Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

Задание 1. Синтез регулятора с заданной степенью устойчивости

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Управляемость и стабилизируемость

Найдем собственные числа матрицы A и определим управляемость каждого из них. Программа для вычислений в `MATLAB` представлена на листинге 1 в приложении 1

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}$$

Число $\lambda_1 = -2$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. Комплексная пара $\lambda_{2,3}$ имеет положительную действительную часть – эти собственные числа неустойчивые, нужна управляемость. Разложим A в вещественную жорданову форму, найдем вектор B в базисе собственных векторов матрицы A

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Только число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, так как первый элемент B_{Jre} равен нулю. Остальные собственные числа управляемые. Таким образом, система не полностью управляема, стабилизируема.

Степень устойчивости

Любой степени устойчивости при помощи регулятора $u = Kx$ добиться не получится, так как система не полностью управляема. Степень устойчивости системы α – самое близкое к правой комплексной полуплоскости собственное число матрицы A, находящееся в левой комплексной полуплоскости. Проверка на близость осуществляется через действительную часть собственного числа. Имеем

$$\mathrm{Re}\{\lambda_1 = -2\} = -2,\ \mathrm{Re}\{\lambda_{2,3} = 2 \pm i\} = 2;$$

Таким образом, степень устойчивости системы $\alpha = 2$. Это максимум. Устойчивость в данном случае подразумевается экспоненциальная.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Построим схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$, замкнутой регулятором $u = Kx$, используя `SIMULINK`

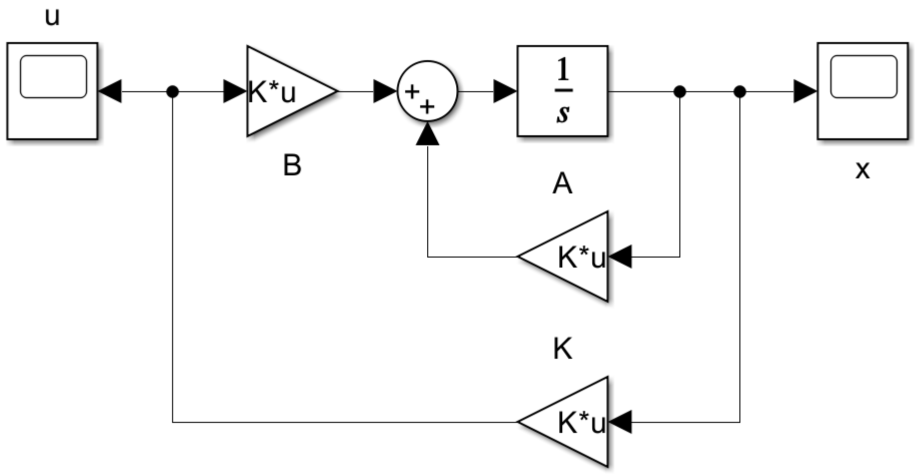

Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Значения желаемой степени устойчивости

Возьмем достаточно отличающиеся достижимые степени устойчивости в диапазоне $0 < \alpha \leq 2$

$$\alpha_1 = 2$$
$$\alpha_2 = 0.1$$

Синтез регулятора

Для каждого из выбранных значений α синтезируем регулятор, обеспечивающий заданную степень устойчивости, при помощи матричного неравенства типа Ляпунова

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0, \ K = YP^{-1}$$

Найдем для $\alpha_{1,2}$ соответствующие матрицы регулятора $K_{1\,\alpha i}$ **без ограничений на управление**. Пользуемся пакетом `cvx` для `MATLAB`. Получаем

$$K_{1\,\alpha 1} = \begin{bmatrix} 2.7699 & -19.5247 & 1.8232 \end{bmatrix}, \ K_{1\,\alpha 2} = \begin{bmatrix} -1.9735 & -4.0489 & -2.7179 \end{bmatrix}$$

Найдем для $\alpha_{1,2}$ соответствующие матрицы регулятора $K_{2\,\alpha i}$ **совместно с решением задачи минимизации управления**.

Приложения

Приложение 1

```
to be done
```

Листинг 1: Программа для задания 1