

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»



**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2**  
**ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО**  
**УПРАВЛЕНИЯ»**  
**ТЕМА «МОДАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ И**  
**НАБЛЮДАТЕЛИ»**

Вариант №2

Преподаватель:  
Пашенко А. В.

Выполнил:  
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР  
Группа: R3341  
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург  
2025

# Содержание

<b>1</b>	<b>Задание 1. Модальный регулятор</b>	<b>2</b>
1.1	Управляемость и стабилизируемость	2
1.2	Схема моделирования системы, замкнутой регулятором	3
1.3	Достижимые спектры	3
1.4	Матрица регулятора	3
1.5	Корректность синтеза регулятора	5
1.6	Компьютерное моделирование	5
1.7	Сравнение результатов	7
1.8	Вывод	7
<b>2</b>	<b>Задание 2. Наблюдатель полного порядка</b>	<b>8</b>
2.1	Наблюдаемость и обнаруживаемость	8
2.2	Схема моделирования системы с наблюдателем состояния	9
2.3	Матрица коррекции наблюдателя	9
2.4	Корректность синтеза наблюдателя	10
2.5	Компьютерное моделирование	11
2.6	Сравнение результатов	19
2.7	Вывод	20
<b>3</b>	<b>Задание 3. Модальное управление по выходу</b>	<b>20</b>
3.1	Управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость, обнаруживаемость	20
3.2	Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния и закона управления	21
3.3	Достижимые спектры и асимптотическая устойчивость	22
3.4	Матрица регулятора	22
3.5	Матрица коррекции наблюдателя	22
3.6	Компьютерное моделирование	23
3.7	Вывод	25
<b>4</b>	<b>Задание 4. Наблюдатель пониженного порядка</b>	<b>25</b>
4.1	Управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость, обнаруживаемость	25
4.2	Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния пониженного порядка и закона управления	26
4.3	Желаемый спектр матрицы наблюдателя пониженного порядка	27
4.4	Синтез матрицы преобразования	27
4.5	Компьютерное моделирование	28
4.6	Вывод	29
<b>5</b>	<b>Общий вывод по работе</b>	<b>30</b>
<b>6</b>	<b>Приложения</b>	<b>30</b>
6.1	Приложение 1	30
6.2	Приложение 2	31
6.3	Приложение 3	33
6.4	Приложение 4	35
6.5	Приложение 5	35

## Задание 1. Модальный регулятор

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma(A + BK) = \begin{bmatrix} \{-2, -2, -2\}, \\ \{-3, -3, -3\}, \\ \{-2, -20, -200\}, \\ \{-3, -30, -300\}, \\ \{-2, -2 \pm 6i\}, \\ \{-3, -3 \pm 9i\}; \end{bmatrix}$$

### Управляемость и стабилизируемость

Найдем собственные числа матрицы  $A$  с помощью MATLAB (программу см. листинг 1 в приложении 1)

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 & -7 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 2 & 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\};$$

$\lambda_1 = -2 < 0$  асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым.  $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$  имеют положительные действительные части – неустойчивые, нужна управляемость. Определим управляемость собственных чисел через жорданово разложение (приведение комплексной формы к вещественной аналогично первой лабораторной работе)

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Собственное число  $\lambda_1 = -2$  неуправляемое, так как первый элемент в матрице входных воздействий  $B_{Jre}$  равен нулю. Остальные собственные числа управляемые. Следовательно, система не полностью управляема. Достаточное условие полной управляемости системы в нашем случае – не равенство нулю первого и [второго или третьего] элементов матрицы  $B_{Jre}$ . Оно не выполняется. Так как все неустойчивые собственные числа управляемы, то система стабилизируема.

## Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Построим схему моделирования системы  $\dot{x} = Ax + Bu$ , замкнутой регулятором  $u = Kx$ , используя SIMULINK

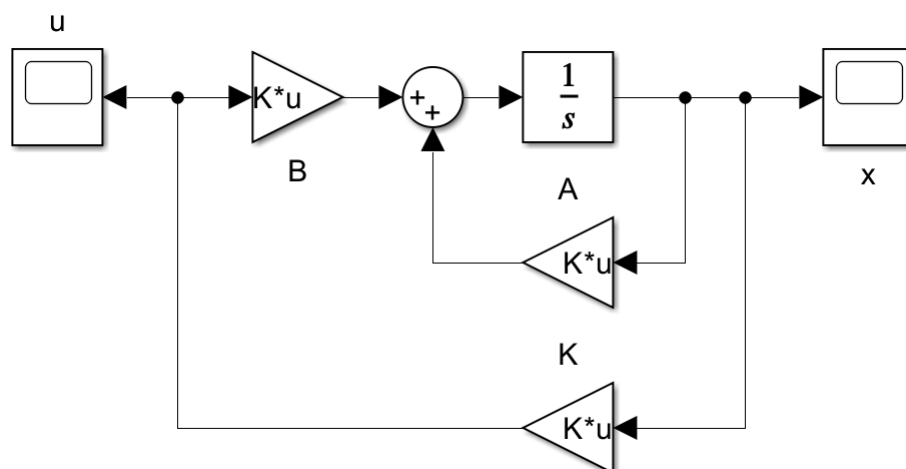


Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

## Достижимые спектры

Рассмотрим предложенные спектры замкнутой системы  $(A + BK)$  и определим, какие из них достижимы. Мы хотим, чтобы матрица  $(A + BK)$  была устойчивой, то есть все ее собственные числа имели отрицательную действительную часть. В нашем случае комплексная пара  $\lambda_{2,3}$  являются неустойчивыми, но управляемыми – их можно переместить в устойчивую область (подобрать любые числа, меньшие нуля). Собственное число  $\lambda_1 = -2$  устойчивое, но неуправляемое – его не получится переместить куда-либо. Это означает, что спектр  $\sigma(A + BK)$  должен содержать это неуправляемое число, иначе регулятор не будет выполнять свою функцию, мы потеряем собственное число матрицы  $A$ . Таким образом, желаемый спектр должен содержать все неуправляемые (но устойчивые) собственные числа матрицы  $A$ , при этом остальные числа могут быть любыми, но устойчивыми. Важно уточнить, что если некоторое собственное число матрицы  $A$  неустойчиво и неуправляемо, то система не стабилизируема – модальный регулятор применить не получится.

Исходя из наших рассуждений выше, достижимыми будут следующие спектры замкнутой системы

$$\sigma(A + BK) = \begin{cases} \{-2, -2, -2\}, \\ \{-2, -20, -200\}, \\ \{-2, -2 \pm 6i\}; \end{cases}$$

Остальные спектры не содержат неуправляемое собственное число  $\lambda_1 = -2$ .

## Матрица регулятора

Для каждого из достижимых спектров, определенных в предыдущем пункте, найдем соответствующие матрицы регулятора  $K$ , приводящие спектр замкнутой системы к желаемому.

Рассмотрим спектр  $\sigma(A + BK) = \{-2, -2, -2\}$ . Запишем полином Ньютона третьего порядка с  $\omega_0 = 1$

$$(\lambda + 2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

Составим матрицу  $\Gamma_1$  в канонической наблюдаемой форме по коэффициентам найденного полинома

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$$

Подберем  $Y_1$  такой, чтобы пара  $(Y_1, \Gamma_1)$  была наблюдаема. Проверим, вычислив ранг матрицы наблюдаемости

$$Y_1 = [1 \ 0 \ 0], \text{ rank } \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_1 \Gamma_1 \\ Y_1 \Gamma_1^2 \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3;$$

Теперь, используя пакет `svx` в `MATLAB`, вычислим матрицу  $P_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  как решение уравнения Сильвестра

$$\begin{aligned} AP_1 - P_1 \Gamma_1 &= BY_1 \\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0], \\ P_1 &= \begin{bmatrix} 0.4455 & -0.0701 & -0.0288 \\ -0.0759 & -0.1036 & -0.0181 \\ 0.1649 & 0.1926 & 0.0404 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

Далее вычислим матрицу регулятора  $K_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  по формуле

$$\begin{aligned} K_1 &= -Y_1 P_1^{-1}, \\ K_1 &= [-1.800 \quad -7.043 \quad -4.443]; \end{aligned}$$

Повторим шаги для нахождения остальных  $K_i$ . Рассмотрим спектры

$$\sigma(A + BK) = \{-2, -20, -200\}, \quad \sigma(A + BK) = \{-2, -2 \pm 6i\};$$

Найдем их полиномы

$$\begin{aligned} (\lambda + 2)(\lambda + 20)(\lambda + 200) &= \lambda^3 + 222\lambda^2 + 4440\lambda + 8000, \\ (\lambda + 2)(\lambda + 2 - 6i)(\lambda + 2 + 6i) &= \lambda^3 + 6\lambda^2 + 48\lambda + 80; \end{aligned}$$

Аналогично запишем матрицы  $\Gamma_i$

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8000 & -4440 & -222 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -80 & -48 & -6 \end{bmatrix};$$

Подберем  $Y_i$  и выполним проверку ранга

$$Y_{2,3} = Y_1 = [1 \ 0 \ 0] = Y, \text{ rank } \begin{bmatrix} Y \\ Y \Gamma_2 \\ Y \Gamma_2^2 \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} Y \\ Y \Gamma_3 \\ Y \Gamma_3^2 \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3;$$

Найдем  $P_{2,3}$  и  $K_{2,3}$  тем же способом

$$\begin{aligned} P_2 &= \begin{bmatrix} 0.2259 & 0.0053 & 0.0000 \\ 0.0612 & 0.0012 & 0.0000 \\ 0.2253 & 0.0146 & 0.0001 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0.2546 & 0.0351 & -0.0026 \\ 0.0744 & 0.0055 & -0.0012 \\ 0.2550 & 0.0275 & 0.0094 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= [754.2 \quad -2553.6 \quad -67.0], \quad K_3 = [5.4000 \quad -25.9424 \quad -1.7424]; \end{aligned}$$

## Корректность синтеза регулятора

Определим собственные числа каждой матрицы замкнутой системы  $(A + BK_i)$  и сравним с соответствующими желаемыми спектрами

$$\sigma(A + BK_1) = \sigma \begin{bmatrix} -0.400 & -19.129 & -6.329 \\ 0.200 & -6.043 & -2.443 \\ -0.200 & 4.043 & 0.443 \end{bmatrix} = \{-2, -2, -2\},$$

$$\sigma(A + BK_2) = \sigma \begin{bmatrix} 2267.6 & -7658.7 & -193.9 \\ 756.2 & -2552.6 & -65.0 \\ -756.2 & 2550.6 & 63.0 \end{bmatrix} = \{-2, -20, -200\},$$

$$\sigma(A + BK_3) = \sigma \begin{bmatrix} 21.2000 & -75.8273 & 1.7727 \\ 7.4000 & -24.9424 & 0.2576 \\ -7.4000 & 22.9424 & -2.2576 \end{bmatrix} = \{-2, -2 \pm 6i\};$$

Видим, что спектры совпадают с желаемыми – регулятор синтезирован корректно.

## Компьютерное моделирование

Для компьютерного моделирования воспользуемся схемой SIMULINK, представленной на рис. 1. Зададим в интегратор начальное условие  $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$

