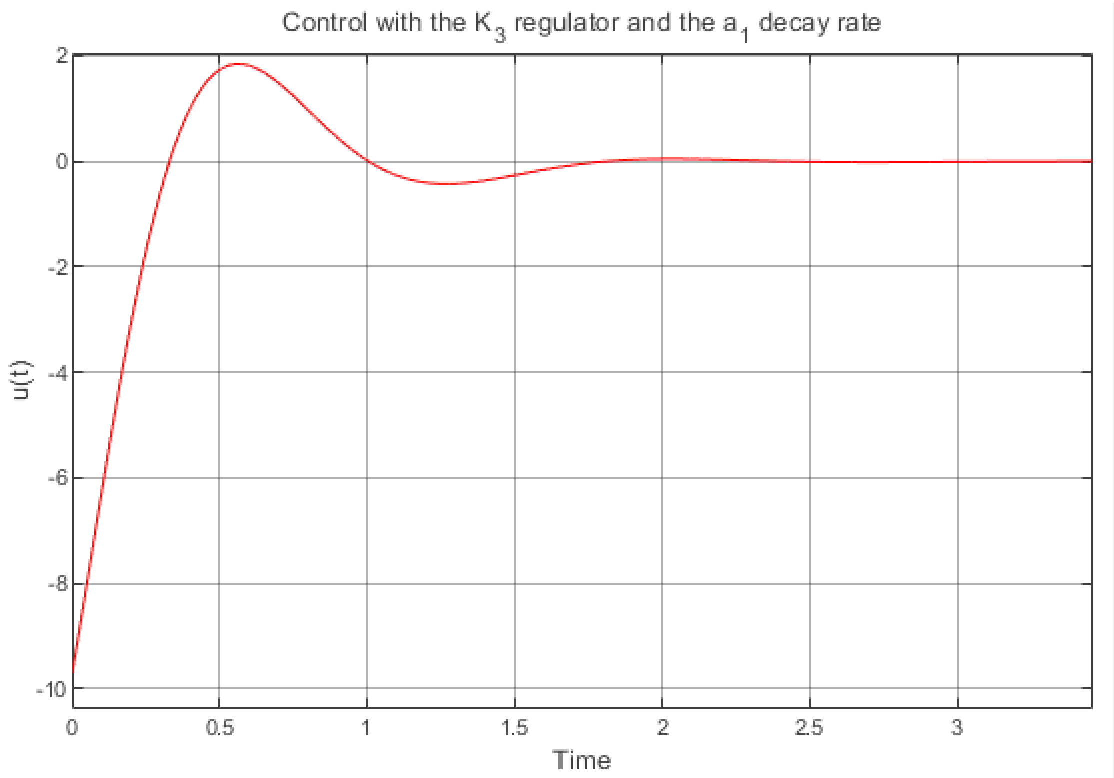

Рис. 10: График $u(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{3\alpha_1}$

