

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»



**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №А**  
**ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО**  
**УПРАВЛЕНИЯ»**  
**ТЕМА «ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ РАДОСТИ»**  
Вариант №2

Преподаватель:  
Пашенко А. В.

Выполнил:  
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР  
Группа: R3341  
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург  
2025

# Содержание

<b>1</b>	<b>Задание 1. Исследование LQR</b>	<b>2</b>
1.1	Стабилизируемость системы . . . . .	2
1.2	Схема моделирования системы . . . . .	2
1.3	Набор пар матриц для исследования . . . . .	3
1.4	Синтез регулятора . . . . .	3
1.5	Минимизированное значение функционала качества . . . . .	3
1.6	Компьютерное моделирование . . . . .	4
1.7	Сравнение результатов . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Задание 2. Исследование фильтра Калмана</b>	<b>8</b>
2.1	Обнаруживаемость системы . . . . .	8
2.2	Схема моделирования системы . . . . .	8
2.3	Набор пар матриц для исследования . . . . .	9
2.4	Синтез наблюдателя . . . . .	9
2.5	Компьютерное моделирование . . . . .	10
2.6	Сравнение результатов . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Задание 3. Синтез LQG</b>	<b>19</b>
3.1	Стабилизируемость и обнаруживаемость . . . . .	19
3.2	Схема моделирования системы . . . . .	20
3.3	Пары матриц для регулятора и наблюдателя . . . . .	20
3.4	Синтез регулятора . . . . .	20
3.5	Синтез наблюдателя . . . . .	21
3.6	Компьютерное моделирование . . . . .	21
3.7	Описание результатов . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>24</b>
<b>5</b>	<b>Приложение А</b>	<b>25</b>
<b>6</b>	<b>Приложение Б</b>	<b>25</b>
<b>7</b>	<b>Приложение В</b>	<b>26</b>

## Задание 1. Исследование LQR

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

### Стабилизируемость системы

Проверим систему на стабилизируемость. Найдем собственные числа матрицы  $A$ . Ранее мы это делали в лабораторной работе №2 «Модальные регуляторы и наблюдатели». Код матлаб представлен в приложении А на листинге 1

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}$$

Собственное число  $\lambda_1 = -2$  асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. Комплексная пара  $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$  неустойчива, нужна управляемость. Разложим  $A$  в ЖНФ в вещественном виде, найдем  $B$  в базисе собственных векторов  $A$

$$A_{Jre} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Система не полностью управляема, стабилизируема (собственному значению  $-2$  соответствует ноль в матрице  $B_{Jre}$ ).

### Схема моделирования системы

Построим схему моделирования системы, замкнутой регулятором  $u = Kx$ , используя SIMULINK

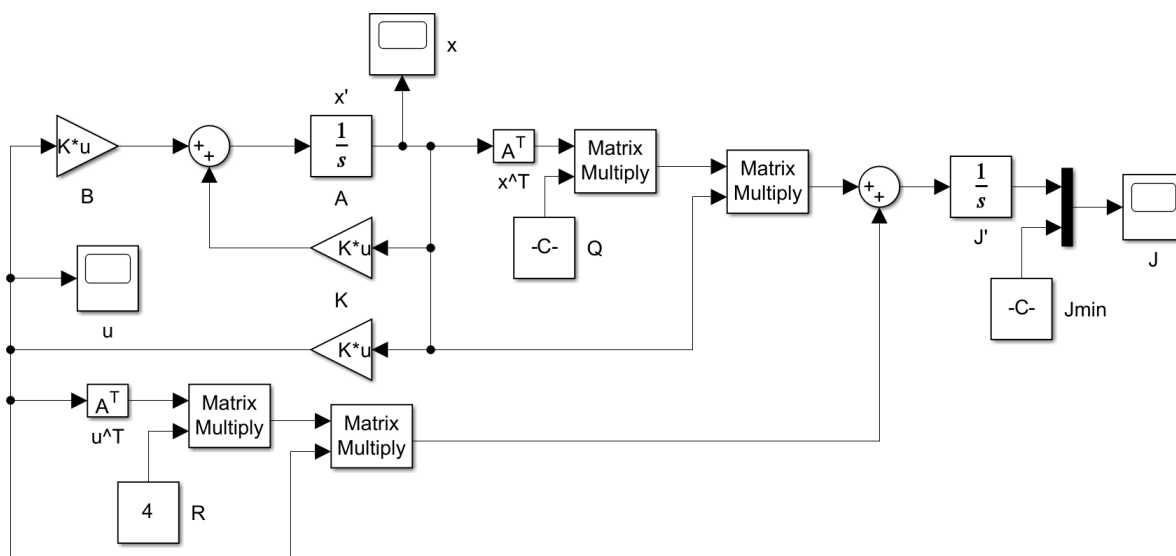


Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Снимаем осциллограммы  $u(t)$ ,  $x(t)$ ,  $J_{exp}(t)$ .

## Набор пар матриц для исследования

Зададим значения матриц  $Q = I, R = 1$  (время процесса и затраты на управление принимаем одинаково значимыми) и параметр  $\alpha = 4$ . Таким образом, сформируем набор

- $\circ (Q = I, R = 1),$
- $\circ (Q = 4I, R = 1),$
- $\circ (Q = I, R = 4),$
- $\circ (Q = 4I, R = 4);$

## Синтез регулятора

Для каждой из пар значений матриц  $(Q, R)$  синтезируем регулятор, минимизирующий функционал качества

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt$$

путем решения соответствующего матричного уравнения Риккати при  $\nu = 1$

$$A^T P + PA + Q - \nu PBR^{-1}B^T P = 0, \quad K = -R^{-1}B^T P;$$

Воспользуемся `icare` и получим

$$\begin{aligned} (Q = I, R = 1), \quad K_{I,1} &= [-1.7473 \quad -5.4627 \quad -1.4004], \\ (Q = 4I, R = 1), \quad K_{4I,1} &= [-2.0000 \quad -6.9630 \quad -0.9630], \\ (Q = I, R = 4), \quad K_{I,4} &= [-1.6433 \quad -4.9797 \quad -1.5454], \\ (Q = 4I, R = 4), \quad K_{4I,4} &= [-1.7473 \quad -5.4627 \quad -1.4004]; \end{aligned}$$

Убедимся, что спектры замкнутых систем принадлежат левой комплексной плоскости

$$\begin{aligned} \sigma(A + BK_{I,1}) &= \{-2, -1.4413, -3.8630\}, \\ \sigma(A + BK_{4I,1}) &= \{-2, -1, -7\}, \\ \sigma(A + BK_{I,4}) &= \{-2, -2.1821 \pm 0.6216i\}, \\ \sigma(A + BK_{4I,4}) &= \{-2, -1.4413, -3.8630\}; \end{aligned}$$

Получили отрицательные действительные части собственных чисел и наличие в спектрах неуправляемого  $\lambda_1 = -2$ . Следовательно, регуляторы синтезированы корректно.

## Минимизированное значение функционала качества

Вычислим минимизированное значение функционала качества

$$J_{min} = x_0^T P x_0$$

для каждой пары  $(Q, R)$ .  $P_i$  получили при решении матричного уравнения типа Риккати

$$P_{I,1} = \begin{bmatrix} 2.4681 & -3.5514 & 2.1055 \\ -3.5514 & 13.4136 & -2.7033 \\ 2.1055 & -2.7033 & 2.2129 \end{bmatrix}, \quad P_{4I,1} = \begin{bmatrix} 4.0000 & -7.3333 & 2.6667 \\ -7.3333 & 24.9904 & -3.9726 \\ 2.6667 & -3.9726 & 3.0645 \end{bmatrix},$$

$$P_{I,4} = \begin{bmatrix} 8.2455 & -10.2978 & 7.8656 \\ -10.2978 & 41.3731 & -9.4392 \\ 7.8656 & -9.4392 & 7.9761 \end{bmatrix}, \quad P_{4I,4} = \begin{bmatrix} 9.8723 & -14.2056 & 8.4221 \\ -14.2056 & 53.6545 & -10.8133 \\ 8.4221 & -10.8133 & 8.8515 \end{bmatrix};$$

Получаем

$$\begin{aligned} Q = I, R = 1 : J_{min} &= 9.7962, \\ Q = 4I, R = 1 : J_{min} &= 14.7764, \\ Q = I, R = 4 : J_{min} &= 33.8518, \\ Q = 4I, R = 4 : J_{min} &= 39.1846; \end{aligned}$$

### Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование замкнутых систем и для каждого случая построим график управления  $u(t)$ , вектора состояния замкнутой системы  $x(t)$  и экспериментального значения функционала качества  $J_{exp}(t)$ . Моделирование  $u(t)$  и  $x(t)$  для случая

