

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»



**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №Е**  
**ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО**  
**УПРАВЛЕНИЯ»**  
**ТЕМА «УПРАВЛЕНИЕ МНОГОКАНАЛЬНОЙ**  
**СИСТЕМОЙ»**

Вариант №2

Преподаватель:  
Пашенко А. В.

Выполнил:  
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР  
Группа: R3341  
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург  
2025

# Содержание

<b>1</b>	<b>Задание 1. Исследование свойств многоканальной системы</b>	<b>2</b>
1.1	Собственные числа матрицы системы . . . . .	2
1.2	Передаточная матрица многоканальной системы, ее нули и полюса . .	2
1.3	Структурные свойства многоканальной системы . . . . .	2
1.4	Временные характеристики системы . . . . .	3
1.5	Графическое представление временных характеристик . . . . .	5
1.6	Частотные характеристики системы . . . . .	6
1.7	Графическое представление частотных характеристик . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Задание 2. Синтез следящего управления в условиях внешних воз-</b>	<b>10</b>
	<b>мущений для многоканальной системы</b>	
2.1	Структурные свойства многоканальной системы . . . . .	11
2.2	Передаточные матрицы многоканальной системы . . . . .	11
2.3	Матрицы и начальные условия генератора внешнего воздействия . . .	12
<b>3</b>	<b>Общий вывод по работе</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Приложение А</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Приложение Б</b>	<b>17</b>

## Задание 1. Исследование свойств многоканальной системы

Рассмотрим многоканальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = 0;$$

Программа для задания находится в приложении А на листинге 1.

### Собственные числа матрицы системы

Определим собственные числа  $\lambda_i$  матрицы системы  $A$

$$\sigma[A] = \{1, 1\}$$

Получили кратные неустойчивые собственные числа.

### Передающая матрица многоканальной системы, ее нули и полюса

Определим передаточную матрицу многоканальной системы по формуле

$$W(s) = C[sI - A]^{-1}B + D$$

Получаем

$$W(s) = \begin{bmatrix} \frac{-s-11}{s^2-2s+1} & \frac{7s-4}{s^2-2s+1} \\ \frac{9s-13}{s^2-2s+1} & \frac{1}{s^2-2s+1} \end{bmatrix}$$

Нули и полюса квадратной передаточной матрицы определяются из корней числителя и знаменателя определителя передаточной матрицы. Найдем определитель

$$\det[W(s)] = \frac{-63}{s^2-2s+1}$$

Так как числитель не зависит от  $s$ , то нули  $n_i$  отсутствуют. Определим полюса  $\lambda_i$

$$s^2 - 2s + 1 = 0, \quad (s-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

Полюса совпали с собственными числами матрицы  $A$ .

### Структурные свойства многоканальной системы

Структурные свойства многоканальной системы определяются таким же образом, как и для одноканальной. Найдем ЖНФ матрицы  $A$ , переведем  $B, C$  в базис собственных векторов  $A$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_J = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix};$$

Также найдем матрицу управляемости по выходу и вычислим ее ранг

$$U_{out} = [CU \quad D], \quad U = [B \quad AB] \Rightarrow U_{out} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -13 & 10 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{rank}[U_{out}] = 2;$$

Таким образом,

- Система полностью управляема по состоянию и стабилизируема
- Система полностью наблюдаема и обнаруживаема
- Система полностью управляема по выходу

## Временные характеристики системы

Для аналитического определения весовых функций воспользуемся обратным преобразованием Лапласа

$$w_k(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W_{l,m}(s)\}$$

Нам пригодятся эти формулы

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-a)} \right\} = e^{at}, \quad (1)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \right\} = t^n e^{at}; \quad (2)$$

Выведем  $w_1(t)$

$$w_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W_{1,1}(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-s-11}{s^2-2s+1} \right\}$$

Упростим передаточную функцию  $W_{1,1}(s)$

$$W_{1,1}(s) = \frac{-s-11}{s^2-2s+1} = -\frac{s-1+12}{(s-1)^2} = -\frac{s-1}{(s-1)^2} - \frac{12}{(s-1)^2} = -1 \cdot \frac{1}{(s-1)} - 12 \cdot \frac{1}{(s-1)^2}$$

Воспользуемся выражениями (1), (2) и свойствами линейности преобразования Лапласа и вычислим  $w_1(t)$

$$w_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -1 \cdot \frac{1}{(s-1)} - 12 \cdot \frac{1}{(s-1)^2} \right\} = -\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)} \right\} - 12\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} \right\},$$

$$w_1(t) = -e^t - 12te^t;$$

Найдем  $w_2(t)$

$$w_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W_{1,2}\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{7s-4}{(s-1)^2} \right\}$$

Упростим передаточную функцию  $W_{1,2}(s)$

$$W_{1,2}(s) = \frac{7s-4}{(s-1)^2} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-1)^2} = \frac{As-A+B}{(s-1)^2},$$

$$As-A+B=7s-4 \Rightarrow \begin{cases} A=7, \\ -A+B=-4, \end{cases} \Rightarrow B=-4+A=-4+7=3,$$

$$W_{1,2}(s) = \frac{7}{(s-1)} + \frac{3}{(s-1)^2} = 7 \cdot \frac{1}{(s-1)} + 3 \cdot \frac{1}{(s-1)^2}$$

Таким образом, аналогично решению с  $w_1(t)$ , получаем  $w_2(t)$

$$w_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ 7 \cdot \frac{1}{(s-1)} + 3 \cdot \frac{1}{(s-1)^2} \right\} = 7e^t + 3te^t$$

Определим  $w_3(t)$

$$w_3(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W_{2,1}(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{9s-13}{(s-1)^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ 9 \cdot \frac{1}{(s-1)} - 4 \cdot \frac{1}{(s-1)^2} \right\} = 9e^t - 4te^t$$

Выведем  $w_4(t)$

$$w_4(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W_{2,2}(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} \right\} = te^t$$