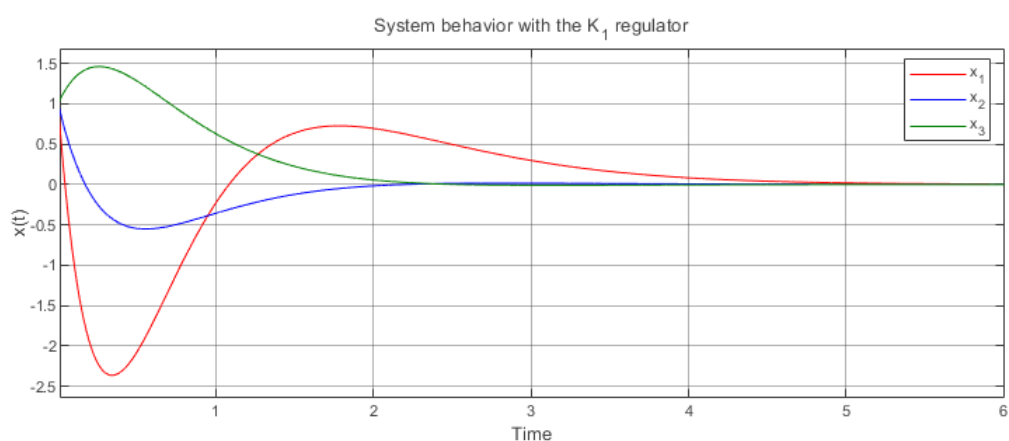


Рис. 2: График  $x(t)$  для  $K_1$

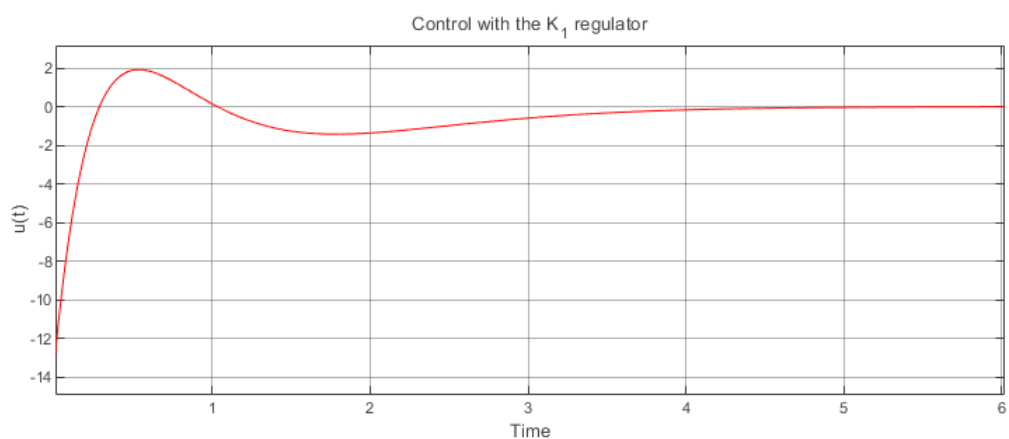


Рис. 3: График  $u(t)$  для  $K_1$

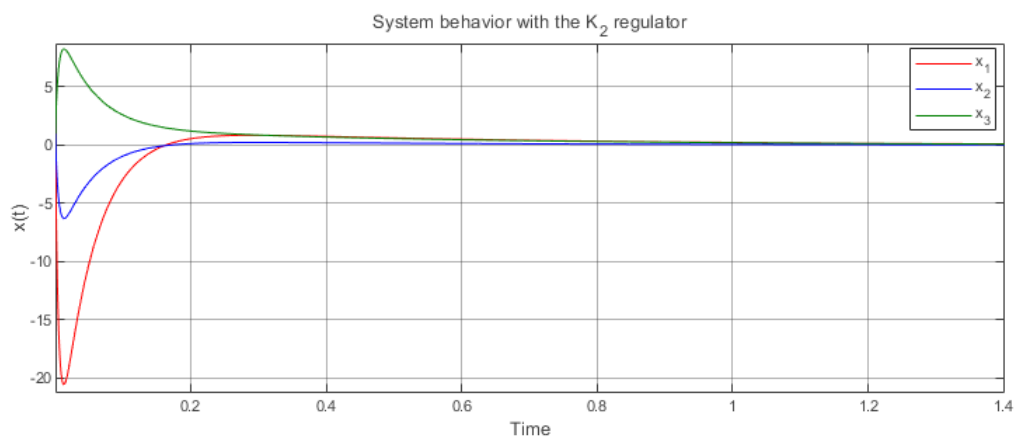


Рис. 4: График  $x(t)$  для  $K_2$

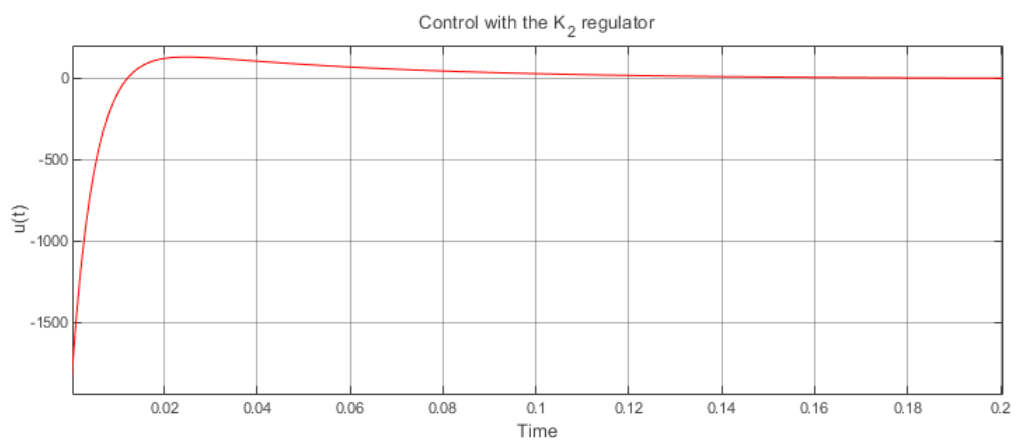


Рис. 5: График  $u(t)$  для  $K_2$

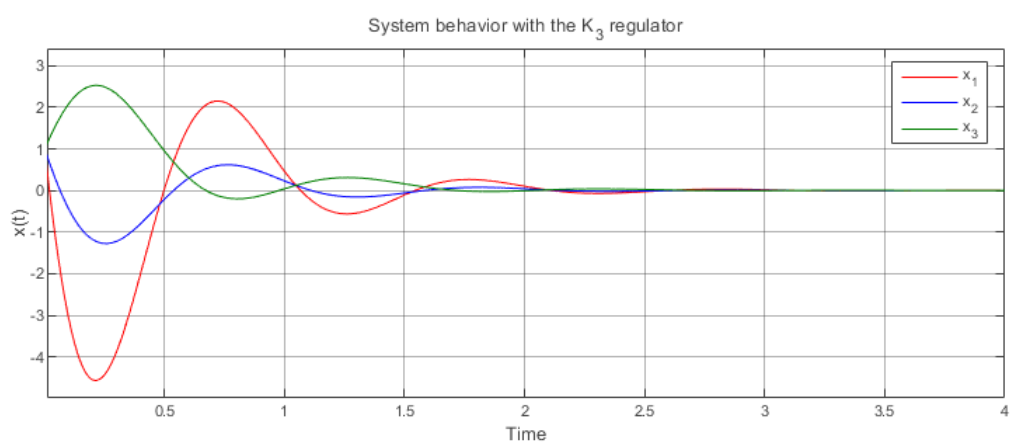


Рис. 6: График  $x(t)$  для  $K_3$

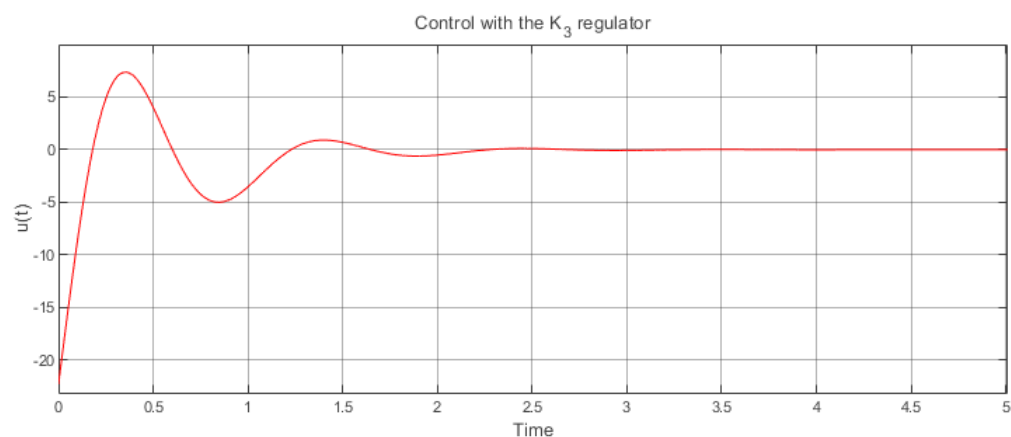


Рис. 7: График  $u(t)$  для  $K_3$

### Сравнение результатов

Сопоставим полученные результаты компьютерного моделирования для рассмотренных спектров, оценим возможные сравнительные преимущества и недостатки каждого из них.

На каждом рисунке система  $x(t)$  стабилизировалась – все координаты пришли в ноль, выходя из 1. Управления  $u(t)$  сошлись к нулю – регуляторы выполнили свою задачу и больше не требуют активного управления.

На рис. 3 видим, что управление  $u(t)$  достаточно плавное, имеет небольшое перерегулирование в сравнении с другими графиками. На рис. 2 система  $x(t)$  ожидаемо медленно и плавно затухает.

На рис. 4 наблюдаем быстрое стабилизирование системы, однако при этом присутствуют большие начальные отклонения. В сравнении с другими графиками имеется ожидаемо наибольшее перерегулирование (см. рис. 5). Получили достаточно агрессивный регулятор.

На рис. 6 система, вследствие наличия комплексных собственных чисел, приобрела сравнительно небольшие осцилляции. По скорости затухания колебаний результат получился средним (быстрее, чем  $K_1$ ; медленнее, чем  $K_2$ ). Система выглядит менее предсказуемо в сравнении с остальными результатами.

### Вывод

В ходе выполнения задания мы выяснили, что система не полностью управляема, но стабилизируема. Мы нашли достижимые спектры по принципу наличия в них неуправляемых (но устойчивых) собственных чисел матрицы  $A$ . Мы вычислили матрицы регулятора, убедились в корректности синтеза каждого регулятора, после чего провели компьютерное моделирование. В ходе сравнения результатов было выяснено, что при маленьких собственных числах в спектре система медленно и плавно затухает со сравнительно небольшим перерегулированием. При больших по модулю собственных числах система быстро стабилизируется, но имеет сравнительно большое перерегулирование. Наличие комплексных собственных чисел создаст некоторые осцилляции в системе, из-за чего она может быть менее предсказуема. При этом скорость затухания системы выше, чем при небольших по модулю числах, принадлежащих множеству рациональных чисел.



## Задание 2. Наблюдатель полного порядка

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ y = Cx, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma(A + LC) = \begin{bmatrix} \{-2, -2, -2, -2\}, \\ \{-2, -20, -200, -2000\}, \\ \{-2 \pm 3i, -2 \pm 4i\}; \end{bmatrix}$$

### Наблюдаемость и обнаруживаемость

Найдем собственные числа матрицы  $A$ . Программа для вычислений в MATLAB находится в приложении 2 на листинге 2

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ 26 & \lambda + 7 & -20 & 11 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 & -2 \\ -16 & -4 & 14 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma(A) = \{\pm 2i, \pm i\};$$

Все собственные числа комплексные и имеют нулевую действительную часть. Следовательно, они все устойчивые, но не асимптотически. То есть в системе будут незатухающие колебания. Перейдем к вещественной жордановой форме системы, чтобы определить наблюдаемость каждого собственного числа, а далее сделать выводы о наблюдаемости и обнаруживаемости системы

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -2 & 6 & -3 \\ 2 & -0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -6 & 4 \\ 12 & 4 & -10 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C_{Jre} = C P_{re} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{Jre} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Все собственные числа, кроме  $\lambda_4$ , наблюдаемы, так как соответствующие им элементы матрицы выходов  $C_{Jre}$  не равны нулю. Из этого нельзя сделать вывод, что система полностью наблюдаема. Достаточное условие полной наблюдаемости нашей системы – не равенство нулю [первого или второго] и [третьего или четвертого] элементов матрицы  $C_{Jre}$ . Так как условие выполняется, то система полностью наблюдаема, а значит, и обнаруживаема.

## Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Построим в **SIMULINK** схему моделирования системы с наблюдателем состояния

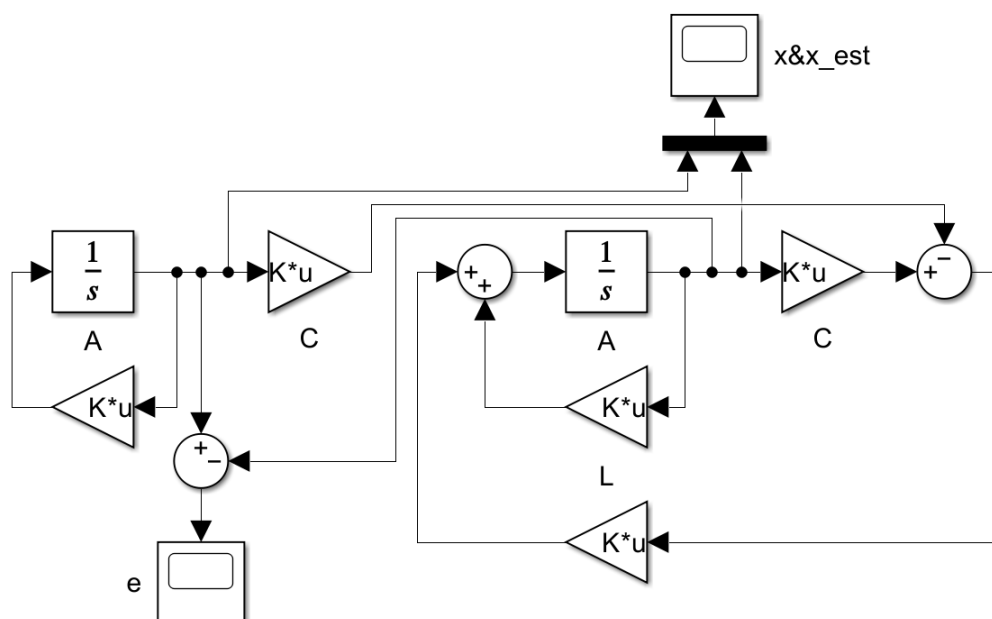
$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$$


Рис. 8: Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Через один **Score** отслеживаем сигналы  $x(t)$  и  $\hat{x}(t)$  на одном графике, через другой ошибку наблюдателя (невязку)  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ .

