

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ
УСТОЙЧИВОСТИ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Задание 1. Синтез регулятора с заданной степенью устойчивости	2
1.1	Управляемость и стабилизируемость	2
1.2	Степень устойчивости	2
1.3	Схема моделирования системы, замкнутой регулятором	3
1.4	Значения желаемой степени устойчивости	3
1.5	Синтез регулятора через матричное неравенство типа Ляпунова	3
1.6	Компьютерное моделирование	4
1.7	Сопоставление результатов	9
1.8	Синтез регулятора через матричное уравнение типа Риккати	9
1.9	Компьютерное моделирование для дополнительного пункта	9
1.10	Вывод	9
2	Общий вывод по работе	9
3	Приложения	9
3.1	Приложение 1	9

Задание 1. Синтез регулятора с заданной степенью устойчивости

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Управляемость и стабилизируемость

Найдем собственные числа матрицы A и определим управляемость каждого из них. Программа для вычислений в MATLAB представлена на листинге 1 в приложении 1

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}$$

Число $\lambda_1 = -2$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. Комплексная пара $\lambda_{2,3}$ имеет положительную действительную часть – эти собственные числа неустойчивые, нужна управляемость. Разложим A в вещественную жорданову форму, найдем вектор B в базисе собственных векторов матрицы A

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Только число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, так как первый элемент B_{Jre} равен нулю. Остальные собственные числа управляемые. Таким образом, система не полностью управляема, стабилизируема.

Степень устойчивости

Любой степени устойчивости при помощи регулятора $u = Kx$ добиться не получится, так как система не полностью управляема. Степень устойчивости системы α – самое близкое к правой комплексной полуплоскости собственное число матрицы A , находящееся в левой комплексной полуплоскости. Проверка на близость осуществляется через действительную часть собственного числа. Имеем

$$\operatorname{Re} \{\lambda_1 = -2\} = -2,$$

$$\operatorname{Re} \{\lambda_{2,3} = 2 \pm i\} = 2;$$

Таким образом, степень устойчивости системы $\alpha = 2$. Это максимум. Устойчивость в данном случае подразумевается экспоненциальная.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Построим схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$, замкнутой регулятором $u = Kx$, используя SIMULINK

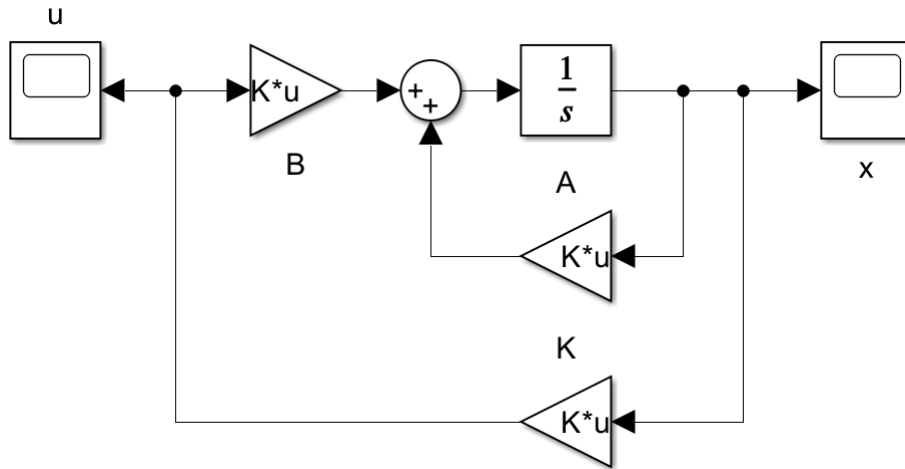


Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Значения желаемой степени устойчивости

Возьмем достаточно отличающиеся достижимые степени устойчивости в диапазоне $0 < \alpha \leq 2$

$$\alpha_1 = 2$$

$$\alpha_2 = 0.1$$

Синтез регулятора через матричное неравенство типа Ляпунова

Для каждого из выбранных значений α синтезируем регулятор, обеспечивающий заданную степень устойчивости, при помощи матричного неравенства типа Ляпунова

