Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №A
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫЕ РАДОСТИ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Задание 1. Исследование LQR **2**

1.1 Стабилизируемость системы . . . 2
1.2 Схема моделирования системы . . . 2
1.3 Набор пар матриц для исследования . . . 3
1.4 Синтез регулятора . . . 3
1.5 Минимизированное значение функционала качества . . . 3
1.6 Компьютерное моделирование . . . 4
1.7 Сравнение результатов . . . 8

2 Задание 2. Исследование фильтра Калмана **8**

2.1 Обнаруживаемость системы . . . 8
2.2 Схема моделирования системы . . . 8
2.3 Набор пар матриц для исследования . . . 9
2.4 Синтез наблюдателя . . . 9
2.5 Компьютерное моделирование . . . 10
2.6 Сравнение результатов . . . 19
2.7 Задание 3. Синтез LQG . . . 19
2.8 Стабилизируемость и обнаруживаемость . . . 19
2.9 Схема моделирования системы . . . 19

3 Вывод **20**

4 Приложение А **20**

5 Приложение Б **20**

6 Приложение В **21**

Задание 1. Исследование LQR

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Стабилизируемость системы

Проверим систему на стабилизируемость. Найдем собственные числа матрицы A. Ранее мы это делали в лабораторной работе №2 «Модальные регуляторы и наблюдатели». Код матлаб представлен в приложении А на листинге 1

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}$$

Собственное число $\lambda_1 = -2$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. Комплексная пара $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ неустойчива, нужна управляемость. Разложим A в ЖНФ в вещественном виде, найдем B в базисе собственных векторов A

$$A_{J_{re}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B_{J_{re}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Система не полностью управляема, стабилизируема (собственному значению -2 соответствует ноль в матрице $B_{J_{re}}$).

Схема моделирования системы

Построим схему моделирования системы, замкнутой регулятором $u = Kx$, используя `SIMULINK`

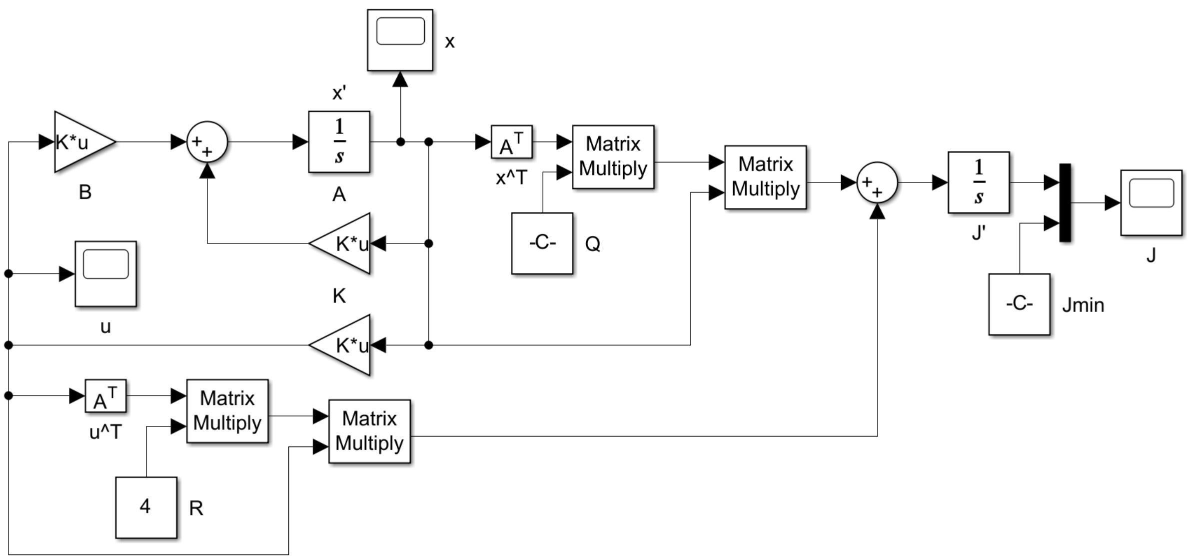

Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Снимаем осциллограммы $u(t), x(t), J_{exp}(t)$.