Итого имеем

$$\begin{aligned} w_1(t) &= -e^t - 12te^t, \\ w_2(t) &= 7e^t + 3te^t, \\ w_3(t) &= 9e^t - 4te^t, \\ w_4(t) &= te^t; \end{aligned}$$

Перейдем к переходным функциям. Весовая функция является производной от переходной функции (отличие образа Лапласа в  $s$  раз). Значит для поиска переходных функций нужно брать интегралы

$$h_k(t) = \int_0^t w_k(\tau) d\tau$$

Нам понадобится формула интегрирования по частям

$$u = u(x), \quad v = v(x) : \int u dv = uv - \int v du;$$

Вычислим  $h_1(t)$

$$h_1(t) = \int_0^t w_1(\tau) d\tau = \int_0^t (-e^\tau - 12\tau e^\tau) d\tau = - \int_0^t e^\tau d\tau - 12 \int_0^t \tau e^\tau d\tau,$$

$$\int_0^t e^\tau d\tau = e^\tau \Big|_0^t = e^t - 1,$$

$$\int_0^t \tau e^\tau d\tau = \left[ \begin{array}{ll} u = \tau & v = e^\tau \\ du = d\tau & dv = e^\tau d\tau \end{array} \right] = \tau e^\tau \Big|_0^t - \int_0^t e^\tau d\tau = te^t - e^t + 1,$$

$$h_1(t) = - (e^t - 1) - 12 (te^t - e^t + 1) = -12te^t + 11e^t - 11;$$

Найдем  $h_2(t)$

$$h_2(t) = \int_0^t w_2(\tau) d\tau = \int_0^t (7e^\tau + 3\tau e^\tau) d\tau = 7 \int_0^t e^\tau d\tau + 3 \int_0^t \tau e^\tau d\tau$$

Видим вычисленные ранее интегралы. Подставим и получим

$$h_2(t) = 7(e^t - 1) + 3(te^t - e^t + 1) = 3te^t + 4e^t - 4$$

Вычислим  $h_3(t)$

$$h_3(t) = \int_0^t w_3(\tau) d\tau = \int_0^t (9e^\tau - 4\tau e^\tau) d\tau = 9 \int_0^t e^\tau d\tau - 4 \int_0^t \tau e^\tau d\tau$$

Аналогично  $h_1(t), h_2(t)$

$$h_3(t) = 9(e^t - 1) - 4(te^t - e^t + 1) = -4te^t + 13e^t - 13$$

Найдем  $h_4(t)$

$$h_4(t) = \int_0^t w_4(\tau) d\tau = \int_0^t \tau e^\tau d\tau = te^t - e^t + 1$$

Таким образом, имеем

$$h_1(t) = -12te^t + 11e^t - 11,$$

$$h_2(t) = 3te^t + 4e^t - 4,$$

$$h_3(t) = -4te^t + 13e^t - 13,$$

$$h_4(t) = te^t - e^t + 1;$$

### Графическое представление временных характеристик

Построим графики  $w_i(t), h_i(t)$  по рассчитанным ранее характеристикам. Весовые функции представлены на рис. 1, переходные на рис. 2