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \quad K = YP^{-1}$$

Найдем для $\alpha_{1,2}$ соответствующие матрицы регулятора $K_{1\alpha i}$ **без ограничений на управление**. Пользуемся пакетом `cvx` для MATLAB. Получаем

$$K_{1\alpha 1} = [2.5267 \quad -18.8652 \quad 1.7294],$$

$$K_{1\alpha 2} = [-2.0955 \quad -5.8106 \quad -2.6863];$$

Найдем для $\alpha_{1,2}$ соответствующие матрицы регулятора $K_{2\alpha i}$ **совместно с решением задачи минимизации управления**. Нам нужно найти минимальное μ , для которого при начальных условиях $x(0) = x_0$ выполняется $\|u(t)\| \leq \mu$. Для этого нужно решить задачу выпуклой минимизации:

минимизировать $\gamma = \mu^2$

при ограничениях $P \succ 0$, $PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \prec 0$,

$$\begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \gamma I \end{bmatrix};$$

Зададим начальные условия

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Реализация представлена в MATLAB, для решения используется `svh`. Получаем

$$K_{2\alpha 1} = \begin{bmatrix} 1.6000 & -11.2000 & 1.6000 \end{bmatrix}, \mu_1 = 8.0090,$$

$$K_{2\alpha 2} = \begin{bmatrix} -0.7565 & -2.6884 & -0.7552 \end{bmatrix}, \mu_2 = 4.2015;$$

Определим собственные числа матриц замкнутых систем $(A + BK_{j\alpha i})$ и сравним с желаемой степенью устойчивости

$$\sigma(A + BK_{1\alpha 1}) = \{-2, -4.5072 \pm 3.2145i\},$$

$$\sigma(A + BK_{1\alpha 2}) = \{-2, -4.5455, -0.8653\},$$

$$\sigma(A + BK_{2\alpha 1}) = \{-2, -2.0000 \pm 4.1231i\},$$

$$\sigma(A + BK_{2\alpha 2}) = \{-2, -0.1013 \pm 2.3259i\};$$

Для $\alpha_1 = 2$ собственные числа при регуляторе $K_{2\alpha 1}$ получились более точными, чем при регуляторе $K_{1\alpha 1}$. То есть управление будет именно таким, каким мы его хотели ($\text{Re}\{\lambda_i\} = -\alpha_1$). На графике увидим плавное поведение системы, стабилизирующееся к нулю. Для $\alpha_2 = 0.1$ ситуация аналогичная – при $K_{2\alpha 2}$ действительная часть комплексной пары почти достигла желаемого ограничения на степень устойчивости. При $K_{2\alpha 2}$ результат более хаотичный. Также в каждом спектре наблюдаем неуправляемое число -2 , что подтверждает корректность расчетов.

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование для всех замкнутых систем, используя схему **SIMULINK**, представленную на рис. 1. Построим графики $u(t), x(t)$ при начальных условиях

$$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Результаты представлены на рис. 2–9 со следующей страницы