Набор пар матриц для исследования

Зададим значения матриц $Q = I, R = 1$ (время процесса и затраты на управление принимаем одинаково значимыми) и параметр $\alpha = 4$. Таким образом, сформируем набор

$$
\begin{aligned}
&\circ \left(Q = I, R = 1\right), \\
&\circ \left(Q = 4I, R = 1\right), \\
&\circ \left(Q = I, R = 4\right), \\
&\circ \left(Q = 4I, R = 4\right);
\end{aligned}
$$

Синтез регулятора

Для каждой из пар значений матриц (Q, R) синтезируем регулятор, минимизирующий функционал качества

$$
J = \int_0^\infty \left(x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right) dt
$$

путем решения соответствующего матричного уравнения Риккати при $\nu = 1$

$$
A^TP + PA + Q - \nu PBR^{-1}B^TP = 0, \; K = -R^{-1}B^TP;
$$

Воспользуемся `icare` и получим

$$
\begin{aligned}
&\left(Q = I, R = 1\right), \; K_{I,1} = \begin{bmatrix} -1.7473 & -5.4627 & -1.4004 \end{bmatrix}, \\
&\left(Q = 4I, R = 1\right), \; K_{4I,1} = \begin{bmatrix} -2.0000 & -6.9630 & -0.9630 \end{bmatrix}, \\
&\left(Q = I, R = 4\right), \; K_{I,4} = \begin{bmatrix} -1.6433 & -4.9797 & -1.5454 \end{bmatrix}, \\
&\left(Q = 4I, R = 4\right), \; K_{4I,4} = \begin{bmatrix} -1.7473 & -5.4627 & -1.4004 \end{bmatrix};
\end{aligned}
$$

Убедимся, что спектры замкнутых систем принадлежат левой комплексной полуплоскости

$$
\begin{aligned}
&\sigma\left(A + BK_{I,1}\right) = \{-2, -1.4413, -3.8630\}, \\
&\sigma\left(A + BK_{4I,1}\right) = \{-2, -1, -7\}, \\
&\sigma\left(A + BK_{I,4}\right) = \{-2, -2.1821 \pm 0.6216i\}, \\
&\sigma\left(A + BK_{4I,4}\right) = \{-2, -1.4413, -3.8630\};
\end{aligned}
$$

Получили отрицательные действительные части собственных чисел и наличие в спектрах неуправляемого $\lambda_1 = -2$. Следовательно, регуляторы синтезированы корректно.

Минимизированное значение функционала качества

Вычислим минимизированное значение функционала качества

$$
J_{min} = x_0^T P x_0
$$

для каждой пары (Q, R). P_i получили при решении матричного уравнения типа Риккати

$$P_{I,1} = \begin{bmatrix} 2.4681 & -3.5514 & 2.1055 \\ -3.5514 & 13.4136 & -2.7033 \\ 2.1055 & -2.7033 & 2.2129 \end{bmatrix}, \quad P_{4I,1} = \begin{bmatrix} 4.0000 & -7.3333 & 2.6667 \\ -7.3333 & 24.9904 & -3.9726 \\ 2.6667 & -3.9726 & 3.0645 \end{bmatrix},$$

$$P_{I,4} = \begin{bmatrix} 8.2455 & -10.2978 & 7.8656 \\ -10.2978 & 41.3731 & -9.4392 \\ 7.8656 & -9.4392 & 7.9761 \end{bmatrix}, \quad P_{4I,4} = \begin{bmatrix} 9.8723 & -14.2056 & 8.4221 \\ -14.2056 & 53.6545 & -10.8133 \\ 8.4221 & -10.8133 & 8.8515 \end{bmatrix};$$

Получаем

$$\begin{aligned} Q = I, R = 1: \ \ J_{min} &= 9.7962, \\ Q = 4I, R = 1: \ \ J_{min} &= 14.7764, \\ Q = I, R = 4: \ \ J_{min} &= 33.8518, \\ Q = 4I, R = 4: \ \ J_{min} &= 39.1846; \end{aligned}$$

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование замкнутых систем и для каждого случая построим график управления $u(t)$, вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ и экспериментального значения функционала качества $J_{exp}(t)$. Моделирование $u(t)$ и $x(t)$ для случая

$$Q = 4I, R = 4, K_{4I,4} = \begin{bmatrix} -1.7473 & -5.4627 & -1.4004 \end{bmatrix}$$

делать не будем, так как регулятор для этой пары совпал с регулятором для случая

$$Q = I, R = 1, K_{I,1} = \begin{bmatrix} -1.7473 & -5.4627 & -1.4004 \end{bmatrix},$$