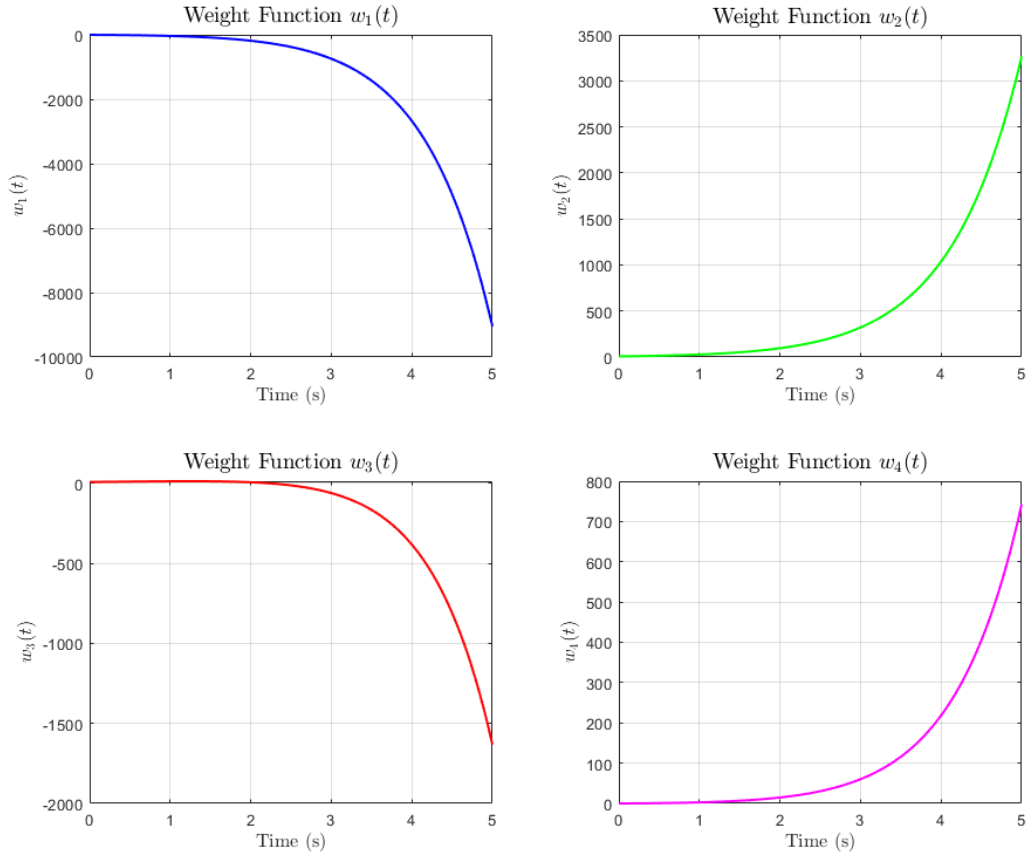


Рис. 1: Графики весовых функций  $w_k(t)$

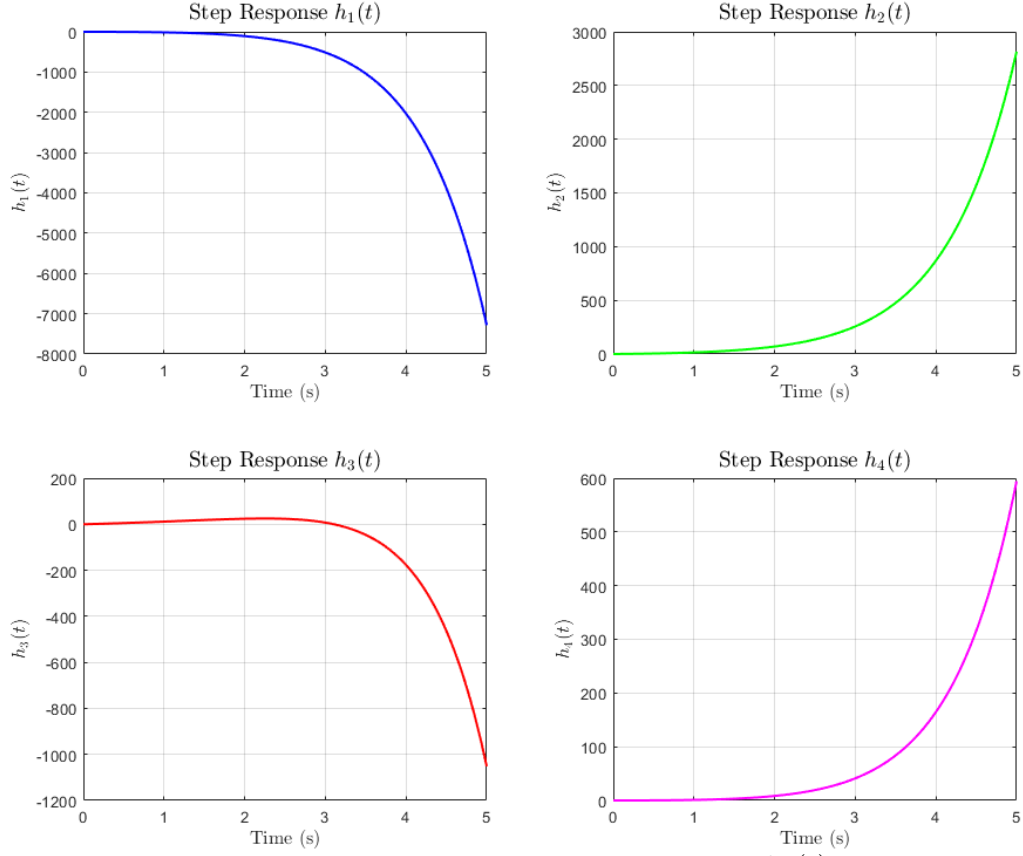


Рис. 2: Графики переходных функций  $h_k(t)$

### Частотные характеристики системы

Выведем аналитические выражения частотных характеристик системы, таких как АЧХ, ФЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ. АЧХ находим по формуле

$$A_k(\omega) = |W_{l,m}(i\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2 \{W_{l,m}(i\omega)\} + \text{Im}^2 \{W_{l,m}(i\omega)\}}$$

Найдем  $A_1(\omega)$

$$A_1(\omega) = |W_{1,1}(i\omega)| = \left| \frac{-i\omega - 11}{(i\omega - 1)^2} \right|,$$

Приведем  $W_{1,1}(i\omega)$  к виду суммы реальной и мнимой частей. Домножим числитель и знаменатель на комплексно сопряженное к знаменателю число. Упростим выражение и выразим действительную и мнимую части. В конце вычислим  $A_1(\omega)$

$$W_{1,1}(i\omega) = \frac{(-i\omega - 11)(i\omega + 1)^2}{(i\omega - 1)^2(i\omega + 1)^2} = \frac{13\omega^2 - 11 + (\omega^3 - 23\omega)i}{\omega^4 + 2\omega^2 + 1} = \frac{13\omega^2 - 11}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{\omega^3 - 23\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i,$$

$$A_1(\omega) = \sqrt{\left(\frac{13\omega^2 - 11}{(\omega^2 + 1)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega^3 - 23\omega}{(\omega^2 + 1)^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{\omega^6 + 123\omega^4 + 243\omega^2 + 121}}{(\omega^2 + 1)^2};$$

Вычислим оставшиеся  $A_k(\omega)$  аналогично. Сначала приведем  $W_{l,m}(i\omega)$  к нужному виду

$$W_{1,2}(i\omega) = \frac{(7i\omega - 4)(i\omega + 1)^2}{(i\omega - 1)^2(i\omega + 1)^2} = \frac{18\omega^2 - 4}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{-7\omega^3 + 15\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i,$$

$$W_{2,1}(i\omega) = \frac{(9i\omega - 13)(i\omega + 1)^2}{(i\omega - 1)^2(i\omega + 1)^2} = \frac{31\omega^2 - 13}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{-9\omega^3 + 35\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i,$$

$$W_{2,2}(i\omega) = \frac{(i\omega + 1)^2}{(i\omega - 1)^2(i\omega + 1)^2} = \frac{-\omega^2 + 1}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{2\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i;$$

Запишем оставшиеся  $A_k(\omega)$

$$A_2(\omega) = |W_{1,2}(i\omega)| = \left| \frac{18\omega^2 - 4}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{-7\omega^3 + 15\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i \right|,$$

$$A_3(\omega) = |W_{2,1}(i\omega)| = \left| \frac{31\omega^2 - 13}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{-9\omega^3 + 35\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i \right|,$$

$$A_4(\omega) = |W_{2,2}(i\omega)| = \left| \frac{-\omega^2 + 1}{(\omega^2 + 1)^2} + \frac{2\omega}{(\omega^2 + 1)^2}i \right|;$$