### Матрица коррекции наблюдателя

Для каждого из предложенных спектров найдем матрицы коррекции наблюдателя  $L$ , обеспечивающих соответствующий желаемый спектр. Аналогично первому заданию составим полиномы

$$\begin{aligned}(\lambda + 2)^4 &= \lambda^4 + 8\lambda^3 + 24\lambda^2 + 32\lambda + 16, \\(\lambda + 2)(\lambda + 20)(\lambda + 200)(\lambda + 2000) &= \lambda^4 + 2222\lambda^3 + 448440\lambda^2 + 8888000\lambda + 16000000, \\(\lambda + 2 - 3i)(\lambda + 2 + 3i)(\lambda + 2 - 4i)(\lambda + 2 + 4i) &= \lambda^4 + 8\lambda^3 + 49\lambda^2 + 132\lambda + 260;\end{aligned}$$

Запишем матрицы  $\Gamma_i$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16 & -32 & -24 & -8 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16000000 & -8888000 & -448440 & -2222 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -260 & -132 & -49 & -8 \end{bmatrix};$$

Все матрицы  $\Gamma_i$  составлены по одинаковому принципу, поэтому подберем единый  $Y$  такой, чтобы пары  $(Y, \Gamma_i)$  были управляемы. Проверим, вычислив ранги матриц

управляемости  $U_i$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U_i = [Y \quad \Gamma_i Y \quad \Gamma_i^2 Y \quad \Gamma_i^3 Y],$$

$$\text{rank} [Y \quad \Gamma_1 Y \quad \Gamma_1^2 Y \quad \Gamma_1^3 Y] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -16 & 128 \\ 0 & -16 & 128 & -640 \end{bmatrix} = 4,$$

$$\text{rank} [Y \quad \Gamma_2 Y \quad \Gamma_2^2 Y \quad \Gamma_2^3 Y] = \text{rank} \left[ 10^{13} \cdot \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0036 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0036 & -7.1822 \end{bmatrix} \right] = 4,$$

$$\text{rank} [Y \quad \Gamma_3 Y \quad \Gamma_3^2 Y \quad \Gamma_3^3 Y] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -260 \\ 0 & 0 & -260 & 2080 \\ 0 & -260 & 2080 & -3900 \end{bmatrix} = 4;$$

Используя пакет `svh` в **MATLAB**, вычислим матрицы  $Q_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  как решения уравнения Сильвестра

$$\Gamma_i Q_i - Q_i A = Y C$$

После чего вычислим  $L_i \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$  по формуле

$$L_i = Q_i^{-1} Y$$

Получаем следующие результаты

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -7.7426 & -2.3690 & 6.5528 & -3.5588 \\ 3.6532 & 1.1580 & -3.1096 & 1.9516 \\ 1.1176 & 0.2440 & -1.0528 & 0.3088 \\ -1.4032 & -0.4080 & 1.6096 & -1.2016 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 10.3333 \\ -21.0000 \\ 7.6667 \\ 5.3333 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} -1.7989 & -0.5605 & 1.4628 & -0.6220 \\ 3.6220 & 1.0996 & -2.9656 & 1.3166 \\ -7.5251 & -1.7746 & 6.5261 & -3.8724 \\ -15.8185 & -4.0663 & 12.1953 & -5.9314 \end{bmatrix}, \quad L_2 = 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 0.7378 \\ 7.5493 \\ 6.0674 \\ 5.3319 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} -1.4397 & -0.4741 & 1.0517 & -0.3017 \\ 6.5000 & 1.7241 & -5.3103 & 2.4655 \\ -5.3793 & -1.0172 & 5.2759 & -3.3621 \\ -27.3448 & -6.4310 & 21.4483 & -10.5345 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 4.0000 \\ 76.0000 \\ 58.6667 \\ 62.6667 \end{bmatrix};$$

### Корректность синтеза наблюдателя

Определим собственные числа матриц наблюдателя  $(A + L_i C)$  и сравним с соответствующими желаемыми спектрами

$$\sigma(A + L_1 C) = \sigma \begin{bmatrix} -10.3333 & 1.0000 & 10.3333 & -9.3333 \\ -5.0000 & -7.0000 & -1.0000 & 10.0000 \\ -7.6667 & 1.0000 & 6.6667 & -5.6667 \\ 10.6667 & 4.0000 & -8.6667 & 2.6667 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} -2.0017 \\ -2.0000 + 0.0017i \\ -2.0000 - 0.0017i \\ -1.9983 \end{array} \right\},$$

$$\sigma(A + L_2 C) = \sigma \left[ 10^6 \cdot \begin{bmatrix} -0.7378 & 0.0000 & 0.7378 & -0.7378 \\ -7.5494 & 0.0000 & 7.5494 & -7.5494 \\ -6.0674 & 0.0000 & 6.0674 & -6.0674 \\ -5.3318 & 0.0000 & 5.3318 & -5.3318 \end{bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} -2000 \\ -200 \\ -2 \\ -20 \end{Bmatrix},$$

$$\sigma(A + L_3 C) = \sigma \begin{bmatrix} -4.0000 & 1.0000 & 4.0000 & -3.0000 \\ -102.0000 & -7.0000 & 96.0000 & -87.0000 \\ -58.6667 & 1.0000 & 57.6667 & -56.6667 \\ -46.6667 & 4.0000 & 48.6667 & -54.6667 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \pm 4i \\ -2 \pm 3i \end{Bmatrix};$$

Отклонение в 0.085% для  $L_1$  будем считать погрешностью вычислений в MATLAB. Остальные спектры совпали с желаемыми. Наблюдатель синтезирован корректно.

### Компьютерное моделирование

Для компьютерного моделирования воспользуемся схемой SIMULINK, представленной на рис. 8. Зададим в интеграторы такие начальные условия: для системы  $x(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ , для наблюдателя  $\hat{x}(0) = [2 \ 0 \ 0 \ -1]^T$ . Также для одного из случаев приблизим график к началу времени  $t$ , чтобы убедиться в том, что каждая координата выходит из своего начального условия

