Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №А
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ РАДОСТИ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

Задание 1. Исследование LQR

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Стабилизируемость системы

Проверим систему на стабилизируемость. Найдем собственные числа матрицы A. Ранее мы это делали в лабораторной работе №2 «Модальные регуляторы и наблюдатели». Код матлаб представлен в приложении А на листинге 1

$$\sigma\left(A\right) = \{-2, 2 \pm i\}$$

Собственное число $\lambda_1 = -2$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. Комплексная пара $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ неустойчива, нужна управляемость. Разложим A в ЖНФ в вещественном виде, найдем B в базисе собственных векторов A

$$A_{J_{re}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B_{J_{re}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Система не полностью управляема, стабилизируема (собственному значению -2 соответствует ноль в матрице $B_{J_{re}}$).

Схема моделирования системы

Построим схему моделирования системы, замкнутой регулятором $u = Kx$, используя `SIMULINK`

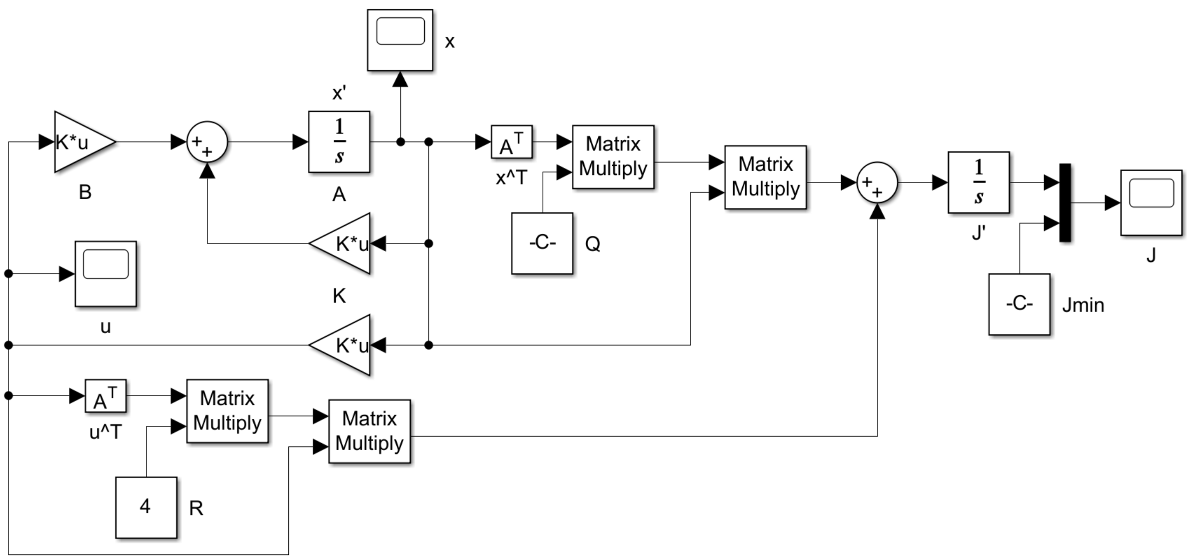

Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Снимаем осциллограммы $u(t), x(t), J_{exp}(t)$.

Набор пар матриц для исследования

Зададим значения матриц $Q = I, R = 1$ (время процесса и затраты на управление принимаем одинаково значимыми) и параметр $\alpha = 4$. Таким образом, сформируем набор

$$\begin{aligned}
&\circ\left(Q = I, R = 1\right), \\
&\circ\left(Q = 4I, R = 1\right), \\
&\circ\left(Q = I, R = 4\right), \\
&\circ\left(Q = 4I, R = 4\right);
\end{aligned}$$

Синтез регулятора

Для каждой из пар значений матриц (Q, R) синтезируем регулятор, минимизирующий функционал качества

$$J = \int_0^\infty \left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right) dt$$

путем решения соответствующего матричного уравнения Риккати при $\nu = 1$

$$A^TP + PA + Q - \nu PBR^{-1}B^TP = 0,\ K = -R^{-1}B^TP;$$

Воспользуемся `icare` и получим

$$\begin{aligned}
&\left(Q = I, R = 1\right),\ K_{I,1} = \begin{bmatrix}-1.7473 & -5.4627 & -1.4004\end{bmatrix}, \\
&\left(Q = 4I, R = 1\right),\ K_{4I,1} = \begin{bmatrix}-2.0000 & -6.9630 & -0.9630\end{bmatrix}, \\
&\left(Q = I, R = 4\right),\ K_{I,4} = \begin{bmatrix}-1.6433 & -4.9797 & -1.5454\end{bmatrix}, \\
&\left(Q = 4I, R = 4\right),\ K_{4I,4} = \begin{bmatrix}-1.7473 & -5.4627 & -1.4004\end{bmatrix};
\end{aligned}$$

Убедимся, что спектры замкнутых систем принадлежат левой комплексной полуплоскости

$$\begin{aligned}
&\sigma\left(A + BK_{I,1}\right) = \{-2, -1.4413, -3.8630\}, \\
&\sigma\left(A + BK_{4I,1}\right) = \{-2, -1, -7\}, \\
&\sigma\left(A + BK_{I,4}\right) = \{-2, -2.1821 \pm 0.6216i\}, \\
&\sigma\left(A + BK_{4I,4}\right) = \{-2, -1.4413, -3.8630\};
\end{aligned}$$

Получили отрицательные действительные части собственных чисел и наличие в спектрах неуправляемого $\lambda_1 = -2$. Следовательно, регуляторы синтезированы корректно.