собственные числа тоже одинаковые. Результаты представлены на рис. 2–11

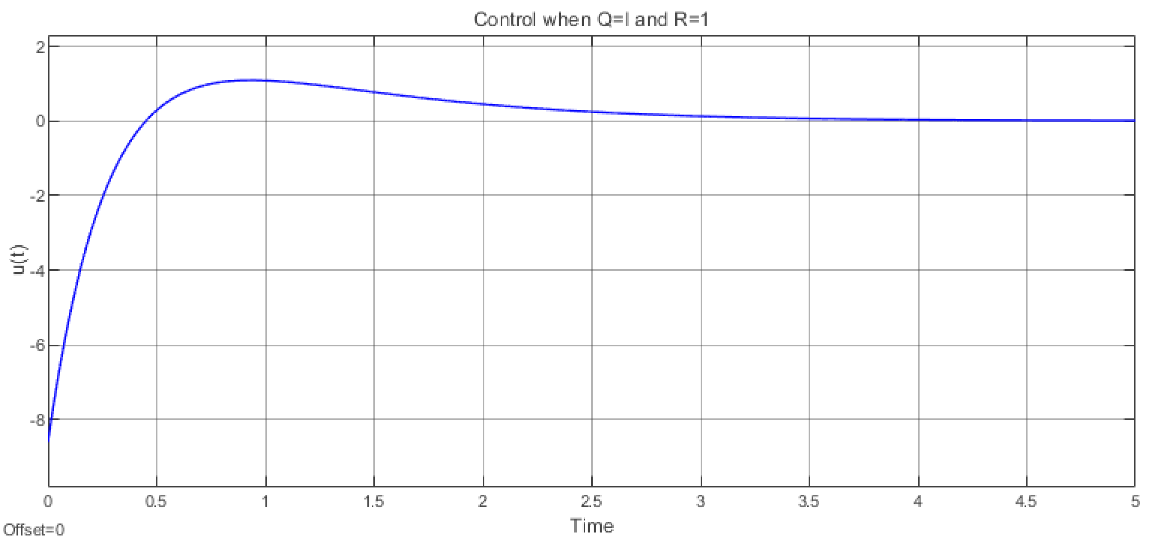

Рис. 2: График управления $u(t)$ при $K_{I,1}, K_{4I,4}$

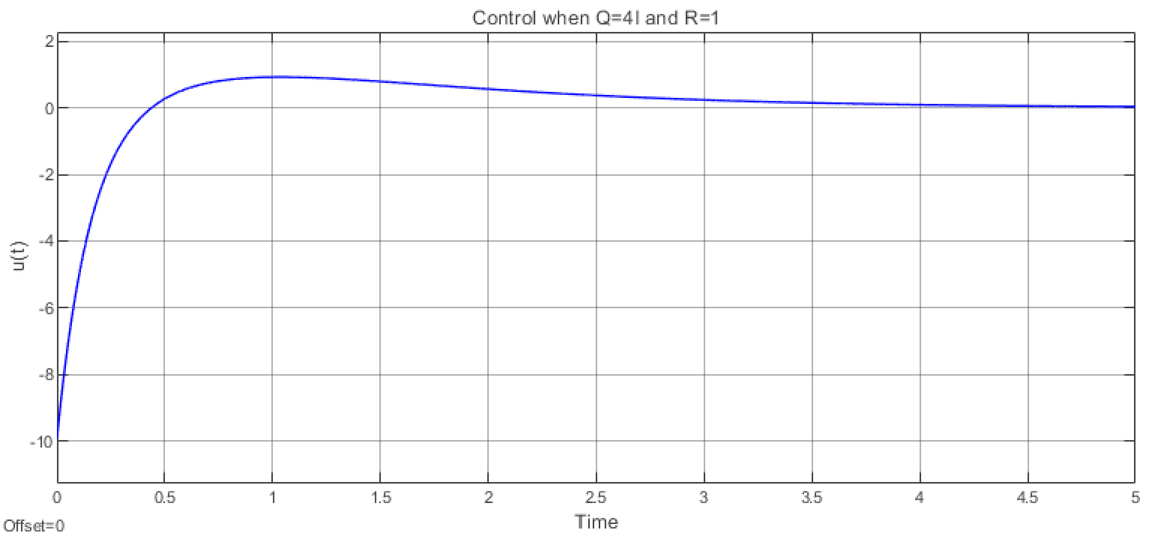