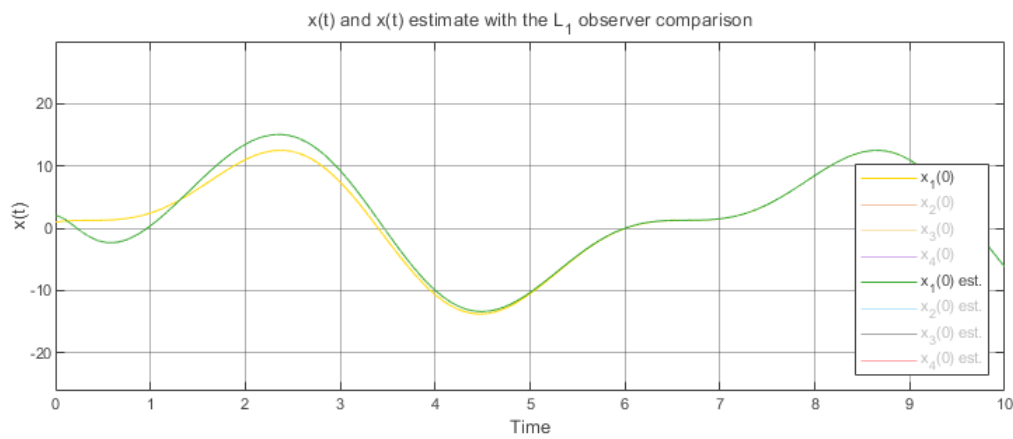


Рис. 9: Графики  $x_1(t), \hat{x}_1(t)$  для  $L_1$

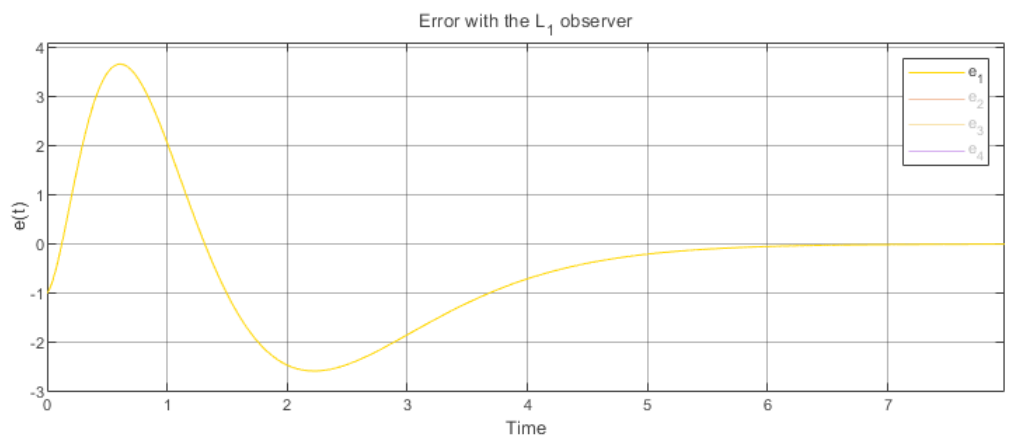


Рис. 10: График  $e_1(t)$  для  $L_1$

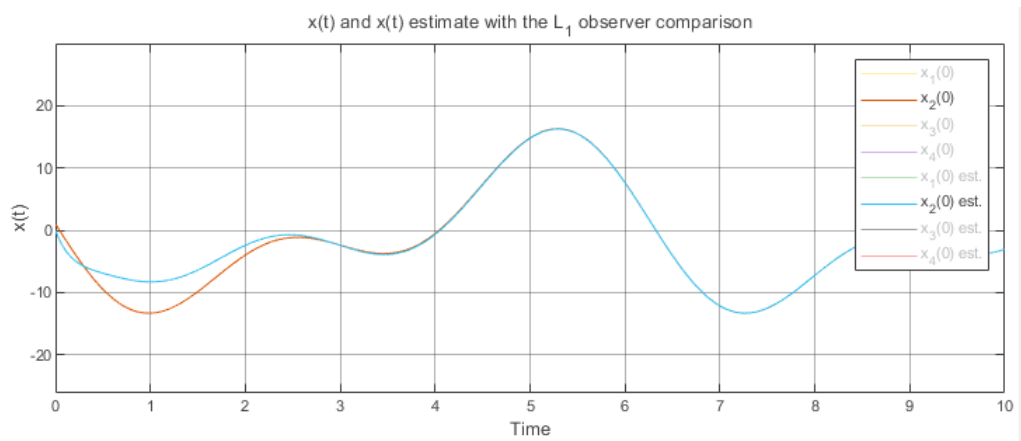


Рис. 11: Графики  $x_2(t), \hat{x}_2(t)$  для  $L_1$

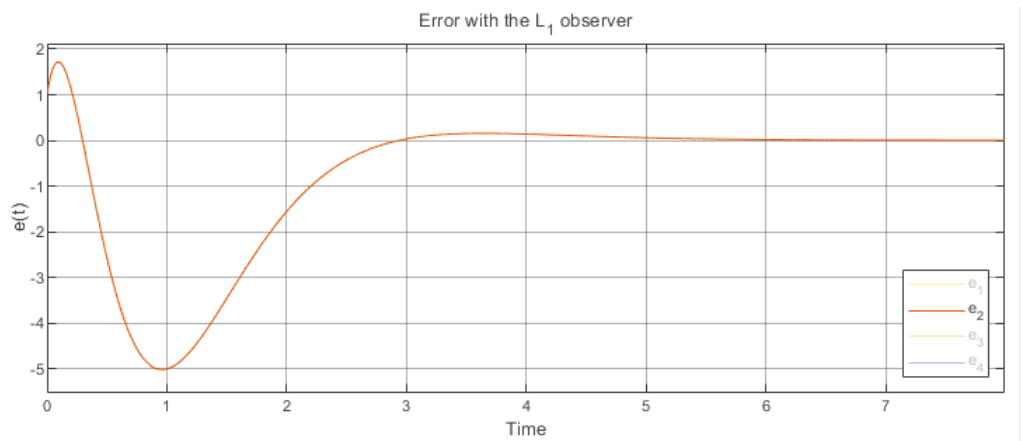


Рис. 12: График  $e_2(t)$  для  $L_1$

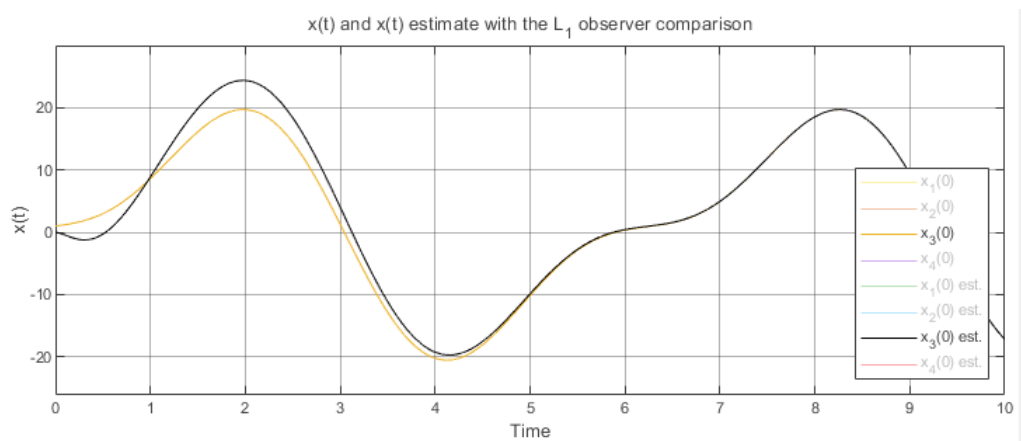


Рис. 13: Графики  $x_3(t), \hat{x}_3(t)$  для  $L_1$

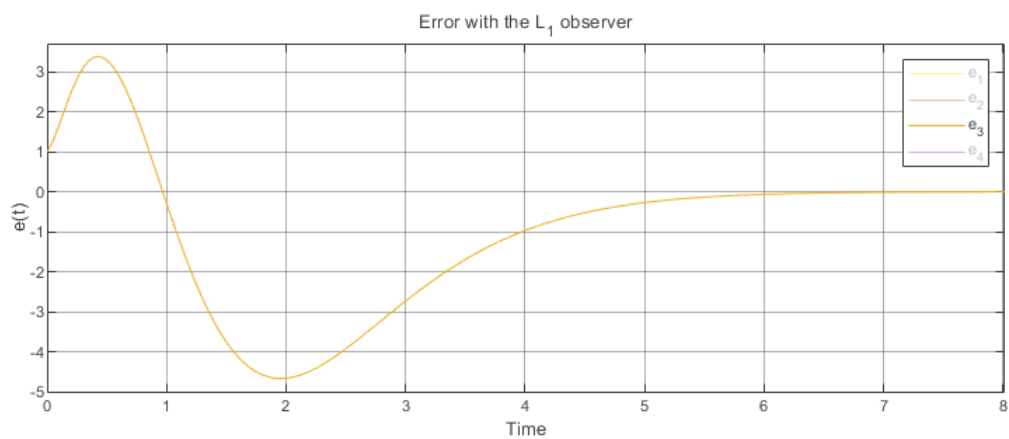


Рис. 14: График  $e_3(t)$  для  $L_1$

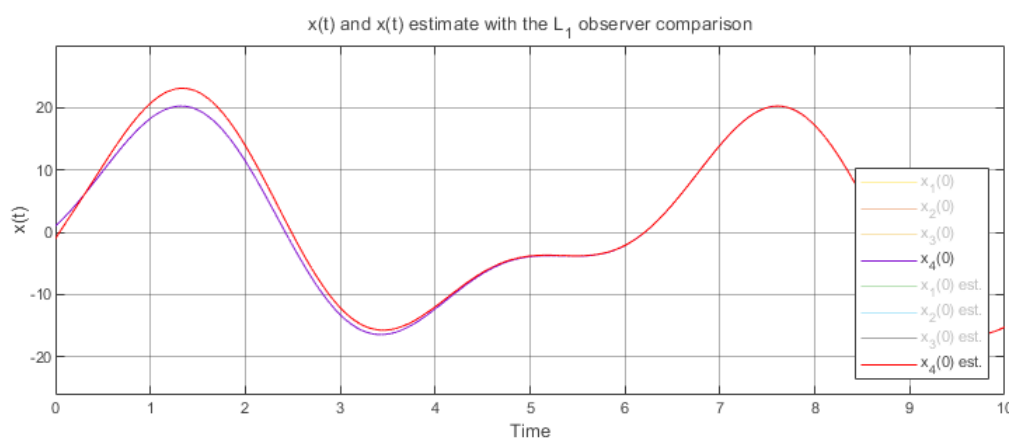


Рис. 15: Графики  $x_4(t)$ ,  $\hat{x}_4(t)$  для  $L_1$

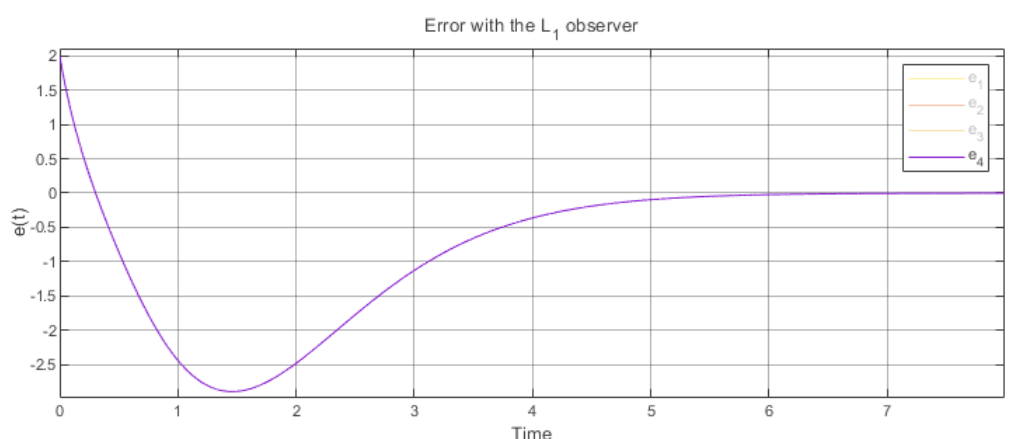


Рис. 16: График  $e_4(t)$  для  $L_1$

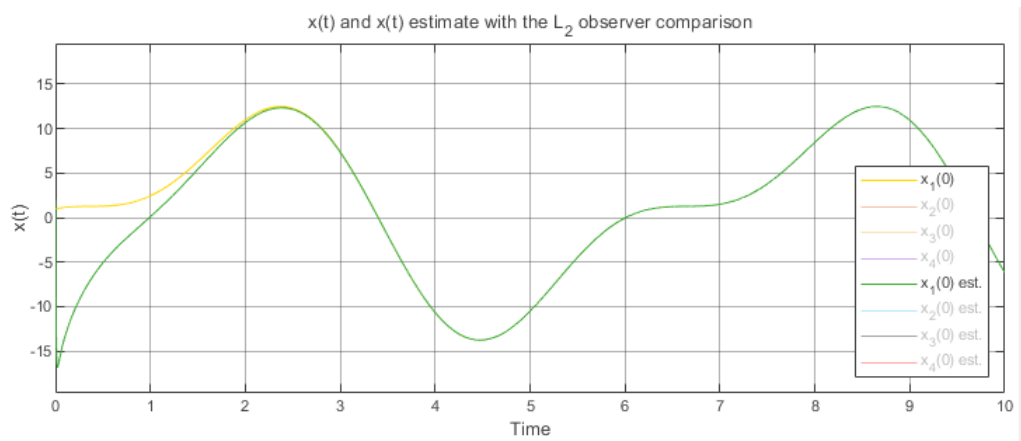


Рис. 17: Графики  $x_1(t), \hat{x}_1(t)$  для  $L_2$

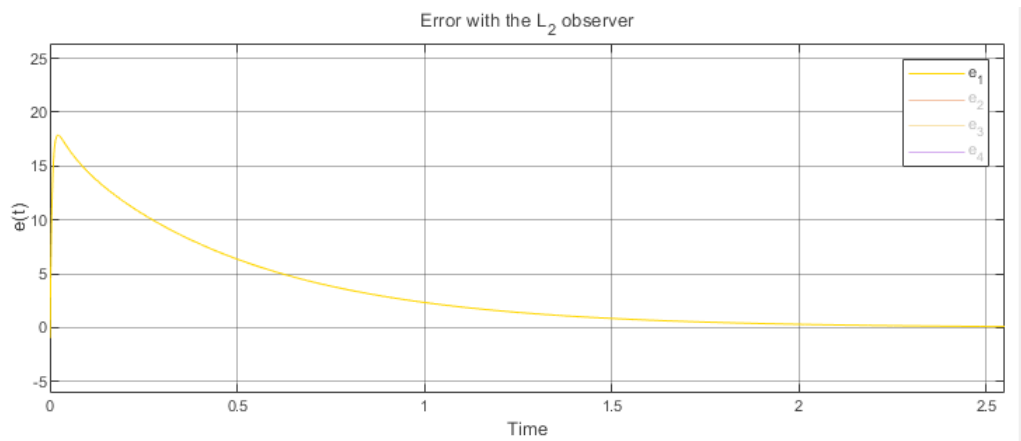


Рис. 18: График  $e_1(t)$  для  $L_2$

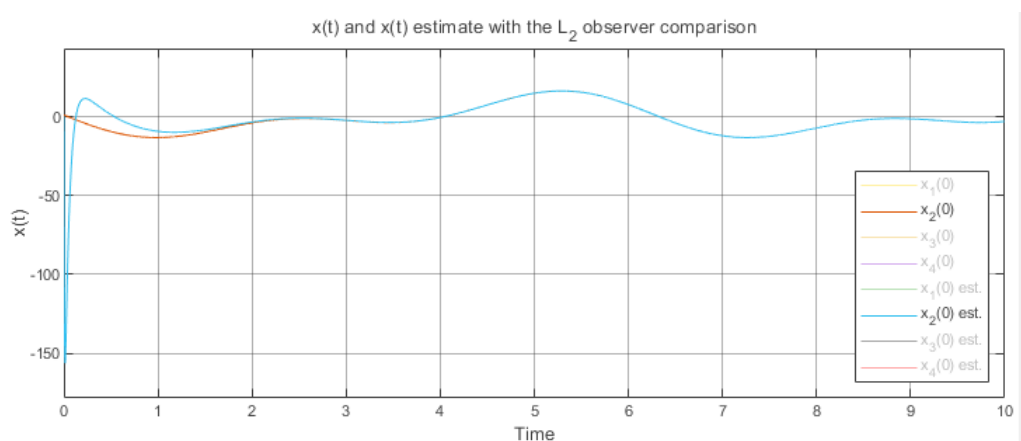


Рис. 19: Графики  $x_2(t), \hat{x}_2(t)$  для  $L_2$

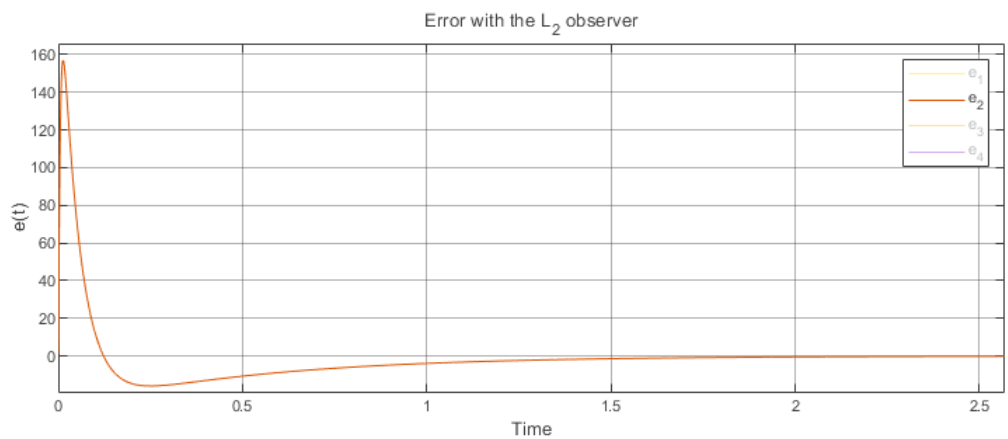


Рис. 20: График  $e_2(t)$  для  $L_2$

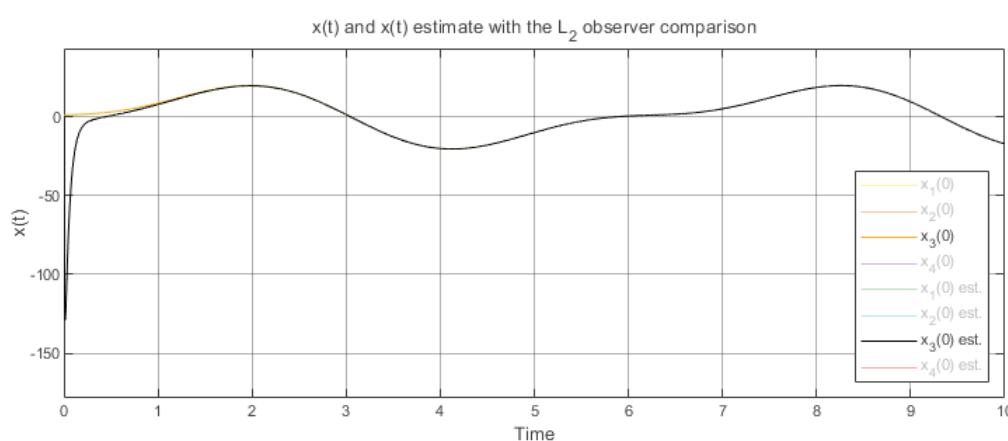


Рис. 21: Графики  $x_3(t)$ ,  $\hat{x}_3(t)$  для  $L_2$



Рис. 22: График  $e_3(t)$  для  $L_2$



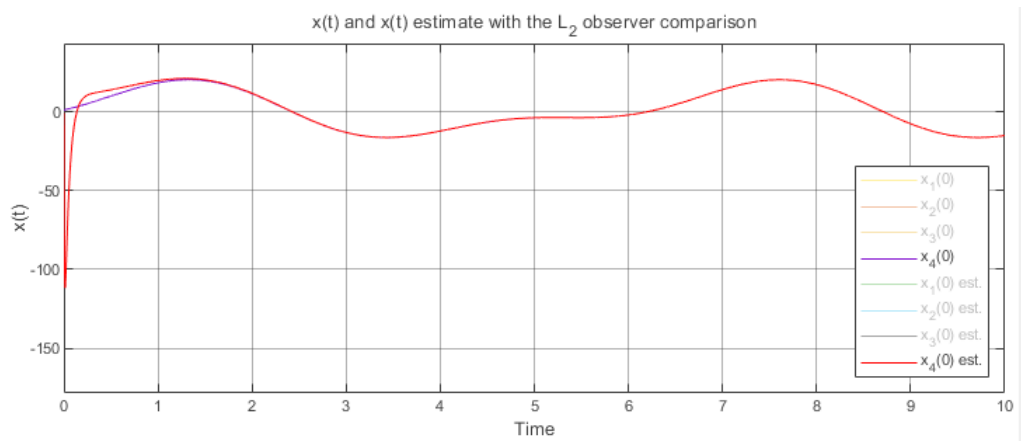


Рис. 23: Графики  $x_4(t), \hat{x}_4(t)$  для  $L_2$

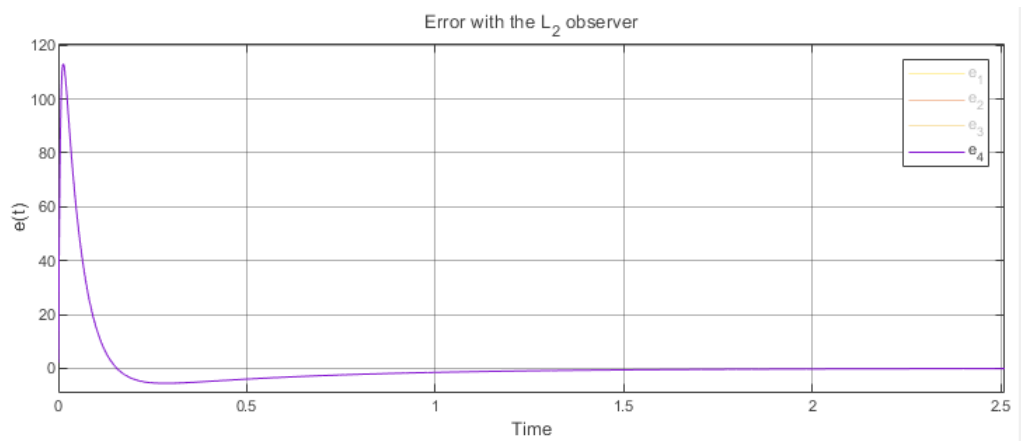


Рис. 24: График  $e_4(t)$  для  $L_2$

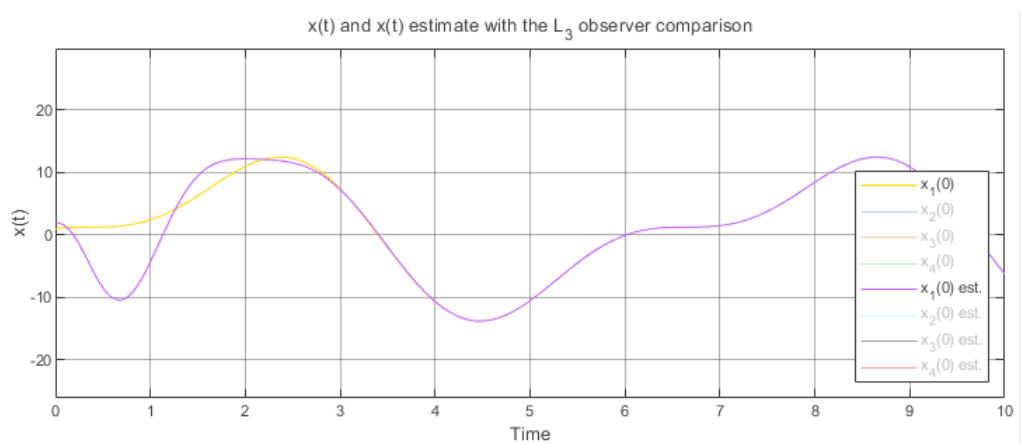


Рис. 25: Графики  $x_1(t), \hat{x}_1(t)$  для  $L_3$

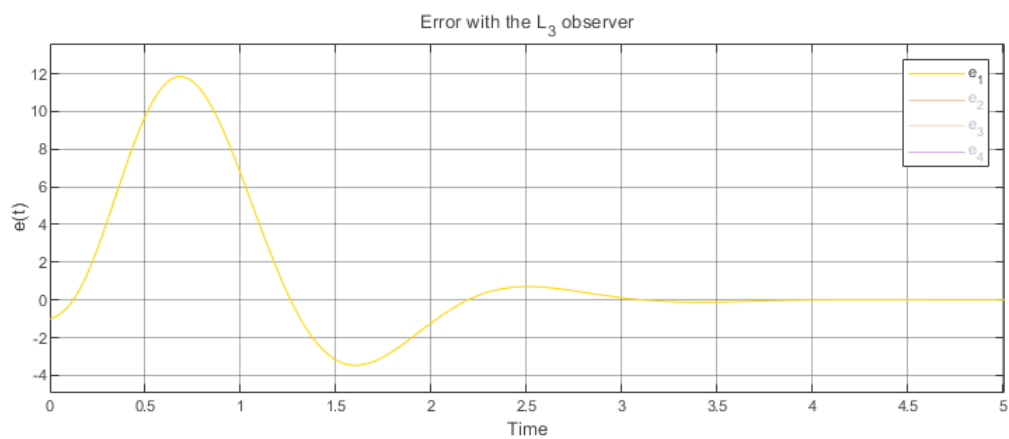


Рис. 26: График  $e_1(t)$  для  $L_3$

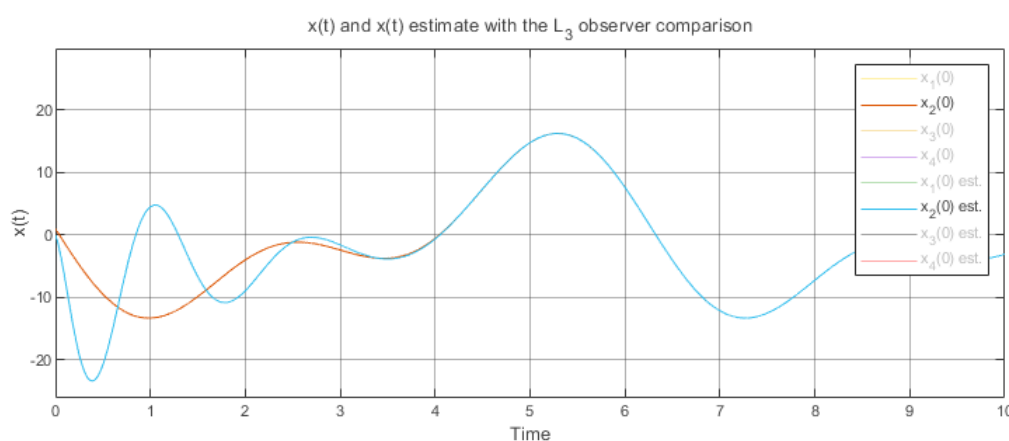


Рис. 27: Графики  $x_2(t), \hat{x}_2(t)$  для  $L_3$

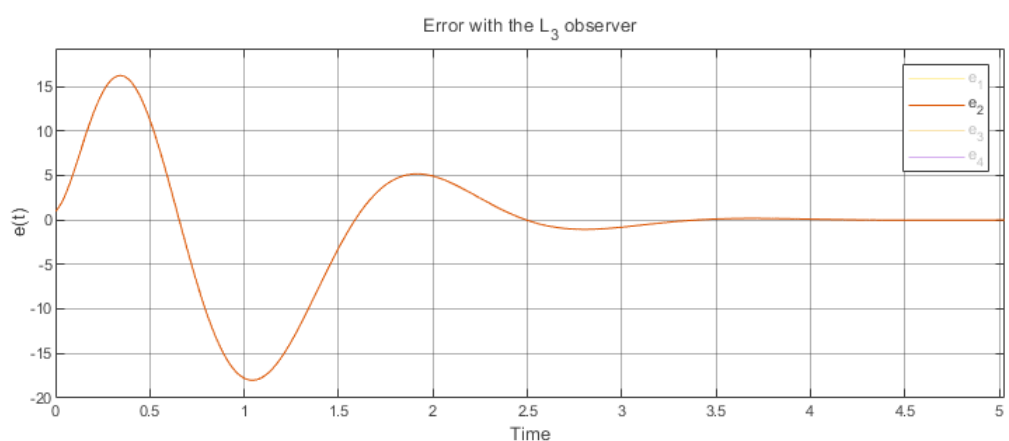


Рис. 28: График  $e_2(t)$  для  $L_3$

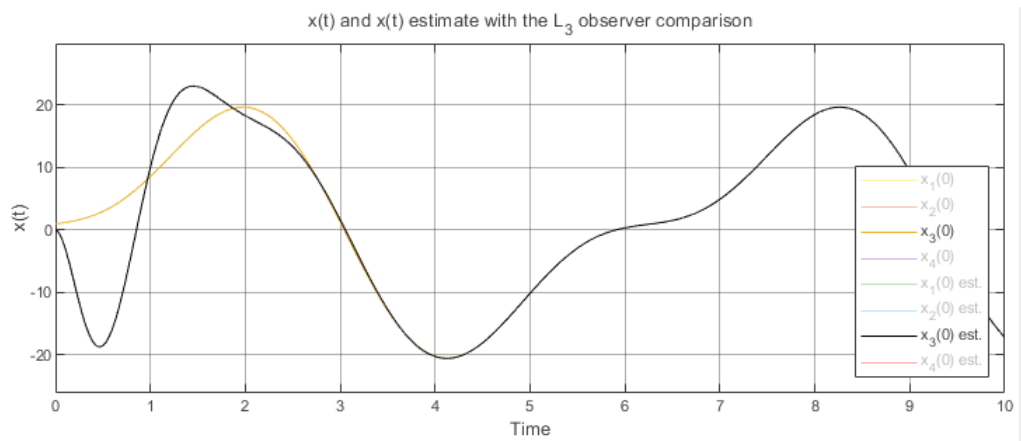


Рис. 29: Графики  $x_3(t), \hat{x}_3(t)$  для  $L_3$