Вычислим АЧХ

$$A_2(\omega) = \frac{\sqrt{(18\omega^2 - 4)^2 + (-7\omega^3 + 15\omega)^2}}{(\omega^2 + 1)^2} = \frac{\sqrt{49\omega^6 + 114\omega^4 + 81\omega^2 + 16}}{(\omega^2 + 1)^2},$$

$$A_3(\omega) = \frac{\sqrt{(31\omega^2 - 13)^2 + (-9\omega^3 + 35\omega)^2}}{(\omega^2 + 1)^2} = \frac{\sqrt{81\omega^6 + 331\omega^4 + 419\omega^2 + 169}}{(\omega^2 + 1)^2},$$

$$A_4(\omega) = \frac{\sqrt{(-\omega^2 + 1)^2 + (2\omega)^2}}{(\omega^2 + 1)^2} = \frac{\omega^2 + 1}{(\omega^2 + 1)^2} = \frac{1}{\omega^2 + 1};$$

ЛАЧХ ищется по формуле

$$L_k(\omega) = 20 \log_{10} (A_k(\omega))$$

Запишем все  $L_k(\omega)$

$$L_1(\omega) = 20 \log_{10} (A_1(\omega)) = 20 \log_{10} \left( \frac{\sqrt{\omega^6 + 123\omega^4 + 243\omega^2 + 121}}{(\omega^2 + 1)^2} \right),$$

$$L_2(\omega) = 20 \log_{10} (A_2(\omega)) = 20 \log_{10} \left( \frac{\sqrt{49\omega^6 + 114\omega^4 + 81\omega^2 + 16}}{(\omega^2 + 1)^2} \right),$$

$$L_3(\omega) = 20 \log_{10} (A_3(\omega)) = 20 \log_{10} \left( \frac{\sqrt{81\omega^6 + 331\omega^4 + 419\omega^2 + 169}}{(\omega^2 + 1)^2} \right),$$

$$L_4(\omega) = 20 \log_{10} (A_4(\omega)) = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{\omega^2 + 1} \right);$$

Таким образом, пользуясь свойствами логарифмов

$$L_1(\omega) = 10 \log_{10} (\omega^6 + 123\omega^4 + 243\omega^2 + 121) - 40 \log_{10} (\omega^2 + 1),$$

$$L_2(\omega) = 10 \log_{10} (49\omega^6 + 114\omega^4 + 81\omega^2 + 16) - 40 \log_{10} (\omega^2 + 1),$$

$$L_3(\omega) = 10 \log_{10} (81\omega^6 + 331\omega^4 + 419\omega^2 + 169) - 40 \log_{10} (\omega^2 + 1),$$

$$L_4(\omega) = -20 \log_{10} (\omega^2 + 1);$$



ФЧХ ищется по формуле

$$\varphi_k(\omega) = \arctan \left( \frac{\operatorname{Im} \{W_{l,m}(i\omega)\}}{\operatorname{Re} \{W_{l,m}(i\omega)\}} \right)$$

У всех  $W_{l,m}(i\omega)$  одинаковые знаменатели у действительных и мнимых частей. При делении мнимой части на действительную знаменатели будут сокращаться. Останутся только отношения числителей. Таким образом, запишем  $\varphi_k$

$$\begin{aligned} \varphi_1(\omega) &= \arctan \left( \frac{\operatorname{Im}_{\text{ч}} \{W_{1,1}(i\omega)\}}{\operatorname{Re}_{\text{ч}} \{W_{1,1}(i\omega)\}} \right) = \arctan \left( \frac{\omega^3 - 23\omega}{13\omega^2 - 11} \right), \\ \varphi_1(\omega) &= \arctan \left( \frac{\operatorname{Im}_{\text{ч}} \{W_{1,2}(i\omega)\}}{\operatorname{Re}_{\text{ч}} \{W_{1,2}(i\omega)\}} \right) = \arctan \left( \frac{-7\omega^3 + 15\omega}{18\omega^2 - 4} \right), \\ \varphi_1(\omega) &= \arctan \left( \frac{\operatorname{Im}_{\text{ч}} \{W_{2,1}(i\omega)\}}{\operatorname{Re}_{\text{ч}} \{W_{2,1}(i\omega)\}} \right) = \arctan \left( \frac{-9\omega^3 + 35\omega}{31\omega^2 - 13} \right), \\ \varphi_1(\omega) &= \arctan \left( \frac{\operatorname{Im}_{\text{ч}} \{W_{2,2}(i\omega)\}}{\operatorname{Re}_{\text{ч}} \{W_{2,2}(i\omega)\}} \right) = \arctan \left( \frac{2\omega}{-\omega^2 + 1} \right); \end{aligned}$$

ЛФЧХ имеют такие же аналитические выражения, как и ФЧХ, только вместо частот  $\omega$  используется логарифмическая шкала  $\log_{10}(\omega)$ .