Минимизированное значение функционала качества

Вычислим минимизированное значение функционала качества

$$J_{min} = x_0^TPx_0$$

для каждой пары (Q, R). P_i получили при решении матричного уравнения типа Риккати

$$P_{I,1} = \begin{bmatrix} 2.4681 & -3.5514 & 2.1055 \\ -3.5514 & 13.4136 & -2.7033 \\ 2.1055 & -2.7033 & 2.2129 \end{bmatrix}, \; P_{4I,1} = \begin{bmatrix} 4.0000 & -7.3333 & 2.6667 \\ -7.3333 & 24.9904 & -3.9726 \\ 2.6667 & -3.9726 & 3.0645 \end{bmatrix},$$

$$P_{I,4} = \begin{bmatrix} 8.2455 & -10.2978 & 7.8656 \\ -10.2978 & 41.3731 & -9.4392 \\ 7.8656 & -9.4392 & 7.9761 \end{bmatrix}, \; P_{4I,4} = \begin{bmatrix} 9.8723 & -14.2056 & 8.4221 \\ -14.2056 & 53.6545 & -10.8133 \\ 8.4221 & -10.8133 & 8.8515 \end{bmatrix};$$

Получаем

$$\begin{aligned} Q = I, R = 1: \;\; & J_{min} = 9.7962, \\ Q = 4I, R = 1: \;\; & J_{min} = 14.7764, \\ Q = I, R = 4: \;\; & J_{min} = 33.8518, \\ Q = 4I, R = 4: \;\; & J_{min} = 39.1846; \end{aligned}$$

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование замкнутых систем и для каждого случая построим график управления $u(t)$, вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ и экспериментального значения функционала качества $J_{exp}(t)$. Моделирование $u(t)$ и $x(t)$ для случая

$$Q = 4I, R = 4, K_{4I,4} = \begin{bmatrix} -1.7473 & -5.4627 & -1.4004 \end{bmatrix}$$

делать не будем, так как регулятор для этой пары совпал с регулятором для случая

$$Q = I, R = 1, K_{I,1} = \begin{bmatrix} -1.7473 & -5.4627 & -1.4004 \end{bmatrix},$$

