Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №E
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «УПРАВЛЕНИЕ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Задание 1. Исследование свойств многоканальной системы **2**

1.1 Собственные числа матрицы системы . . . 2

1.2 Передаточная матрица многоканальной системы, ее нули и полюса . . 2

1.3 Структурные свойства многоканальной системы . . . 2

1.4 Временные характеристики системы . . . 3

1.5 Графическое представление временных характеристик . . . 5

1.6 Частотные характеристики системы . . . 6

2 Приложение А **6**

Задание 1. Исследование свойств многоканальной системы

Рассмотрим многоканальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \ D = 0;$$

Программа для задания находится в приложении А на листинге 1.

Собственные числа матрицы системы

Определим собственные числа λ_i матрицы системы A

$$\sigma[A] = \{1, 1\}$$

Получили кратные неустойчивые собственные числа.

Передаточная матрица многоканальной системы, ее нули и полюса

Определим передаточную матрицу многоканальной системы по формуле

$$W(s) = C[sI - A]^{-1} B + D$$

Получаем

$$W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{-s-11}{s^2-2s+1} & \dfrac{7s-4}{s^2-2s+1} \\ \dfrac{9s-13}{s^2-2s+1} & \dfrac{1}{s^2-2s+1} \end{bmatrix}$$

Нули и полюса квадратной передаточной матрицы определяются из корней числителя и знаменателя определителя передаточной матрицы. Найдем определитель

$$\det[W(s)] = \frac{-63}{s^2-2s+1}$$

Так как числитель не зависит от s, то нули n_i отсутствуют. Определим полюса λ_i

$$s^2 - 2s + 1 = 0, \ (s-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

Полюса совпали с собственными числами матрицы A.

Структурные свойства многоканальной системы

Структурные свойства многоканальной системы определяются таким же образом, как и для одноканальной. Найдем ЖНФ матрицы A, переведем B, C в базис собственных векторов A

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ B_J = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \ C_J = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix};$$

Также найдем матрицу управляемости по выходу и вычислим ее ранг

$$U_{out} = \begin{bmatrix} CU & D \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} \Rightarrow U_{out} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -13 & 10 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \operatorname{rank}[U_{out}] = 2;$$

Таким образом,

- Система полностью управляема по состоянию и стабилизируема
- Система полностью наблюдаема и обнаруживаема
- Система полностью управляема по выходу

Временные характеристики системы

Для аналитического определения весовых функций воспользуемся обратным преобразованием Лапласа

$$w_k(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W_{i,j}(s)\right\}$$

Нам пригодятся эти формулы

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)}\right\} = e^{at}, \tag{1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right\} = t^n e^{at}; \tag{2}$$

Выведем $w_1(t)$

$$w_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W_{1,1}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-s-11}{s^2-2s+1}\right\}$$

Упростим передаточную функцию $W_{1,1}(s)$

$$W_{1,1}(s) = \frac{-s-11}{s^2-2s+1} = -\frac{s-1+12}{(s-1)^2} = -\frac{s-1}{(s-1)^2} - \frac{12}{(s-1)^2} = -1\cdot\frac{1}{(s-1)} - 12\cdot\frac{1}{(s-1)^2}$$

Воспользуемся выражениями (1), (2) и свойствами линейности преобразования Лапласа и вычислим $w_1(t)$

$$w_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-1\cdot\frac{1}{(s-1)} - 12\cdot\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)}\right\} - 12\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\},$$

$$w_1(t) = -e^t - 12te^t;$$

Найдем $w_2(t)$

$$w_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W_{1,2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7s-4}{(s-1)^2}\right\}$$

Упростим передаточную функцию $W_{1,2}(s)$

$$W_{1,2}(s) = \frac{7s-4}{(s-1)^2} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-1)^2} = \frac{As-A+B}{(s-1)^2},$$

$$As - A + B = 7s - 4 \Rightarrow \begin{cases} A = 7, \\ -A + B = -4, \end{cases} \Rightarrow B = -4 + A = -4 + 7 = 3,$$

$$W_{1,2}(s) = \frac{7}{(s-1)} + \frac{3}{(s-1)^2} = 7\cdot\frac{1}{(s-1)} + 3\cdot\frac{1}{(s-1)^2}$$

Таким образом, аналогично решению с $w_1(t)$, получаем $w_2(t)$

$$w_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{7\cdot\frac{1}{(s-1)} + 3\cdot\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = 7e^t + 3te^t$$

Определим $w_3(t)$

$$w_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W_{2,1}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{9s-13}{(s-1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{9\cdot\frac{1}{(s-1)} - 4\cdot\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = 9e^t - 4te^t$$

Выведем $w_4(t)$

$$w_4(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W_{2,2}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} = te^t$$

Итого имеем

$$\begin{aligned} w_1(t) &= -e^t - 12te^t, \\ w_2(t) &= 7e^t + 3te^t, \\ w_3(t) &= 9e^t - 4te^t, \\ w_4(t) &= te^t; \end{aligned}$$