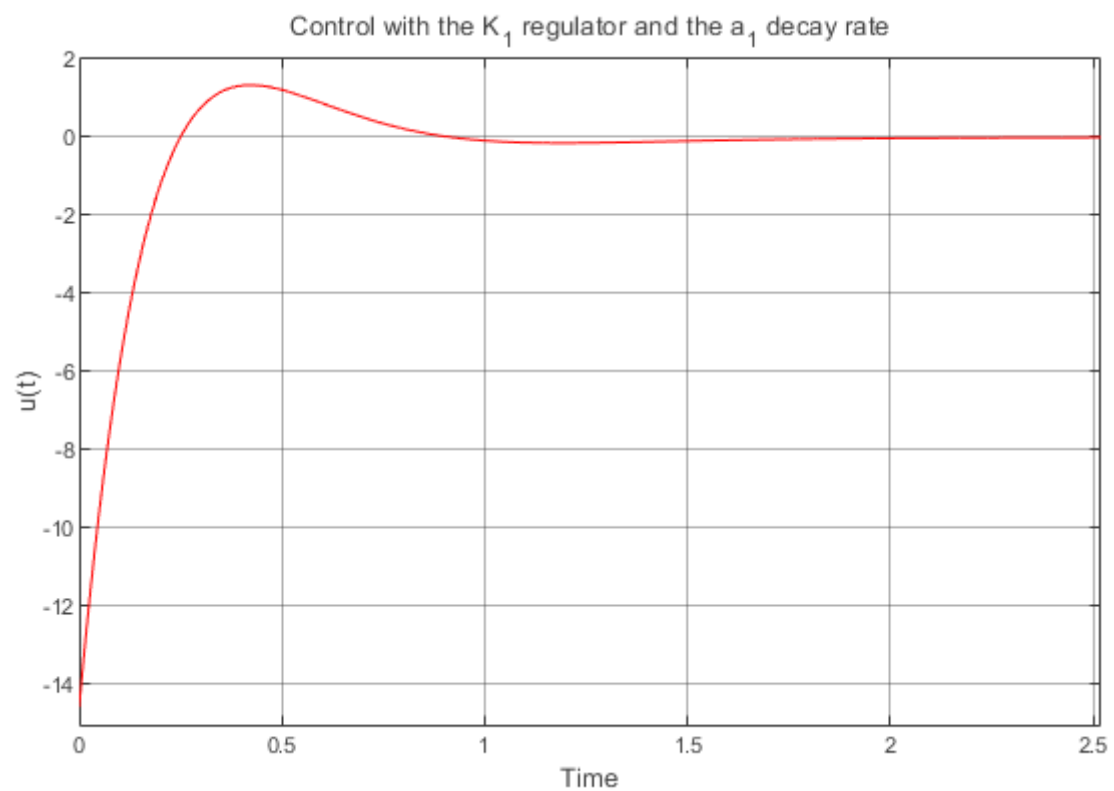


Рис. 2: График $u(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{1\alpha_1}$

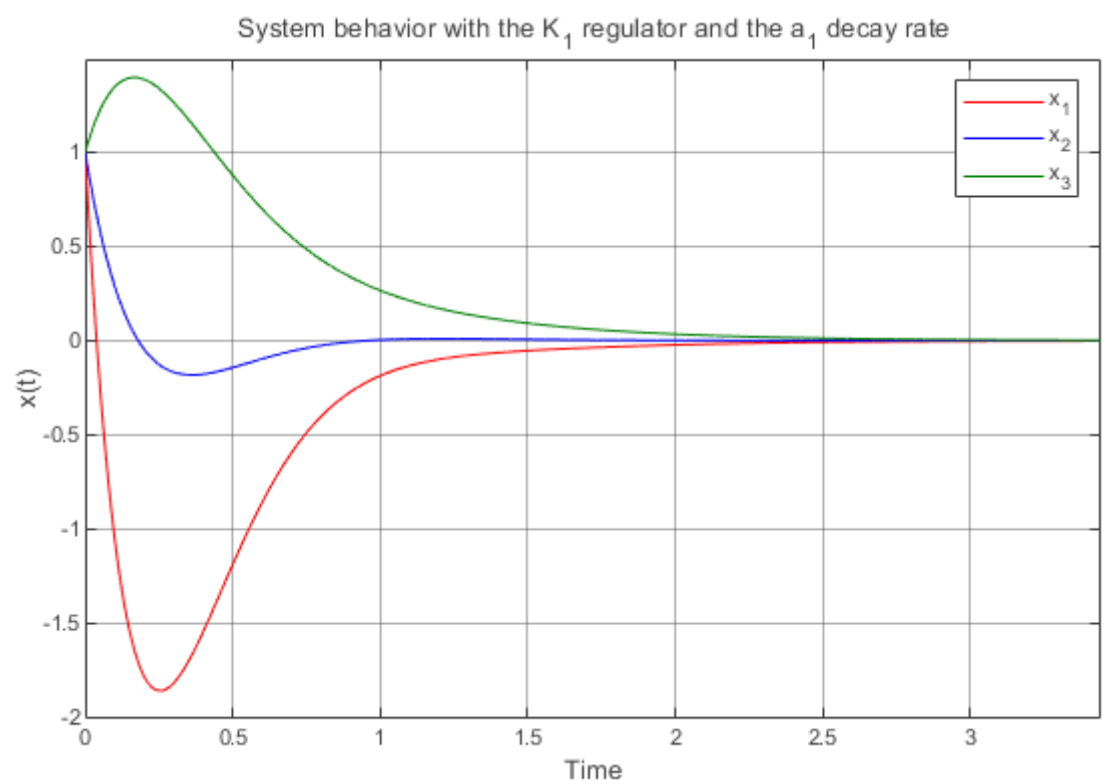


Рис. 3: График $x(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{1\alpha_1}$