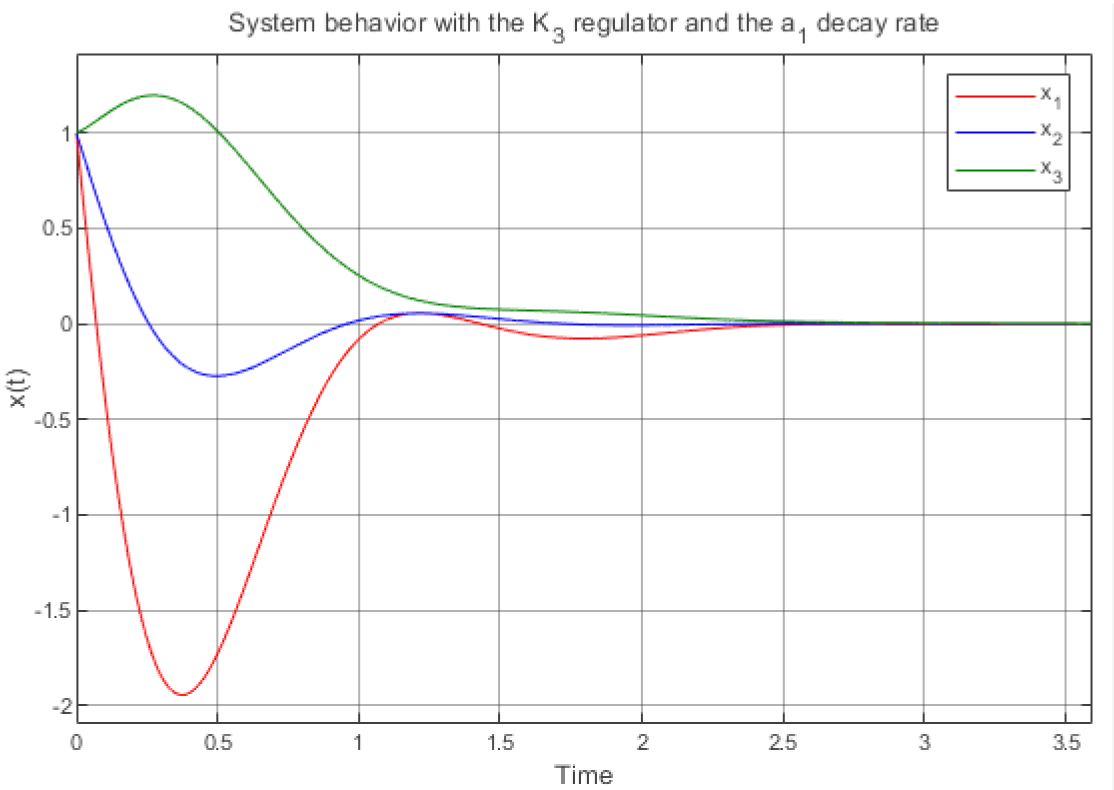

Рис. 11: График $x(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{3\alpha_1}$

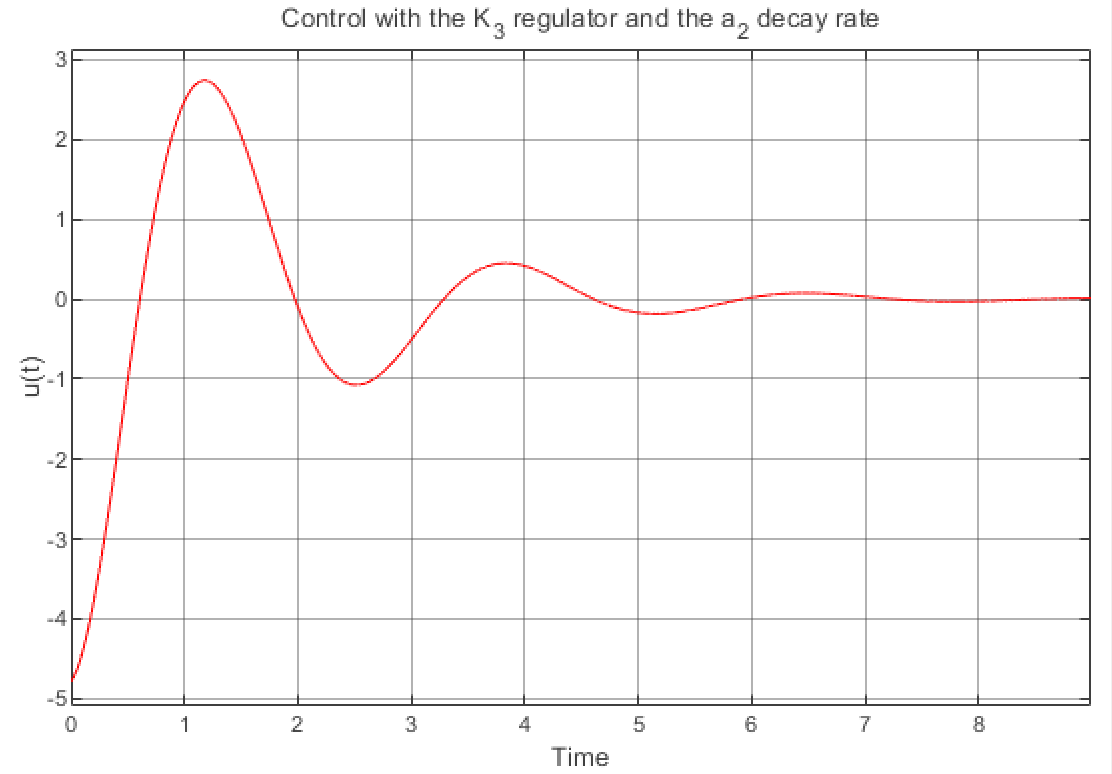

Рис. 12: График $u(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{3\alpha_2}$