Перейдем к переходным функциям. Весовая функция является производной от переходной функции (отличие образа Лапласа в s раз). Значит для поиска переходных функций нужно брать интегралы

$$h_k(t) = \int\limits_0^t w_k(\tau)\, d\tau$$

Нам понадобится формула интегрирования по частям

$$u = u(x),\ v = v(x) : \int u\, dv = uv - \int v\, du;$$

Вычислим $h_1(t)$

$$h_1(t) = \int\limits_0^t w_1(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t \left(-e^\tau - 12\tau e^\tau\right)\, d\tau = -\int\limits_0^t e^\tau\, d\tau - 12\int\limits_0^t \tau e^\tau\, d\tau,$$

$$\int\limits_0^t e^\tau\, d\tau = e^\tau\Big|_0^t = e^t - 1,$$

$$\int\limits_0^t \tau e^\tau\, d\tau = \begin{bmatrix} u = \tau & v = e^\tau \\ du = d\tau & dv = e^\tau\, d\tau \end{bmatrix} = \tau e^\tau\Big|_0^t - \int\limits_0^t e^\tau\, d\tau = te^t - e^t + 1,$$

$$h_1(t) = -\left(e^t - 1\right) - 12\left(te^t - e^t + 1\right) = -12te^t + 11e^t - 11;$$

Найдем $h_2(t)$

$$h_2(t) = \int\limits_0^t w_2(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t \left(7e^\tau + 3\tau e^\tau\right)\, d\tau = 7\int\limits_0^t e^\tau\, d\tau + 3\int\limits_0^t \tau e^\tau\, d\tau$$

Видим вычисленные ранее интегралы. Подставим и получим

$$h_2(t) = 7\left(e^t - 1\right) + 3\left(te^t - e^t + 1\right) = 3te^t + 4e^t - 4$$

Вычислим $h_3(t)$

$$h_3(t) = \int\limits_0^t w_3(\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t \left(9e^\tau - 4\tau e^\tau\right)\, d\tau = 9\int\limits_0^t e^\tau\, d\tau - 4\int\limits_0^t \tau e^\tau\, d\tau$$

Аналогично $h_1(t), h_2(t)$

$$h_3(t) = 9\left(e^t - 1\right) - 4\left(te^t - e^t + 1\right) = -4te^t + 13e^t - 13$$

Найдем $h_4(t)$

$$h_4(t) = \int\limits_0^t w_4(\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t \tau e^\tau\,d\tau = te^t - e^t + 1$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}
h_1(t) &= -12te^t + 11e^t - 11,\\
h_2(t) &= 3te^t + 4e^t - 4,\\
h_3(t) &= -4te^t + 13e^t - 13,\\
h_4(t) &= te^t - e^t + 1;
\end{aligned}$$

Графическое представление временных характеристик

Построим графики $w_i(t), h_i(t)$ по расчитанным ранее характеристикам. Весовые функции представлены на рис. 1, переходные на рис. 2