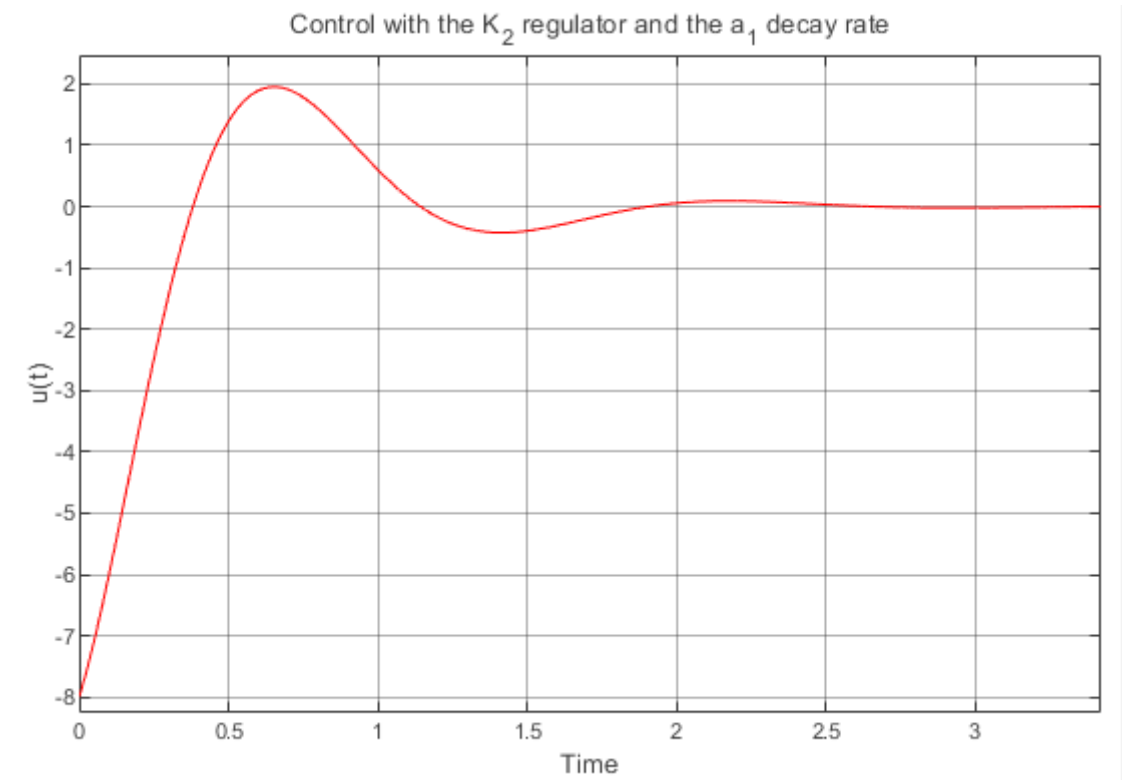


Рис. 4: График $u(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{2\alpha_1}$, $\mu_1 = 8.0090$