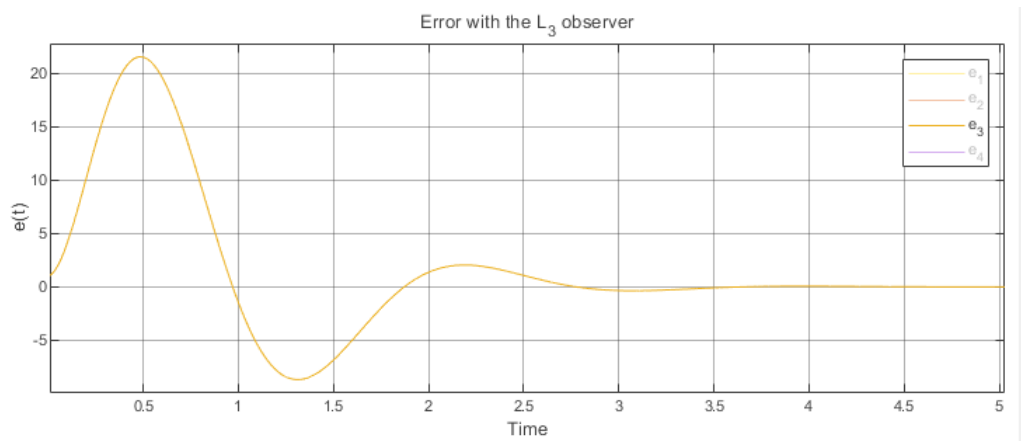


Рис. 30: График  $e_3(t)$  для  $L_3$

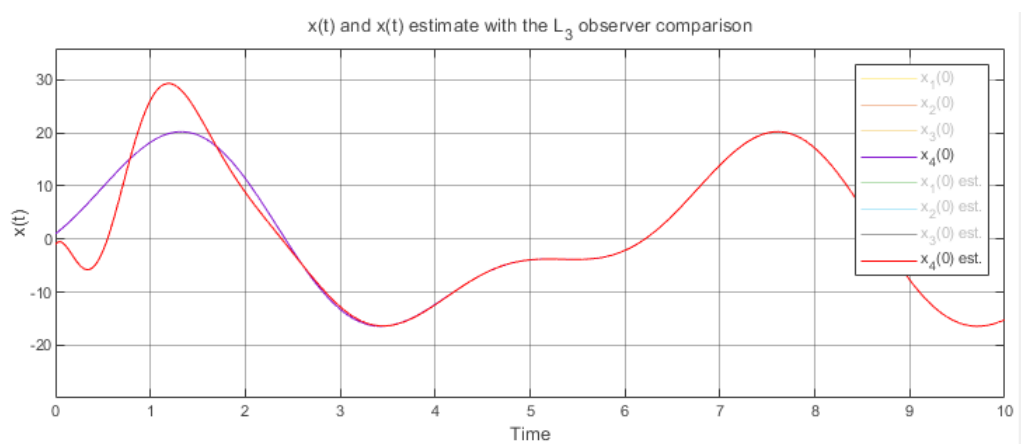


Рис. 31: Графики  $x_4(t), \hat{x}_4(t)$  для  $L_3$

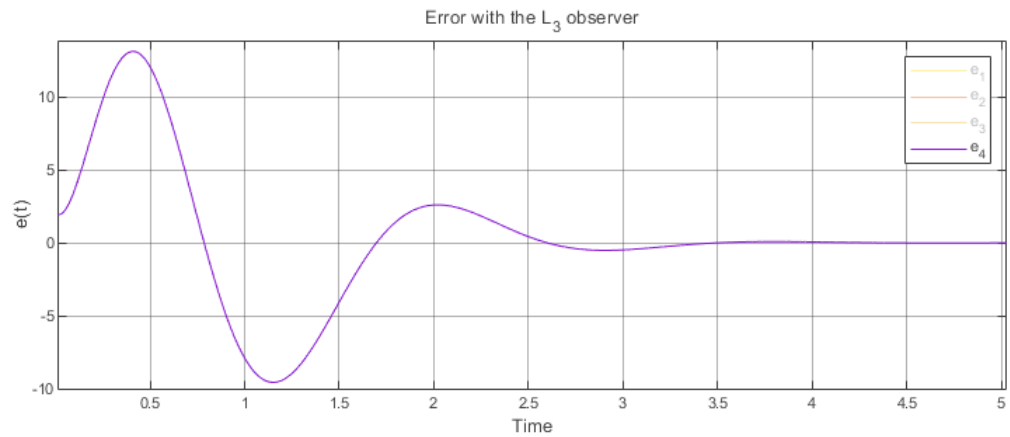


Рис. 32: График  $e_4(t)$  для  $L_3$

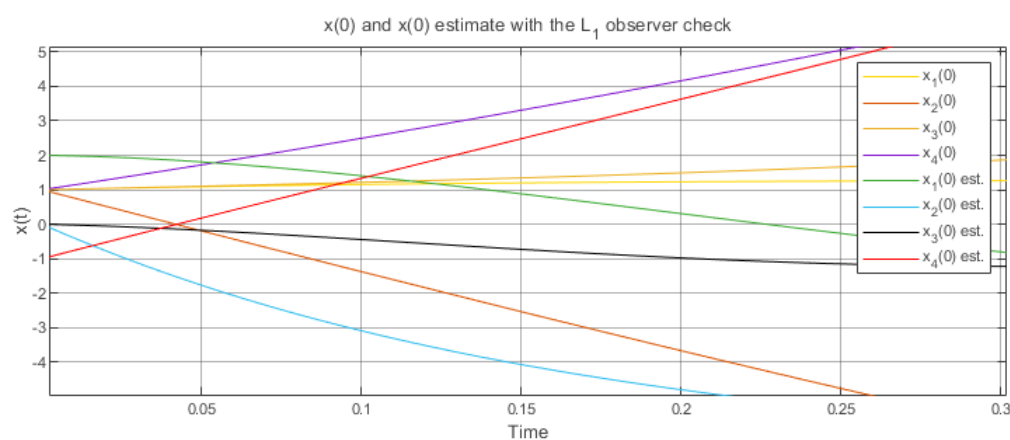


Рис. 33: Проверка начальных условий (случай для  $L_1$ )

### Сравнение результатов

Видим, как на каждом графике  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$  оценки координат сходятся к настоящим координатам – наблюдатель выполняет свою работу верно. Например, на рис. 9 **зеленая** оценка координаты  $\hat{x}_1$  сходится к **желтой** истинной координате  $x_1$  примерно за  $t = 7$ . Ошибки ожидаемо стремятся к нулю. На рис. 33 видим, что все координаты выходят из своих начальных условий.

На рис. 9, 11, 13, 15 видим, что примерно к  $t = 7$  каждая координата наблюдателя сошлась с исходными координатами. Ошибки на рис. 10, 12, 14, 16 сравнительно небольшие, ожидаемо наибольшие в начале, далее плавно и медленно стремятся к нулю. Итого: плавное поведение наблюдателя с небольшой ошибкой, но медленное схождение к истинным координатам.

На рис. 17, 19, 21, 23 ситуация обратная – наблюдатель быстро сводит координаты с координатами исходной системы (примерно за  $t = 3$ ), однако ошибки на рис. 18, 20, 22, 24 ожидаемо сравнительно большие. На практике лучше всего соблюдать баланс между величиной ошибки и скоростью сходимости.

На рис. 25, 27, 29, 31 результат в целом схож с результатом для  $L_1$  (см. рис. 9, 11, 13, 15). Разница в том, что координаты сходятся немного быстрее, однако, что видно на рис. 26, 28, 30, 32, появляются лишние осцилляции, то есть система становится менее предсказуемой (больше скачков ошибки до ее полного схождения к нулю в сравнении со случаем для  $L_1$  – там почти все ошибки сразу сходятся к нулю).

