Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №С
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ: ФРАНКИС, ДЭВИСОН И НАБЛЮДАТЕЛИ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Задание 1. Слежение и компенсация: матричные уравнения **2**

1.1 Характер внешнего возмущения 2

1.2 Генератор задающего воздействия 2

1.3 Схема моделирования системы 3

1.4 Синтез компоненты обратной связи 3

1.5 Общий вид матричных уравнений Франкиса-Дэвисона 4

1.6 Синтез компоненты слежения 4

1.7 Синтез компоненты компенсации по входу 4

1.8 Компьютерное моделирование 5

1.9 Сравнение результатов 7

2 Приложение А **7**

Задание 1. Слежение и компенсация: матричные уравнения

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f f, \\ y = Cx + Du + D_f f, \end{cases} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

генератор внешнего возмущения

$$\begin{cases} \dot{w} = \Gamma_f w_f, \\ f = Y_f w_f, \end{cases} \quad w_f(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и генератор задающего воздействия

$$\begin{cases} \dot{w}_g = \Gamma_g w_g, \\ g = Y_g w_g, \end{cases} \quad w_g(0)$$

при параметрах объекта управления

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ B_f = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}^T,\ D = 2,\ D_f = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}^T$$

и параметрах генератора

$$\Gamma_f = \begin{bmatrix} 25 & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3 & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31 & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix},\ Y_f = \begin{bmatrix} 8 & -20 \\ 2 & -6 \\ -6 & 16 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}^T,\ g(t) = 4\sin(t) - 1;$$

Программа для задания 1 находится в приложении А на листинге 1

Характер внешнего возмущения

Найдем собственные числа матрицы Γ_f, чтобы определить характер внешнего возмущения

$$\sigma(\Gamma_f) = \{\pm i, \pm 3i\}$$

Спектр состоит только из мнимых чисел. Характер возмущения – гармоники без роста и затухания амплитуды с течением времени.

Генератор задающего воздействия

Через модель осциллятора $x(t) = A\cos(\omega t) = 0, y(t) = A\sin(\omega t) = 4\sin(t)$ и $\dot{z}(t) = 0, z(t) = -1$ при $g(t) = 4\sin(t) - 1$ определим $\Gamma_g, Y_g, w_g(0)$

$$\Gamma_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ Y_g = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ w_g(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Схема моделирования системы