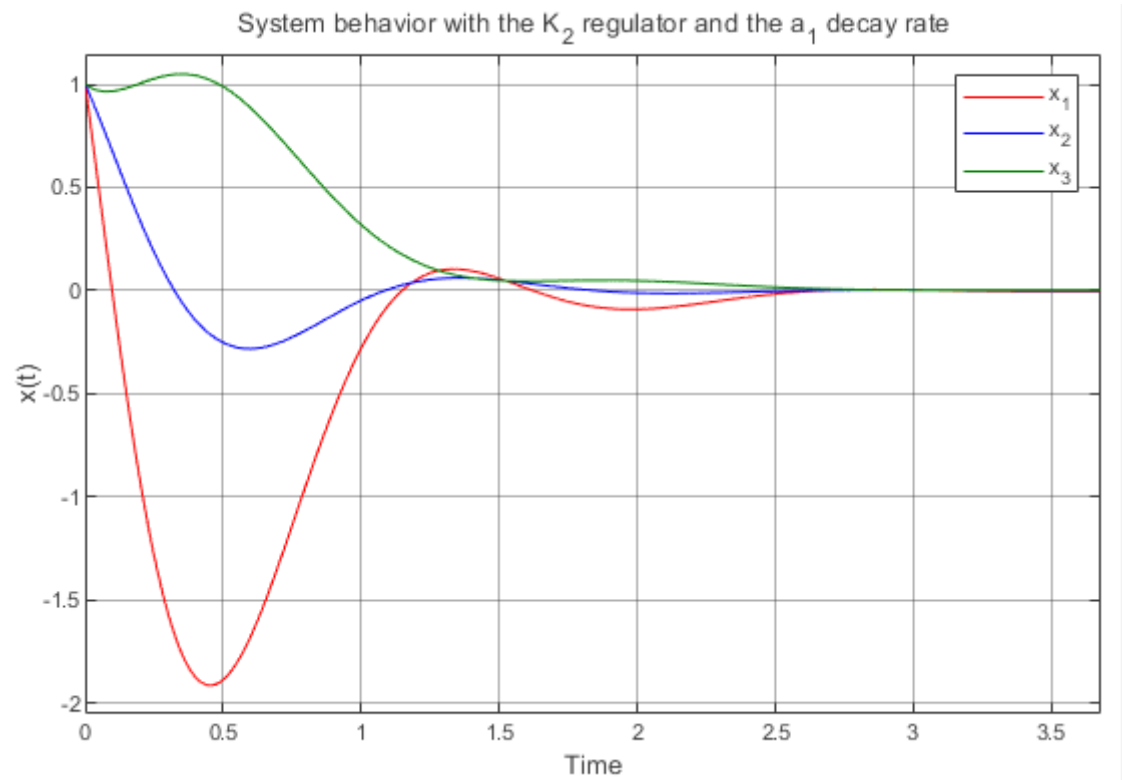


Рис. 5: График $x(t)$ для $\alpha_1 = 2$ при $K_{2\alpha_1}$

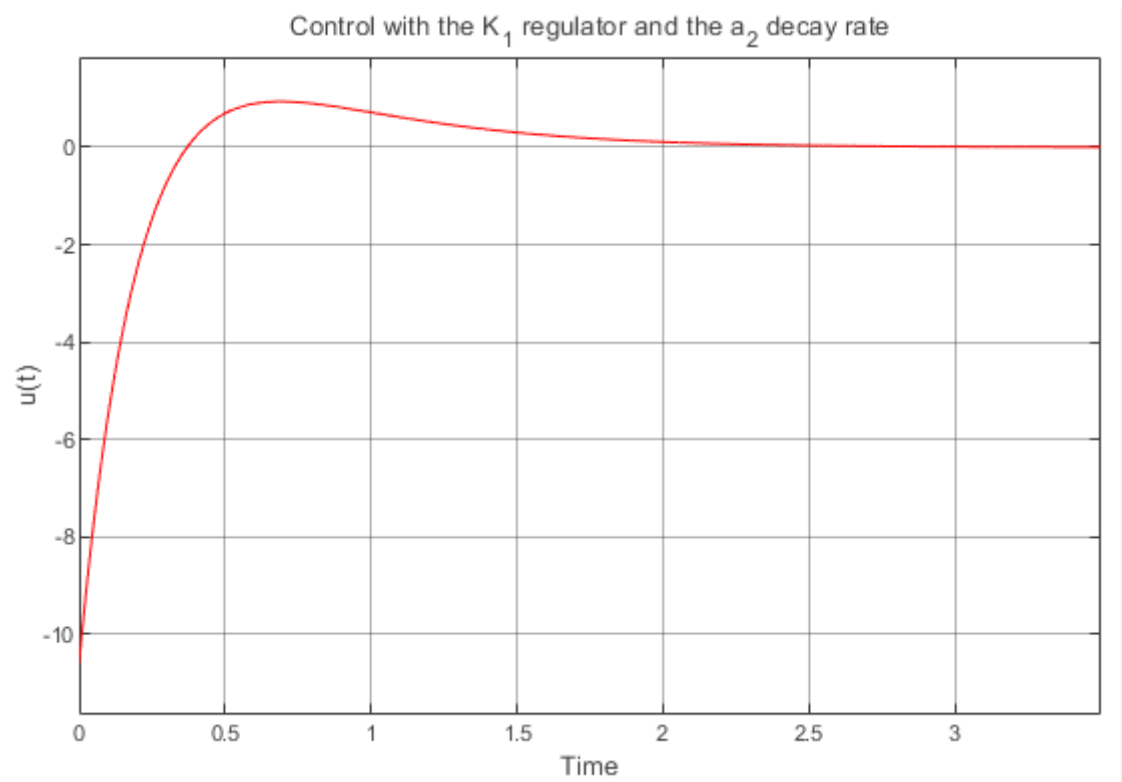


Рис. 6: График $u(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_1\alpha_2$