$$Q = 4I, R = 4, K_{4I,4} = [-1.7473 \quad -5.4627 \quad -1.4004]$$

делать не будем, так как регулятор для этой пары совпал с регулятором для случая

$$Q = I, R = 1, K_{I,1} = [-1.7473 \quad -5.4627 \quad -1.4004],$$

собственные числа тоже одинаковые. Результаты представлены на рис. 2–11

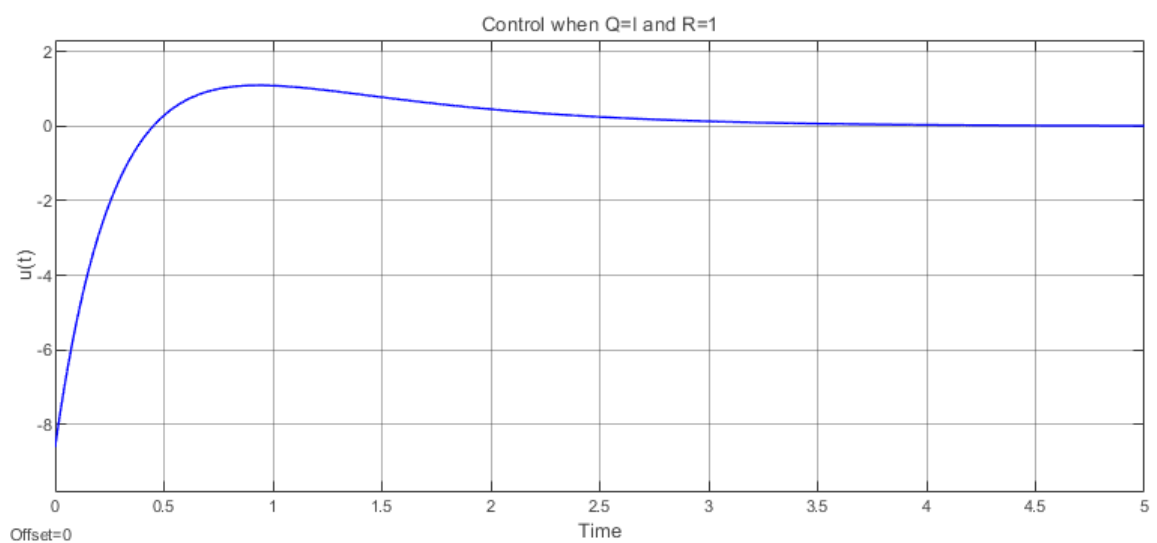


Рис. 2: График управления  $u(t)$  при  $K_{I,1}, K_{4I,4}$

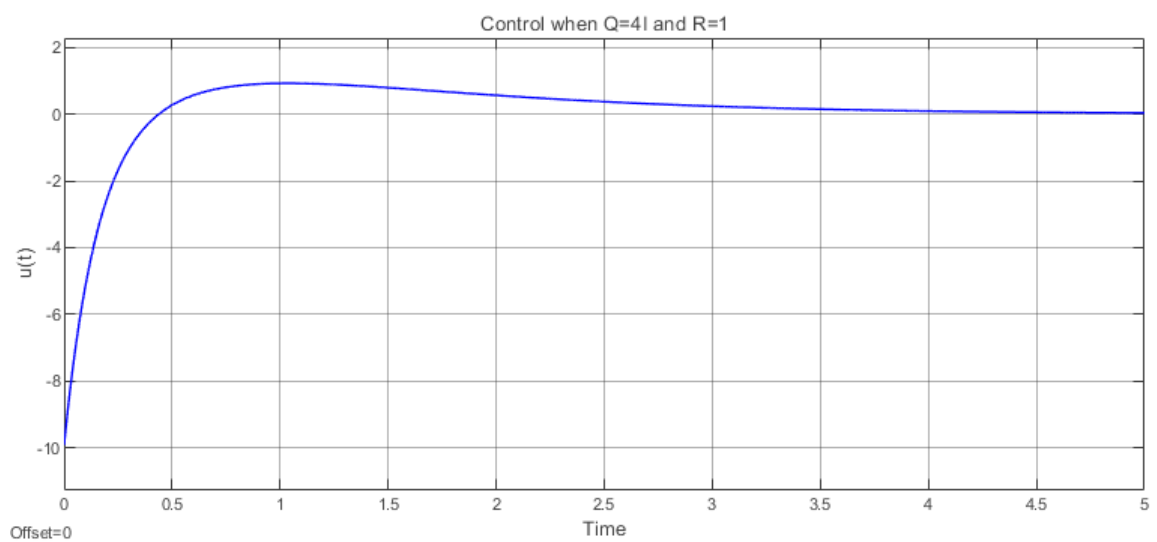


Рис. 3: График управления  $u(t)$  при  $K_{4I,1}$

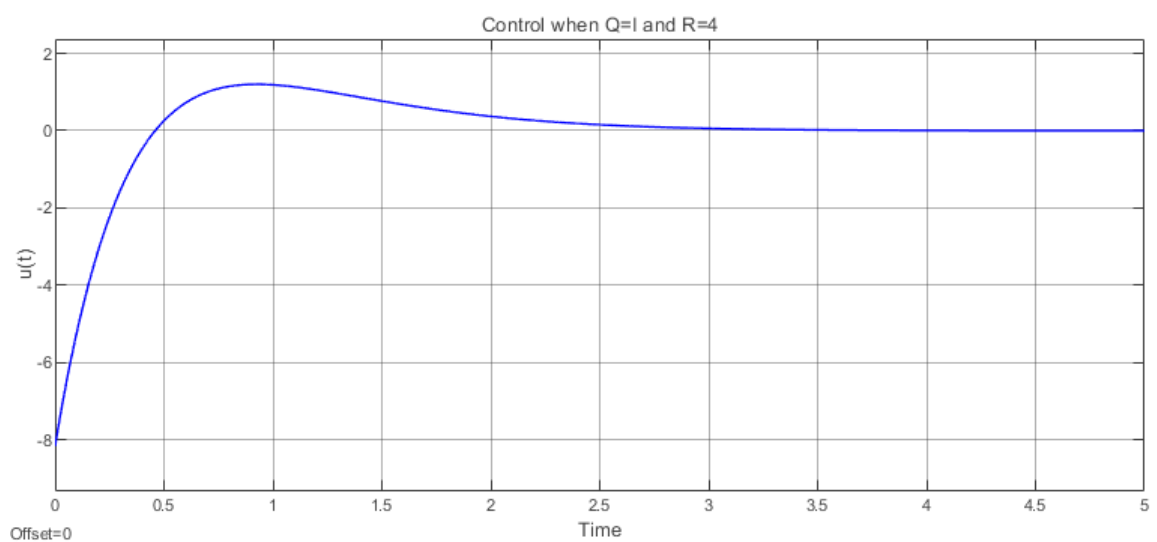


Рис. 4: График управления  $u(t)$  при  $K_{I,4}$

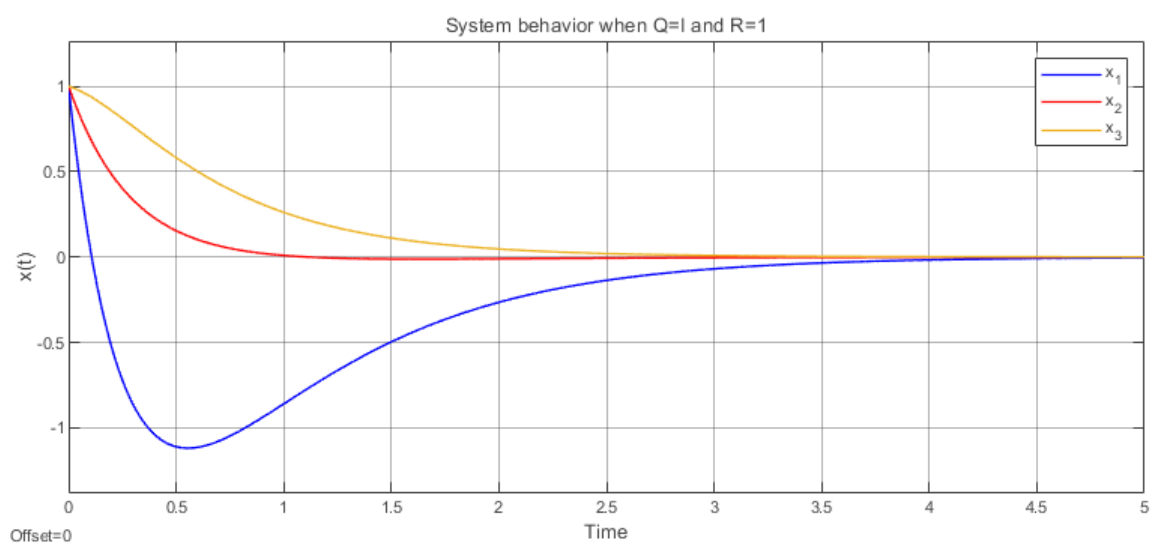


Рис. 5: График вектора состояния  $x(t)$  при  $K_{I,1}, K_{4I,4}$

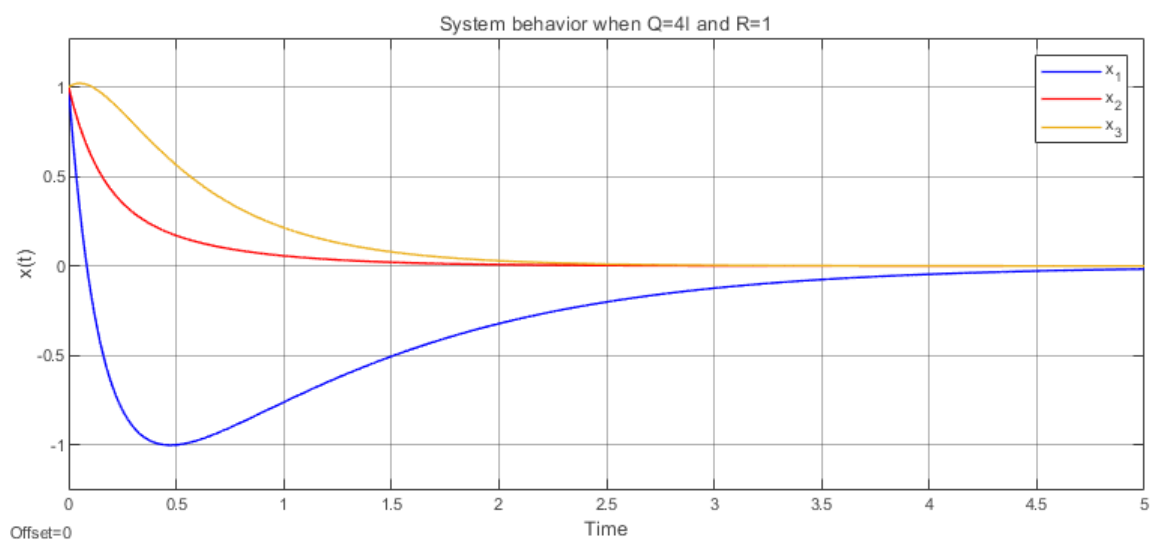


Рис. 6: График вектора состояния  $x(t)$  при  $K_{4I,1}$

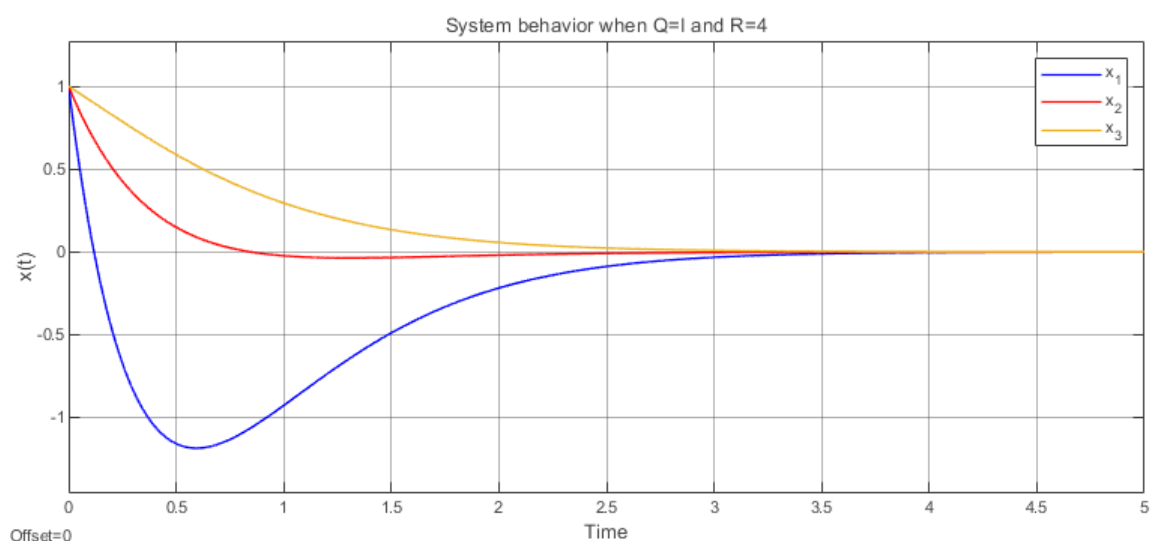


Рис. 7: График вектора состояния  $x(t)$  при  $K_{I,4}$

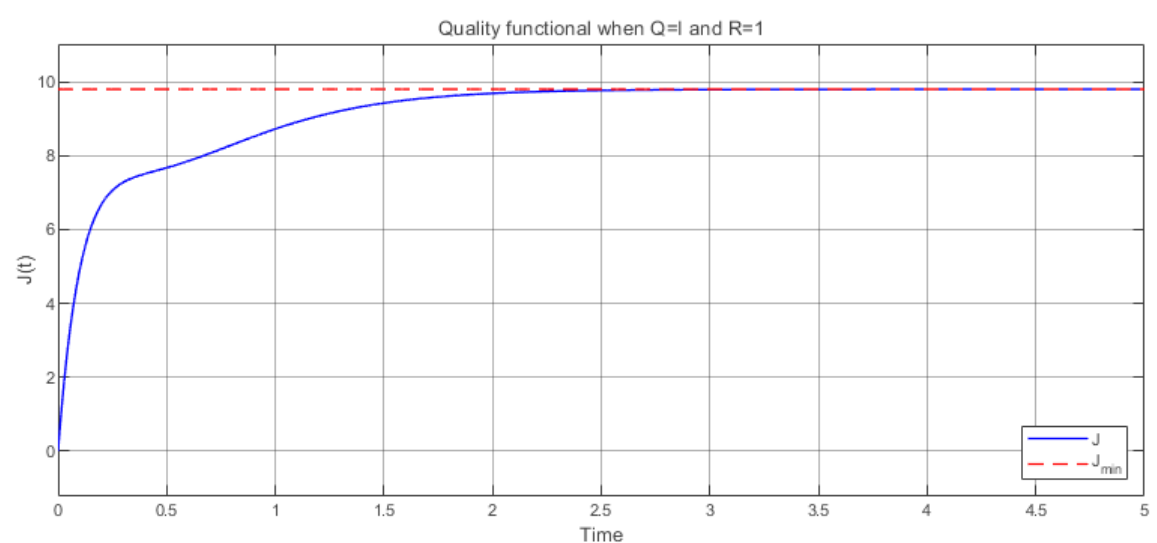


Рис. 8: График экспериментального значения функционала качества  $J(t)$  при  $K_{I,1}$

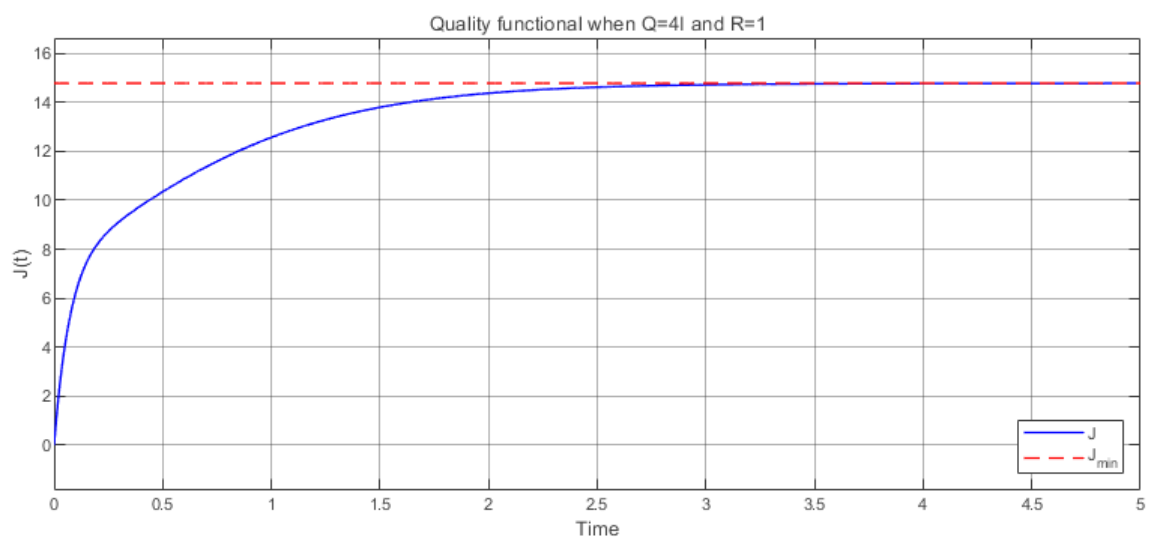


Рис. 9: График экспериментального значения функционала качества  $J(t)$  при  $K_{4I,1}$

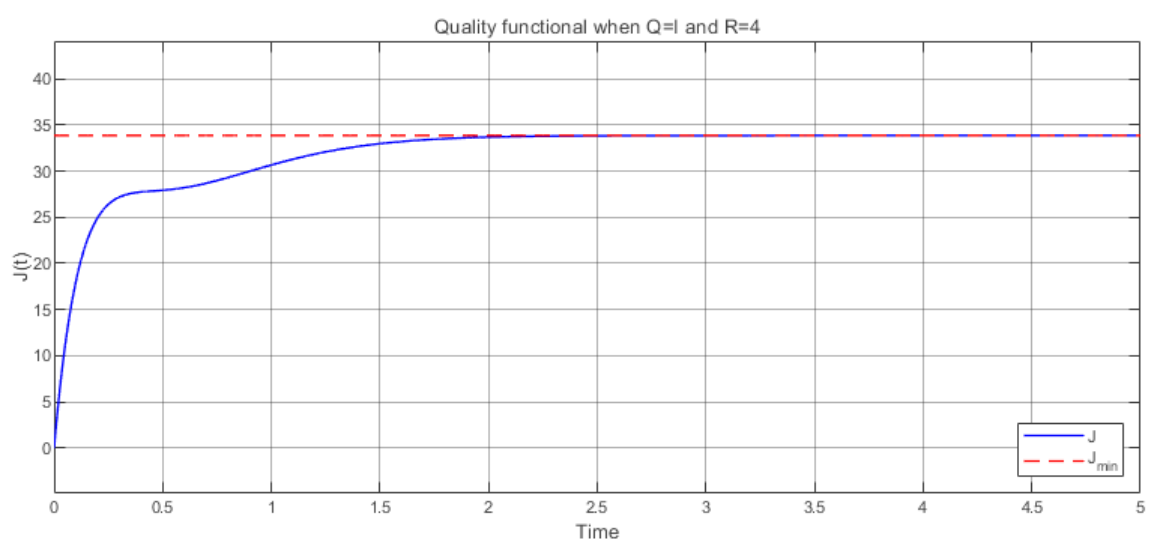


Рис. 10: График экспериментального значения функционала качества  $J(t)$  при  $K_{I,4}$

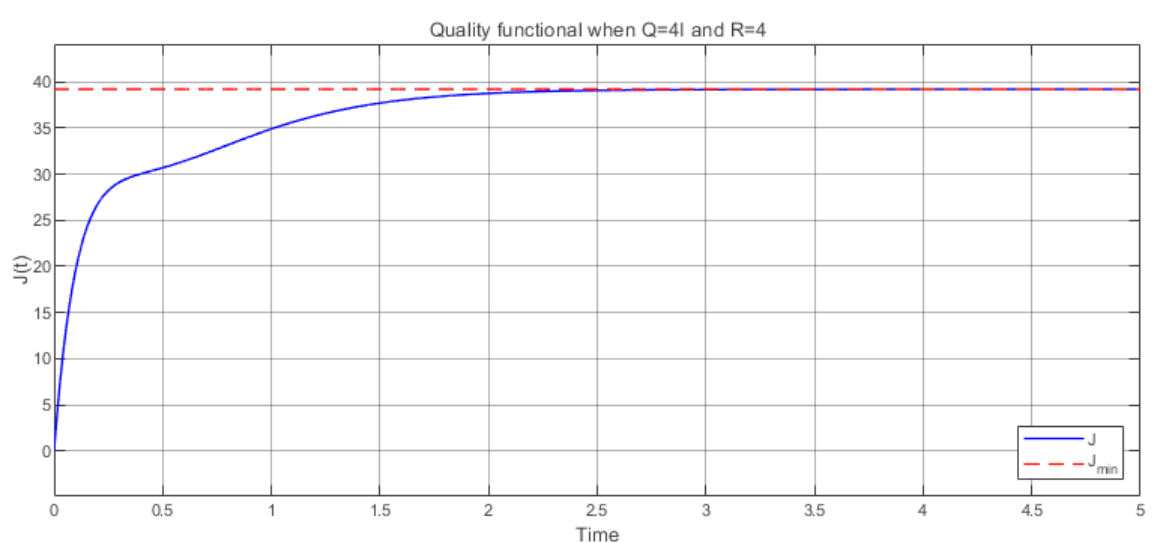


Рис. 11: График экспериментального значения функционала качества  $J(t)$  при  $K_{4I,4}$



## Сравнение результатов

Когда нам важнее время процесса, чем затраты на управление ( $Q > R$ ), то ожидаемо управления применяется больше (сравн. рис. 3, 4), при этом координаты  $x_2(t), x_3(t)$  вектора состояния объекта быстрее сходятся к нулю (сравн. рис. 6, 7; примечание: координата  $x_1(t)$  сравнительно быстрее бы сошлась к нулю при большем коэффициенте  $\alpha$ ). При  $Q < R$  ситуация обратная – время процесса не так важно, как затраты на управление (сравн. те же графики). При равнозначных (равносильных) значениях  $Q, R$  результат усредненный между временем процесса и затратами на управление. Результаты  $J_{exp}(t)$  примерно совпадают с вычисленными  $J_{min}$ . При этом

$$J_{min,I,1} = \frac{J_{min,4I,4}}{4}, \quad 9.7962 \approx \frac{39.1846}{4} = 9.79615,$$

то есть при увеличении  $Q, R$  в один и тот же коэффициент  $\alpha$ , минимизированное значение функционала качества увеличится в  $\alpha$  раз.