### Графическое представление частотных характеристик

Построим графики по рассчитанным ранее характеристикам

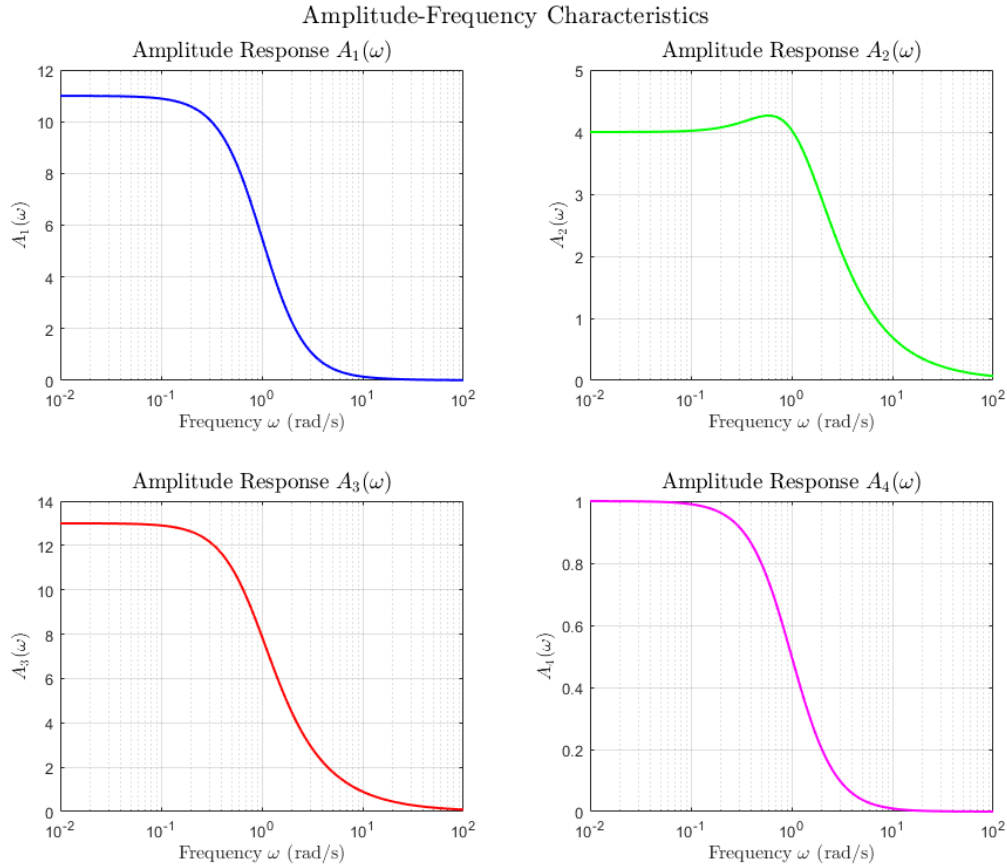


Рис. 3: Графики АЧХ  $A_k(\omega)$

### Logarithmic Amplitude-Frequency Characteristics

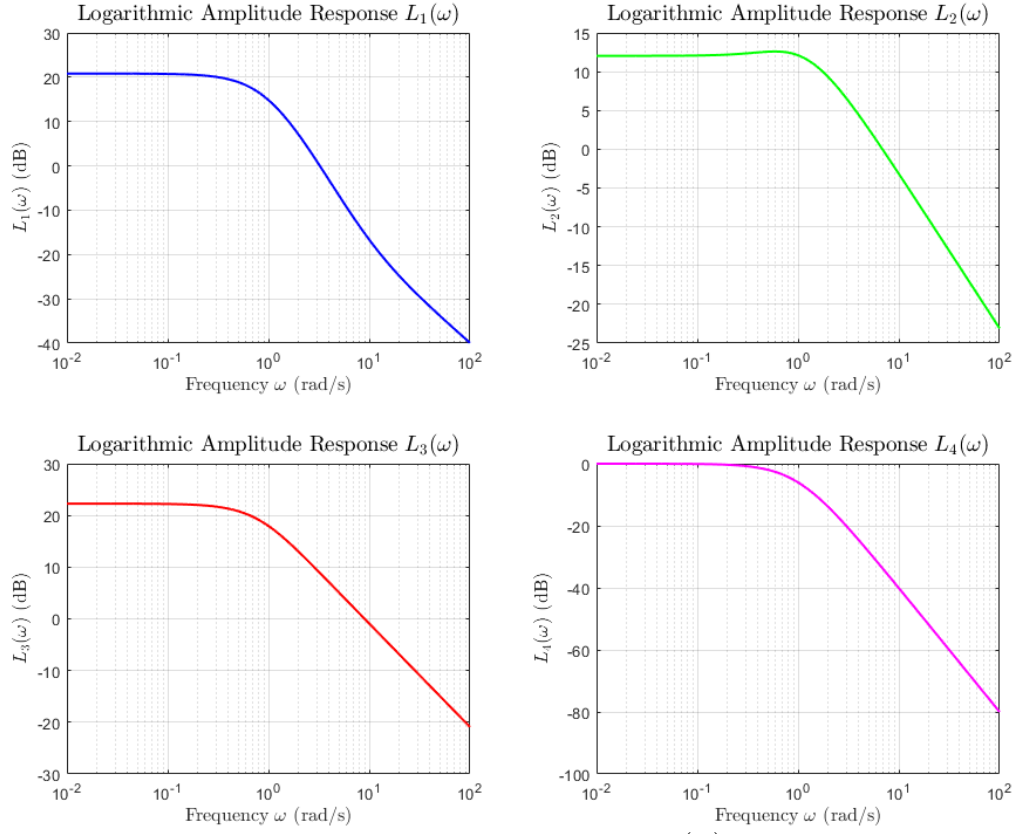


Рис. 4: Графики ЛАЧХ  $L_k(\omega)$

### Phase-Frequency Characteristics

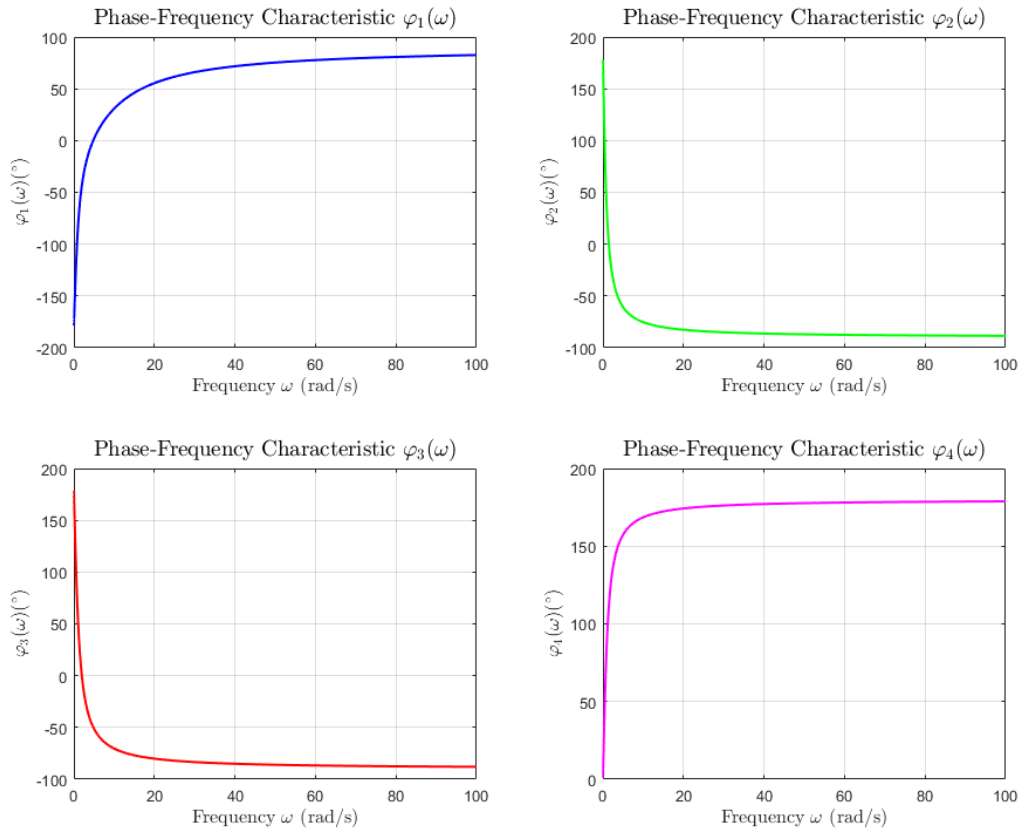
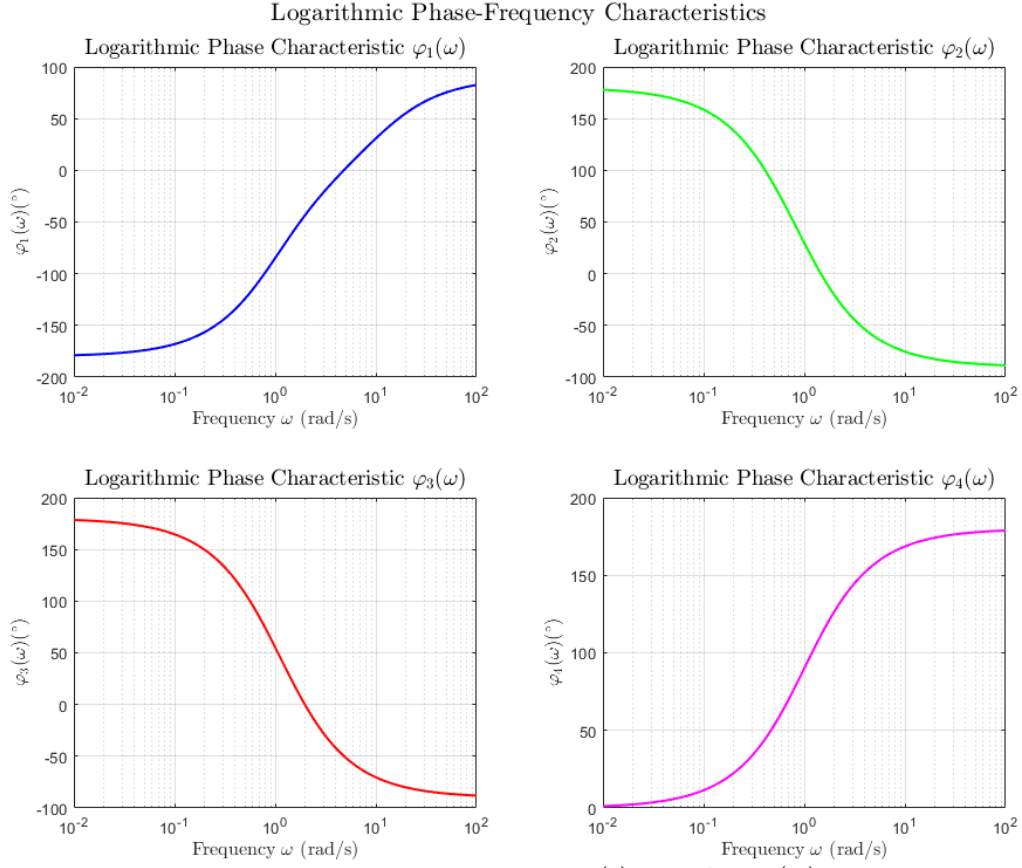


Рис. 5: Графики ФЧХ  $\varphi_k(t)$



Результаты похожи на апериодические звенья 2-го порядка.

## Задание 2. Синтез следящего управления в условиях внешних возмущений для многоканальной системы

Рассмотрим многоканальную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f_1, \\ z = C_z x + D_z u - g, \\ y = Cx + Du + D_f f_2, \end{cases} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

при

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_f &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ f_1(t) &= \begin{bmatrix} 9 \sin(3t) \\ 3 \cos(2t) \end{bmatrix}, \quad f_2(t) = \begin{bmatrix} 6 \cos(2t) \\ 8 \sin(3t) \end{bmatrix}, \quad g(t) = \begin{bmatrix} 3 \cos(4t) \\ 6 \sin(4t) \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

К измерению доступны только величины  $y(t), g(t)$ . Программа находится в приложении Б на листинге 2.