## Вывод

Мы выяснили, что система является полностью наблюдаемой, а следовательно, и обнаруживаемой. Мы вычислили матрицы коррекции наблюдателя и убедились в том, что наблюдатель синтезирован верно. Мы промоделировали систему с наблюдателем состояния и сравнили полученные результаты. В целом выводы аналогичны первому заданию. Лучше всего брать небольшие по модулю рациональные или комплексные числа. Выбор зависит от того, что нам важнее. Если важнее скорость – комплексные. Если точность – рациональные.

## Задание 3. Модальное управление по выходу

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

### Управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость, обнаруживаемость

Найдем собственные числа матрицы  $A$ . Программа для вычислений в MATLAB представлена в приложении 3 на листинге 3

$$\det [\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma(A) = \{-4, 0, 4, 8\};$$

Собственное число  $\lambda_1 = -4$  асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым и/или ненаблюдаемым.  $\lambda_2 = 0$  устойчивое, но не асимптотически.  $\lambda_{2,3} > 0$  неустойчивые, нужна управляемость и наблюдаемость. Перейдем к жордановой форме системы

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & -0.25 & -0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & -0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix},$$

$$B_J = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & -0.25 & -0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & -0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$C_J = CP = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad C_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Матрица  $B_J$  не содержит нулевых элементов – все собственные числа матрицы  $A$  управляемы, следовательно, система полностью управляема, а значит, и стабилизируема. Матрица  $C_J$  содержит нулевой столбец, соответствующий  $\lambda_2 = -4$  – это собственное число ненаблюдаемо. Остальные собственные числа наблюдаемы, следовательно, система не полностью наблюдаема. Так как все неустойчивые собственные числа наблюдаемы, а ненаблюдаемое  $\lambda_2 < 0$ , то система обнаруживаема.

### Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния и закона управления

Построим в SIMULINK схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + (B + LD)u + L(C\hat{x} - y)$  и закона управления  $u = K\hat{x}$

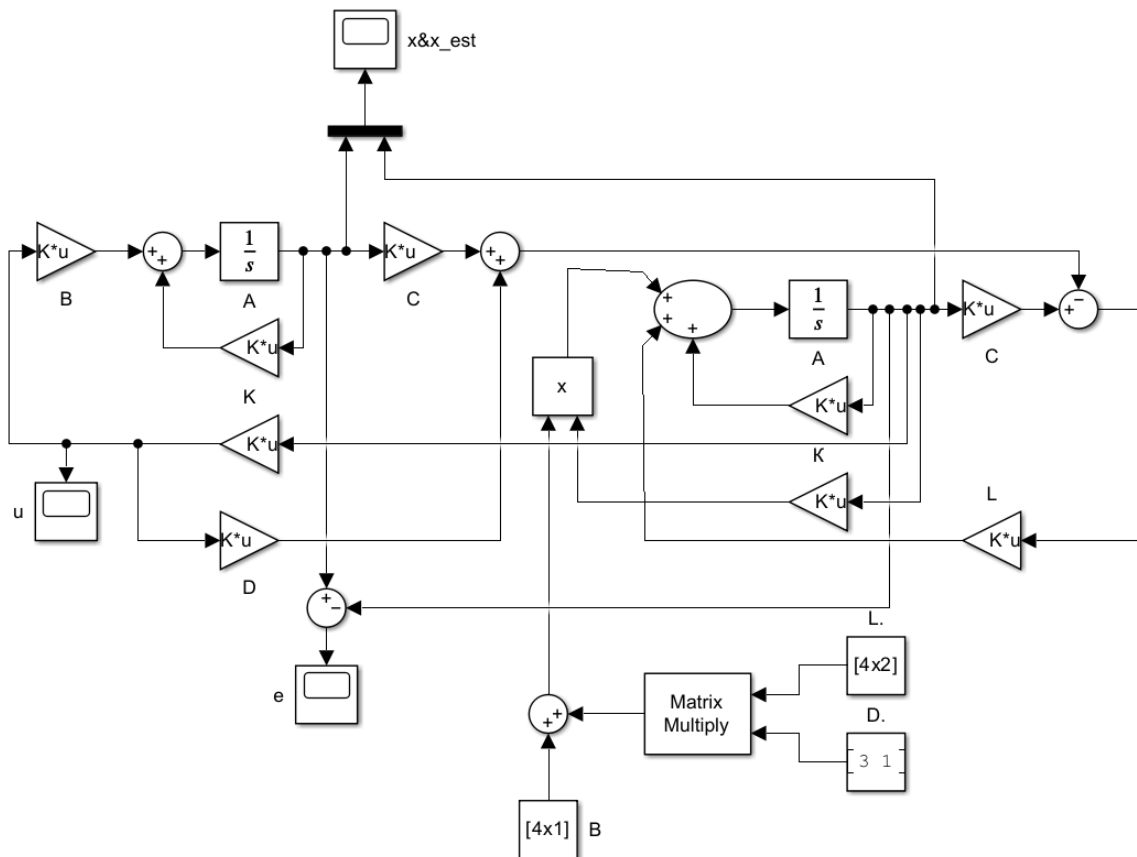


Рис. 34: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния и закона управления

Отслеживаем на одном графике  $x(t), \hat{x}(t)$ , на другом  $e(t)$  аналогично второму заданию. На третьем рассматриваем  $u(t)$ .

## Достижимые спектры и асимптотическая устойчивость

Для асимптотической устойчивости все числа в спектре должны иметь отрицательную действительную часть.

Система полностью управляема, поэтому спектр для матрицы регулятора можно задать любой. Пусть

$$\sigma(A + BK) = \{-1, -1, -1, -1\}$$

Система не полностью наблюдаема. Значит, ненаблюдаемое собственное число нужно обязательно использовать в желаемом спектре, иначе он будет недостижим. Пусть

$$\sigma(A + LC) = \{-4, -3, -3, -3\}$$

### Матрица регулятора

Синтезируем регулятор  $K$  аналогично заданию 1. Запишем полином, составим матрицу  $\Gamma_K$ , зададим  $Y_K$ , проверим ранг матрицы наблюдаемости пары  $(Y_K, \Gamma_K)$ . После чего решим уравнение Сильвестра относительно  $P$  и вычислим  $K$

$$(\lambda + 1)^4 = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 \Rightarrow \Gamma_K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix},$$

$$Y_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} \begin{bmatrix} Y_K \\ Y_K \Gamma_K \\ Y_K \Gamma_K^2 \\ Y_K \Gamma_K^3 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4,$$

$$AP - P\Gamma_K = BY_K \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 11.0046 & 17.8620 & 11.9525 & 3.0063 \\ -10.9986 & -17.6516 & -11.9451 & -2.9809 \\ 12.5015 & 18.2862 & 12.0475 & 3.0184 \\ 13.4953 & 18.2002 & 12.0549 & 2.9944 \end{bmatrix},$$

$$K = -Y_K P^{-1} \Rightarrow K = [-2.3888 \quad -1.7772 \quad 2.4930 \quad -1.8840];$$

Проверим корректность синтеза регулятора – определим собственные числа матрицы замкнутой системы  $(A + BK)$  и сравним с соответствующим желаемым спектром

$$\sigma(A + BK) = \sigma \begin{bmatrix} -2.7777 & -3.5544 & 0.9860 & -1.7679 \\ -9.5553 & -5.1087 & 7.9720 & -3.5358 \\ -18.3330 & -12.6631 & 16.9580 & -11.3037 \\ -17.1107 & -10.2174 & 19.9440 & -13.0716 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.9992 + 0.0008i \\ -0.9992 - 0.0008i \\ -1.0008 + 0.0008i \\ -1.0008 - 0.0008i \end{Bmatrix}$$

Отклонение в 0.08% будем считать погрешностью вычислений в MATLAB. Регулятор синтезирован корректно – получили желаемый спектр.

### Матрица коррекции наблюдателя

Найдем матрицу коррекции наблюдателя  $L$ , обеспечивающую желаемый спектр, аналогично второму заданию (поменялась только размерность выхода)

$$(\lambda + 3)^4 = \lambda^4 + 12\lambda^3 + 54\lambda^2 + 108\lambda + 81 \Rightarrow \Gamma_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -108 & -135 & -63 & -13 \end{bmatrix},$$

$$Y_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} [Y_L \quad \Gamma_L Y_L \quad \Gamma_L^2 Y_L \quad \Gamma_L^3 Y_L] =$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -108 & -135 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -108 & -135 & 1404 & 1647 \\ 0 & 0 & -108 & -135 & 1404 & 1647 & -11448 & -12906 \end{bmatrix} = 4,$$

$$\Gamma_L Q - Q A = Y_L C \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} -0.1175 & 0.0885 & -1.0492 & -1.0781 \\ -0.1944 & -0.0370 & 0.1944 & -0.0370 \\ 0.7595 & -0.6108 & 1.2405 & 1.3893 \\ -0.6643 & 1.8546 & 0.6646 & 1.8544 \end{bmatrix},$$

$$L = Q^{-1} Y_L \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 26040 & 28794 \\ 26032 & 28786 \\ 26035 & 28793 \\ -26037 & -28794 \end{bmatrix}$$

Проверим корректность синтеза наблюдателя

$$\sigma(A + LC) = \sigma \begin{bmatrix} 5510 & 52080 & 52080 & 109670 \\ 5510 & 52070 & 52060 & 109640 \\ 5510 & 52070 & 52070 & 109660 \\ -5510 & -52070 & -52070 & -109660 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.0001 \\ -3.0165 \pm 0.0298i \\ -2.9670 \end{Bmatrix}$$

Примем неточности за погрешность вычислений в MATLAB. Тогда, наблюдатель синтезирован корректно – желаемый спектр получен.

### Компьютерное моделирование

Для компьютерного моделирования воспользуемся схемой SIMULINK, представленной на рис. 34. Зададим в интеграторы такие начальные условия: для системы  $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$ , для наблюдателя  $\hat{x}(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$

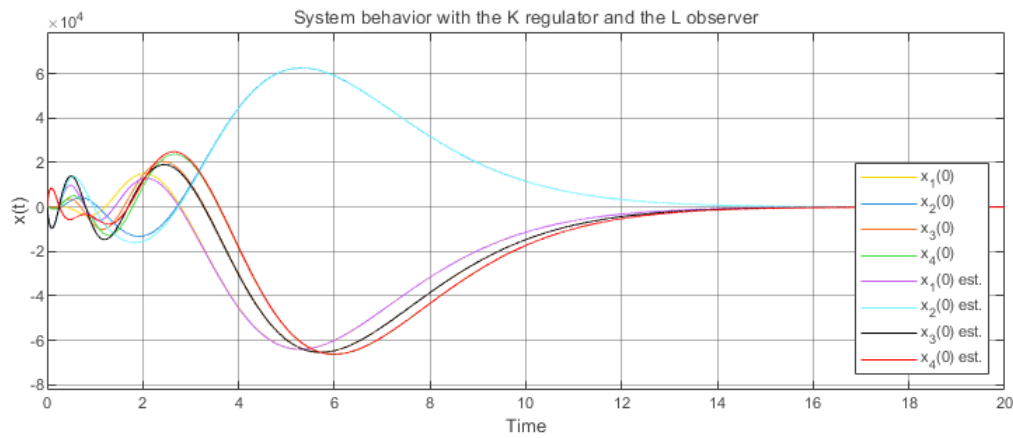


Рис. 35: Графики  $x(t), \hat{x}(t)$



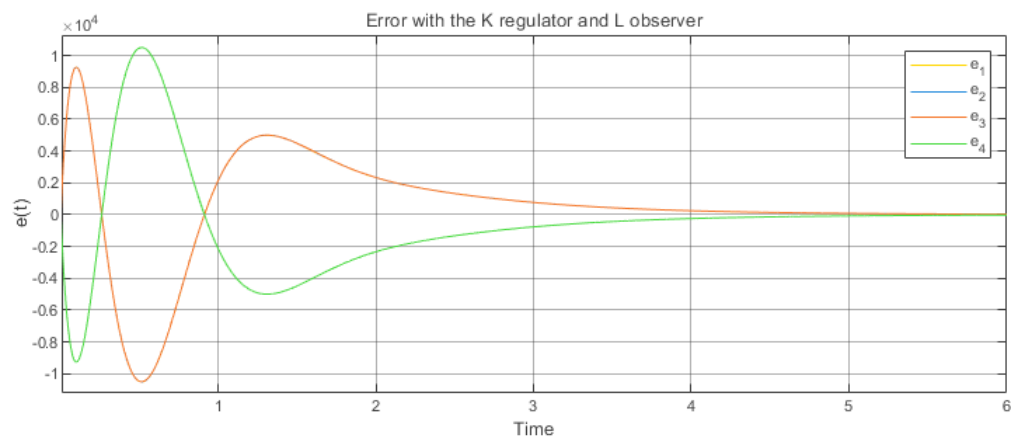


Рис. 36: График  $e(t)$

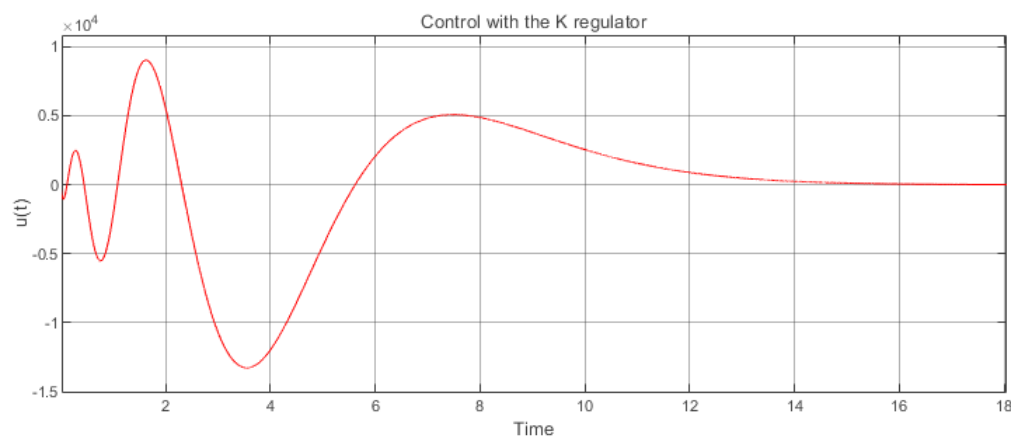


Рис. 37: График  $u(t)$

Проведем небольшие уточнения. Проверим начальные условия  $x(0), \hat{x}(0)$ , а также уберем один из графиков ошибки