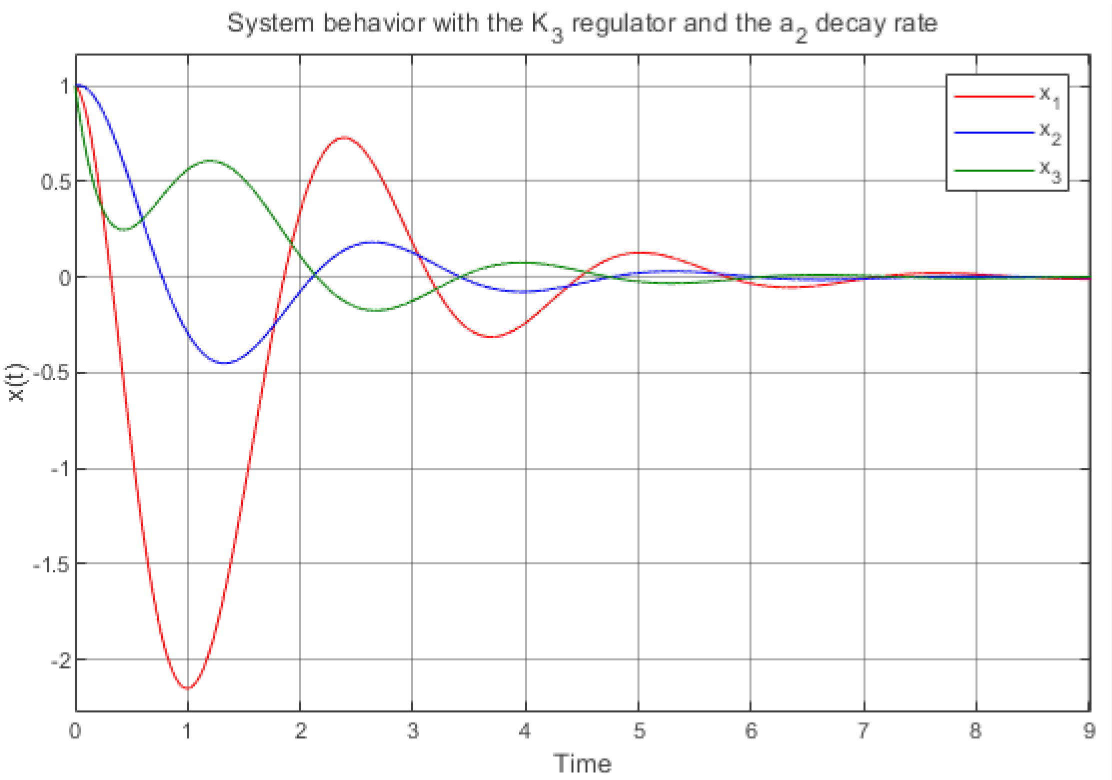

Рис. 13: График $x(t)$ для $\alpha_1 = 0.1$ при $K_{3\alpha_2}$

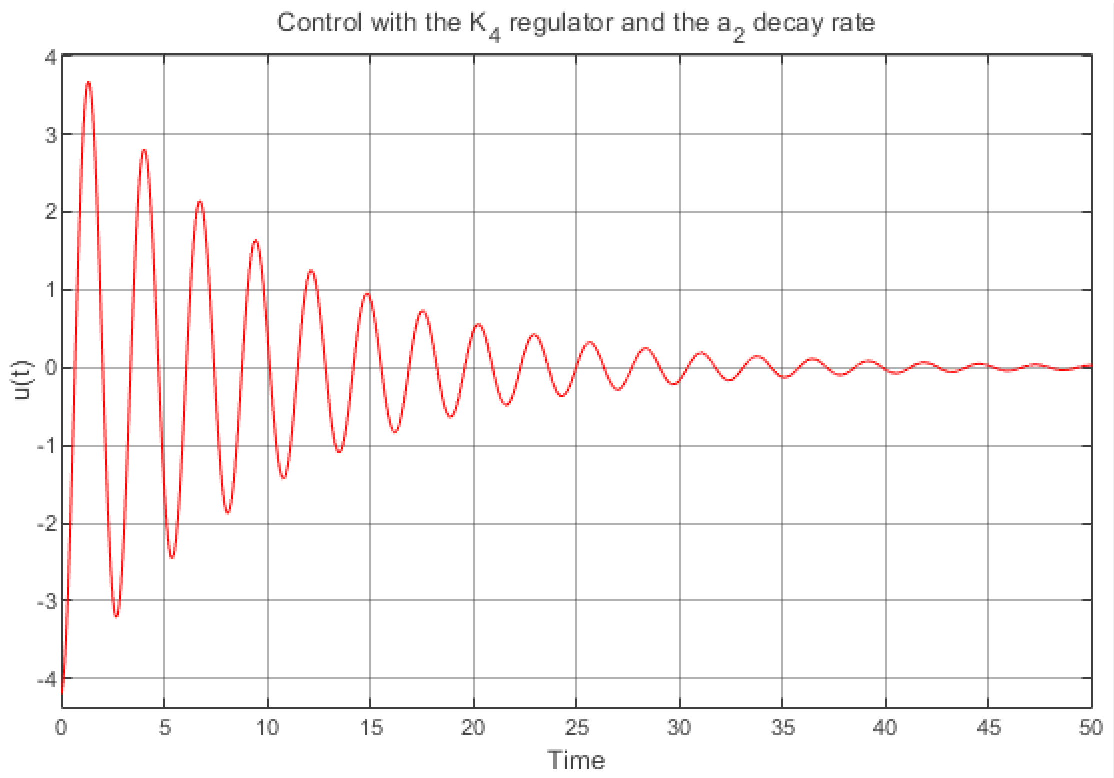

Рис. 14: График $u(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{4\alpha_2}$