собственные числа тоже одинаковые. Результаты представлены на рис. 2–11

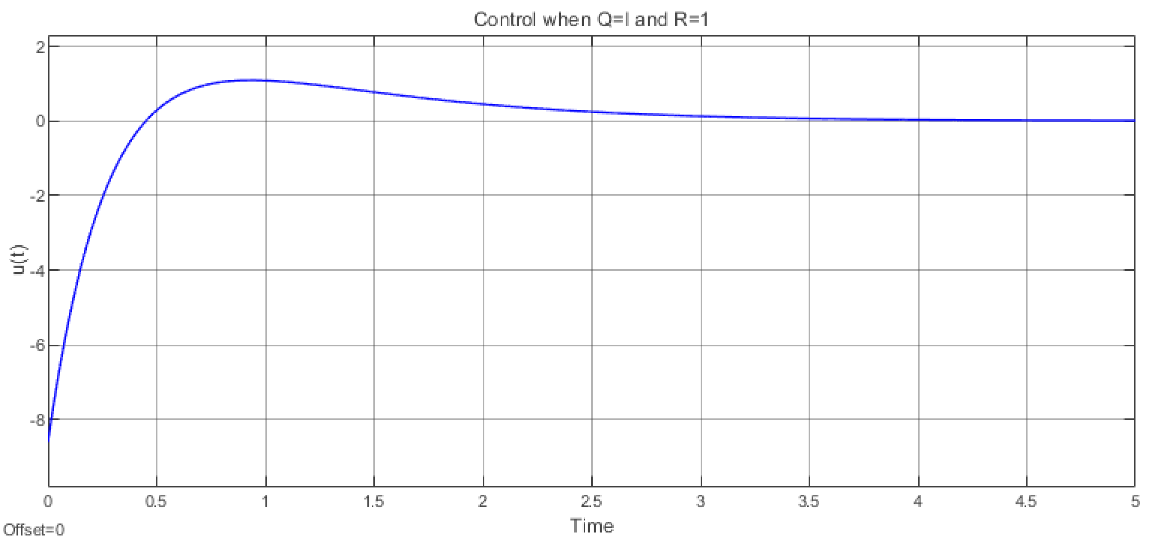

Рис. 2: График управления $u(t)$ при $K_{I,1}, K_{4I,4}$

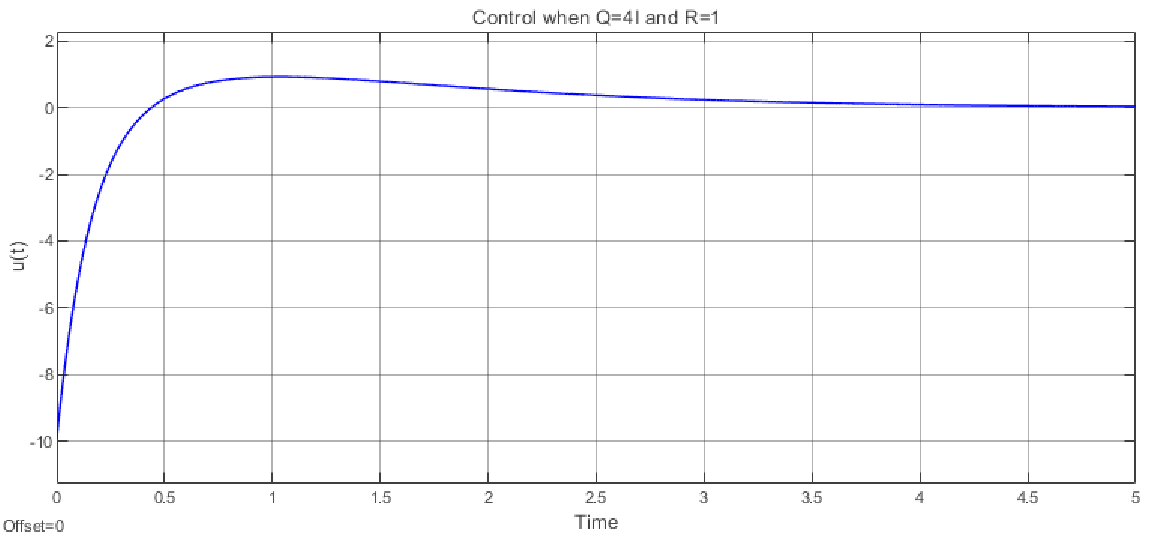

Рис. 3: График управления $u(t)$ при $K_{4I,1}$

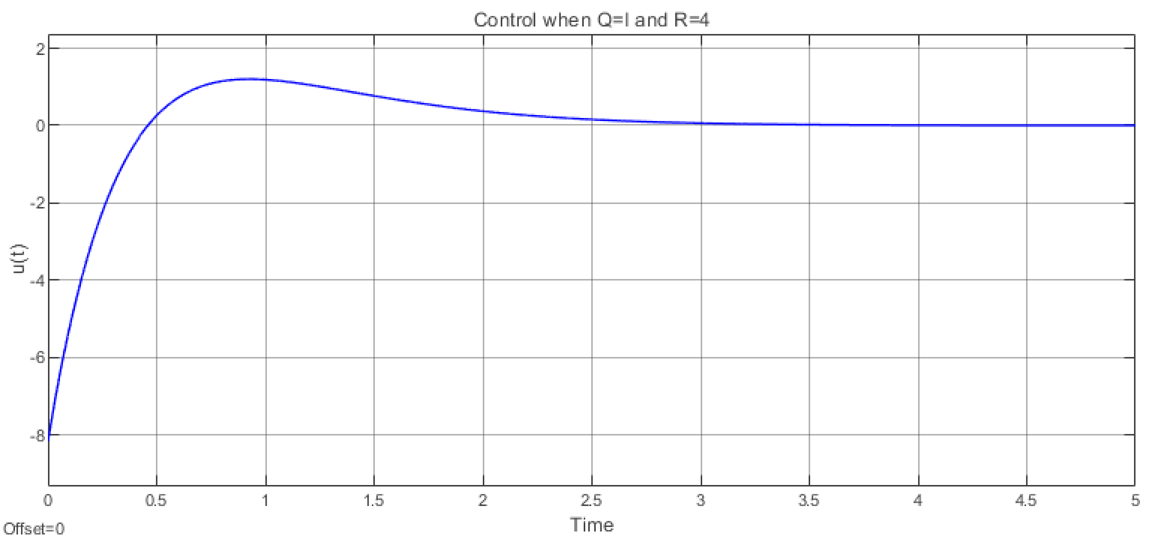