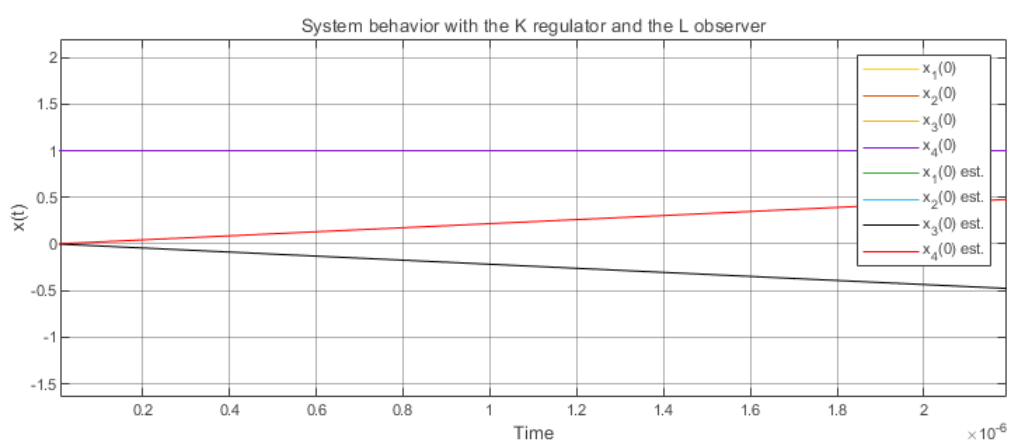


Рис. 38: Проверка начальных условий  $x(0), \hat{x}(0)$

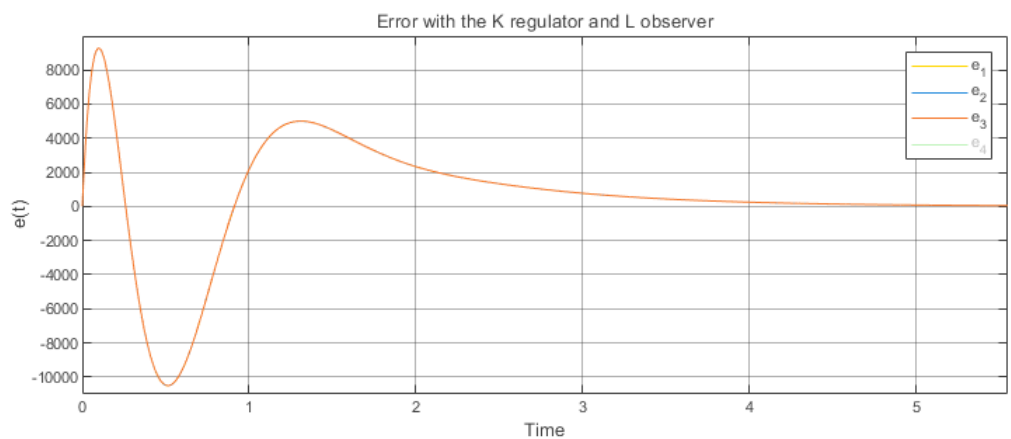


Рис. 39: График  $e(t)$  без  $e_4(t)$

Регулятор и наблюдатель выполнили свою задачу. Оценки координат сходятся к истинным со временем, что видно на рис. 35 (со временем остаются только 4 траектории из 8). Ошибка уходит в ноль. Система сходится к нулю, управления со временем нужно все меньше (см. рис. 37), пока оно уже будет совсем не нужно. Система исходит из заданных начальных условий – траектории накладываются друг на друга, поэтому видны не все координаты (см. рис. 38). Три ошибки идентичны, четвертая зеркальная (см. рис. 36, 39).

### Вывод

Система полностью управляема, стабилизируема, не полностью наблюдаема, но обнаруживаема. Были взяты достижимые спектры, далее получены матрицы регулятора и коррекции наблюдателя, которые приводят спектры к желаемым. В ходе компьютерного моделирования по построенной схеме было выяснено, что регулятор и наблюдатель выполняют свою задачу. Система стабилизируется к 0, наблюдатель повторяет траектории за системой. Ошибка сходится к нулю. Начальные условия соблюдены.

## Задание 4. Наблюдатель пониженного порядка

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

### Управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость, обнаруживаемость

Приведем систему к жордановой форме.  $J, B_J$  мы уже находили в задании 3

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix};$$

Все собственные числа управляемы, система полностью управляема и стабилизируема. Найдем  $C_J$  в базисе собственных векторов матрицы  $A$ . Программа MATLAB для задания 4 находится в приложении 4 на листинге 4

$$C_J = CP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Так как столбцов с нулевыми элементами в матрице  $C_J$  нет, то система полностью наблюдаема (все собственные числа наблюдаемы), а следовательно, обнаруживаема.

### Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния пониженного порядка и закона управления

Построим схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния пониженного порядка

$$\dot{\hat{z}} = \Gamma \hat{z} - Yy + (QB + YD)u, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y - Du \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

и закона управления  $u = K\hat{x}$ . Модальный регулятор  $K$  берем из задания 3. Параметры блока MATLAB Function расположены в приложении 5 на листинге 5

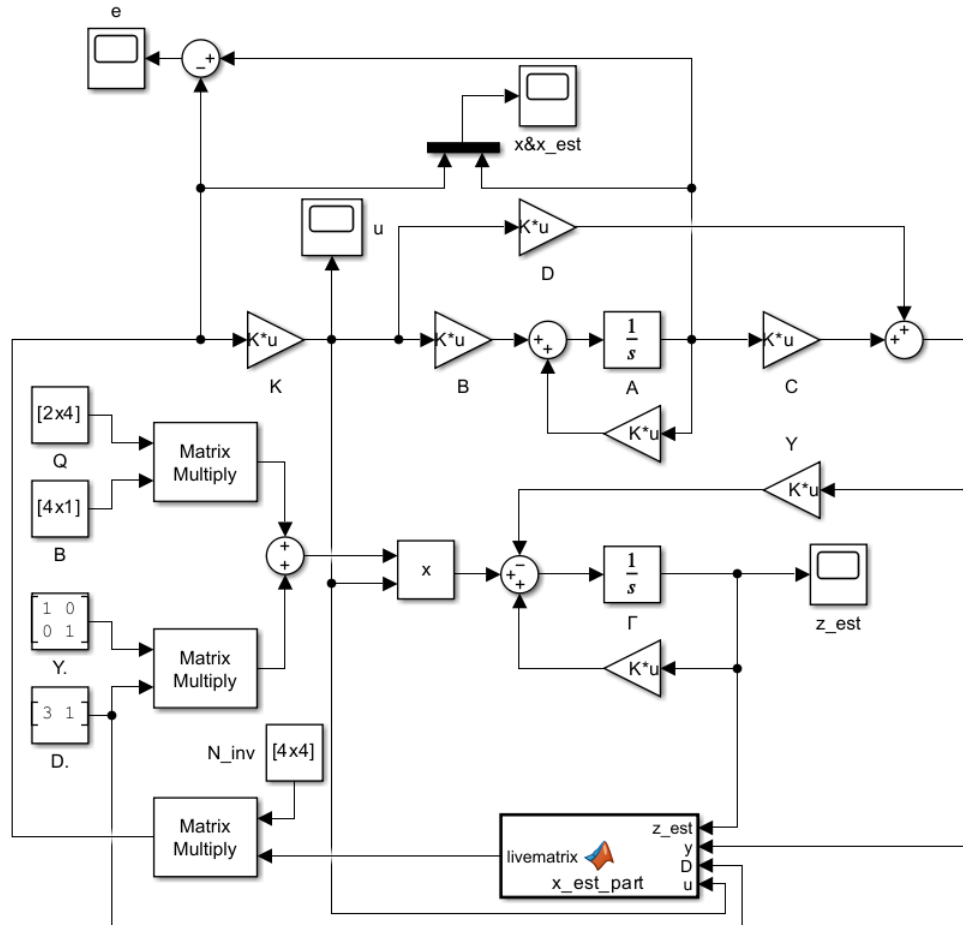


Рис. 40: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния пониженного порядка и закона управления

### Желаемый спектр матрицы наблюдателя пониженного порядка

Для начала определим размерности матриц  $\Gamma, Q, Y$ . Размерность выхода  $k = 2$  – это измеряемая часть. Порядок системы  $n = 4$ . Тогда

$$Q_{(n-k) \times n} \Rightarrow Q_{2 \times 4},$$

$$\Gamma_{(n-k) \times (n-k)} \Rightarrow \Gamma_{2 \times 2},$$

$$Y_{(n-k) \times k} \Rightarrow Y_{2 \times 2};$$

Так как система полностью наблюдаема, то можем задать любой спектр матрицы наблюдателя пониженного порядка  $\Gamma$ . Ограничение – асимптотическая устойчивость, то есть действительные части всех собственных чисел должны быть отрицательными. Пусть

$$\sigma(\Gamma) = \{-2, -2\} \Rightarrow \Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}[Y \quad \Gamma Y] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2;$$

### Синтез матрицы преобразования

Для синтеза матрицы преобразования нужно решить уравнение типа Сильвестра

$$\Gamma Q - QA = YC$$

Предоставим вычисления MATLAB. Получаем

$$Q = \begin{bmatrix} -0.0678 & 0.2378 & -0.1822 & -0.2622 \\ -0.0667 & 0.2667 & 0.0667 & -0.2333 \end{bmatrix}$$

Также найдем матрицу

$$N = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix},$$

обратная от которой необходима для вычисления  $\hat{x}$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0678 & 0.2378 & -0.1822 & -0.2622 \\ -0.0667 & 0.2667 & 0.0667 & -0.2333 \end{bmatrix},$$

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4.1538 & 0.1154 & -16.1538 & 18.1538 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4.4615 & -0.1538 & -18.4615 & 16.4615 \end{bmatrix};$$

## Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование, соответствующее схеме на рис. 40, с начальными условиями системы  $x(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  и наблюдателя  $\hat{z}(0) = [0 \ 0]^T$ . Зададим  $K = [-2.3888 \ -1.7772 \ 2.4930 \ -1.8840]$