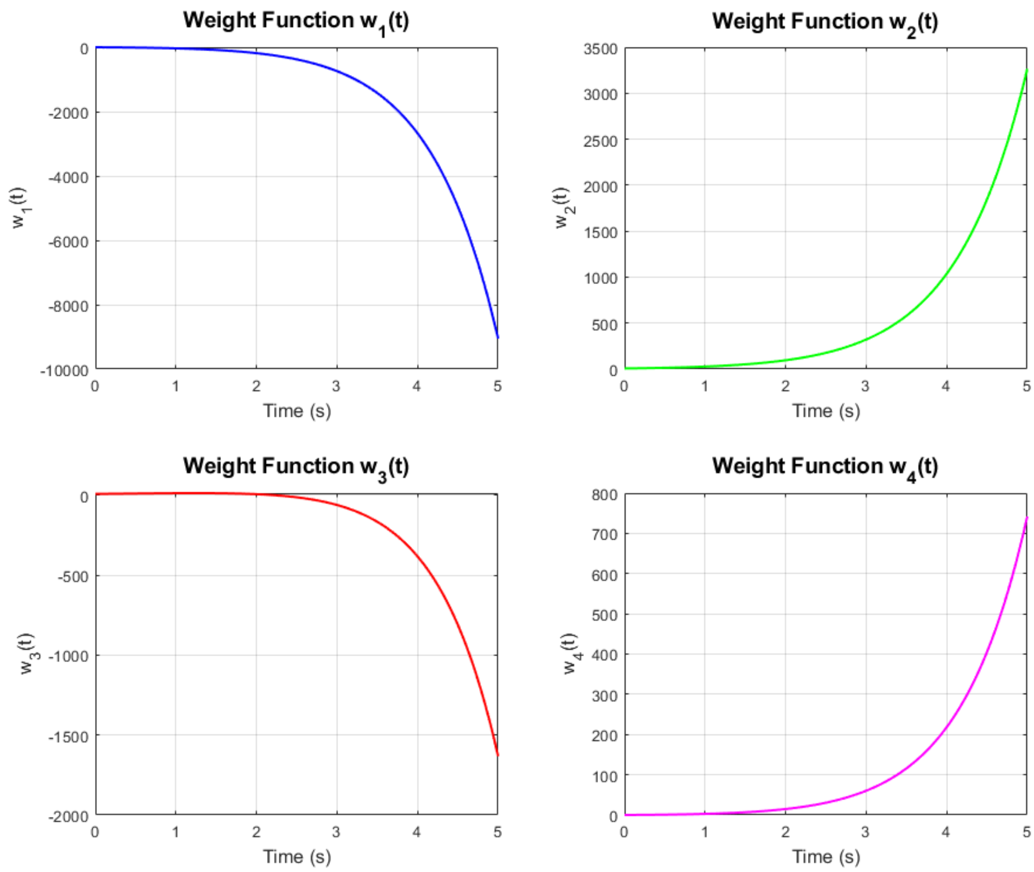

Рис. 1: Графики весовых функций $w_i(t)$

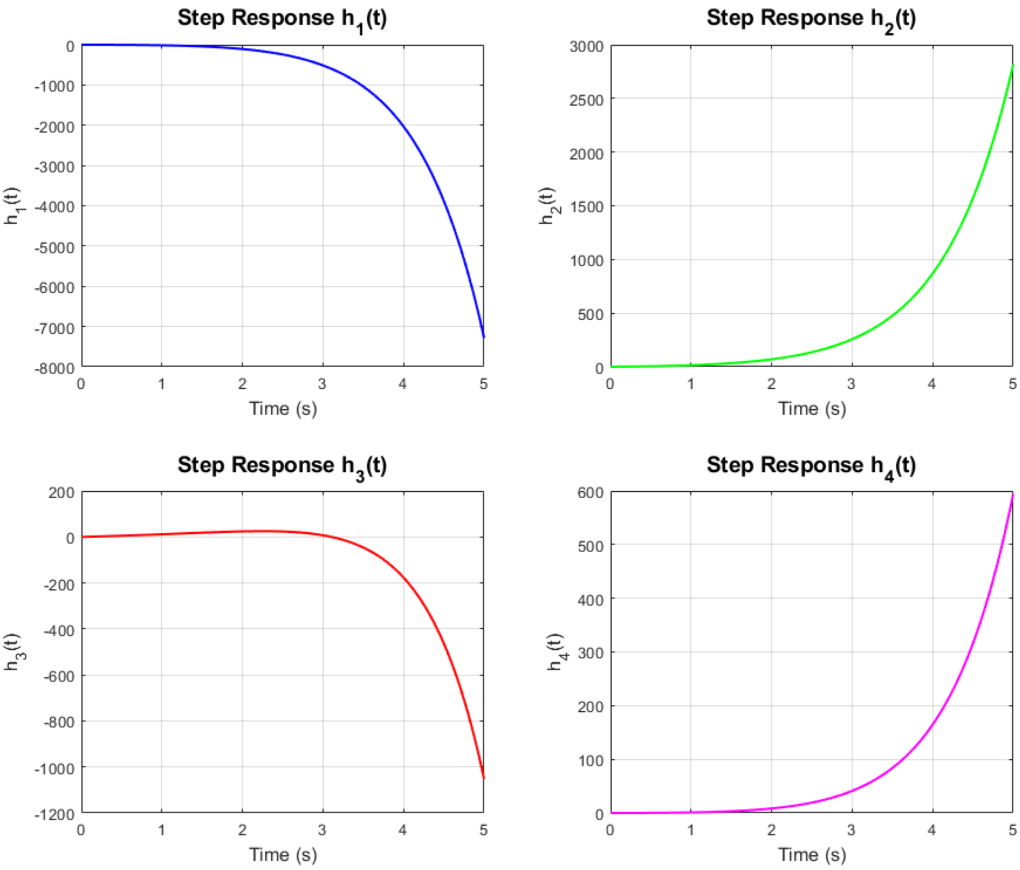

Рис. 2: Графики переходных функций $h_i(t)$

Частотные характеристики системы

Выведем аналитические выражения частотных характеристик системы, таких как АЧХ, ФЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ. АЧХ находим по формуле

$$A_k(\omega) = |W_{n,m}(i\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left\{W_{n,m}(i\omega)\right\} + \mathrm{Im}^2\left\{W_{n,m}(i\omega)\right\}}$$

Найдем $A_1(\omega)$

$$A_1\left(\omega\right) = |W_{1,1}(i\omega)| = \left|\frac{-i\omega - 11}{(i\omega - 1)^2}\right|$$

ФЧХ ищется по формуле

$$\varphi_k = \mathrm{atan2}\left(\mathrm{Im}\left\{W_{n,m}(i\omega)\right\}, \mathrm{Re}\left\{W_{n,m}(i\omega)\right\}\right)$$

Приложение А

```
tbd
```

Листинг 1: Программа для задания 1