Рис. 4: График управления $u(t)$ при $K_{I,4}$

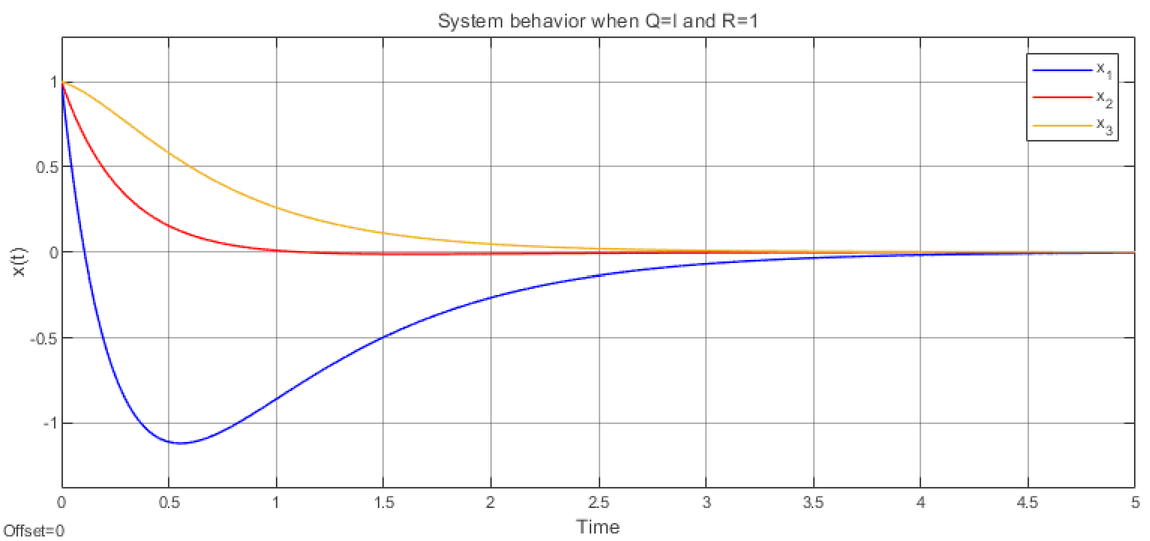

Рис. 5: График вектора состояния $x(t)$ при $K_{I,1}, K_{4I,4}$

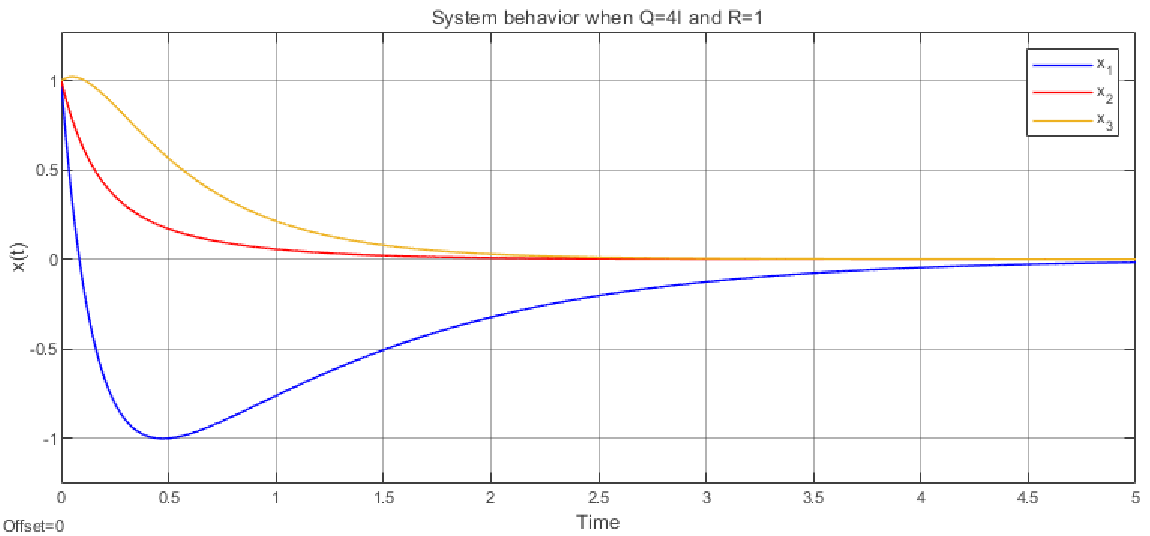

Рис. 6: График вектора состояния $x(t)$ при $K_{4I,1}$

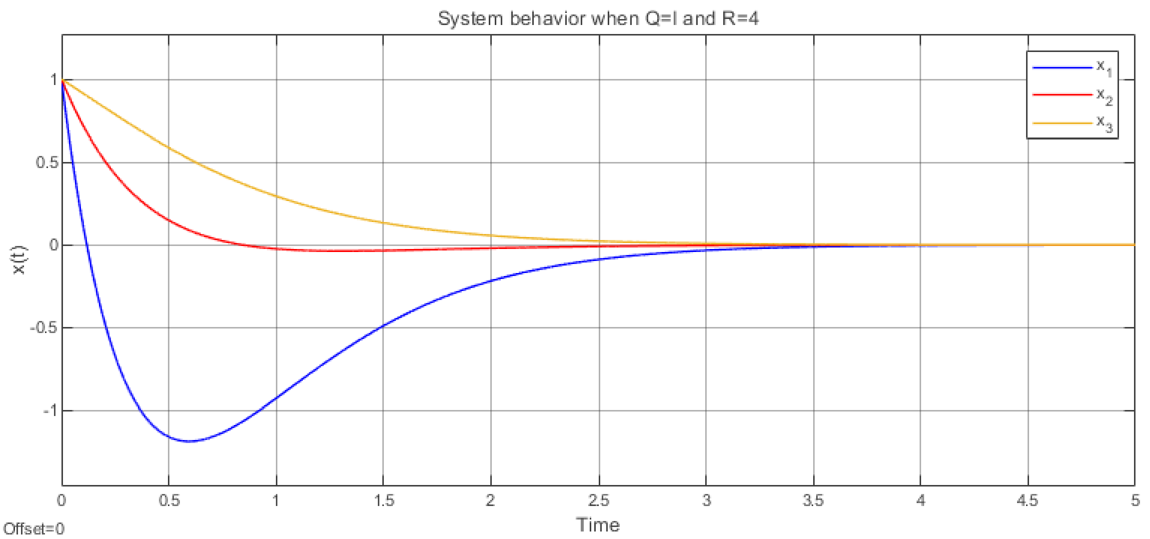