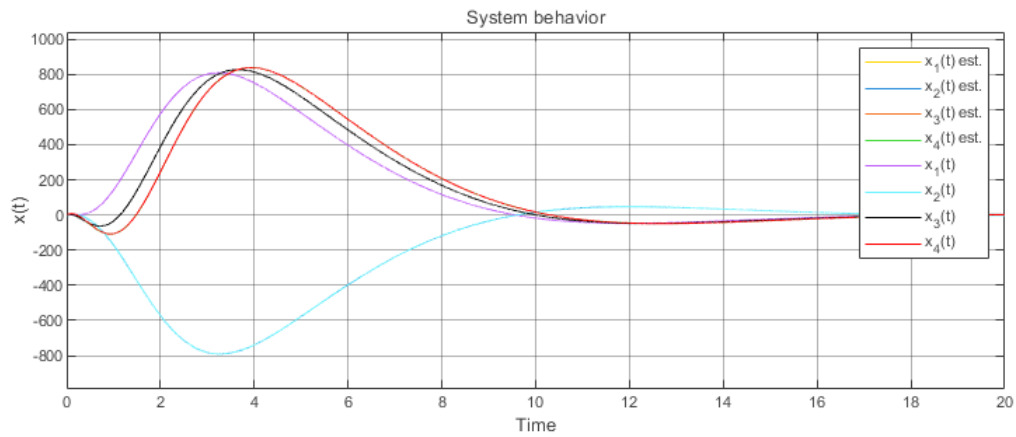


Рис. 41: Графики  $x(t), \hat{x}(t)$

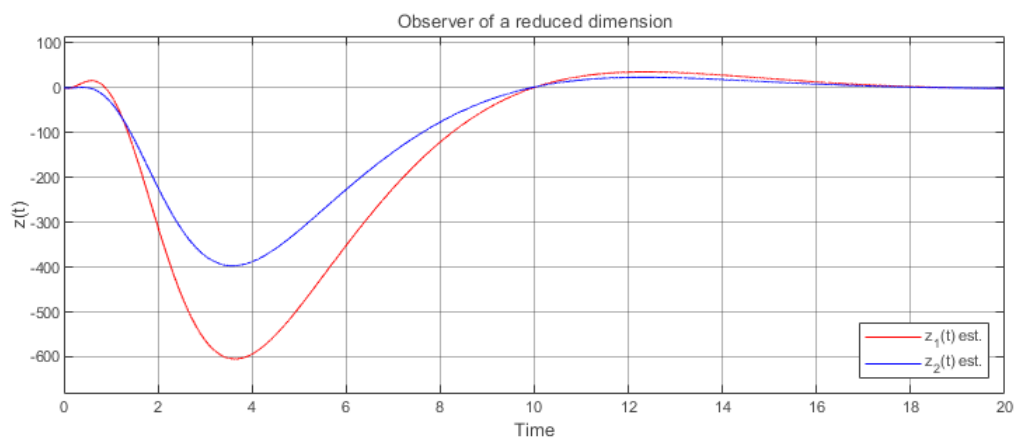


Рис. 42: График  $\hat{z}(t)$

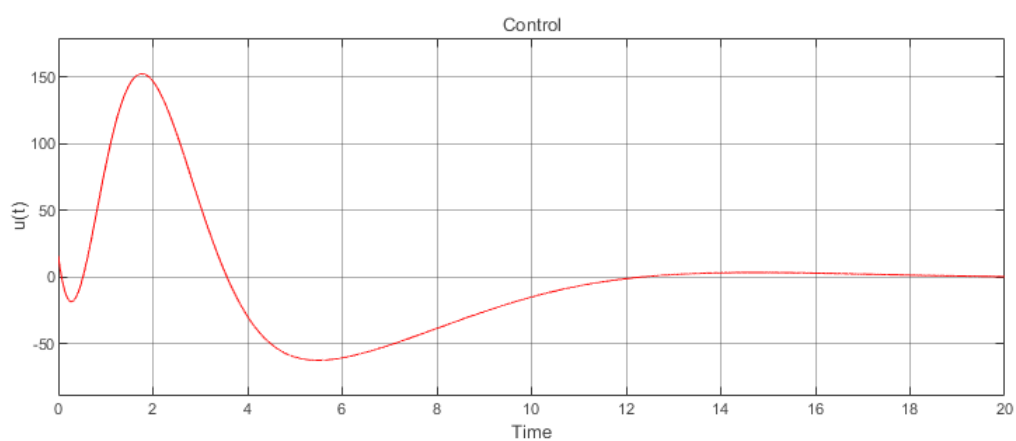


Рис. 43: График  $u(t)$

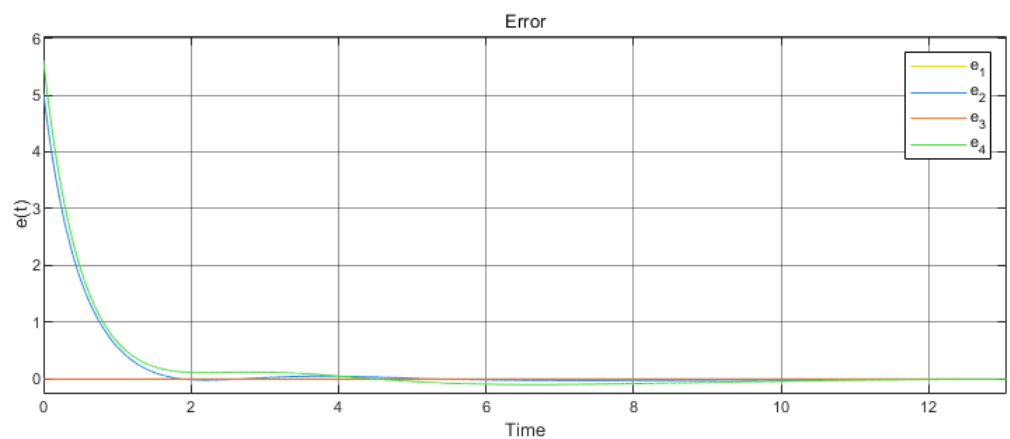


Рис. 44: График  $e(t)$

Проверим начальные условия

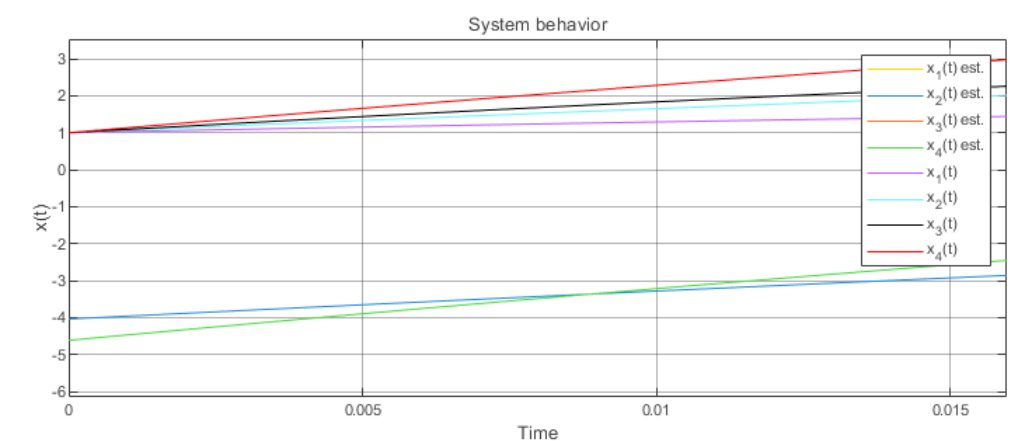


Рис. 45: Проверка начальных условий  $x(0), \hat{x}(0)$

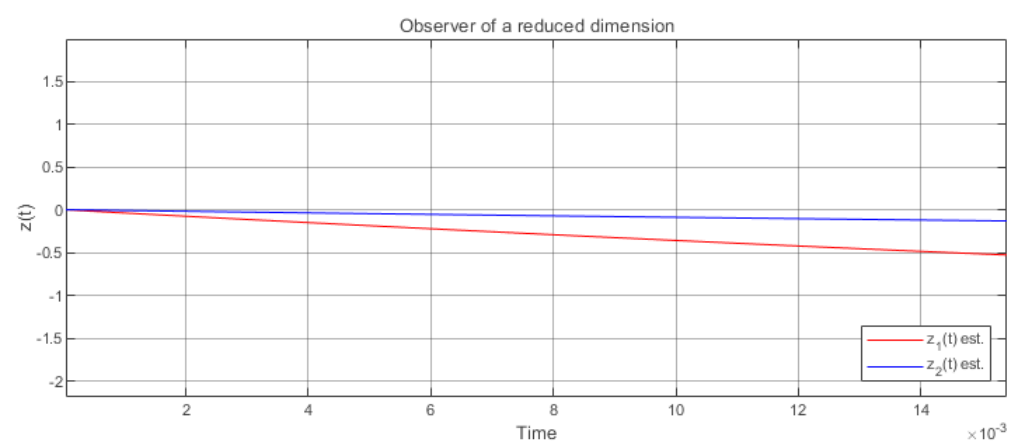


Рис. 46: Проверка начальных условий  $\hat{z}(0)$

## Вывод

Система полностью управляема, стабилизируема. Система полностью наблюдаема, обнаруживаема. Была найдена матрица преобразования на основании желаемого спектра матрицы наблюдателя пониженного порядка. Было выполнено компьютерное моделирование с начальными условиями и получены графики формируемого

регулятором управления  $u(t)$ , вектора состояния наблюдателя пониженной размерности  $\hat{z}(t)$ , сравнения  $x(t), \hat{x}(t)$ , а также график ошибки наблюдателя  $e(t)$ . Начальные условия соблюдены. Ошибка получилась наибольшей в начале, далее она плавно стремится к нулю. Графики  $x(t), \hat{x}(t)$  сошлись и со временем с некоторого момента  $t$  стремятся к нулю. Управления также со временем нужно меньше. График  $\hat{z}(t)$  со временем сходится к нулю.

## Общий вывод по работе

В данной лабораторной работе мы исследовали модальный регулятор, наблюдатель полного порядка, модальное управление по выходу и наблюдатель пониженного порядка. Мы определяли управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость и обнуживаемость систем. На основе этих данных мы задавали желаемые спектры и синтезировали матрицы. В конце каждого задания мы моделировали системы. Таким образом, мы убеждались, что наши вычисления и рассуждения верны.

## Приложения

### Приложение 1

```
% input data
A = [5 2 7; 2 1 2; -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
Pre(:,1) = P(:,1);
Pre(:,2) = imag(P(:,2));
Pre(:,3) = real(P(:,3));
Pre_inv = Pre^-1;
J_re = Pre_inv * A * Pre;
B_jre = Pre_inv * B;
disp(Pre);
disp(Pre_inv);
disp(J_re);
disp(B_jre);

% G matrices
G1 = [0 1 0; 0 0 1; -8 -12 -6];
Y1 = [1 0 0];
O1 = [Y1; Y1*G1; Y1*G1^2];
rank_O1 = rank(O1);
disp(O1);
disp(rank_O1);

G2 = [0 1 0; 0 0 1; -8000 -4440 -222];
Y2 = [1 0 0];
O2 = [Y2; Y2*G2; Y2*G2^2];
rank_O2 = rank(O2);
```

```

disp(O2);
disp(rank_O2);

G3 = [0 1 0; 0 0 1; -80 -48 -6];
Y3 = [1 0 0];
O3 = [Y3; Y3*G3; Y3*G3^2];
rank_O3 = rank(O3);
disp(O3);
disp(rank_O3);

% regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P1(3,3)
variable P2(3,3)
variable P3(3,3)
A*P1-P1*G1 == B*Y1;
A*P2-P2*G2 == B*Y2;
A*P3-P3*G3 == B*Y3;
cvx_end

K1 = -Y1*inv(P1);
disp(P1);
disp(K1);

K2 = -Y2*inv(P2);
disp(P2);
disp(K2);

K3 = -Y3*inv(P3);
disp(P3);
disp(K3);

% A+BK eigenvalues
ABK1 = A+B*K1;
ABK2 = A+B*K2;
ABK3 = A+B*K3;

ABK1_eig = eig(ABK1);
ABK2_eig = eig(ABK2);
ABK3_eig = eig(ABK3);

disp(ABK1);
disp(ABK1_eig);

disp(ABK2);
disp(ABK2_eig);

disp(ABK3);
disp(ABK3_eig);

```

Листинг 1: Программа для первого задания

## Приложение 2

```

% input data
A = [0 1 0 1;
     -26 -7 20 -11;

```



```

    0 1 -1 2;
    16 4 -14 8];
C = [-1 0 1 -1];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P_re(:,1) = real(P(:,1));
P_re(:,2) = imag(P(:,2));
P_re(:,3) = real(P(:,3));
P_re(:,4) = imag(P(:,4));
P_re_inv = P_re^-1;
J_re = P_re_inv * A * P_re;
C_jre = C * P_re;
disp(P_re);
disp(P_re_inv);
disp(J_re);
disp(C_jre);

% G matrices
Y = [1; 0; 0; 0];

G1 = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -16 -32 -24 -8];
U1 = [Y G1*Y G1^2*Y G1^3*Y];
disp(U1);
disp(rank(U1));
disp(eig(G1));

G2 = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -16000000 -8888000 -448440 -2222];
U2 = [Y G2*Y G2^2*Y G2^3*Y];
disp(U2);
disp(rank(U2));
disp(eig(G2));

G3 = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -260 -132 -49 -8];
U3 = [Y G3*Y G3^2*Y G3^3*Y];
disp(U3);
disp(rank(U3));
disp(eig(G3));

% observer synthesis
cvx_begin sdp
variable Q1(4,4)
variable Q2(4,4)
variable Q3(4,4)
G1*Q1-Q1*A == Y*C;
G2*Q2-Q2*A == Y*C;
G3*Q3-Q3*A == Y*C;
cvx_end

L1 = inv(Q1)*Y;
disp(Q1);
disp(L1);

L2 = inv(Q2)*Y;

```

```

disp(Q2);
disp(L2);

L3 = inv(Q3)*Y;
disp(Q3);
disp(L3);

% A+LC eigenvalues
ALC1 = A+L1*C;
ALC2 = A+L2*C;
ALC3 = A+L3*C;

ALC1_eig = eig(ALC1);
ALC2_eig = eig(ALC2);
ALC3_eig = eig(ALC3);

disp(ALC1);
disp(ALC1_eig);

disp(ALC2);
disp(ALC2_eig);

disp(ALC3);
disp(ALC3_eig);

```

Листинг 2: Программа для второго задания

### Приложение 3

```

% input data
A = [2 0 -4 2;
     0 2 -2 4;
     -4 -2 2 0;
     2 4 0 2];
B = [2;4;6;8];
C = [-2 2 2 2;
     2 0 0 2];
D = [3;1];

% A eigenvalues
disp(eig(A));

% controllability
U = [B A*B A^2*B A^3*B];
disp(rank(U));

% observability
V = [C;C*A;C*A^2;C*A^3];
disp(rank(V));

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P_inv = inv(P);
disp(P);
disp(J);
disp(P_inv);

```

```

B_new = P_inv*B;
C_new = C*P;
disp(B_new);
disp(C_new);

% G control
G_K = [0 1 0 0;
        0 0 1 0;
        0 0 0 1;
        -1 -4 -6 -4];
Y_K = [1 0 0 0];
O = [Y_K; Y_K*G_K; Y_K*G_K^2; Y_K*G_K^3];
disp(O);
disp(rank(O));

% regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P(4,4)
A*P-P*G_K == B*Y_K;
cvx_end

K = -Y_K*inv(P);
disp(P);
disp(K);

% A+BK eigenvalues
ABK = A+B*K;
disp(ABK);
disp(eig(ABK));

% G observe
G_L = [0 1 0 0;
        0 0 1 0;
        0 0 0 1;
        -108 -135 -63 -13];
Y_L = [1 0;
        0 1;
        0 0;
        0 0];
U = [Y_L G_L*Y_L G_L^2*Y_L G_L^3*Y_L];
disp(U);
disp(rank(U));

% observer synthesis
cvx_begin sdp
variable Q(4,4)
G_L*Q-Q*A == Y_L*C;
cvx_end

L = inv(Q)*Y_L;
disp(Q);
disp(L);

% A+LC eigenvalues
ALC = A+L*C;
disp(ALC);
disp(eig(ALC));

```

## Приложение 4

```
% input data
A = [2 0 -4 2;
     0 2 -2 4;
     -4 -2 2 0;
     2 4 0 2];
B = [2;4;6;8];
C = [0 0 1 0;
     1 0 0 0];
D = [3;1];

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P_inv = inv(P);
disp(P);
disp(J);
disp(P_inv);

B_new = P_inv*B;
C_new = C*P;
disp(B_new);
disp(C_new);

% G 2x2, Q 2x4, Y 2x2
G = [-2 1; 0 -2];
Y = [1 0; 0 1];
U = [Y G*Y];
disp(U);
disp(rank(U));

% observer synthesis
cvx_begin sdp
variable Q(2,4)
G*Q-Q*A == -Y*C;
cvx_end
disp(Q);

N = [C; Q];
disp(N);

N_inv = inv(N);
disp(N_inv);
```

Листинг 4: Программа для четвертого задания

## Приложение 5

```
function livematrix = x_est_part(z_est, y, D, u)
livematrix = [y - D * u; z_est];
end
```

Листинг 5: Параметры блока MATLAB Function (задание 4)