## Структурные свойства многоканальной системы

В первом задании уже находили ЖНФ матрицы  $A$  и соответствующие ей  $B_J, C_{J_y}$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_J = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, C_{J_y} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix};$$

Найдем  $C_{J_z}$

$$A = PJP^{-1}, C_{J_z} = C_z \cdot P \Rightarrow C_{J_z} = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Найдем  $U_{out_y}, U_{out_z}$

$$U = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix},$$

$$U_{out_y} = \begin{bmatrix} CU & D \end{bmatrix}, U_{out_y} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & -13 & 10 & -2 & 0 \\ 9 & 0 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}[U_{out_y}] = 2,$$

$$U_{out_z} = \begin{bmatrix} C_z U & D_z \end{bmatrix}, U_{out_z} = \begin{bmatrix} -2 & 14 & -26 & 20 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}[U_{out_z}] = 2;$$

Таким образом,

- Система полностью управляема по состоянию и стабилизируема,
- Система полностью управляема по выходу  $y(t)$ ,
- Система полностью управляема по виртуальному (регулируемому) выходу  $z(t)$ ,
- Система полностью наблюдаема и обнаруживаема относительно выхода  $y(t)$ ,
- Система полностью наблюдаема и обнаруживаема относительно виртуального (регулируемого) выхода  $z(t)$ ;

## Передаточные матрицы многоканальной системы

Составим передаточную матрицу многоканальной системы от управляющих воздействий  $u(t)$  к выходу  $y(t)$

$$W_y(s) = C[sI - A]^{-1}B + D,$$

$$W_y(s) = \begin{bmatrix} \frac{-2s^2 + 3s - 13}{s^2 - 2s + 1} & \frac{7s - 4}{s^2 - 2s + 1} \\ \frac{9s - 13}{s^2 - 2s + 1} & \frac{s^2 - 2s + 1}{s^2 - 2s + 1} \end{bmatrix};$$

Проверим на вырожденность

$$\det[W_y(s)] = \frac{-2s^2 + 3s - 78}{s^2 - 2s + 1} \neq 0$$

Матрица  $W_y(s)$  невырожденная. Составим аналогично  $W_z(s)$  к выходу  $z(t)$

$$W_z(s) = C_z[sI - A]^{-1}B + D_z,$$

$$W_z(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s^2 - 6s - 20}{s^2 - 2s + 1} & \frac{14s - 8}{s^2 - 2s + 1} \\ \frac{-4}{s - 1} & \frac{s}{s - 1} \end{bmatrix};$$

Проверим на вырожденность

$$\det[W_z(s)] = \frac{2s^2 - 4s + 32}{s^2 - 2s + 1} \neq 0$$

Матрица  $W_z(s)$  невырожденная.

## Матрицы и начальные условия генератора внешнего воздействия

Определим матрицы  $\Gamma_w, Y_g, Y_1, Y_2$  и начальные условия генератора внешнего воздействия  $w(0)$ . Возмущения  $f_i, g$  содержат гармоники с частотами  $\omega_1 = 2, \omega_2 = 3, \omega_3 = 4$ . Вспомним модель осциллятора и запишем «большую»  $\Gamma_w$ , состоящую из «маленьких»  $\Gamma_{w_i}$

$$\Gamma_{w_i} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma_w = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Таким образом, получится вектор возмущений с начальными условиями при  $t = 0$

$$w(t) = \begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ \cos(3t) \\ \sin(3t) \\ \cos(4t) \\ \sin(4t) \end{bmatrix}, \quad w(t=0) = \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \\ \cos(0) \\ \sin(0) \\ \cos(0) \\ \sin(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Осталось матрицами задать амплитуду и гармоники для каждого возмущения. Выходов два, координат у  $w(t)$  шесть – матрицы  $Y_i$  будут размера  $2 \times 6$ . Зададим эти матрицы

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix};$$

## Общий вывод по работе

...

## Приложение А

```
% plant parameters
A=[0 1; -1 2];
B=[1 2; -3 3];
C=[2 1; 3 -2];
D=[0 0; 0 0];

% A eig
A_eig = eig(A)

% W(s)
sys = ss(A, B, C, D);
W_s = tf(sys)

% zeros
zeros = zero(sys)

% poles
```

```

poles = pole(sys)

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A)
B_J = inv(P) * B
C_J = C * P

% out
U = [B A*B];
U_out = [C*U D]
rank(U_out)

% time
t = 0:0.01:5;

% w(t)
w1 = -exp(t) - 12*t.*exp(t);
w2 = 7*exp(t) + 3*t.*exp(t);
w3 = 9*exp(t) - 4*t.*exp(t);
w4 = t.*exp(t);

% h(t)
h1 = -12*t.*exp(t) + 11*exp(t) - 11;
h2 = 3*t.*exp(t) + 4*exp(t) - 4;
h3 = -4*t.*exp(t) + 13*exp(t) - 13;
h4 = t.*exp(t) - exp(t) + 1;

% w(t) renders
figure;
subplot(2,2,1)
plot(t, w1, 'b', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('$w_1(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Weight Function $w_1(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

subplot(2,2,2)
plot(t, w2, 'g', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('$w_2(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Weight Function $w_2(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

subplot(2,2,3)
plot(t, w3, 'r', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('$w_3(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Weight Function $w_3(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

subplot(2,2,4)
plot(t, w4, 'm', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('$w_4(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Weight Function $w_4(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

% h(t) renders

