Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

Задание 1. Синтез регулятора с заданной степенью устойчивости

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Управляемость и стабилизируемость

Найдем собственные числа матрицы A и определим управляемость каждого из них. Программа для вычислений в `MATLAB` представлена на листинге 1 в приложении 1

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}$$

Число $\lambda_1 = -2$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. Комплексная пара $\lambda_{2,3}$ имеет положительную действительную часть – эти собственные числа неустойчивые, нужна управляемость. Разложим A в вещественную жорданову форму, найдем вектор B в базисе собственных векторов матрицы A

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Только число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, так как первый элемент B_{Jre} равен нулю. Остальные собственные числа управляемые. Таким образом, система не полностью управляема, стабилизируема.

Степень устойчивости

Любой степени устойчивости при помощи регулятора $u = Kx$ добиться не получится, так как система не полностью управляема. Степень устойчивости системы α – самое близкое к правой комплексной полуплоскости собственное число матрицы A, находящееся в левой комплексной полуплоскости. Проверка на близость осуществляется через действительную часть собственного числа. Имеем

$$\mathrm{Re}\{\lambda_1 = -2\} = -2,\ \mathrm{Re}\{\lambda_{2,3} = 2 \pm i\} = 2;$$

Таким образом, степень устойчивости системы $\alpha = 2$. Это максимум. Устойчивость в данном случае подразумевается экспоненциальная.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Построим схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$, замкнутой регулятором $u = Kx$, используя `SIMULINK`

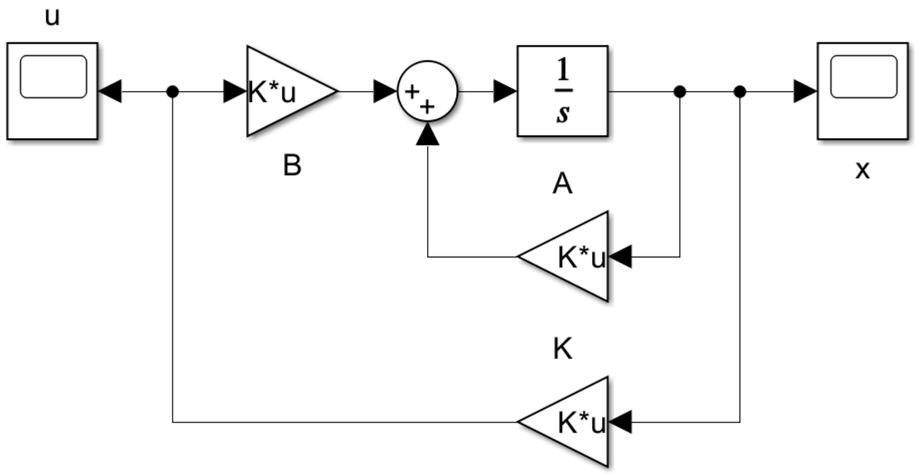

Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Значения желаемой степени устойчивости

Возьмем достаточно отличающиеся достижимые степени устойчивости в диапазоне $0 < \alpha \leq 2$

$$\alpha_1 = 2$$
$$\alpha_2 = 0.1$$

Синтез регулятора

Для каждого из выбранных значений α синтезируем регулятор, обеспечивающий заданную степень устойчивости, при помощи матричного неравенства типа Ляпунова

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \preceq 0,\ K = YP^{-1}$$

Найдем для $\alpha_{1,2}$ соответствующие матрицы регулятора $K_{1\,\alpha i}$ **без ограничений на управление**. Пользуемся пакетом `cvx` для `MATLAB`. Получаем

$$K_{1\,\alpha 1} = \begin{bmatrix} 2.5267 & -18.8652 & 1.7294 \end{bmatrix},\ K_{1\,\alpha 2} = \begin{bmatrix} -2.0955 & -5.8106 & -2.6863 \end{bmatrix}$$

Найдем для $\alpha_{1,2}$ соответствующие матрицы регулятора $K_{2\,\alpha i}$ **совместно с решением задачи минимизации управления**. Нам нужно найти минимальное μ, для которого при начальных условиях $x(0) = x_0$ выполняется $||u(t)|| \leq \mu$. Для этого нужно решить задачу выпуклой минимизации:

$$\begin{aligned} &\text{минимизировать } \gamma = \mu^2 \\ &\text{при ограничениях } P \succ 0,\ PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T + BY \prec 0, \\ &\begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0,\ \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \gamma I \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

Начальное условие зададим $x(0) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$. Реализация представлена в `MATLAB`, для решения используется `cvx`. Получаем

$$K_{2\,\alpha 1} = \begin{bmatrix}1.6000 & -11.2000 & 1.6000\end{bmatrix}, \ \mu_1 = 8.0090,$$

$$K_{2\,\alpha 2} = \begin{bmatrix}-0.7565 & -2.6884 & -0.7552\end{bmatrix}, \ \mu_2 = 4.2015;$$

Определим собственные числа матриц замкнутых систем $(A + BK_{j\,\alpha i})$ и сравним с желаемой степенью устойчивости

$$\begin{aligned}
\sigma\left(A + BK_{1\,\alpha 1}\right) &= \left\{-2, -4.5072 \pm 3.2145i\right\},\\
\sigma\left(A + BK_{1\,\alpha 2}\right) &= \left\{-2, -4.5455, -0.8653\right\},\\
\sigma\left(A + BK_{2\,\alpha 1}\right) &= \left\{-2, -2.0000 \pm 4.1231i\right\},\\
\sigma\left(A + BK_{2\,\alpha 2}\right) &= \left\{-2, -0.1013 \pm 2.3259i\right\};
\end{aligned}$$

Для $\alpha_1 = 2$ собственные числа при регуляторе $K_{2\,\alpha 1}$ получились более точными, чем при регуляторе $K_{1\,\alpha 1}$. То есть управление будет именно таким, каким мы его хотели $(\mathrm{Re}\left\{\lambda_i\right\} = -\alpha_1)$. На графике увидим плавное поведение системы, стабилизирующееся к нулю. Для $\alpha_2 = 0.1$ ситуация аналогичная – при $K_{2\,\alpha 2}$ действительная часть комплексной пары почти достигла желаемого ограничения на степень устойчивости. При $K_{2\,\alpha 2}$ результат более хаотичный. Также в каждом спектре наблюдаем неуправляемое число -2, что подтверждает корректность расчетов.

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование для всех замкнутых систем, используя схему `SIMULINK`, представленную на рис. 1. Построим графики $u(t), x(t)$ при начальных условиях $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$

Приложения

Приложение 1

```
to be done
```

Листинг 1: Программа для задания 1