## Задание 2. Исследование фильтра Калмана

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f, \\ y = Cx + \xi, \end{cases} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

где  $f(t)$  и  $\xi(t)$  – случайные сигналы (гауссовский белый шум) – исследуем *фильтр Калмана*.

### Обнаруживаемость системы

Проверим собственные числа матрицы  $A$ . Программа MATLAB представлена в приложении Б на листинге 2

$$\sigma(A) = \{\pm i, \pm 2i\}$$

Собственные числа устойчивые, но не асимптотически. Проверим наблюдаемость через вещественную ЖНФ

$$A_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{Jre} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix};$$

Комплексные пары наблюдаемы – система полностью наблюдаема и стабилизируема.

### Схема моделирования системы

Построим схему моделирования системы с наблюдателем состояния

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$$

Снимаем осциллограммы  $x(t), \hat{x}(t), e(t)$

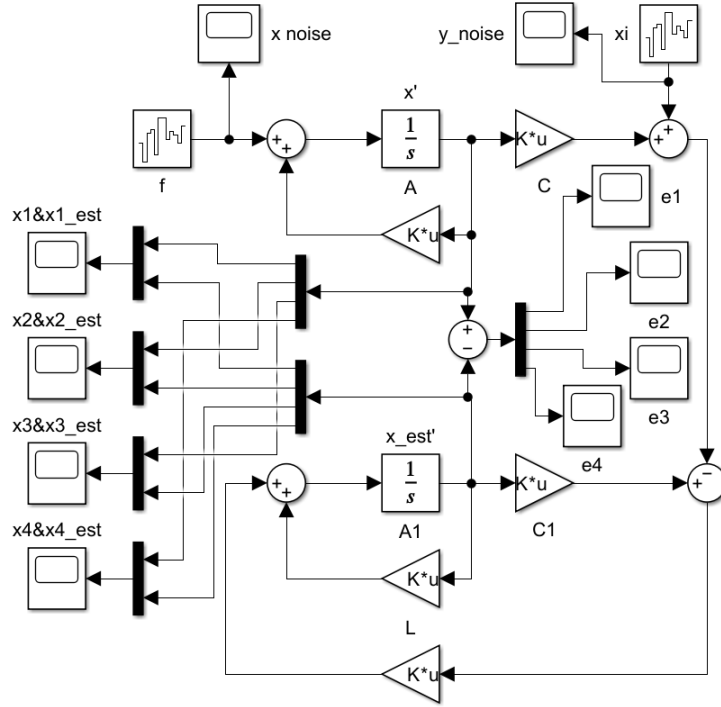


Рис. 12: Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

### Набор пар матриц для исследования

Зададим значения матриц  $Q = I, R = 1$  (считаем помехи для  $x(t)$  и  $y(t)$  равнозначными) и параметр  $\alpha = 100$ . Таким образом, сформируем набор

- $(Q = I, R = 1)$ ,
- $(Q = 100I, R = 1)$ ,
- $(Q = I, R = 100)$ ,
- $(Q = 100I, R = 100)$ ;

### Синтез наблюдателя

Для каждой из пар значений матриц  $(Q, R)$  синтезируем наблюдатель, минимизирующий средний квадрат отклонения установившейся ошибки наблюдателя

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} (\|x(t) - \hat{x}(t)\|^2)$$

путем решения соответствующего матричного уравнения Риккати при  $\nu = 1$

$$AP + PA^T + Q - \nu PC^T R^{-1} CP = 0, \quad L = -PC^T R^{-1};$$

Воспользуемся `icare` и получим

$$\begin{aligned} (Q = I, R = 1), \quad L_{I,1} &= [0.5233 \quad -7.6440 \quad 0.0221 \quad 6.4594]^T, \\ (Q = 100I, R = 1), \quad L_{100I,1} &= [7.6954 \quad -15.6987 \quad -4.5805 \quad 15.1421]^T, \\ (Q = I, R = 100), \quad L_{I,100} &= [0.0079 \quad -1.7287 \quad 0.5099 \quad 2.0960]^T, \\ (Q = 100I, R = 4), \quad L_{100I,100} &= [0.5233 \quad -7.6440 \quad 0.0221 \quad 6.4594]^T; \end{aligned}$$

Убедимся, что спектры замкнутых систем принадлежат левой комплексной плоскости

$$\begin{aligned}\sigma(A + L_{I,1}C) &= \{-0.3454 \pm 1.4689i, -3.1349 \pm 3.3599i\}, \\ \sigma(A + L_{100I,1}C) &= \{-0.3419 \pm 1.4702i, -13.3670 \pm 5.6243i\}, \\ \sigma(A + L_{I,100}C) &= \{-0.4006 \pm 1.1676i, -0.3965 \pm 1.9848i\}, \\ \sigma(A + L_{100I,100}C) &= \{-0.3454 \pm 1.4689i, -3.1349 \pm 3.3599i\};\end{aligned}$$

Получили отрицательные действительные части собственных чисел. Следовательно, наблюдатели синтезированы корректно.

### Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование с нулевыми начальными условиями наблюдателя. Построим графики  $x(t)$ ,  $\hat{x}(t)$ ,  $e(t)$ . Также приведены графики шумов  $f(t)$ ,  $\xi(t)$ . Наблюдатели  $L_{I,1}$ ,  $L_{100I,100}$  совпали аналогично регуляторам в задании 1

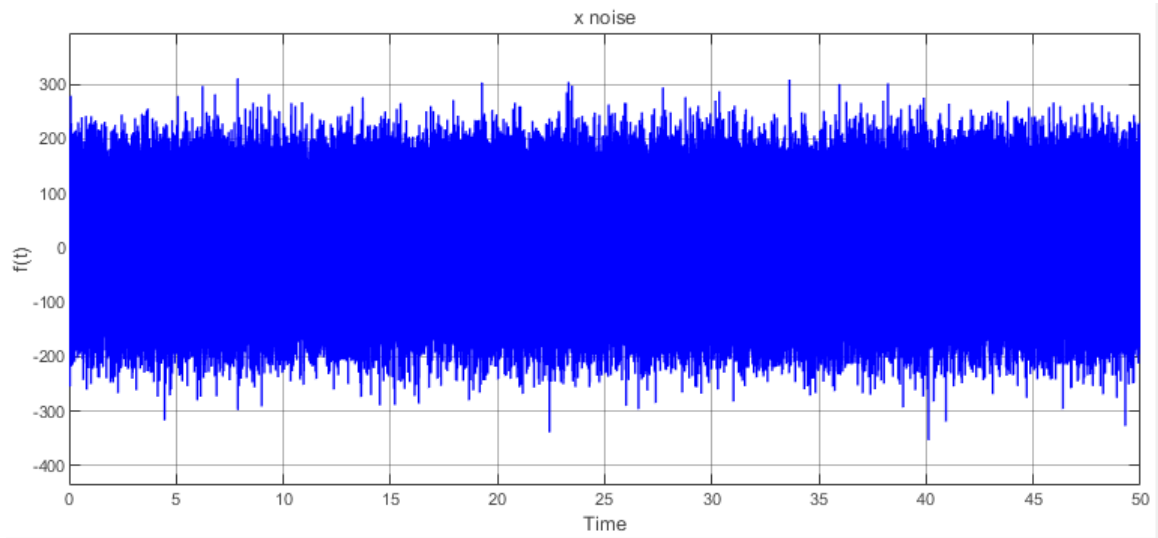


Рис. 13: График шума  $f(t)$

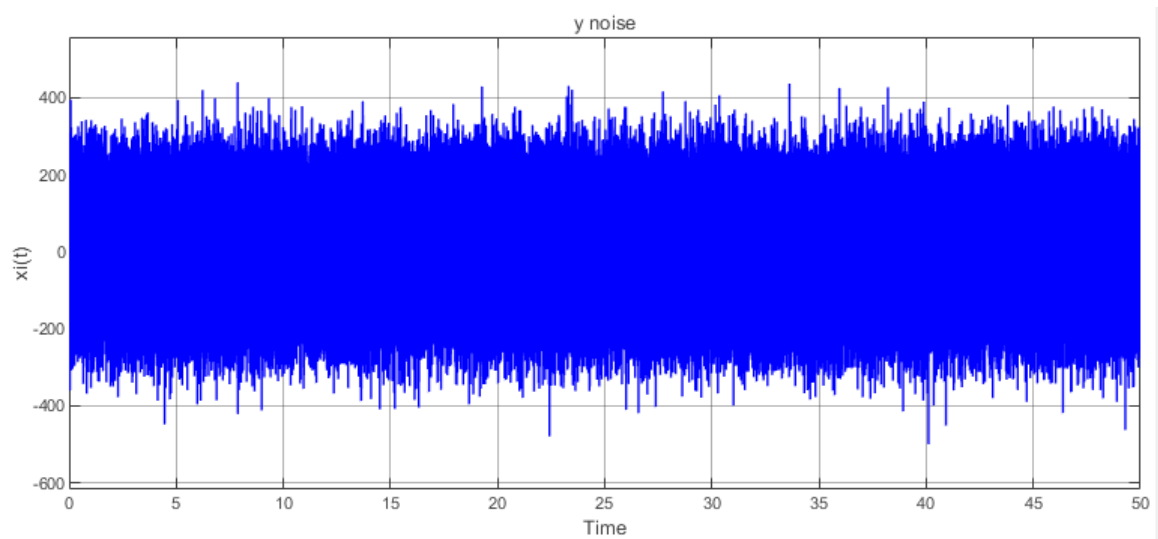


Рис. 14: График шума  $\xi(t)$

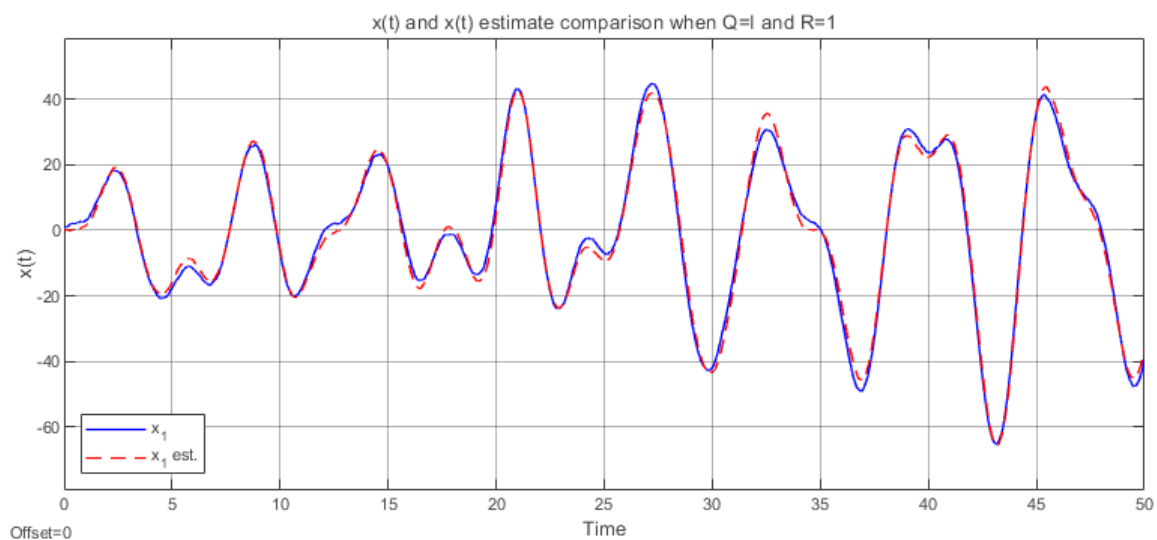


Рис. 15: График  $x_1(t), \hat{x}_1(t)$  при  $L_{I,1}, L_{100I,100}$

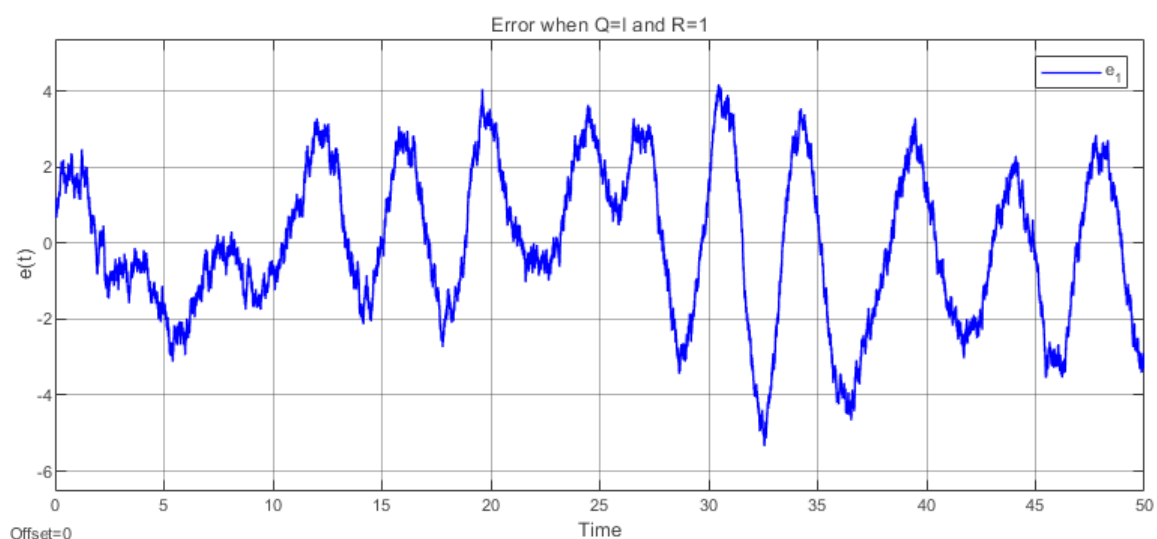


Рис. 16: График  $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$  при  $L_{I,1}, L_{100I,100}$