Система замкнута регулятором

$$u = Kx + K_g w_g + K_f w_f,$$

обеспечивающим выполнение целевого условия

$$\lim_{t\to\infty} |g(t) - y(t)| = 0;$$

Построим схему моделирования системы в `SIMULINK`

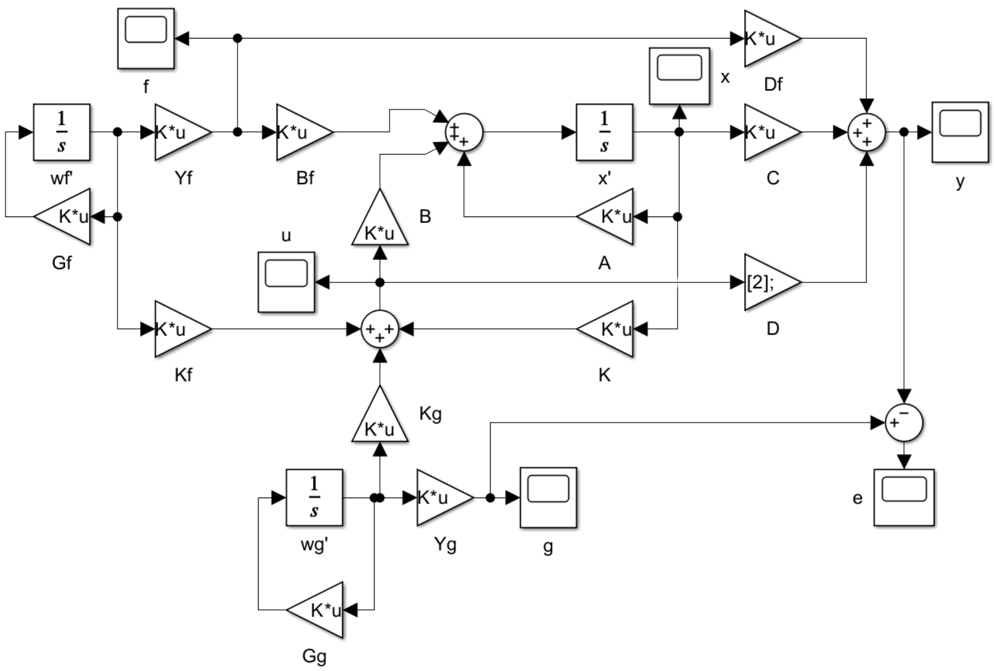


Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Строим графики $f(t), g(t), u(t), x(t), y(t), e(t)$.

Синтез компоненты обратной связи

Исследуем систему на стабилизируемость

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}, \ A_{J_re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \ B_{J_re} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Система не полностью управляема, стабилизируема. Максимальная степень устойчивости $\alpha = 2$.

Синтезируем компоненту обратной связи K с помощью матричного уравнения типа Риккати

$$A^T P + PA + Q - \nu PBR^{-1}B^T P + 2\alpha P = 0, \ K = -R^{-1}B^T P;$$

при $Q = I, \nu = 2, R = 1, \alpha = 2$. Получаем

$$K = \begin{bmatrix} 2.1111 & -13.4448 & 1.6787 \end{bmatrix},$$

$$\sigma(A + BK) = \{-2, -2.3951 \pm 4.3138i\};$$

Желаемая степень устойчивости достигнута – регулятор синтезирован корректно.

Общий вид матричных уравнений Франкиса-Дэвисона

Матричные уравнения Франкиса-Дэвисона в общем виде представляются системой

$$\begin{cases} AP + BK + Y_1 = P\Gamma, \\ CP + DK + Y_2 = 0; \end{cases}$$

Решение относительно P и K для произвольных Y_1 и Y_2 существует, если

$$\operatorname{rank}(\mathcal{M}) = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - I\lambda_{i\Gamma} & B \\ C & D \end{bmatrix} = \text{число строк}$$

$\lambda_{i\Gamma}$ – собственные числа Γ.

Синтез компоненты слежения

Проверим условие существования решения системы уравнений

$$\begin{cases} P_g\Gamma_g - (A + BK)\, P_g = BK_g, \\ (C + DK)\, P_g + DK_g = Y_g; \end{cases} \tag{1}$$

Собственные числа матрицы Γ_g

$$\sigma(\Gamma_g) = \{0, \pm i\}$$

Проверим ранги матриц. Выясним количество строк

$$A_{3\times3}, I_{3\times3}, B_{3\times1}, C_{1\times3}, D_{1\times1} \Rightarrow \mathcal{M}_{4\times4}$$

Сравниваем ранг с $n = 4$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A - Ii & B \\ C & D \end{bmatrix} = 4,$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A + Ii & B \\ C & D \end{bmatrix} = 4,$$

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} A + 0I & B \\ C & D \end{bmatrix} = 4;$$

Условие выполнено. Синтезируем компоненту слежения K_g через уравнения (1). Получаем

$$K_g = \begin{bmatrix} -0.0932 & 18.6951 & -8.1152 \end{bmatrix}$$

Синтез компоненты компенсации по входу

Проверим условие существования решения системы уравнений

$$\begin{cases} P_f\Gamma_f - (A + BK)\, P_f - B_fY_f = BK_f, \\ (C + DK)\, P_f + DK_f = -D_fY_f; \end{cases} \tag{2}$$

Собственные числа матрицы Γ_f

$$\sigma(\Gamma_f) = \{\pm i, \pm 3i\}$$

Сравниваем ранг с $n = 4$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - Ii & B \\ C & D \end{bmatrix} = 4,$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A + Ii & B \\ C & D \end{bmatrix} = 4,$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A - 3Ii & B \\ C & D \end{bmatrix} = 4,$$