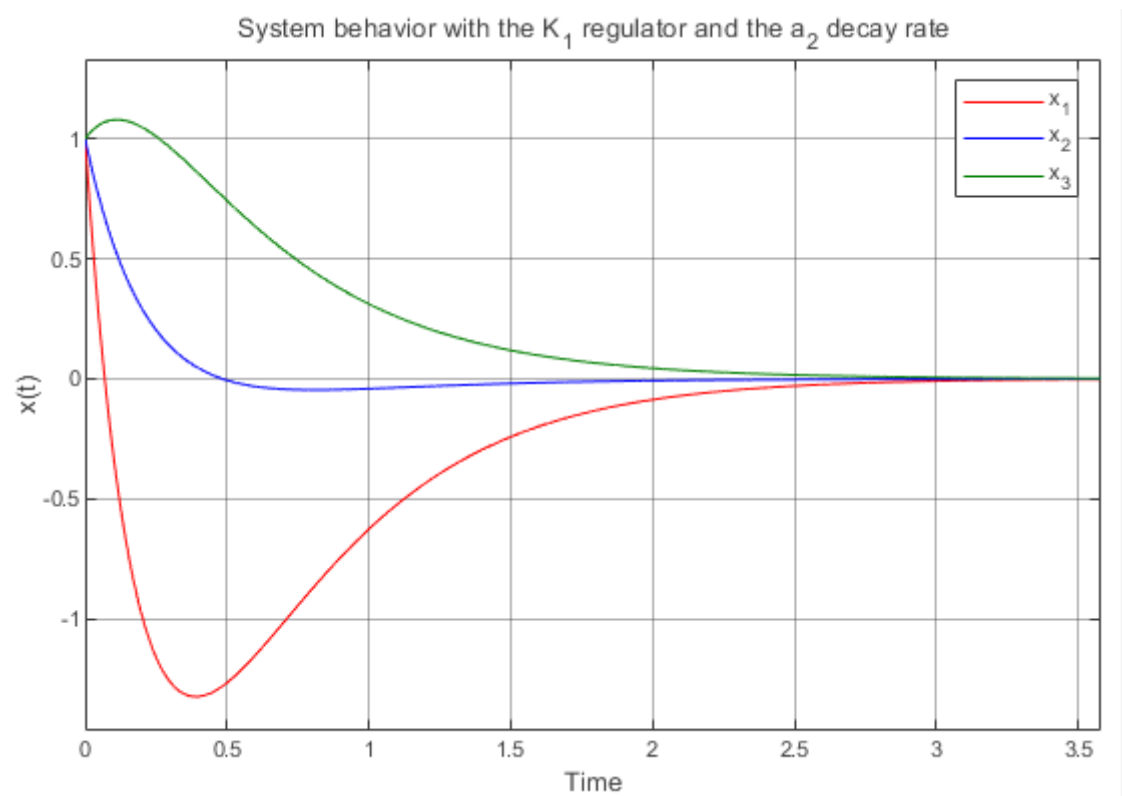


Рис. 7: График $x(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_1\alpha_2$