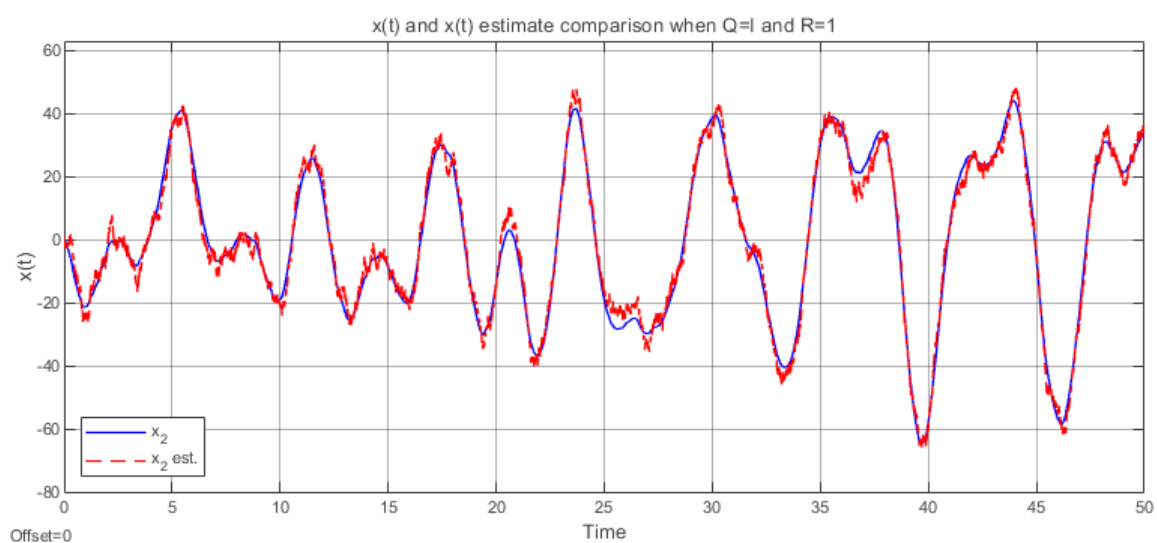


Рис. 17: График  $x_2(t), \hat{x}_2(t)$  при  $L_{I,1}, L_{100I,100}$

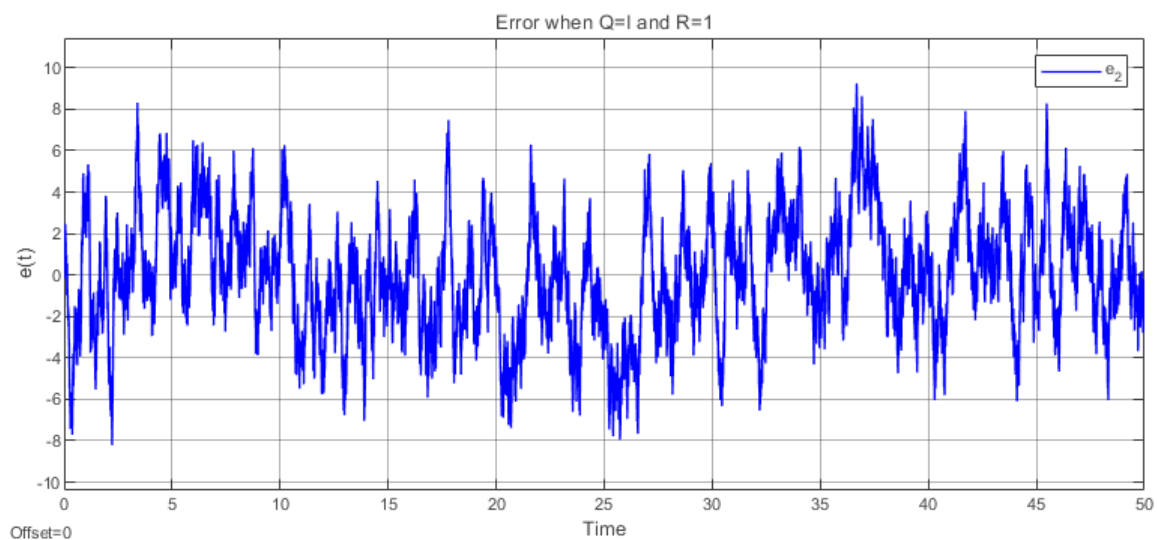


Рис. 18: График  $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$  при  $L_{I,1}, L_{100I,100}$

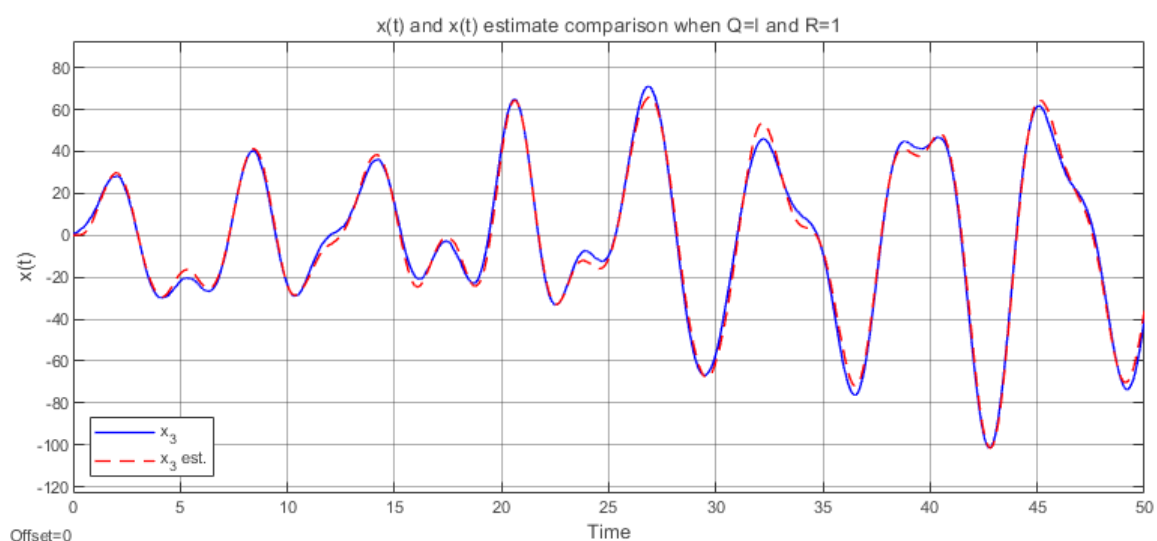


Рис. 19: График  $x_3(t), \hat{x}_3(t)$  при  $L_{I,1}, L_{100I,100}$

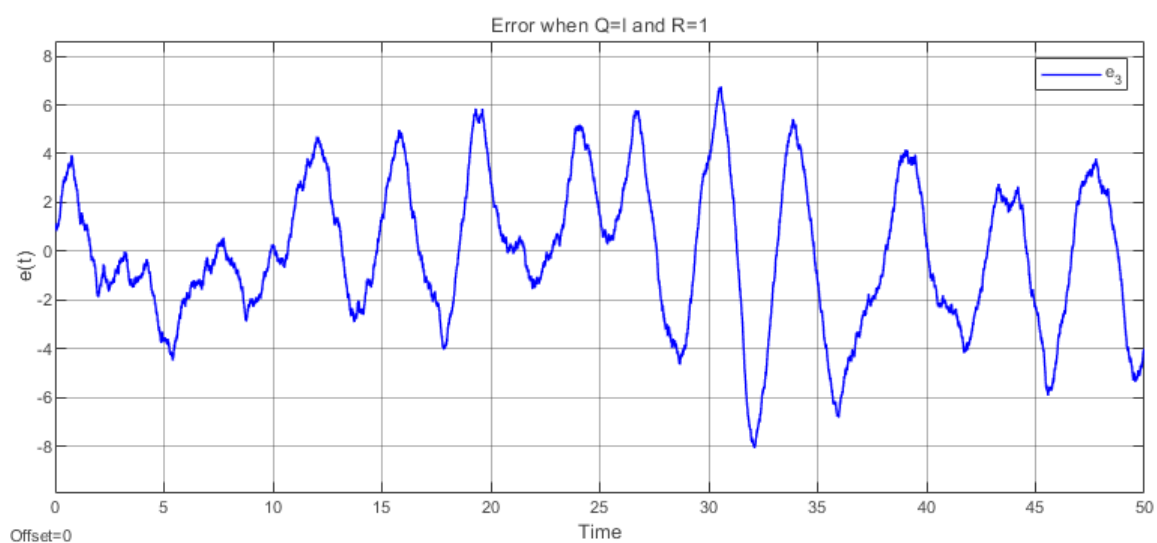


Рис. 20: График  $e_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$  при  $L_{I,1}, L_{100I,100}$

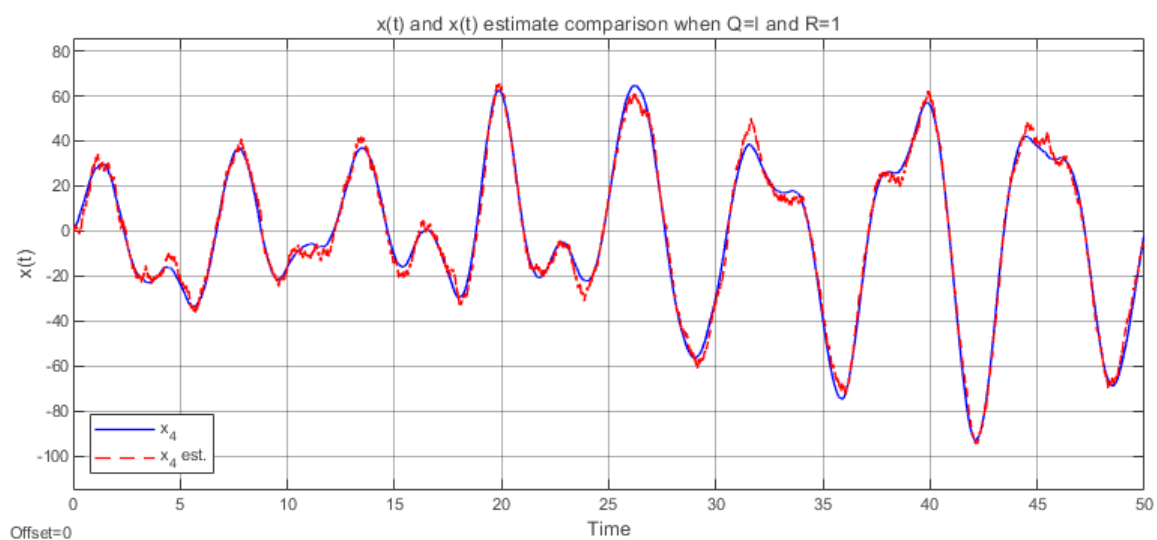


Рис. 21: График  $x_4(t), \hat{x}_4(t)$  при  $L_{I,1}, L_{100I,100}$

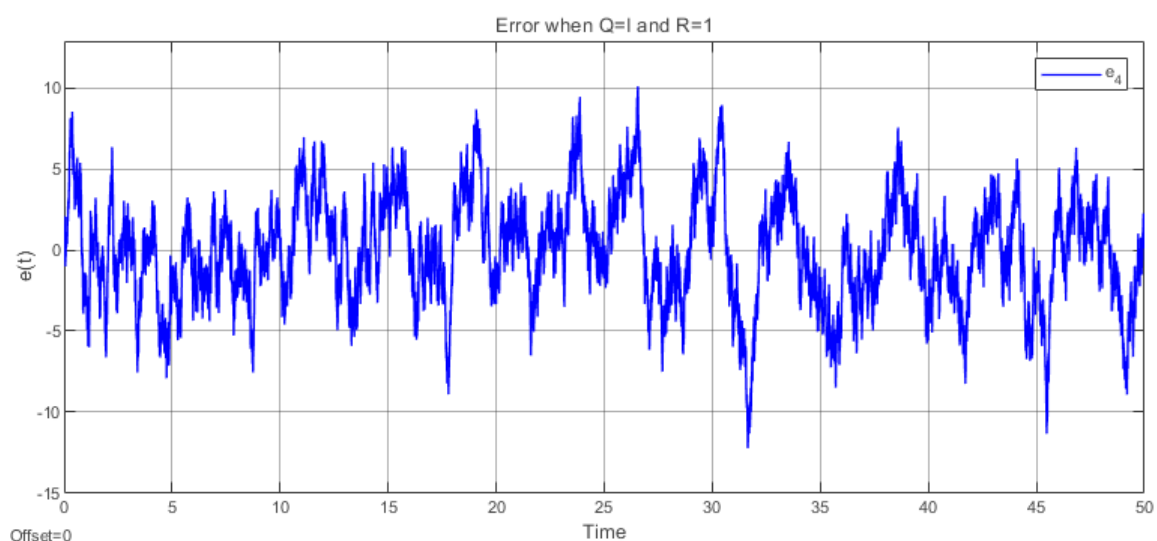


Рис. 22: График  $e_4(t) = x_4(t) - \hat{x}_4(t)$  при  $L_{I,1}, L_{100I,100}$

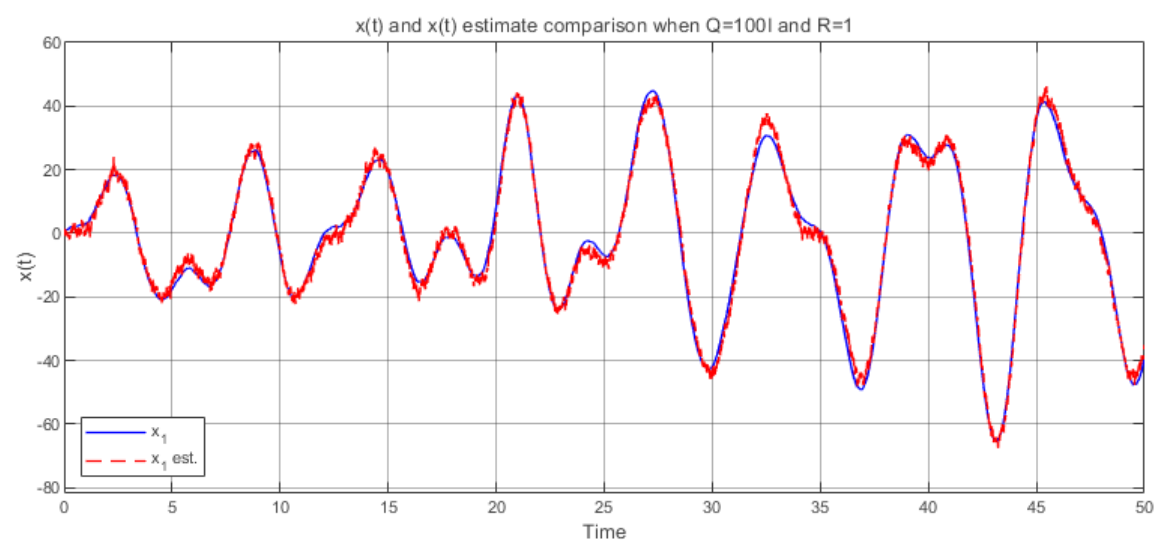


Рис. 23: График  $x_1(t), \hat{x}_1(t)$  при  $L_{100I,1}$

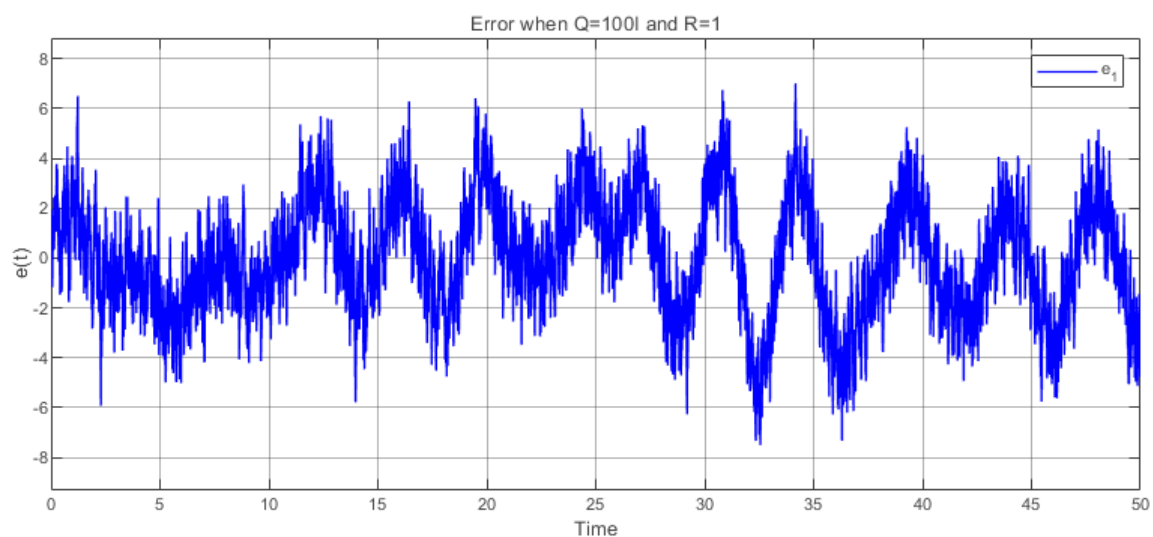


Рис. 24: График  $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$  при  $L_{100I,1}$