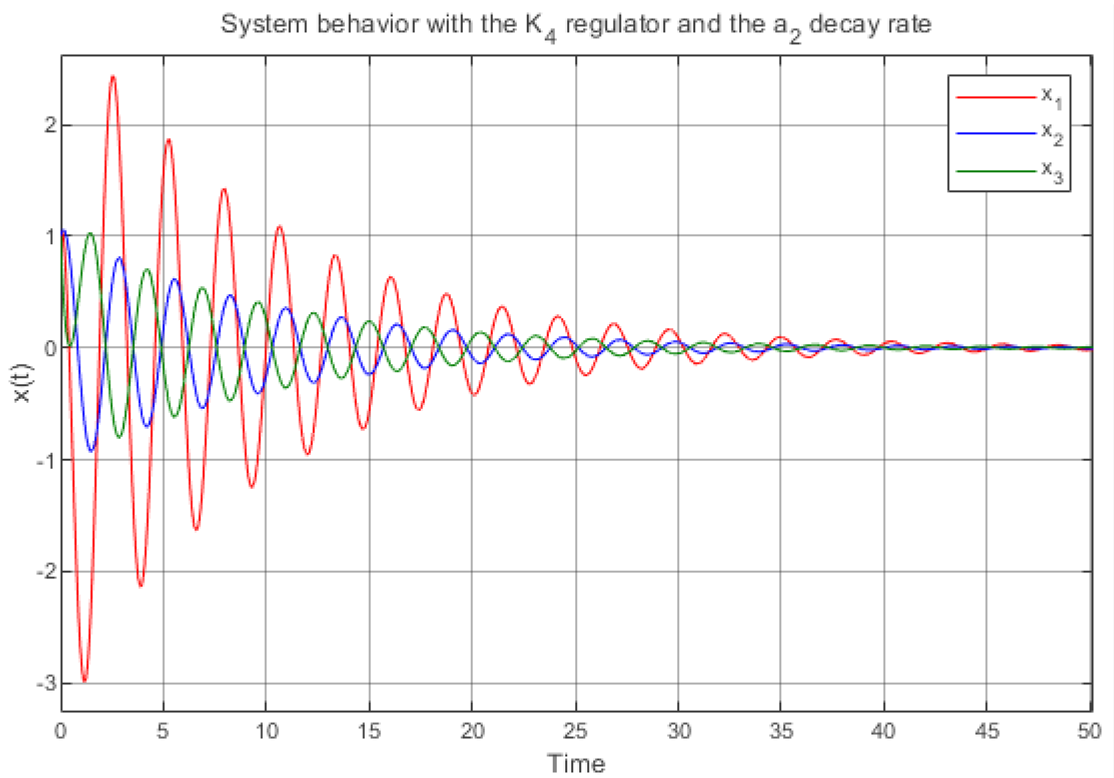

Рис. 15: График $x(t)$ для $\alpha_1 = 0.1$ при $K_{4\alpha_2}$

Сопоставление результатов для дополнительного пункта

Видим, что в случаях с K_4 система приобретает больше осцилляций, чем с K_3 (сравн. рис. 5, 11 и 15, 13). Время схождения системы к нулю быстрее с K_3, однако с K_4 требуется меньше управления. В общем графики почти совпадают с результатами для $K_{1,2}$ (в случае $K_{4\alpha_1}$ результаты полностью совпали с $K_{2\alpha_1}$). Таким образом, можно предположить, что синтез регулятора через матричное уравнение Риккати почти решает задачу минимизации управления.

Вывод

В данном задании был исследован синтез регулятора через матричное неравенство типа Ляпунова и матричное уравнение типа Риккати. Были получены графики, подтверждающие корректность расчетов и рассуждений. Удалось получить желаемую степень устойчивости с помощью неограниченного и минимального управлений. Результат решения через Риккати напоминает результат решения задачи минимизации управления.

Задание 2. Управление по выходу с заданной степенью устойчивости

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix};$$

Общий вывод по работе

...

Приложения

Приложение 1

```
% plant parameters
A = [5 2 7; 2 1 2; -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A)

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
Pre(:,1) = P(:,1);
Pre(:,2) = imag(P(:,2));
Pre(:,3) = real(P(:,3))
Pre_inv = Pre^-1
J_re = Pre_inv * A * Pre
B_jre = Pre_inv * B
```

```
% Desired decay rate
a1 = 2;
a2 = 0.1;

% solving LMI no restrictions on control
cvx_begin sdp
% a1
variable P1(3,3) symmetric
variable Y1(1,3)