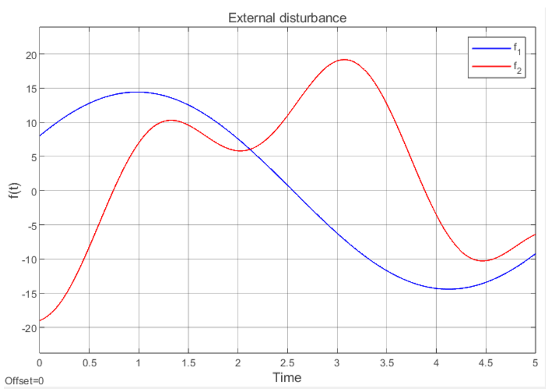
$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A + 3Ii & B \\ C & D \end{bmatrix} = 4;$$

Условие выполнено. Синтезируем компоненту компенсации K_f через уравнения (2). Получаем

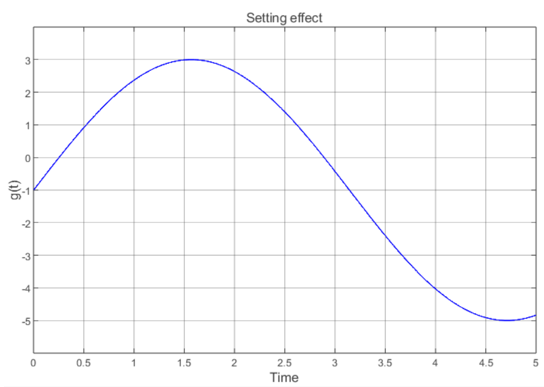
$$K_f = \begin{bmatrix} -725.9021 & -225.1491 & 586.1685 & -359.3897 \end{bmatrix}$$

Компьютерное моделирование

Промоделируем систему при $u = 0, u = Kx, u = Kx + K_f w_f, u = Kx + K_g w_g$ и $u = Kx + K_g w_g + K_f w_f$