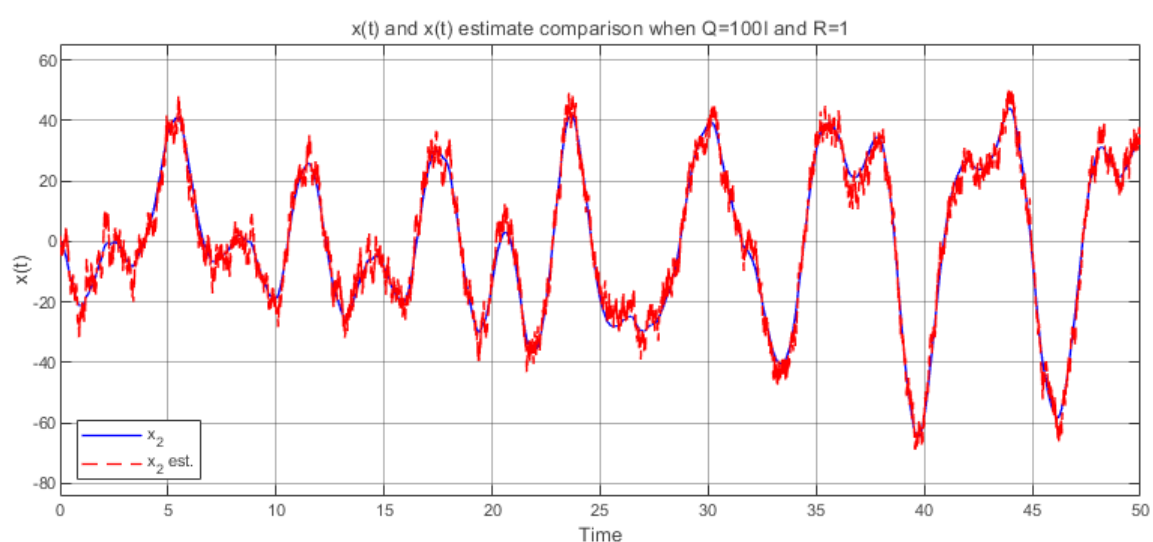


Рис. 25: График  $x_2(t), \hat{x}_2(t)$  при  $L_{100I,1}$

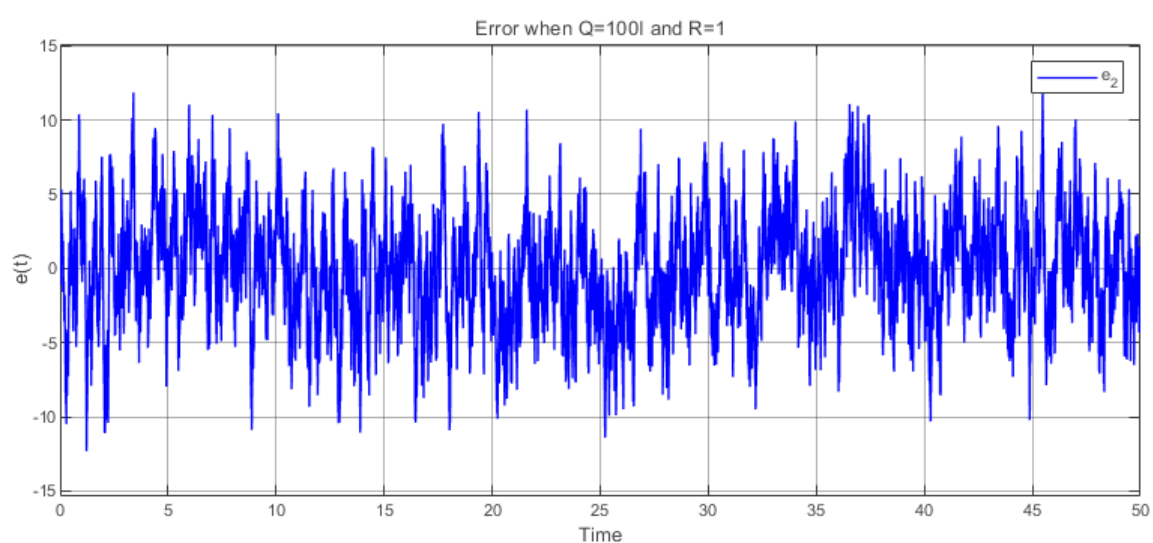


Рис. 26: График  $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$  при  $L_{100I,1}$

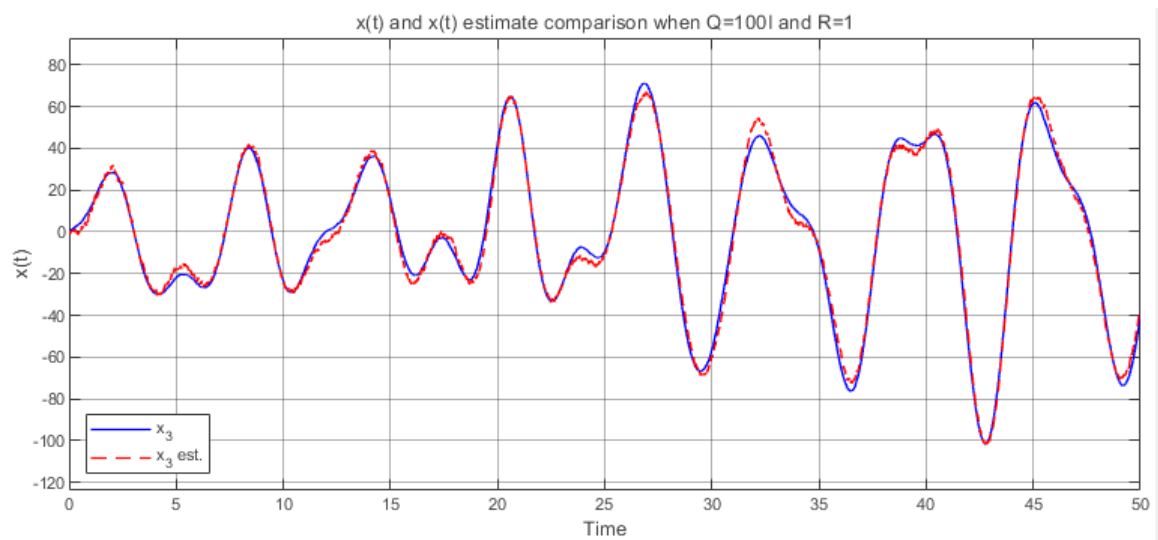


Рис. 27: График  $x_3(t), \hat{x}_3(t)$  при  $L_{100I,1}$

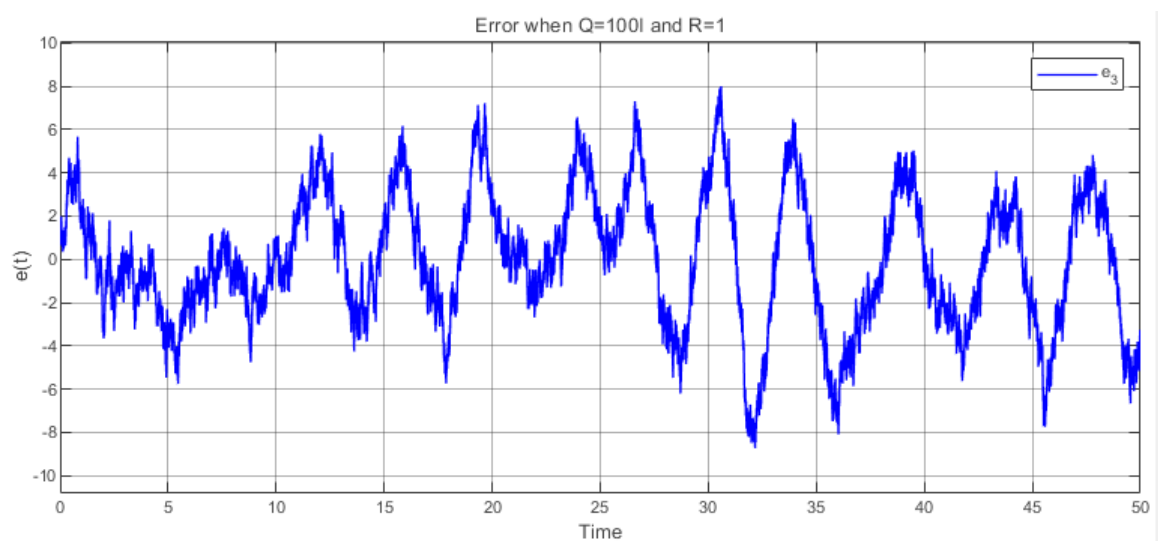


Рис. 28: График  $e_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$  при  $L_{100I,1}$