Рис. 7: График вектора состояния $x(t)$ при $K_{I,4}$

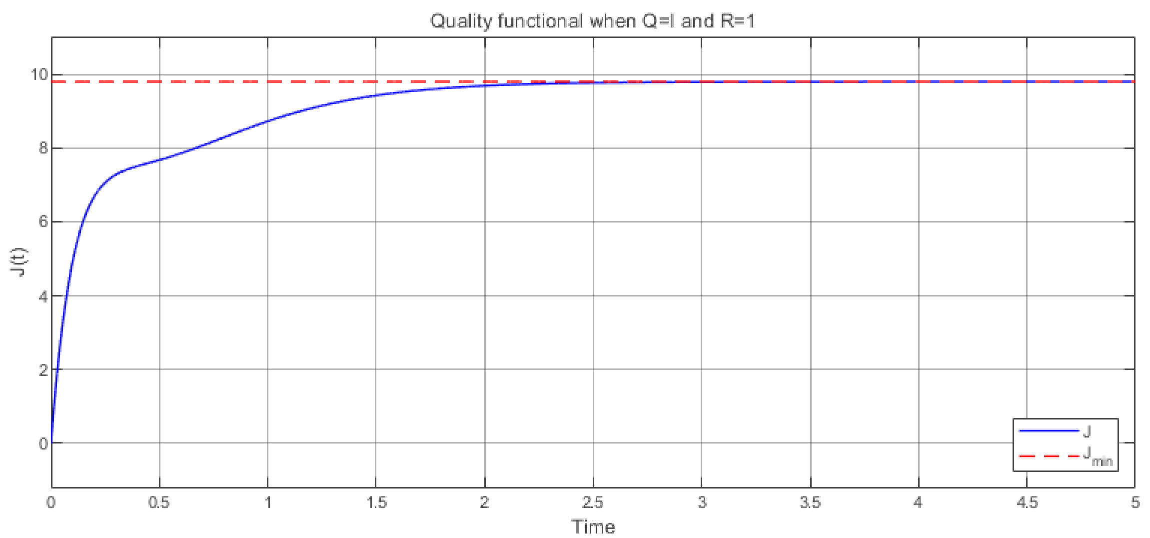

Рис. 8: График экспериментального значения функционала качества $J(t)$ при $K_{I,1}$

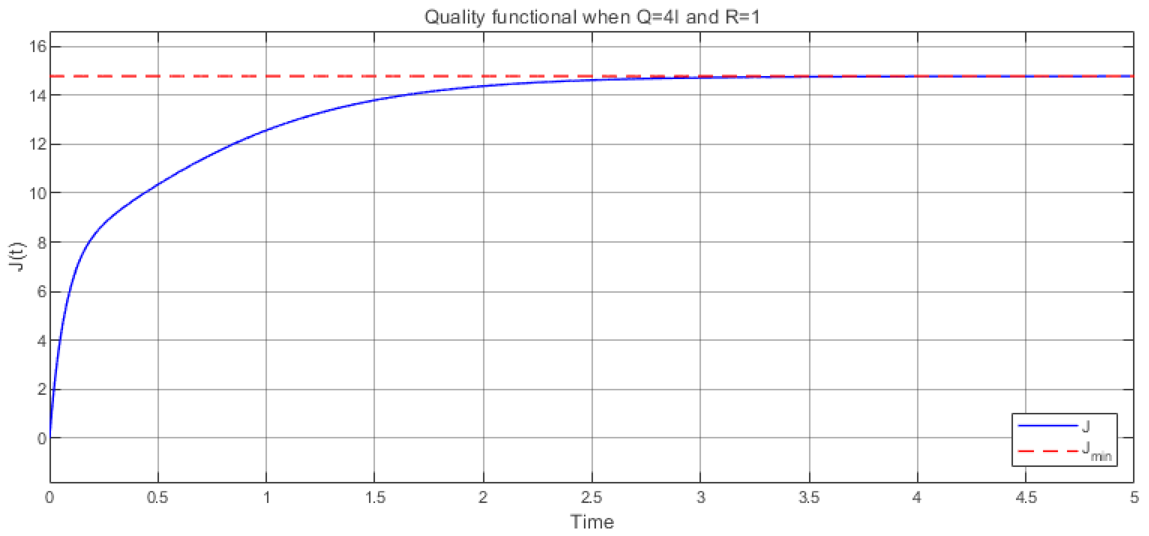

Рис. 9: График экспериментального значения функционала качества $J(t)$ при $K_{4I,1}$