P1 > 0.0001*eye(3);
P1*A' + A*P1 + 2*a1*P1 + Y1'*B'+ B*Y1 <= 0;
cvx_end

cvx_begin sdp
% a2
variable P2(3,3) symmetric
variable Y2(1,3)
P2 > 0.0001*eye(3);
P2*A' + A*P2 + 2*a2*P2 + Y2'*B'+ B*Y2 <= 0;
cvx_end

K1_a1 = Y1*inv(P1)
K1_a2 = Y2*inv(P2)

% A+BK1_ai eigenvalues
ABK1_a1 = A+B*K1_a1;
ABK1_a2 = A+B*K1_a2;
eig(ABK1_a1)
eig(ABK1_a2)

% solving LMI with control constraint
x0 = [1; 1; 1];

% a1
cvx_begin sdp
variable P12(3,3) symmetric
variable Y12(1,3)
variable mumu_a1
minimize mumu_a1
P12 > 0.0001*eye(3);
P12*A' + A*P12 + 2*a1*P12 + Y12'*B'+ B*Y12 <= 0;
[P12 x0;
x0' 1] > 0;
[P12 Y12';
Y12 mumu_a1] > 0;
cvx_end

cvx_begin sdp
% a2
variable P22(3,3) symmetric
variable Y22(1,3)
variable mumu_a2
minimize mumu_a2
P22 > 0.0001*eye(3);
P22*A' + A*P22 + 2*a2*P22 + Y22'*B'+ B*Y22 <= 0;
[P22 x0;
x0' 1] > 0;
```

```
[P22 Y22';
Y22 mumu_a2] > 0;
cvx_end

mu_a1 = sqrt(mumu_a1)
mu_a2 = sqrt(mumu_a2)

K2_a1 = Y12*inv(P12)
K2_a2 = Y22*inv(P22)

% A+BK2_ai eigenvalues
ABK2_a1 = A+B*K2_a1;
ABK2_a2 = A+B*K2_a2;
eig(ABK2_a1)
eig(ABK2_a2)

% solving Riccati
Q1 = eye(3);
v = 2;
R = 1;

% a1
Aa1 = A + eye(3) * (a1-0.0000000001);
[P,K,e]=icare(Aa1,sqrt(2)*B,Q1,R);
K3_a1=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K3_a1)

% a2
Aa2 = A + eye(3) * a2;
[P,K,e]=icare(Aa2,sqrt(2)*B,Q1,R);
K3_a2=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K3_a2)

Q2 = 0;
% a1
Aa12 = A + eye(3) * (a1-0.0000000001);
[P,K,e]=icare(Aa12,sqrt(2)*B,Q2,R);
K4_a1=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K4_a1)

% a2
Aa22 = A + eye(3) * a2;
[P,K,e]=icare(Aa22,sqrt(2)*B,Q2,R);
K4_a2=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K4_a2)
```