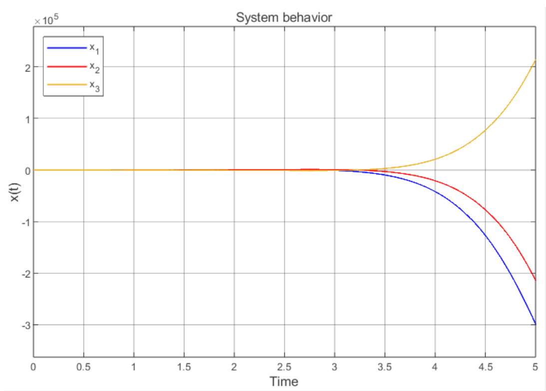


(a) График возмущений $f(t)$

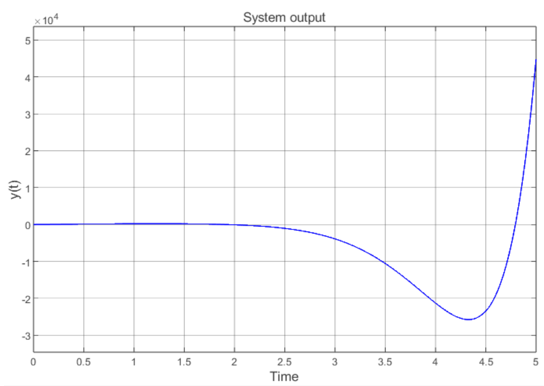


(b) График задающего воздействия $g(t)$

Рис. 2: Графики $f(t), g(t)$ для разомкнутой системы $(u = 0)$

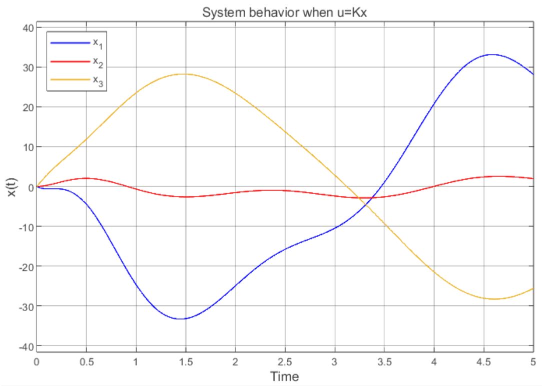


(a) График вектора состояния ОУ $x(t)$

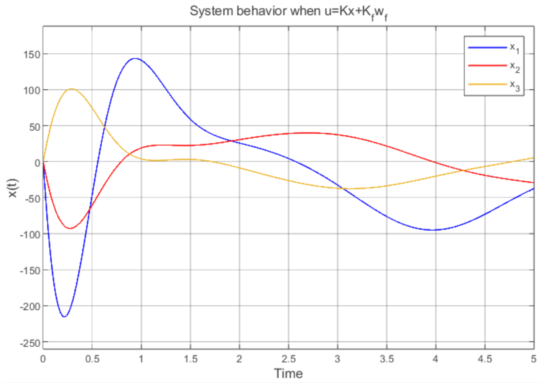


(b) График выхода системы $y(t)$

Рис. 3: Графики $x(t), y(t)$ для разомкнутой системы $(u = 0)$

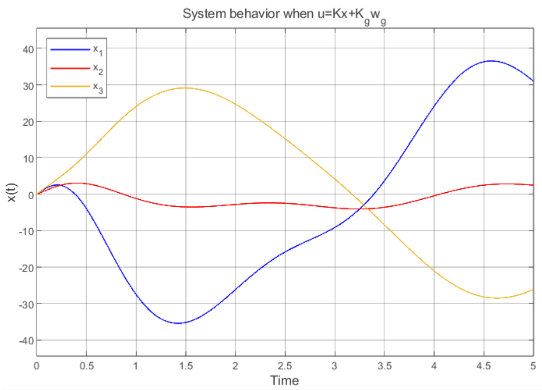


(a) График $x(t)$ при $u = Kx$

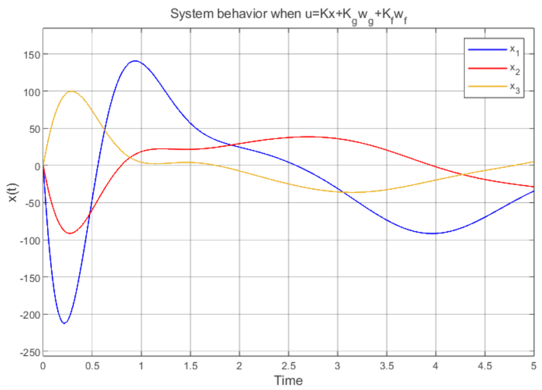


(b) График $x(t)$ при $u = Kx + K_f w_f$

Рис. 4: Графики $x(t)$ для замкнутой системы

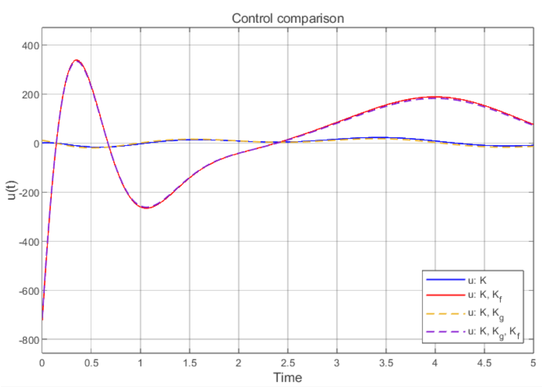


(a) График $x(t)$ при $u = Kx + K_g w_g$

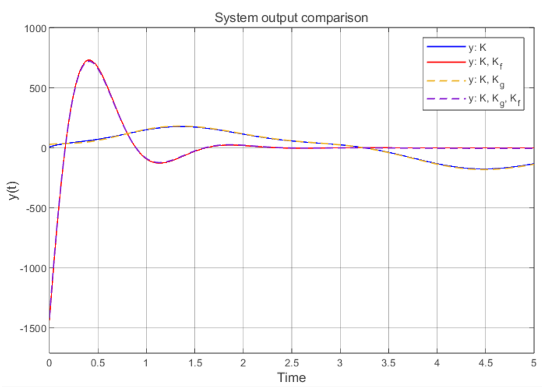


(b) График $x(t)$ при Kx, K_g, K_f

Рис. 5: Графики $x(t)$ для замкнутой системы



(a) Сравнение графиков $u(t)$



(b) Сравнение графиков $y(t)$

Рис. 6: Графики $u(t), y(t)$ для замкнутой системы

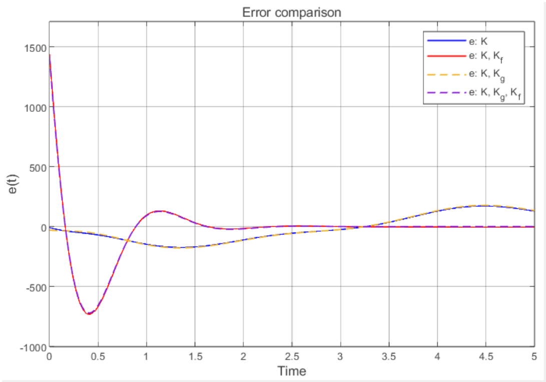


Рис. 7: Сравнение графиков $e(t) = g(t) - y(t)$ для замкнутой системы

Сравнение результатов

При отсутствии управления объект управления разошелся. При наличии в управлении всех компонент выход системы $y(t)$ удалось свести к задающему воздействию $g(t)$. Результат при K, K_f схож с результатом при всех компонентах. Также схожи результаты при K и K, K_g.

Приложение A

```
% plant parameters
A=[5 2 7;
   2 1 2;
  -2 -3 -4];
B=[3;1;-1];
Bf=[-4 -1;
    0 0;
    4 0];
C=[2 0 3];