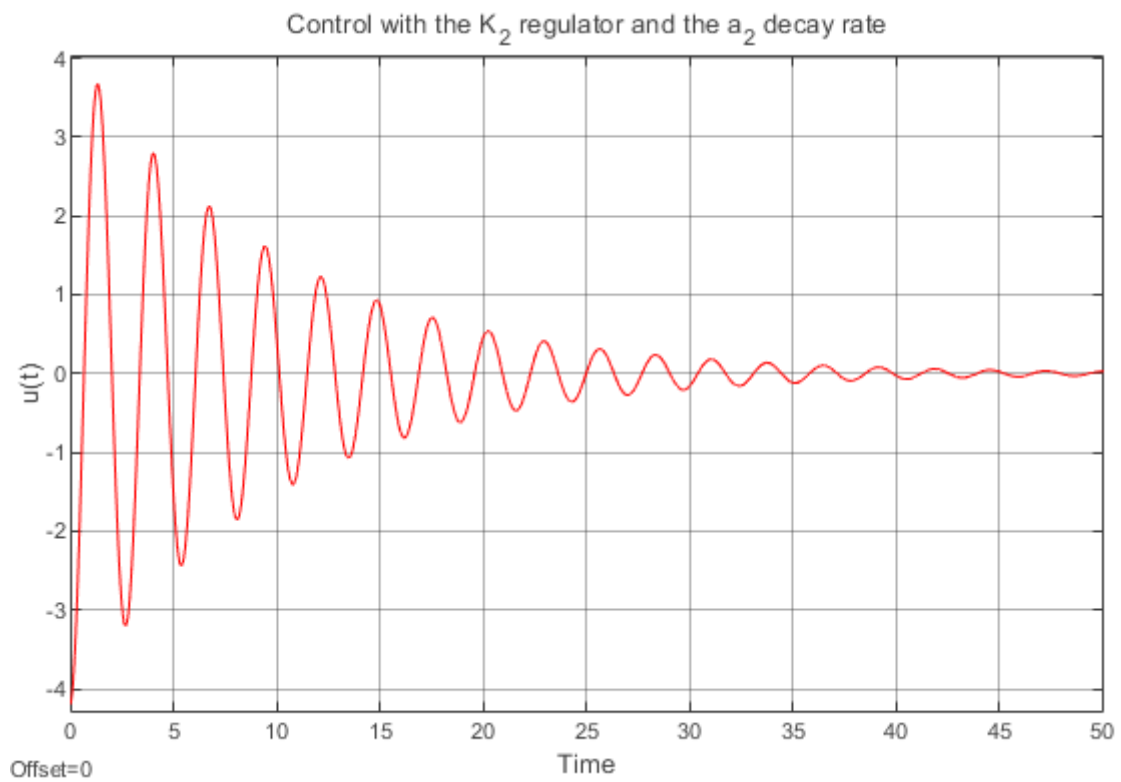


Рис. 8: График $u(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{2\alpha_2}$, $\mu_2 = 4.2015$

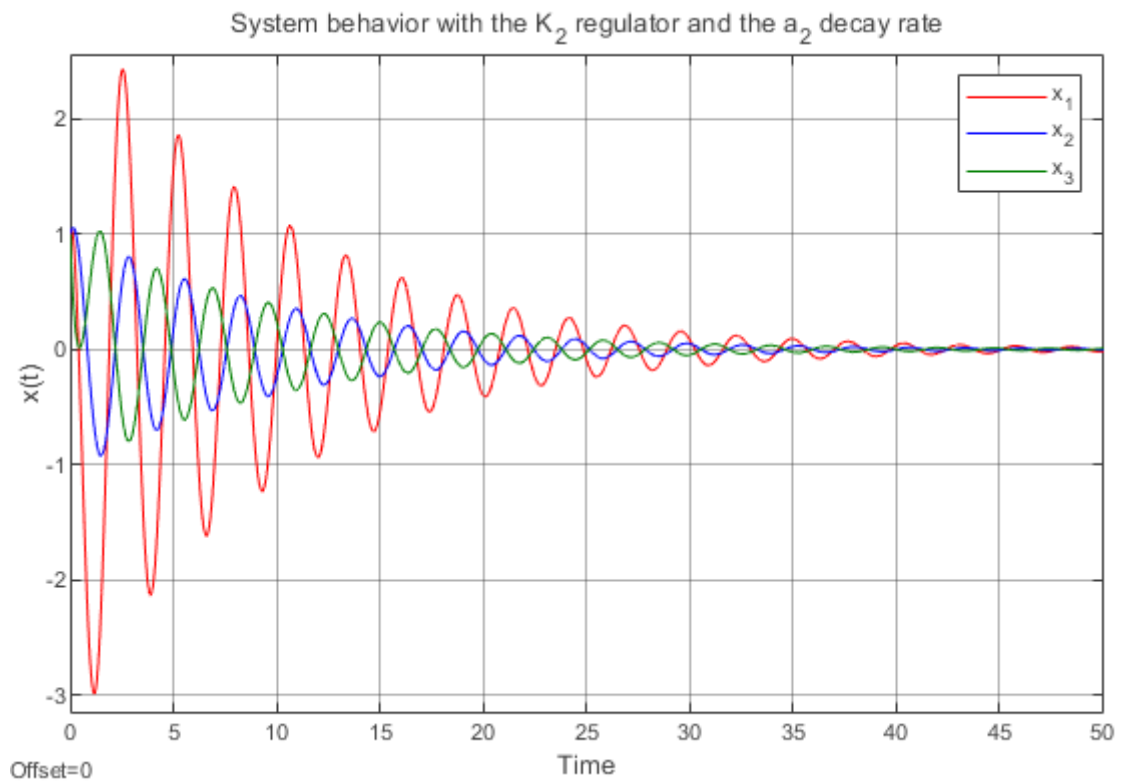


Рис. 9: График $x(t)$ для $\alpha_2 = 0.1$ при $K_{2\alpha_2}$

Сопоставление результатов

...