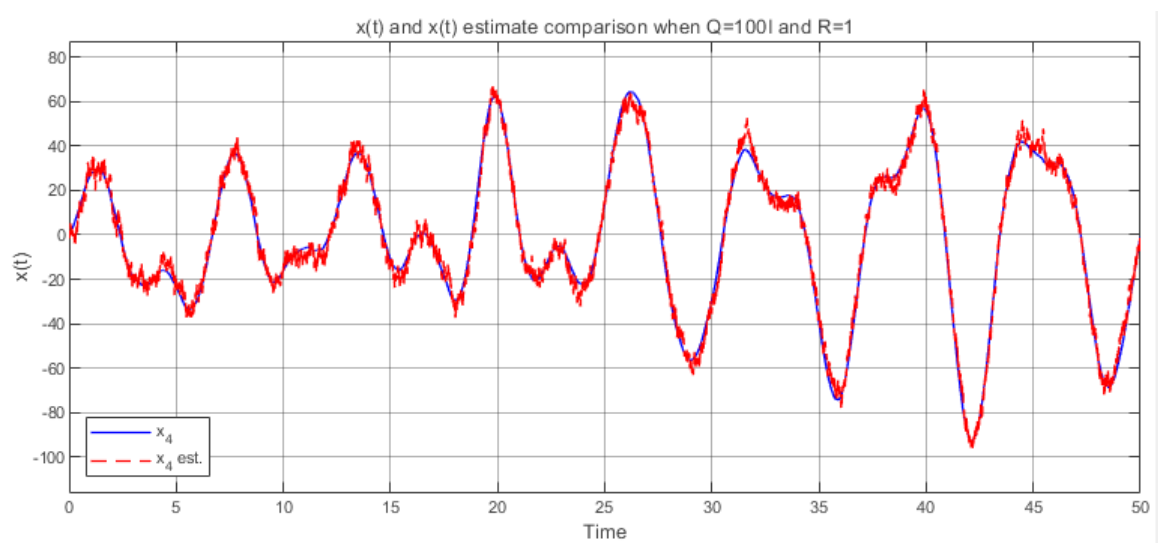


Рис. 29: График  $x_4(t), \hat{x}_4(t)$  при  $L_{100I,1}$



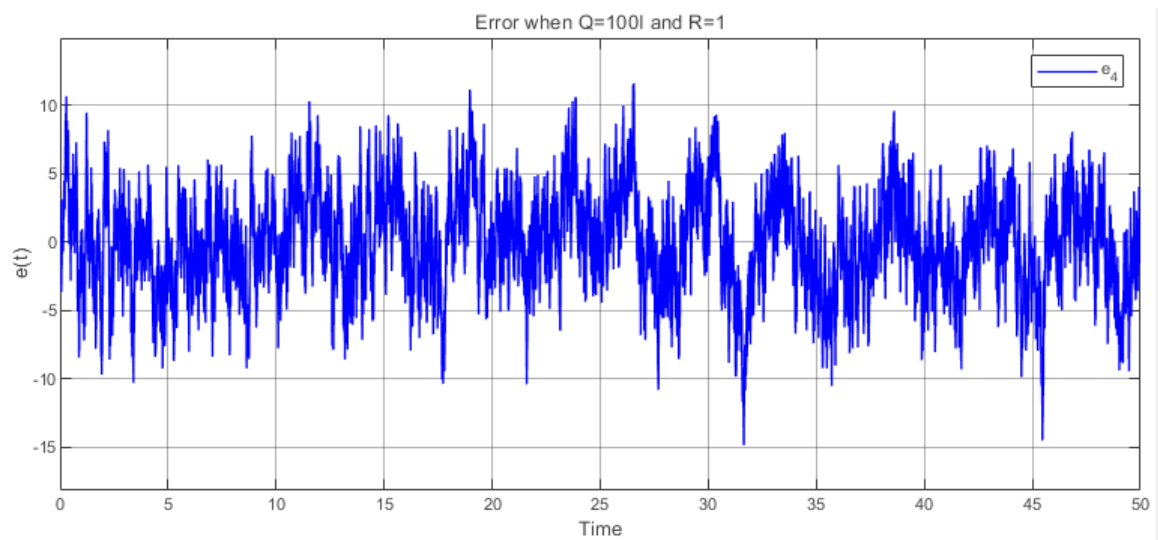


Рис. 30: График  $e_4(t) = x_4(t) - \hat{x}_4(t)$  при  $L_{100I,1}$

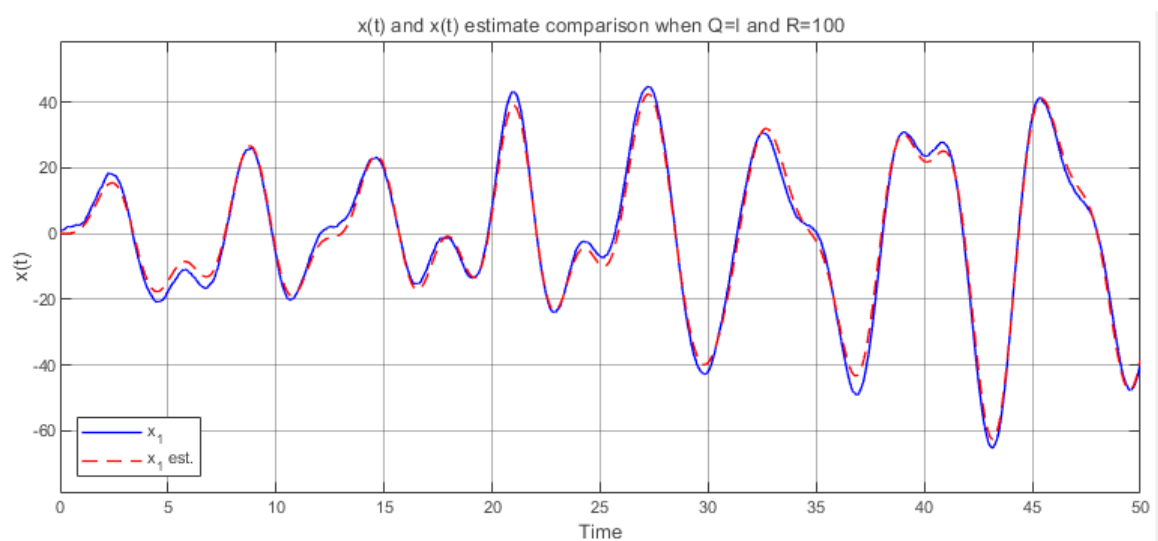


Рис. 31: График  $x_1(t), \hat{x}_1(t)$  при  $L_{I,100}$

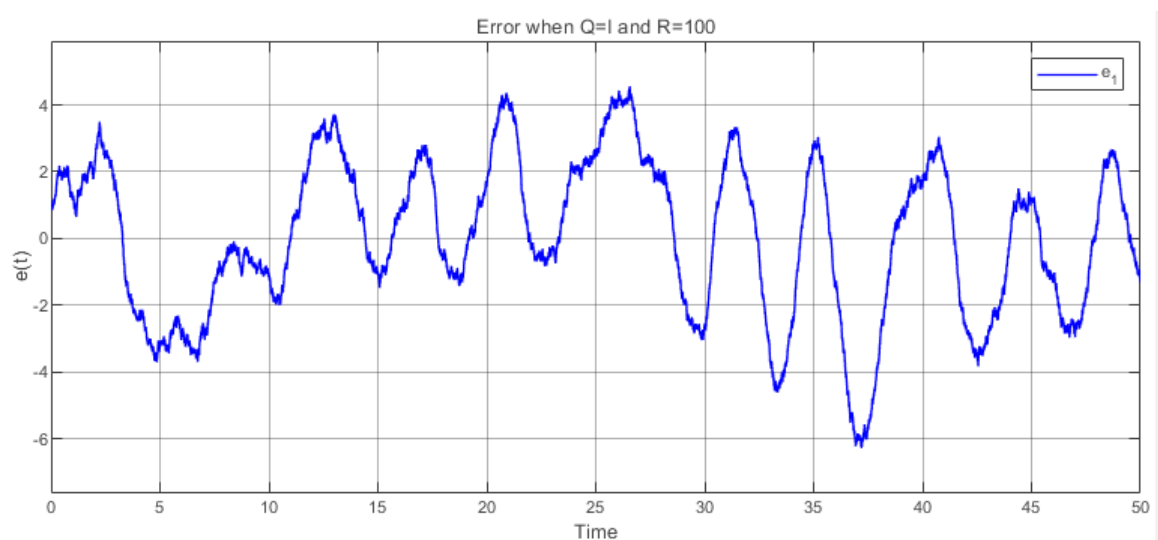


Рис. 32: График  $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$  при  $L_{I,100}$

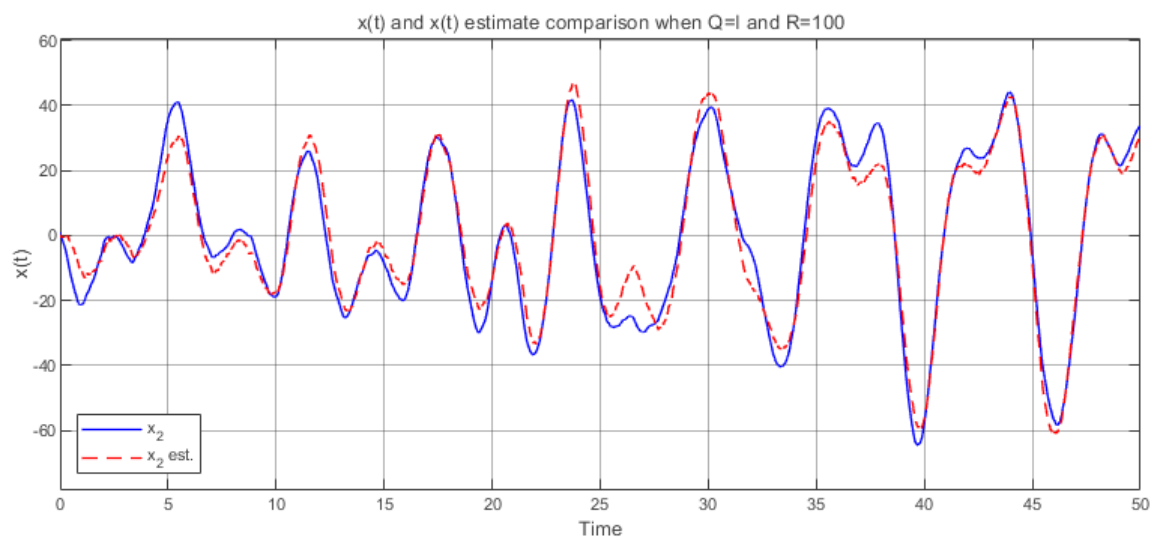


Рис. 33: График  $x_2(t), \hat{x}_2(t)$  при  $L_{I,100}$

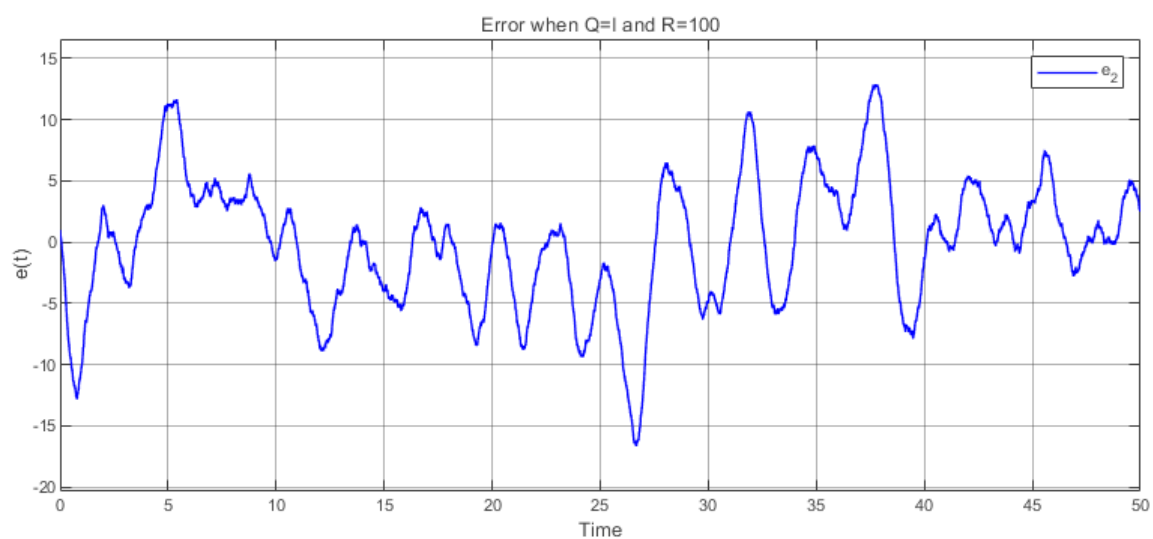


Рис. 34: График  $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$  при  $L_{I,100}$

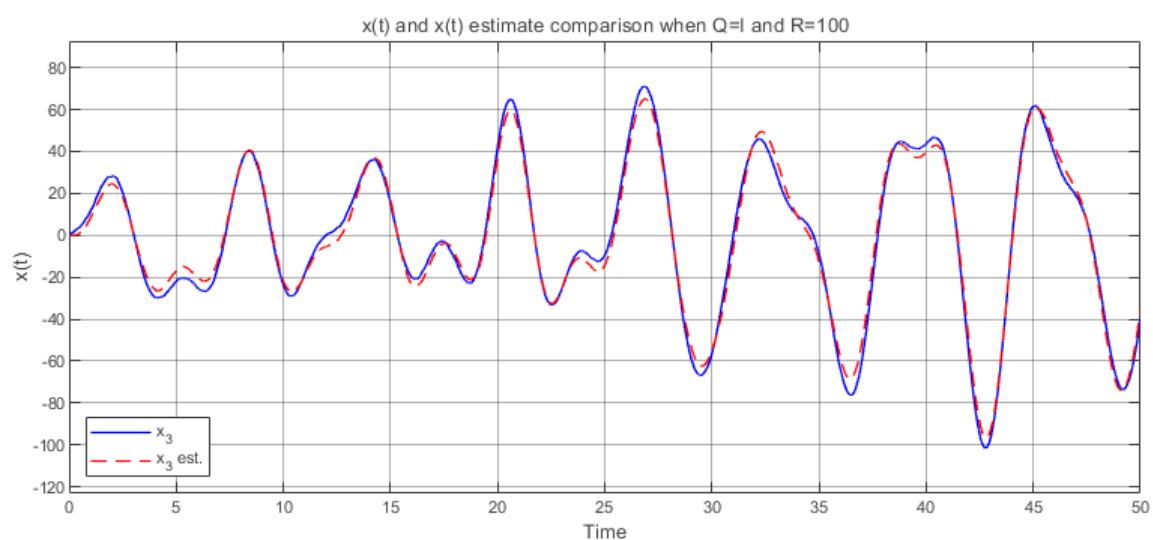


Рис. 35: График  $x_3(t), \hat{x}_3(t)$  при  $L_{I,100}$

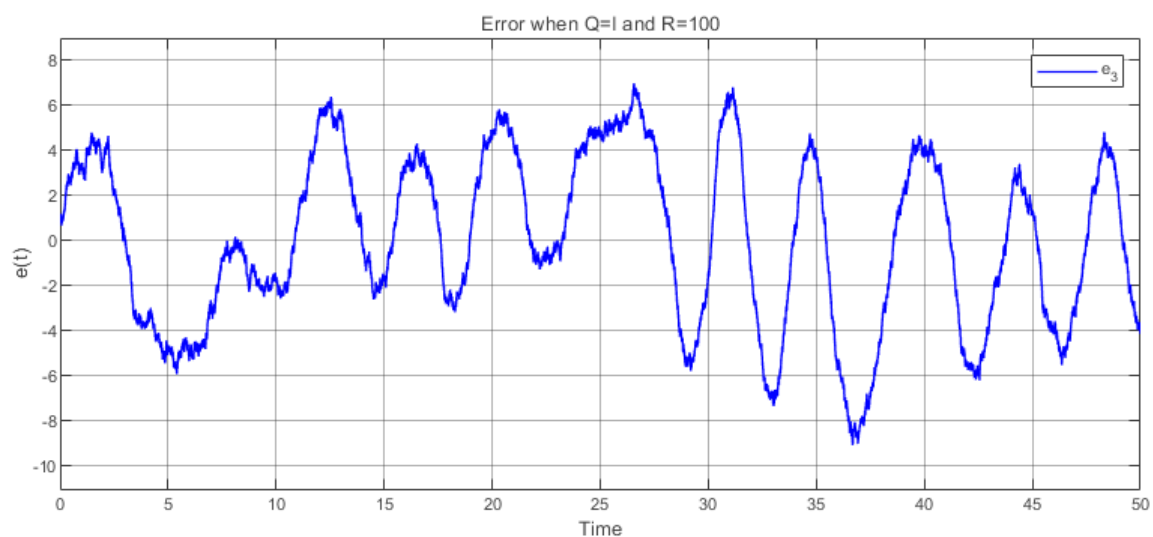


Рис. 36: График  $e_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$  при  $L_{I,100}$