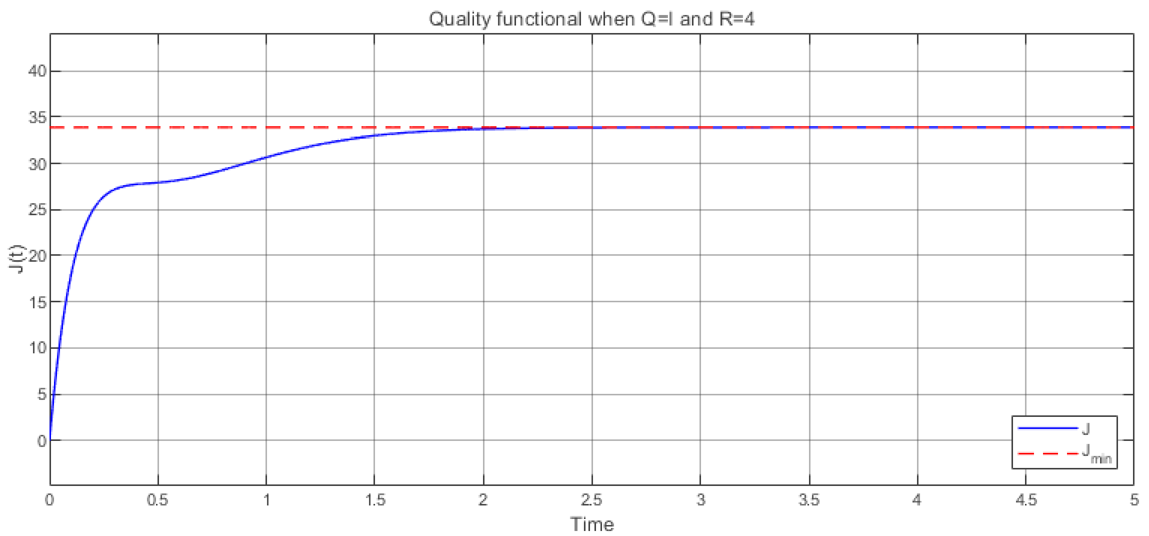

Рис. 10: График экспериментального значения функционала качества $J(t)$ при $K_{I,4}$

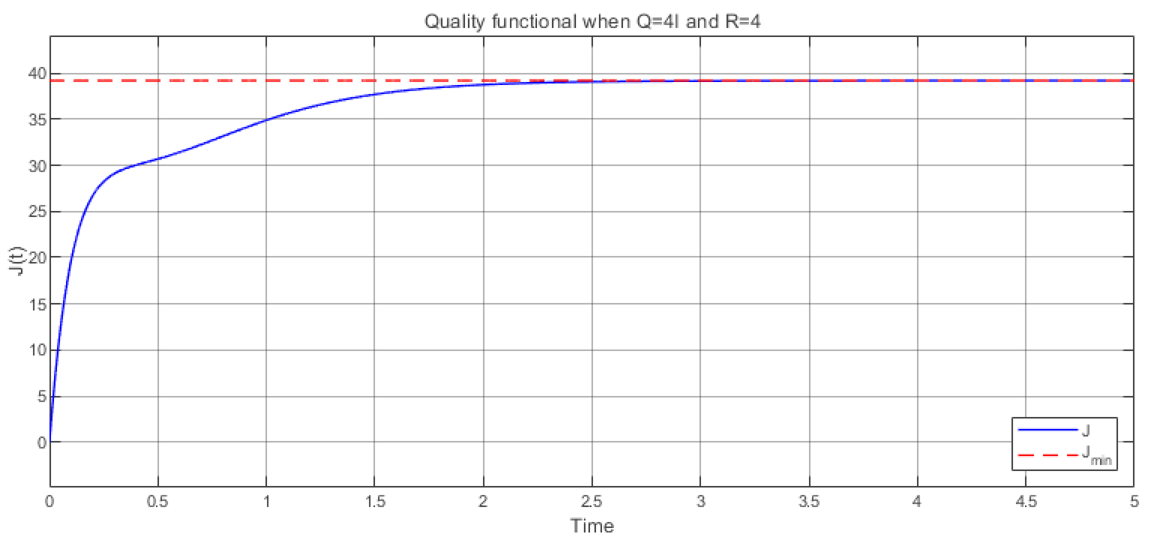

Рис. 11: График экспериментального значения функционала качества $J(t)$ при $K_{4I,4}$

Сравнение результатов

Когда нам важнее время процесса, чем затраты на управление ($Q > R$), то ожидаемо управления применяется больше (сравн. рис. 3, 4), при этом координаты $x_2(t), x_3(t)$ вектора состояния объекта быстрее сходятся к нулю (сравн. рис. 6, 7; примечание: координата $x_1(t)$ сравнительно быстрее бы сошлась к нулю при бо́льшем коэффициенте α). При $Q < R$ ситуация обратная – время процесса не так важно, как затраты на управление (сравн. те же графики). При равнозначных (равносильных) значениях Q, R результат усредненный между временем процесса и затратами на управление. Результаты $J_{exp}(t)$ примерно совпадают с вычисленными J_{min}. При этом

$$J_{min,I,1} = \frac{J_{min,4I,4}}{4}, \; 9.7962 \approx \frac{39.1846}{4} = 9.79615,$$

то есть при увеличении Q, R в один и тот же коэффициент α, минимизированное значение функционала качества увеличится в α раз.

Исследование фильтра Калмана

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f, \\ y = Cx + \xi, \end{cases} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

где $f(t)$ и $\xi(t)$ – случайные сигналы (гауссовский белый шум).