D=2;
Df=[8 3];

Gf=[25 6 -20 11;
    14 3 -10 4;
    40 11 -31 17;
    6 4 -4 3];
Yf=[8 2 -6 4;
-20 -6 16 -9];

Gg = [0 1 0;
     -1 0 0;
      0 0 0];
Yg=[4 0 -1];
wg0 = [0;1;1];

% A eigenvalues
A_eig = eig(A)

% Jordan matrix
[P1, J] = jordan(A);
Pjre(:,1) = P1(:,1);
Pjre(:,2) = imag(P1(:,2));
```

```
Pjre(:,3) = real(P1(:,3))
Pjre_inv = Pjre^-1
Aj_re = Pjre_inv * A * Pjre
B_jre = Pjre_inv * B

% G eigenvalues
Gf_eig = eig(Gf)
Gg_eig = eig(Gg)

% solving Riccati: feedback comp
Q = eye(3);
v = 2;
R = 1;
a = 2;

Aa = A + eye(3) * (a-0.00000000000001);
[Pk,K,e]=icare(Aa,sqrt(v)*B,Q,R);
K=-inv(R)*B'*Pk
eK=eig(A+B*K)

% check Frankis-Davison: Kg
Gg_eig(1)
check_Kg1 = [A-eye(3)*Gg_eig(1) B; C D]
rank(check_Kg1)

Gg_eig(2)
check_Kg2 = [A-eye(3)*Gg_eig(2) B; C D]
rank(check_Kg2)

Gg_eig(3)
check_Kg3 = [A-eye(3)*Gg_eig(3) B; C D]
rank(check_Kg3)

% solving Frankis-Davison: Kg
cvx_begin sdp
variable Pg(3,3)
variable Kg(1,3)
Pg*Gg-(A+B*K)*Pg == B*Kg;
(C+D*K)*Pg+D*Kg == Yg;
cvx_end

Pg=Pg
Kg=Kg

% check Frankis-Davison: Kf
Gf_eig(1)
check_Kf1 = [A-eye(3)*Gf_eig(1) B; C D]
rank(check_Kf1)

Gf_eig(2)
check_Kf2 = [A-eye(3)*Gf_eig(2) B; C D]
rank(check_Kf2)

Gf_eig(3)
check_Kf3 = [A-eye(3)*Gf_eig(3) B; C D]
rank(check_Kf3)

Gf_eig(4)
```

```
check_Kf4 = [A-eye(3)*Gf_eig(4) B; C D]
rank(check_Kf4)

% solving Frankis-Davison: Kf
cvx_begin sdp
variable Pf(3,4)
variable Kf(1,4)
Pf*Gf-(A+B*K)*Pf-Bf*Yf == B*Kf;
(C+D*K)*Pf+D*Kf == -Df*Yf;
cvx_end

Pf=Pf
Kf=Kf
```

Листинг 1: Программа для задания 1