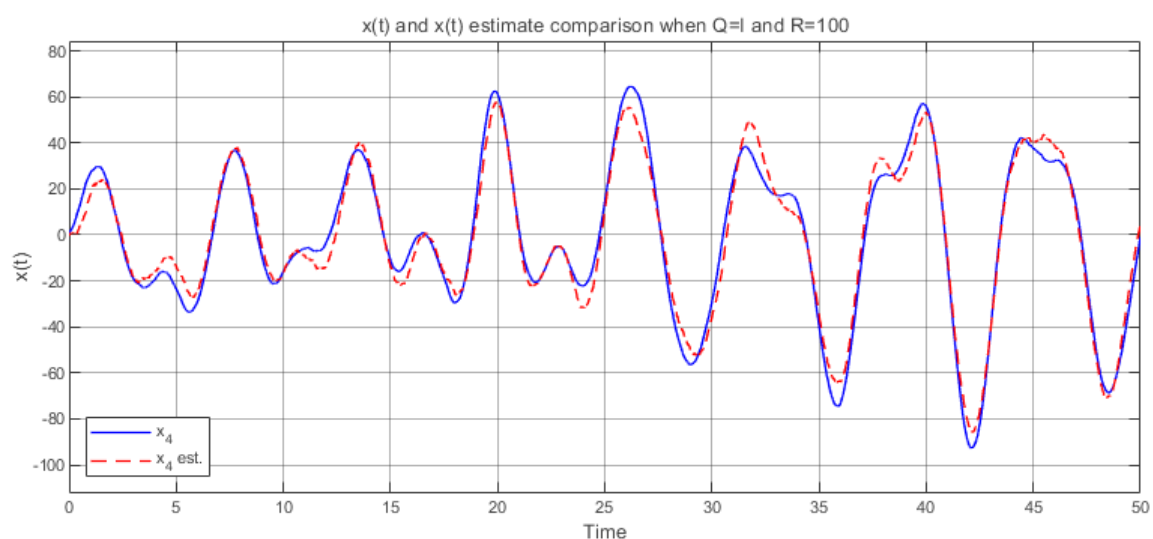


Рис. 37: График  $x_4(t), \hat{x}_4(t)$  при  $L_{I,100}$

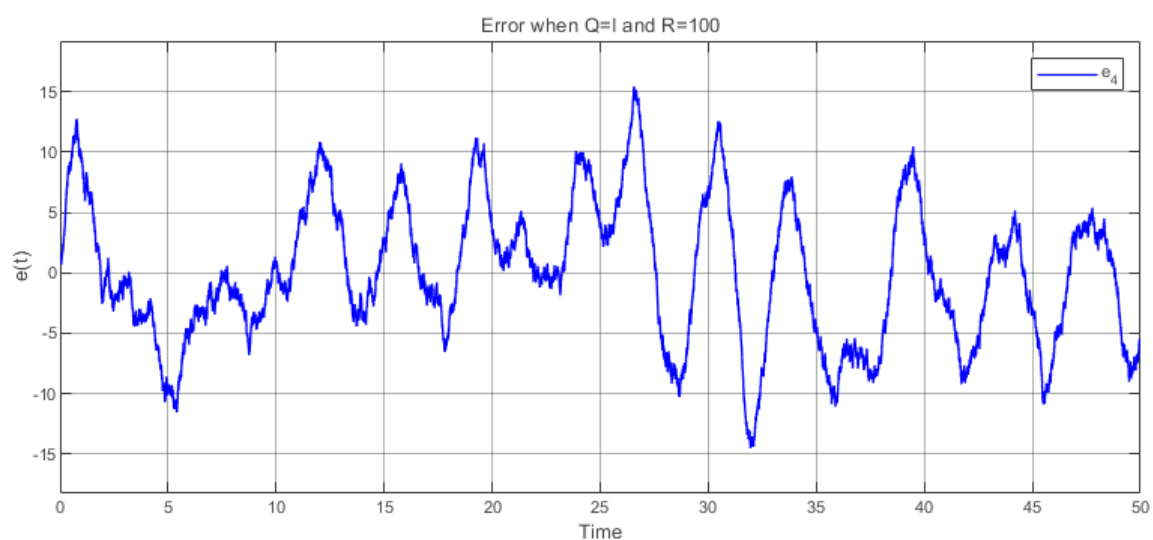


Рис. 38: График  $e_4(t) = x_4(t) - \hat{x}_4(t)$  при  $L_{I,100}$

### Сравнение результатов

Возмущение  $f(t)$  имеет меньшую амплитуду, чем помеха  $\xi(t)$ , т.е.  $f(t) < \xi(t)$ . При  $Q > R$  наблюдатель верит в то, что в среднем больше случайное возмущение  $f$ , чем случайная помеха  $\xi$ . При  $Q < R$  ситуация обратная – наблюдатель меньше верит датчикам, чем прошлым состояниям объекта. На графиках при  $Q < R$  видим, что наблюдатель достаточно уверенно ошибается в повторении поведения системы, так как не верит показаниям  $y$ , т.е. избыточно фильтрует сигнал; при  $Q > R$  наоборот, наблюдатель недостаточно фильтрует сигнал, в результате воспроизведение поведения системы шумное, хотя траектория более точная, чем при  $Q < R$  (например, сравн. рис. 33 с 25). Результаты при  $Q = R$  выглядят усредненно. Наблюдатель точнее повторяет поведение системы в сравнении со случаями при  $Q < R$  и при этом имеет меньше шумов, чем в результатах при  $Q > R$  (например, сравн. рис. 17 с 25, 33).

### Задание 3. Синтез LQG

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f, \\ y = Cx + Du + \xi, \end{cases} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 6 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где  $f(t), \xi(t)$  – детерминированные сигналы (гармонические возмущения).

#### Стабилизируемость и обнаруживаемость

Проверим собственные числа матрицы  $A$ . Программу MATLAB см. листинг 3, приложение В

$$\sigma(A) = \{-4, 0, 4, 8\}$$

Число  $\lambda_1 = -4$  асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым/ненаблюдаемым.  $\lambda_2 = 0$  устойчивое, но не асимптотически. Остальные собственные числа неустойчивые, требуется управляемость/наблюдаемость. Найдём  $A_J, B_J, C_J$

$$A_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix};$$

Полностью нулевых строк в  $B_J$  нет, поэтому система полностью управляема, стабилизируема. В  $C_J$  нулевому столбцу соответствует число  $-4$  в  $A_J$  – система не полностью наблюдаема, обнаруживаема.

## Схема моделирования системы

Построим схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния  $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + (B + LD)u + L(C\hat{x} - y)$  и закона управления  $u = K\hat{x}$ . Снимаем осциллограммы  $u(t), x(t), \hat{x}(t), e(t)$ .

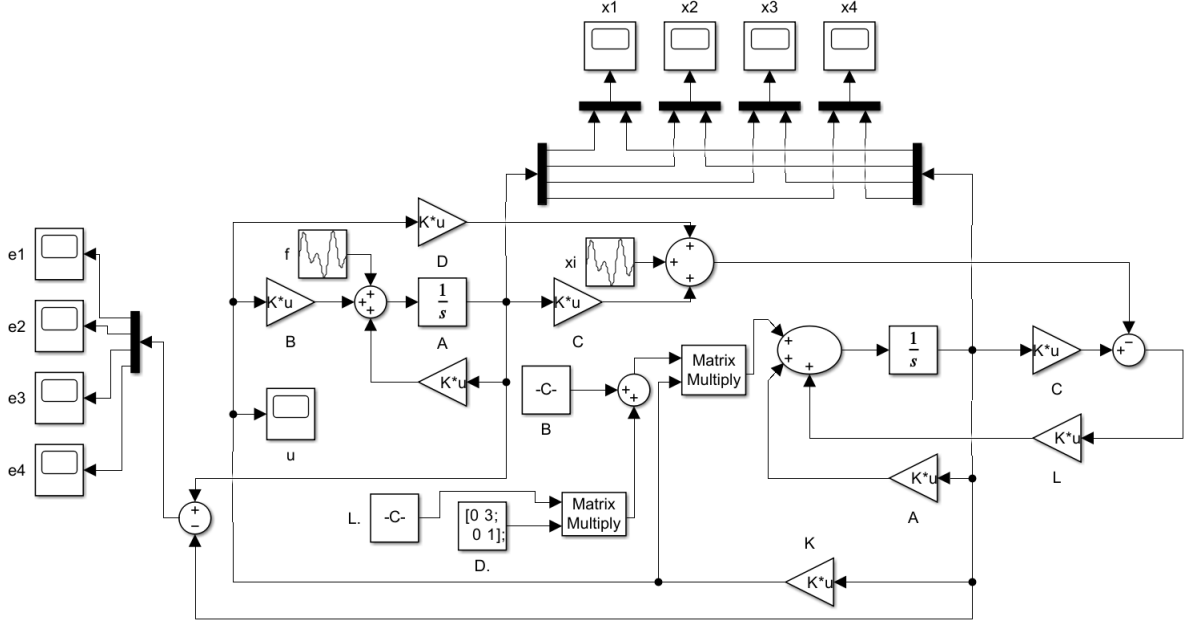


Рис. 39: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния и закона управления

## Пары матриц для регулятора и наблюдателя

Зададимся парами матриц  $(Q_K, R_K)$  для регулятора и  $(Q_L, R_L)$  для наблюдателя. Пускай нам важнее затраты на управление, чем время процесса, а наблюдатель меньше доверяет датчикам, чем прошлым состояниям объекта. Тогда

$$Q_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_K = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad Q_L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad R_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

## Синтез регулятора

Синтезируем матрицу регулятора с помощью матричного уравнения типа Риккати аналогично предыдущим заданиям

$$K = \begin{bmatrix} -10.2086 & -5.2443 & 9.8924 & -5.5605 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\sigma(A + BK) = \{-4, -4.8643, -1.5367, -8.1226\};$$

Регулятор синтезирован корректно.

### Синтез наблюдателя

Синтезируем матрицу коррекции наблюдателя с помощью матричного уравнения типа Риккати аналогично предыдущим заданиям

$$L = \begin{bmatrix} 1.3660 & -4.7979 \\ -1.3660 & -6.2121 \\ -1.3660 & 6.2121 \\ -1.3660 & -4.7979 \end{bmatrix},$$

$$\sigma(A + LC) = \{-4, -2.6486, -6.9282, -8.5431\};$$

Наблюдатель синтезирован корректно.

### Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование с нулевыми начальными условиями наблюдателя

$$\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Построим график формируемого регулятором управления  $u(t)$ , сравнительные графики  $x(t)$  и  $\hat{x}(t)$ , а также график ошибки наблюдателя  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . Шумы примем такими

$$f(t) = 0.1 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 0.3 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right),$$

$$\xi(t) = -0.5 \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 0.2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right);$$