Обнаруживаемость системы

Проверим собственные числа матрицы A. Программа `MATLAB` представлена в приложении Б на листинге 2

$$\sigma(A) = \{\pm i, \pm 2i\}$$

Собственные числа устойчивые, но не асимптотически. Проверим наблюдаемость через вещественную ЖНФ

$$A_{J_{re}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \; C_{J_{re}} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix};$$

Комплексные пары наблюдаемы – система полностью наблюдаема и стабилизируема.

Схема моделирования системы

Построим схему моделирования системы с наблюдателем состояния

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$$

Снимаем осциллограммы $x(t), \hat{x}(t), e(t)$

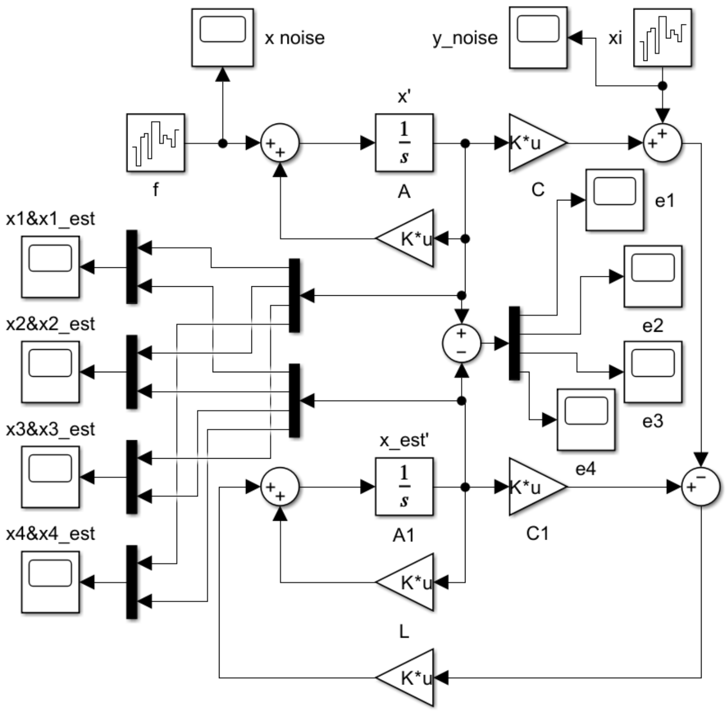

Рис. 12: Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Набор пар матриц для исследования

Зададим значения матриц $Q = I, R = 1$ (считаем помехи для $x(t)$ и $y(t)$ равнозначными) и параметр $\alpha = 100$. Таким образом, сформируем набор

$$\circ\,(Q = I, R = 1)\,,$$
$$\circ\,(Q = 100I, R = 1)\,,$$
$$\circ\,(Q = I, R = 100)\,,$$
$$\circ\,(Q = 100I, R = 100)\,;$$

Синтез наблюдателя

Для каждой из пар значений матриц (Q, R) синтезируем наблюдатель, минимизирующий «критерий доверия»

$$J = \int_0^\infty \left(f^T(t) Q^{-1} f(t) + \xi^T(t) R^{-1} \xi(t)\right) dt$$

путем решения соответствующего матричного уравнения Риккати при $\nu = 1$

$$AP + PA^T + Q - \nu PC^T R^{-1} CP = 0,\; L = -PC^T R^{-1};$$

Воспользуемся `icare` и получим

$$(Q = I, R = 1)\,,\; L_{I,1} = \begin{bmatrix} 0.5233 & -7.6440 & 0.0221 & 6.4594 \end{bmatrix}^T,$$
$$(Q = 100I, R = 1)\,,\; L_{100I,1} = \begin{bmatrix} 7.6954 & -15.6987 & -4.5805 & 15.1421 \end{bmatrix}^T,$$
$$(Q = I, R = 100)\,,\; L_{I,100} = \begin{bmatrix} 0.0079 & -1.7287 & 0.5099 & 2.0960 \end{bmatrix}^T,$$

$$(Q = 100I, R = 4)\,,\; L_{100I,100} = \begin{bmatrix}0.5233 & -7.6440 & 0.0221 & 6.4594\end{bmatrix}^T;$$

Убедимся, что спектры замкнутых систем принадлежат левой комплексной полуплоскости

$$\begin{aligned}
\sigma\left(A + L_{I,1}C\right) &= \{-0.3454 \pm 1.4689i, -3.1349 \pm 3.3599i\}\,,\\
\sigma\left(A + L_{100I,1}C\right) &= \{-0.3419 \pm 1.4702i, -13.3670 \pm 5.6243i\}\,,\\
\sigma\left(A + L_{I,100}C\right) &= \{-0.4006 \pm 1.1676i, -0.3965 \pm 1.9848i\}\,,\\
\sigma\left(A + L_{100I,100}C\right) &= \{-0.3454 \pm 1.4689i, -3.1349 \pm 3.3599i\}\,;
\end{aligned}$$

Получили отрицательные действительные части собственных чисел. Следовательно, наблюдатели синтезированы корректно.