Листинг 1: Программа для задания 1

Приложение 2

```
% plant parameters
A=[2 0 -4 2;
   0 2 -2 4;
   -4 -2 2 0;
   2 4 0 2];
B=[2; 4; 6; 8];
C=[-2 2 2 2;
```

```
2 0 0 2];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A)
[P, J] = jordan(A)
P_inv = inv(P)
B = P_inv * B
C = C * P

% Desired decay rate
a1 = 4;
a2 = 1;

% case 1: ak == al
ak = a1;
al = a1;

% solving Riccati
Q = 0;
v = 2;
R = 1;

% find K
Aak = A + eye(4) * (ak-0.0000000001);
[P,K,e]=icare(Aak,sqrt(2)*B,Q,R);
K_case1=-inv(R)*B'*P
eK_case1=eig(A+B*K_case1)

% find L
x0=[1;1;1;1];
x0_est=[0;0;0;0];
e0=x0-x0_est;

% solving LMI with control constraint
% mumu 2x2, not scalar anymore
% minimizing matrix by its norm
cvx_begin sdp
variable Q(4,4)
variable Y(4,2)
variable mumu(2,2)
minimize norm(mumu, inf)
Q>0.0001*eye(4);
A'*Q + Q*A+ 2*al*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
[Q e0;
e0' 1]>0;
[Q Y;
Y' mumu]>0;
cvx_end
L_case1=inv(Q)*Y
eL_case1=eig(A+L_case1*C)

% case 2: ak > al
ak = a1;
al = a2;

% K found case 1
K_case2 = K_case1
eK_case2 = eK_case1
```

```
% find L
cvx_begin sdp
variable Q(4,4)
variable Y(4,2)
variable mumu(2,2)
minimize norm(mumu, inf)
Q>0.0001*eye(4);
A'*Q + Q*A+ 2*al*Q + C'*Y' + Y*C <= 0;
[Q e0;
e0' 1]>0;
[Q Y;
Y' mumu]>0;
cvx_end
L_case2=inv(Q)*Y
eL_case2=eig(A+L_case2*C)

% case 3: ak < al
ak = a2;
al = a1;

% find K
Q = eye(4)*0.000001;
Aak = A + eye(4) * ak;
[P,K,e]=icare(Aak,sqrt(2)*B,Q,R);
K_case3=-inv(R)*B'*P
eK_case3=eig(A+B*K_case3)

% L found case 1
L_case3 = L_case1
eL_case3 = eL_case1
```
Листинг 2: Программа для задания 2