Синтез регулятора через матричное уравнение типа Риккати

При $Q = I$

$$\begin{aligned}K_{3\alpha 1} &= [2.1164 \quad -13.4942 \quad 1.6777] \\K_{3\alpha 2} &= [-0.8455 \quad -3.3716 \quad -0.5697] \\ \sigma(A + BK_{3\alpha 1}) &= \{-2, -2.4114 \pm 4.3116i\} \\ \sigma(A + BK_{3\alpha 2}) &= \{-2, -0.6692 \pm 2.3797i\}\end{aligned}$$

При $Q = 0$

$$\begin{aligned}K_{4\alpha 1} &= [1.6000 \quad -11.2000 \quad 1.6000] \\K_{4\alpha 2} &= [-0.7560 \quad -2.6880 \quad -0.7560] \\ \sigma(A + BK_{4\alpha 1}) &= \{-2, -2.0000 \pm 4.1231i\} \\ \sigma(A + BK_{4\alpha 2}) &= \{-2, -0.1000 \pm 2.3259i\}\end{aligned}$$

Компьютерное моделирование для дополнительного пункта

...

Вывод

...

Общий вывод по работе

...

Приложения

Приложение 1

```
% plant parameters
A = [5 2 7; 2 1 2; -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A)

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
Pre(:,1) = P(:,1);
Pre(:,2) = imag(P(:,2));
Pre(:,3) = real(P(:,3))
Pre_inv = Pre^-1
J_re = Pre_inv * A * Pre
B_jre = Pre_inv * B
```

```

% Desired decay rate
a1 = 2;
a2 = 0.1;

% solving LMI no restrictions on control
cvx_begin sdp
% a1
variable P1(3,3) symmetric
variable Y1(1,3)
P1 > 0.0001*eye(3);
P1*A' + A*P1 + 2*a1*P1 + Y1'*B' + B*Y1 <= 0;
cvx_end

cvx_begin sdp
% a2
variable P2(3,3) symmetric
variable Y2(1,3)
P2 > 0.0001*eye(3);
P2*A' + A*P2 + 2*a2*P2 + Y2'*B' + B*Y2 <= 0;
cvx_end

K1_a1 = Y1*inv(P1)
K1_a2 = Y2*inv(P2)

% A+BK1_ai eigenvalues
ABK1_a1 = A+B*K1_a1;
ABK1_a2 = A+B*K1_a2;
eig(ABK1_a1)
eig(ABK1_a2)

% solving LMI with control constraint
x0 = [1; 1; 1];

% a1
cvx_begin sdp
variable P12(3,3) symmetric
variable Y12(1,3)
variable mumu_a1
minimize mumu_a1
P12 > 0.0001*eye(3);
P12*A' + A*P12 + 2*a1*P12 + Y12'*B' + B*Y12 <= 0;
[P12 x0;
x0' 1] > 0;
[P12 Y12';
Y12 mumu_a1] > 0;
cvx_end

cvx_begin sdp
% a2
variable P22(3,3) symmetric
variable Y22(1,3)
variable mumu_a2
minimize mumu_a2
P22 > 0.0001*eye(3);
P22*A' + A*P22 + 2*a2*P22 + Y22'*B' + B*Y22 <= 0;
[P22 x0;
x0' 1] > 0;
[P22 Y22';

```

```

Y22 mumu_a2] > 0;
cvx_end

mu_a1 = sqrt(mumu_a1)
mu_a2 = sqrt(mumu_a2)

K2_a1 = Y12*inv(P12)
K2_a2 = Y22*inv(P22)

% A+BK2_ai eigenvalues
ABK2_a1 = A+B*K2_a1;
ABK2_a2 = A+B*K2_a2;
eig(ABK2_a1)
eig(ABK2_a2)

% solving Riccati
Q1 = eye(3);
v = 2;
R = 1;

% a1
Aa1 = A + eye(3) * (a1-0.00000000001);
[P,K,e]=icare(Aa1,sqrt(2)*B,Q1,R);
K3_a1=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K3_a1)

% a2
Aa2 = A + eye(3) * a2;
[P,K,e]=icare(Aa2,sqrt(2)*B,Q1,R);
K3_a2=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K3_a2)

Q2 = 0;
% a1
Aa12 = A + eye(3) * (a1-0.00000000001);
[P,K,e]=icare(Aa12,sqrt(2)*B,Q2,R);
K4_a1=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K4_a1)

% a2
Aa22 = A + eye(3) * a2;
[P,K,e]=icare(Aa22,sqrt(2)*B,Q2,R);
K4_a2=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K4_a2)

```

Листинг 1: Программа для задания 1