Результаты представлены на рис. 40–48

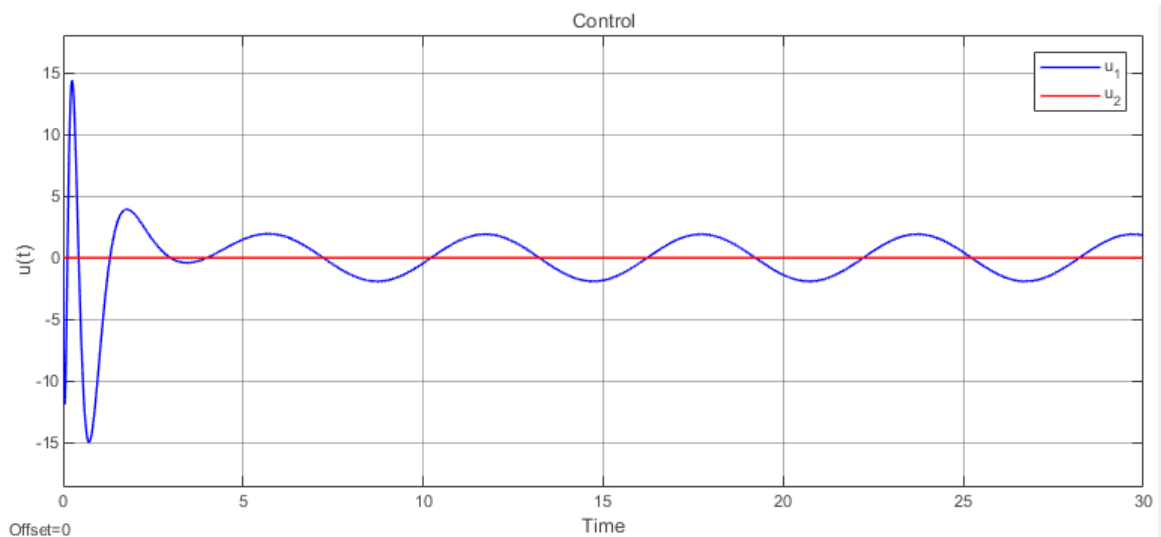


Рис. 40: График управления  $u(t)$

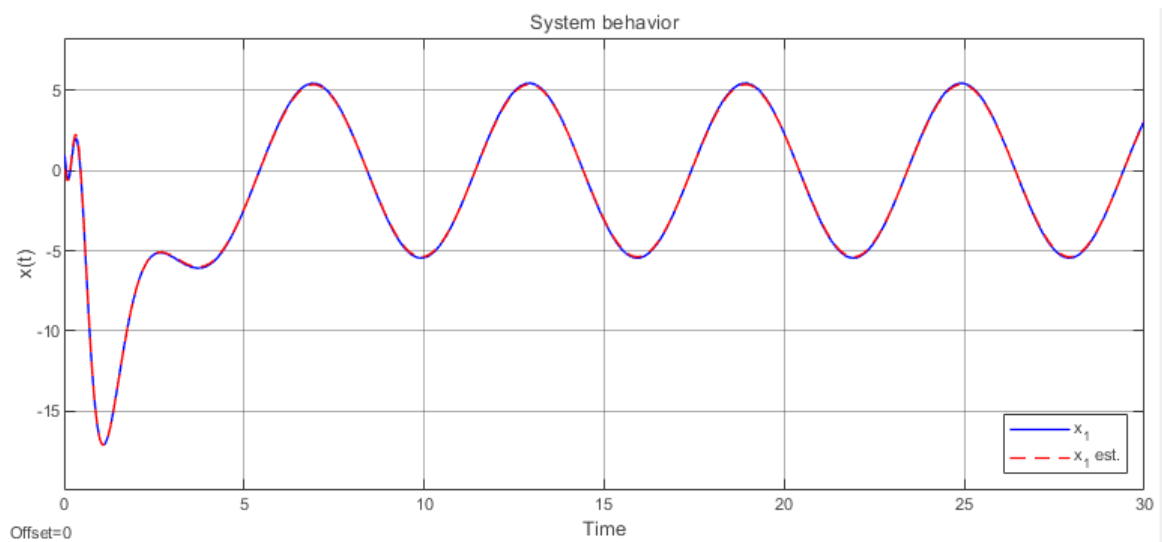


Рис. 41: График  $x_1(t), \hat{x}_1(t)$

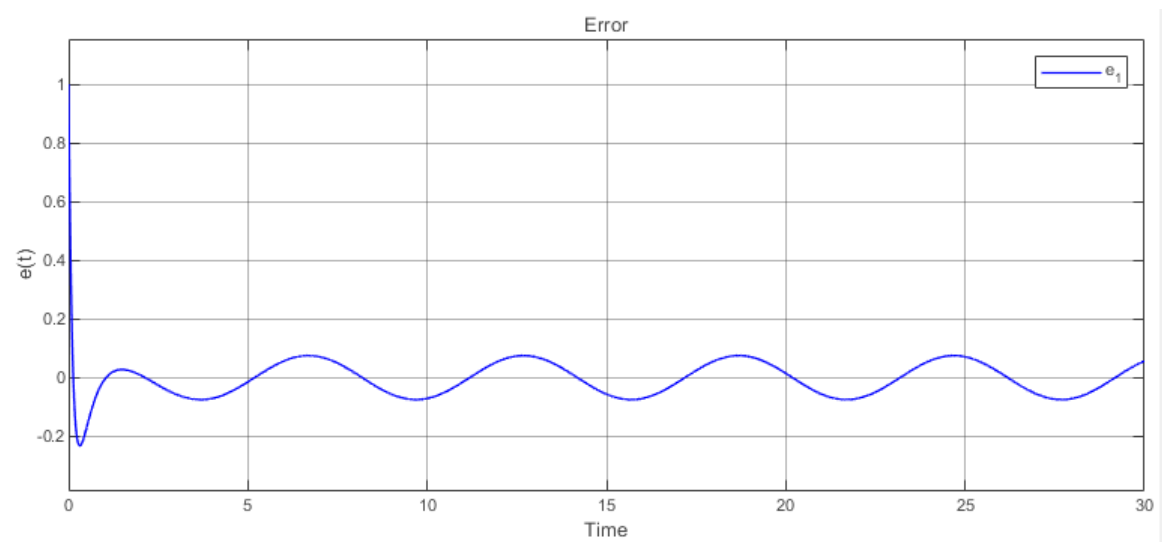


Рис. 42: График  $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$

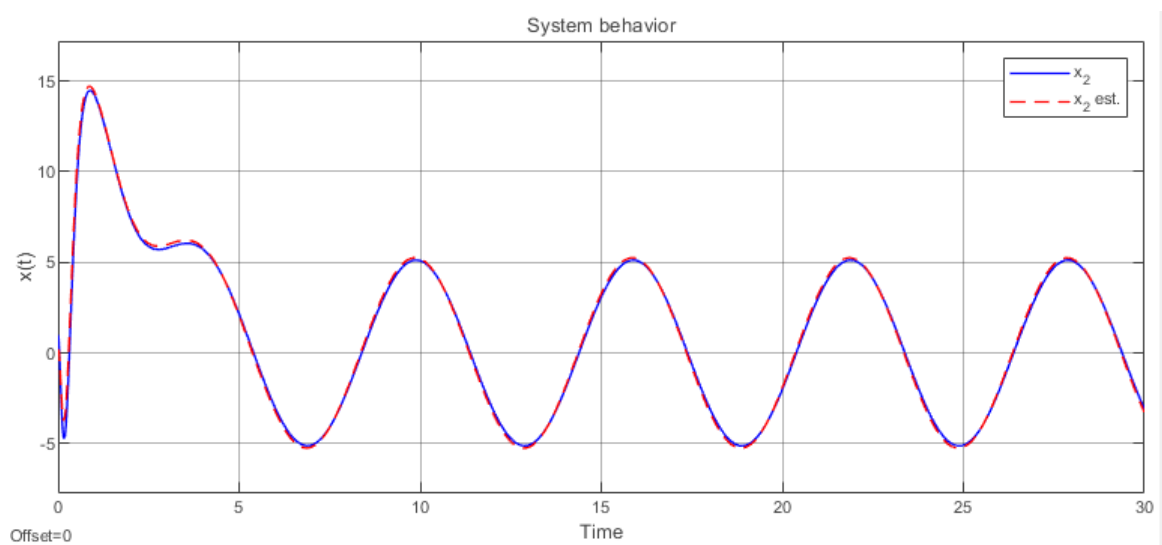


Рис. 43: График  $x_2(t), \hat{x}_2(t)$

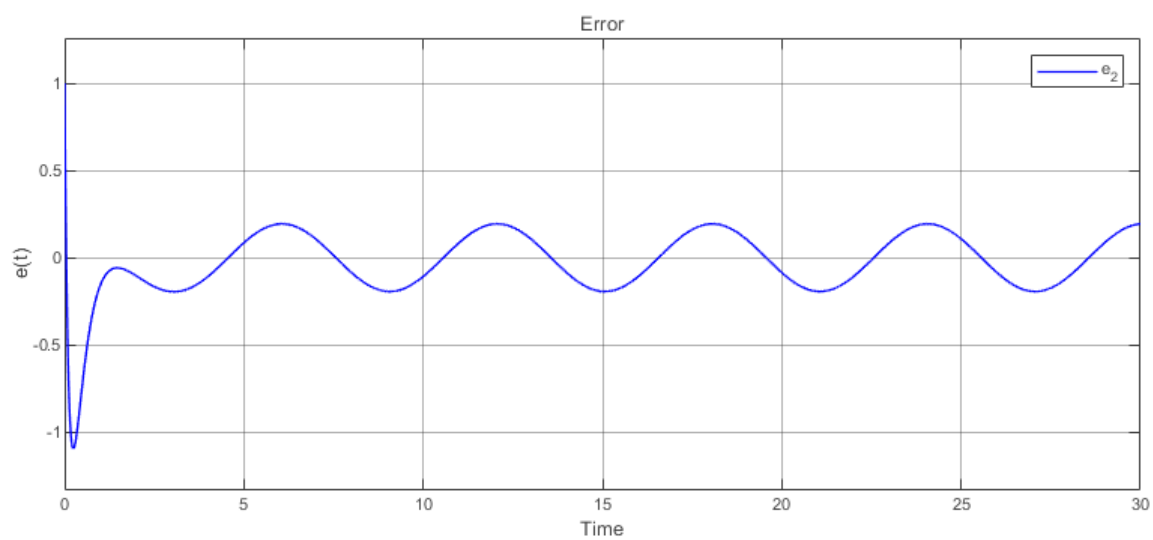


Рис. 44: График  $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$

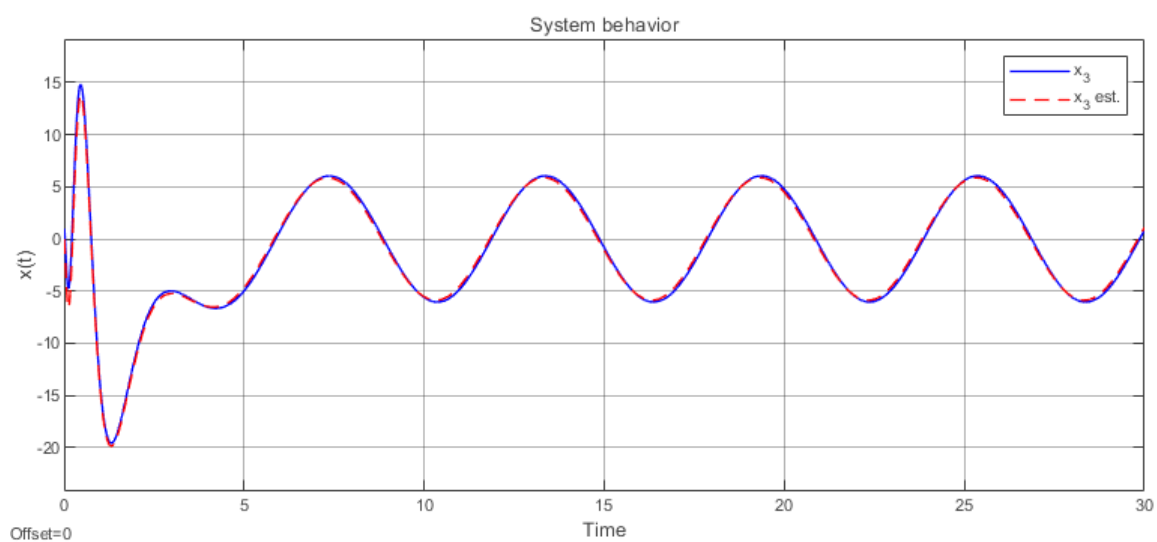


Рис. 45: График  $x_3(t), \hat{x}_3(t)$

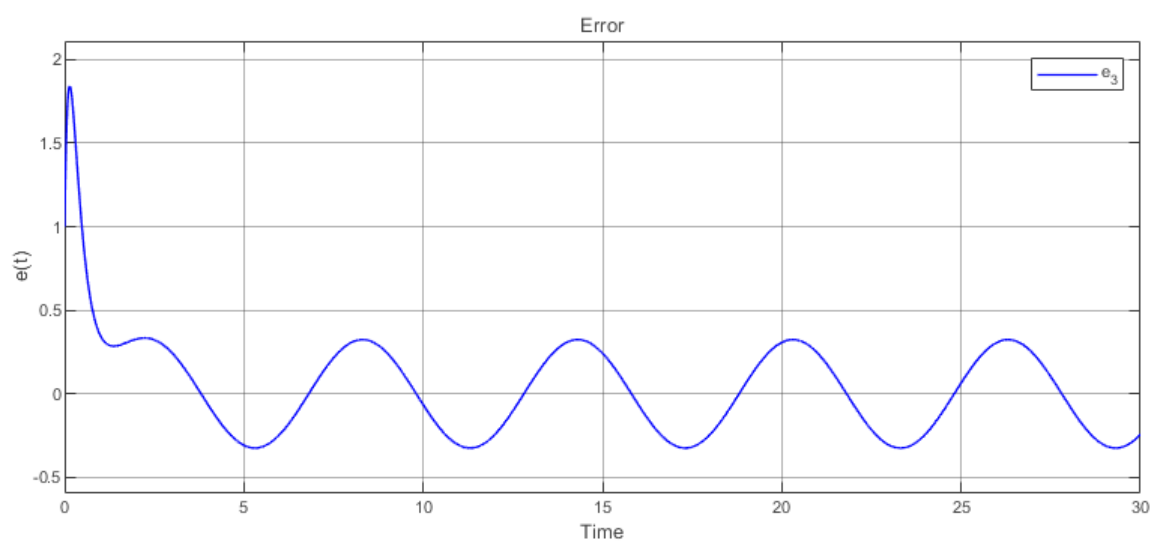


Рис. 46: График  $e_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$



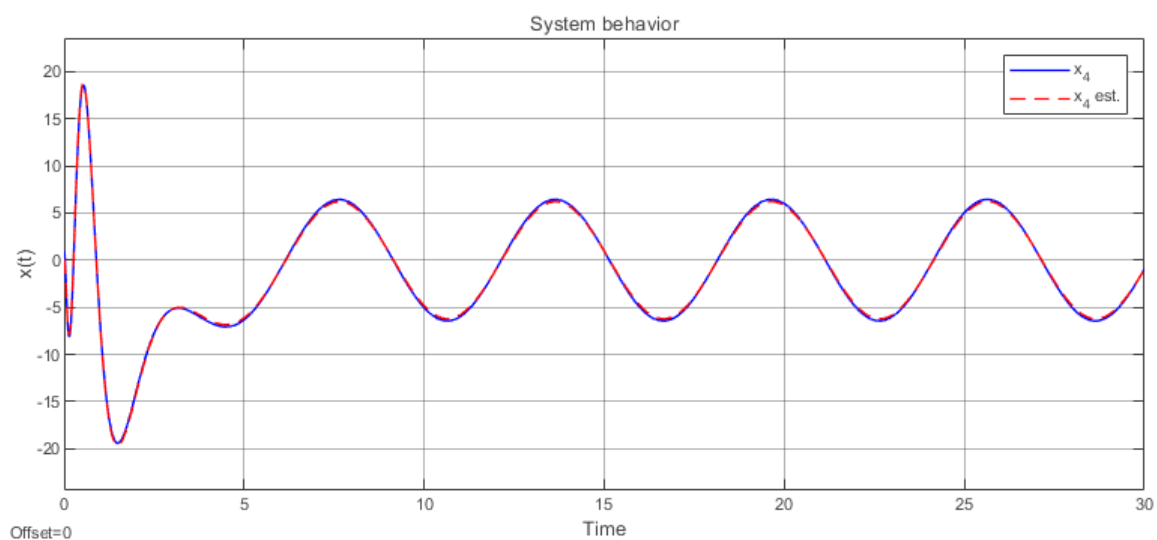


Рис. 47: График  $x_4(t), \hat{x}_4(t)$

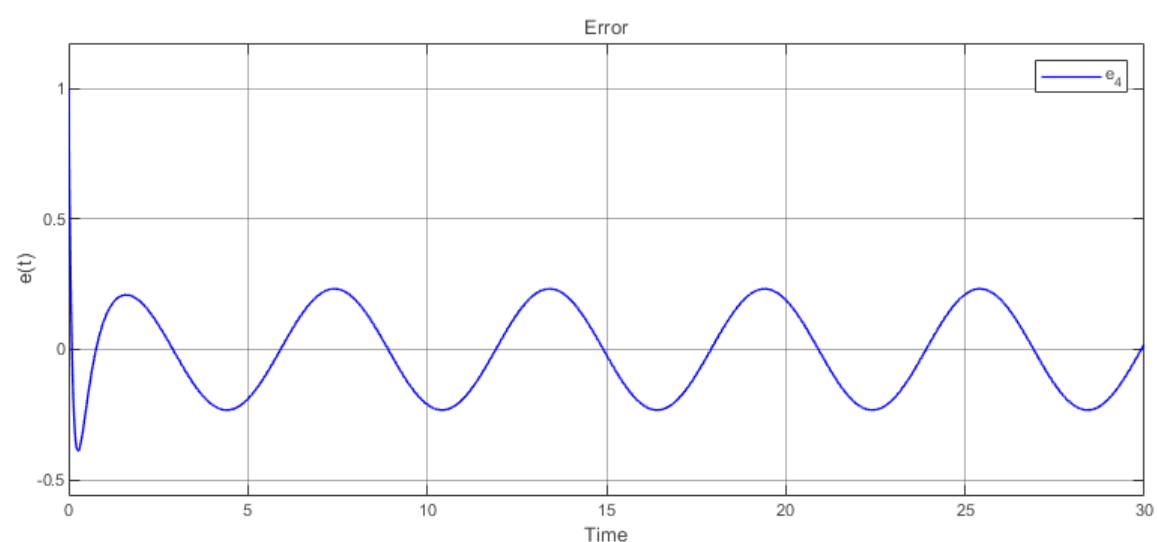


Рис. 48: График  $e_4(t) = x_4(t) - \hat{x}_4(t)$

### Описание результатов

Наблюдатель достаточно хорошо воспроизводит истинное поведение системы, но присутствует устоявшаяся ошибка. Регулятор не привел  $x(t)$  к нулю, но ему удалось стабилизировать систему к незатухающим колебаниям (без роста и убывания амплитуды). По управлению видим некоторое перерегулирование в начале.

### Вывод

В ходе выполнения работы были рассмотрены виды оптимальных регуляторов и наблюдателей – LQR, фильтр Калмана, LQG. Для LQR и фильтра Калмана были исследованы различные пары значений матриц, использующихся для решения матричного уравнения типа Риккати. В каждом задании было проведено моделирование системы, результаты были сравнены. Полученные графики подтверждают корректность расчетов и рассуждений.

## Приложение А

```
% plant parameters
A = [5 2 7; 2 1 2; -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];
x0 = [1;1;1];

% A matrix eigenvalues
eig_A = eig(A)

% Jordan matrix
[P_J, A_J] = jordan(A);
P_Jre(:,1) = P_J(:,1);
P_Jre(:,2) = imag(P_J(:,2));
P_Jre(:,3) = real(P_J(:,3));
A_Jre = P_Jre^-1 * A * P_Jre
B_jre = P_Jre^-1 * B

% solving Riccati
a = 4;
Q = a*eye(3);
R = a*1;

[P,K,e]=icare(A,B,Q,R);
P
K=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K)

% quality functional
J_min = x0'*P*x0
```

Листинг 1: Программа для задания 1

## Приложение Б

```
% plant parameters
A = [0 1 0 1;
     -26 -7 20 -11;
     0 1 -1 2;
     16 4 -14 8];
C = [-1 0 1 -1];

% A matrix eigenvalues
eig_A = eig(A)

% Jordan matrix
[P_J, A_J] = jordan(A);
P_Jre(:,1) = real(P_J(:,1));
P_Jre(:,2) = imag(P_J(:,2));
P_Jre(:,3) = real(P_J(:,3));
P_Jre(:,4) = imag(P_J(:,4));
A_Jre = P_Jre^-1 * A * P_Jre
C_jre = C*P_Jre

% solving Riccati
a = 100;
```

```

Q= a*eye(4);
R = a*1;

[P,L,e]=icare(A',C',Q,R);
P
L=-P*C'*R^-1
e=eig(A+L*C)

```

Листинг 2: Программа для задания 2

## Приложение В

```

% plant parameters
A = [2 0 -4 2;
      0 2 -2 4;
      -4 -2 2 0;
      2 4 0 2];
B= [2 0;
     4 0;
     6 0;
     8 0];
C= [-2 2 2 2;
     2 0 0 2];
D=[0 3;
   0 1];

% A matrix eigenvalues
eig_A = eig(A)

% Jordan matrix
[P_J, A_J] = jordan(A)
B_J = P_J^-1 * B
C_J = C*P_J

% regulator
Qr= eye(4);
Rr = 10*eye(2);

[Pr,K,e]=icare(A,B,Qr,Rr);
K=-inv(Rr)*B'*Pr
ek=eig(A+B*K)

% observer
Ql= 2*eye(4);
Rl = eye(2);

[P1,L,e]=icare(A',C',Q1,R1);
L=-P1*C'*R1^-1
e1=eig(A+L*C)

```

Листинг 3: Программа для задания 3