```

```

figure;
subplot(2,2,1)
plot(t, h1, 'b', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('$h_1(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Step Response $h_1(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

subplot(2,2,2)
plot(t, h2, 'g', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('$h_2(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Step Response $h_2(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

subplot(2,2,3)
plot(t, h3, 'r', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('$h_3(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Step Response $h_3(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

subplot(2,2,4)
plot(t, h4, 'm', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Time (s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('$h_4(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Step Response $h_4(t)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize',
14);

% freq
omega = logspace(-2, 2, 1000);

% A(w)
A1 = sqrt(omega.^6 + 123*omega.^4 + 243*omega.^2 + 121) ./ (omega.^2
+ 1).^2;
A2 = sqrt(49*omega.^6 + 114*omega.^4 + 81*omega.^2 + 16) ./ (omega
.^2 + 1).^2;
A3 = sqrt(81*omega.^6 + 331*omega.^4 + 419*omega.^2 + 169) ./ (omega
.^2 + 1).^2;
A4 = 1 ./ (omega.^2 + 1);

% A(w) renders
figure;

subplot(2,2,1)
semilogx(omega, A1, 'b', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency $\omega$ (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
FontSize', 12);
ylabel('$A_1(\omega)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Amplitude Response $A_1(\omega)$', 'Interpreter','latex', '
FontSize', 14);

subplot(2,2,2)
semilogx(omega, A2, 'g', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency $\omega$ (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
FontSize', 12);
ylabel('$A_2(\omega)$', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);

```

```

title('Amplitude Response  $A_2(\omega)$ ', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 14);

subplot(2,2,3)
semilogx(omega, A3, 'r', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('A_3(\omega)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Amplitude Response  $A_3(\omega)$ ', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 14);

subplot(2,2,4)
semilogx(omega, A4, 'm', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('A_4(\omega)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Amplitude Response  $A_4(\omega)$ ', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 14);

sgtitle('Amplitude-Frequency Characteristics', 'Interpreter','latex',
    'FontSize', 16);

% L(w)
L1 = 10 * log10(omega.^6 + 123*omega.^4 + 243*omega.^2 + 121) - 40 *
    log10(omega.^2 + 1);
L2 = 10 * log10(49*omega.^6 + 114*omega.^4 + 81*omega.^2 + 16) - 40
    * log10(omega.^2 + 1);
L3 = 10 * log10(81*omega.^6 + 331*omega.^4 + 419*omega.^2 + 169) -
    40 * log10(omega.^2 + 1);
L4 = -20 * log10(omega.^2 + 1);

% L(w) renders
figure;

subplot(2,2,1)
semilogx(omega, L1, 'b', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('L_1(\omega) (dB)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Logarithmic Amplitude Response  $L_1(\omega)$ ', 'Interpreter',
    'latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,2)
semilogx(omega, L2, 'g', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('L_2(\omega) (dB)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Logarithmic Amplitude Response  $L_2(\omega)$ ', 'Interpreter',
    'latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,3)
semilogx(omega, L3, 'r', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('L_3(\omega) (dB)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Logarithmic Amplitude Response  $L_3(\omega)$ ', 'Interpreter',
    'latex', 'FontSize', 14);

```



```

subplot(2,2,4)
semilogx(omega, L4, 'm', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('L4( $\omega$ ) (dB)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Logarithmic Amplitude Response L4( $\omega$ )', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);

sgtitle('Logarithmic Amplitude-Frequency Characteristics', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 16);

% phi(w)
phi1 = atan2(omega.^3 - 23*omega, 13*omega.^2 - 11);
phi2 = atan2(-7*omega.^3 + 15*omega, 18*omega.^2 - 4);
phi3 = atan2(-9*omega.^3 + 35*omega, 31*omega.^2 - 13);
phi4 = atan2(2*omega, -omega.^2 + 1);

% rad to deg
phi1 = rad2deg(phi1);
phi2 = rad2deg(phi2);
phi3 = rad2deg(phi3);
phi4 = rad2deg(phi4);

% phi(w)
figure;

subplot(2,2,1)
plot(omega, phi1, 'b', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('L4( $\omega$ ) (dB)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Logarithmic Amplitude Response L4( $\omega$ )', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,2)
plot(omega, phi2, 'g', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('L4( $\omega$ ) (dB)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Logarithmic Amplitude Response L4( $\omega$ )', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,3)
plot(omega, phi3, 'r', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
ylabel('L4( $\omega$ ) (dB)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);
title('Logarithmic Amplitude Response L4( $\omega$ )', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,4)
plot(omega, phi4, 'm', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency  $\omega$  (rad/s)', 'Interpreter','latex', 'FontSize', 12);

```

```

ylabel('$\varphi_4(\omega) (^{\circ})$', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
title('Phase-Frequency Characteristic $\varphi_4(\omega)$', '
    Interpreter','latex', 'FontSize', 14);

sgtitle('Phase-Frequency Characteristics', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 16);

% log phi(w)
figure;

subplot(2,2,1)
semilogx(omega, phi1, 'b', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency $\omega$ (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('$\varphi_1(\omega) (^{\circ})$', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
title('Logarithmic Phase Characteristic $\varphi_1(\omega)$', '
    Interpreter','latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,2)
semilogx(omega, phi2, 'g', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency $\omega$ (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('$\varphi_2(\omega) (^{\circ})$', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
title('Logarithmic Phase Characteristic $\varphi_2(\omega)$', '
    Interpreter','latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,3)
semilogx(omega, phi3, 'r', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency $\omega$ (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('$\varphi_3(\omega) (^{\circ})$', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
title('Logarithmic Phase Characteristic $\varphi_3(\omega)$', '
    Interpreter','latex', 'FontSize', 14);

subplot(2,2,4)
semilogx(omega, phi4, 'm', 'LineWidth', 1.5); grid on;
xlabel('Frequency $\omega$ (rad/s)', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
ylabel('$\varphi_4(\omega) (^{\circ})$', 'Interpreter','latex', '
    FontSize', 12);
title('Logarithmic Phase Characteristic $\varphi_4(\omega)$', '
    Interpreter','latex', 'FontSize', 14);

sgtitle('Logarithmic Phase-Frequency Characteristics', 'Interpreter'
    , 'latex', 'FontSize', 16);

```

Листинг 1: Программа для задания 1

## Приложение Б

tbd

Листинг 2: Программа для задания 2