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование с нулевыми начальными условиями наблюдателя. Построим графики $x(t)$, $\hat{x}(t)$, $e(t)$. Также приведены графики шумов $f(t)$, $\xi(t)$. Наблюдатели $L_{I,1}, L_{100I,100}$ совпали аналогично регуляторам в задании 1

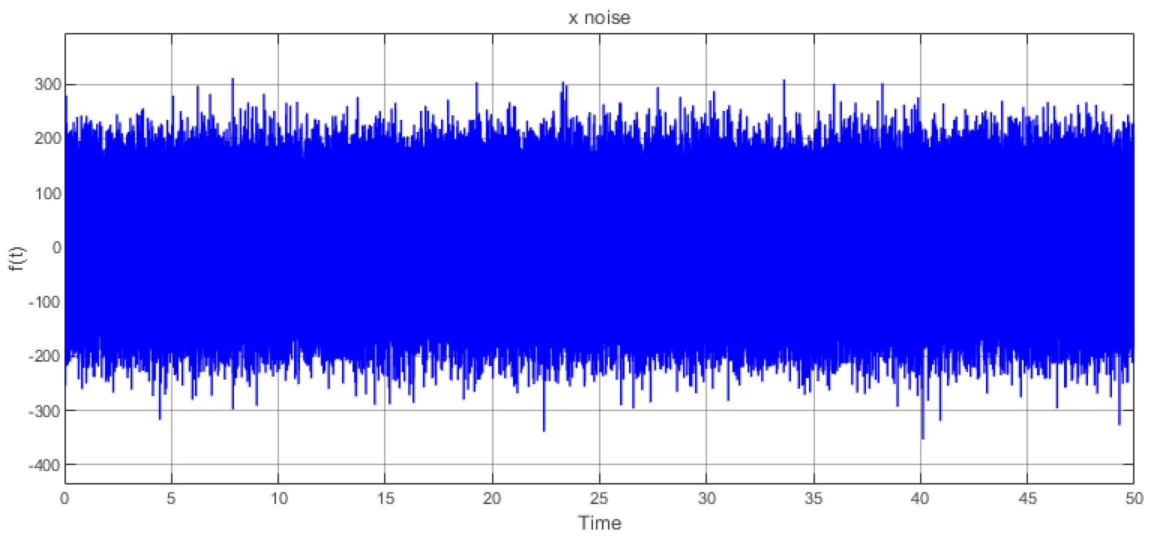

Рис. 13: График шума $f(t)$

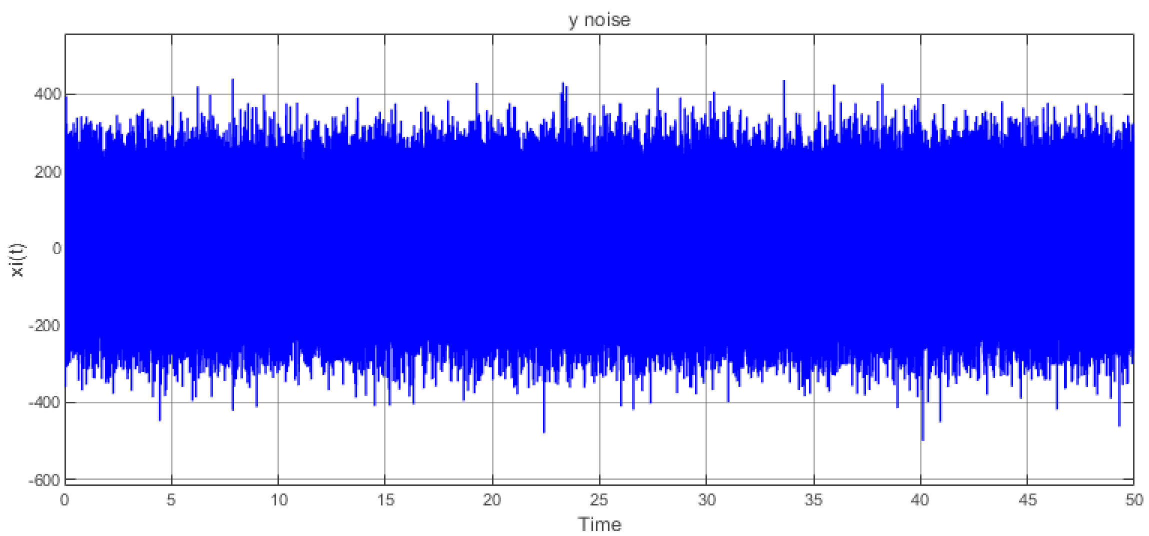

Рис. 14: График шума $\xi(t)$

...

Вывод

...

Приложение А

```
% plant parameters
A = [5 2 7; 2 1 2; -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];
x0 = [1;1;1];

% A matrix eigenvalues
eig_A = eig(A)

% Jordan matrix
[P_J, A_J] = jordan(A);
P_Jre(:,1) = P_J(:,1);
P_Jre(:,2) = imag(P_J(:,2));
P_Jre(:,3) = real(P_J(:,3));
A_Jre = P_Jre^-1 * A * P_Jre
B_jre = P_Jre^-1 * B

% solving Riccati
a = 4;
Q= a*eye(3);
R = a*1;

[P,K,e]=icare(A,B,Q,R);
P
K=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K)

% quality functional
J_min = x0'*P*x0
```

Листинг 1: Программа для задания 1

Приложение Б

```
    tbd
```

Листинг 2: Программа для задания 2