Рис. 3: График управления $u(t)$ при $K_{4I,1}$

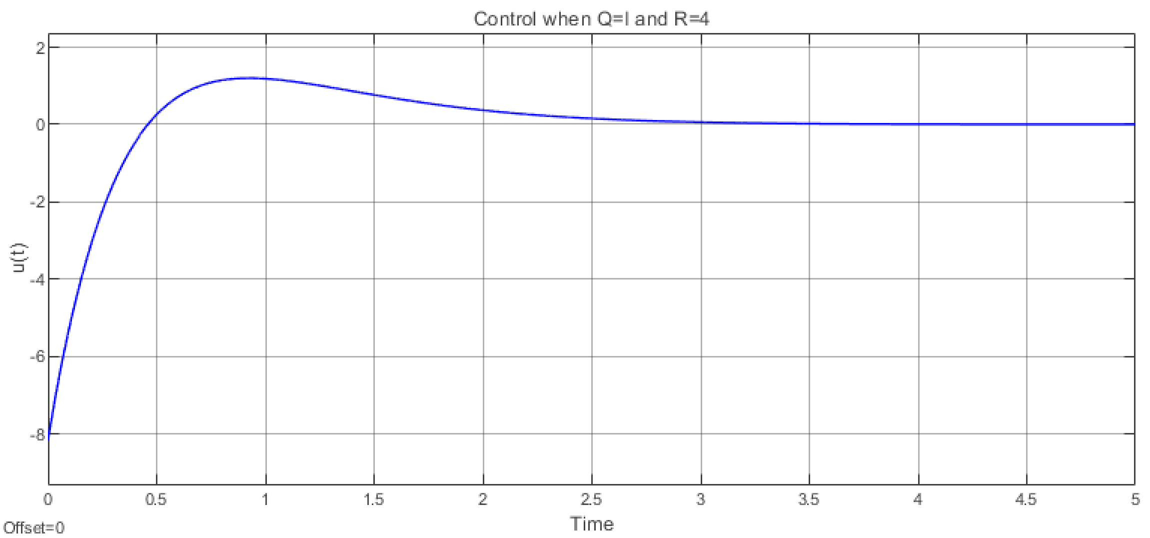

Рис. 4: График управления $u(t)$ при $K_{I,4}$

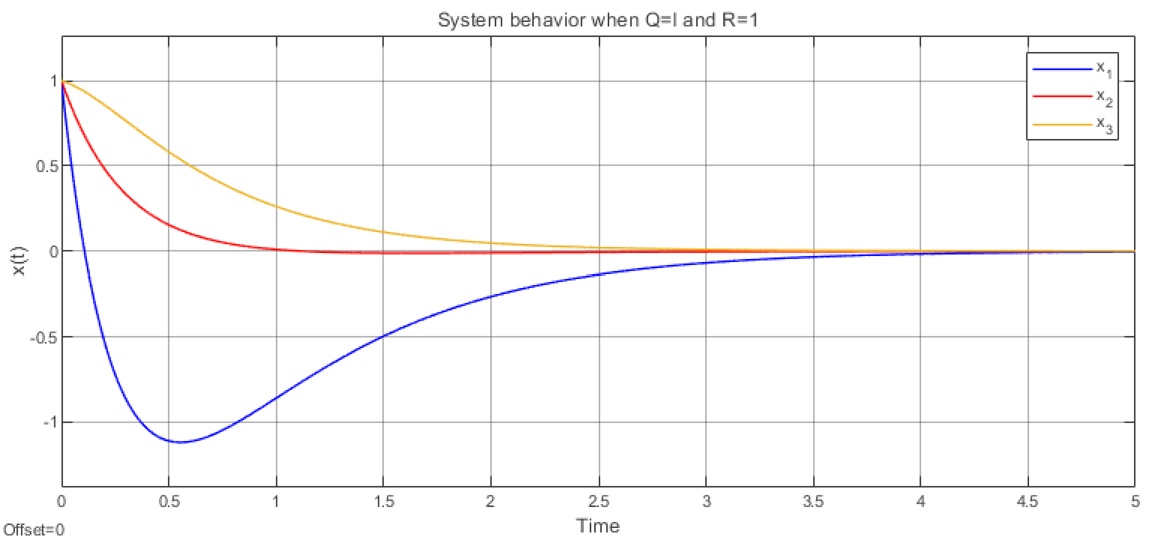

Рис. 5: График вектора состояния $x(t)$ при $K_{I,1}, K_{4I,4}$

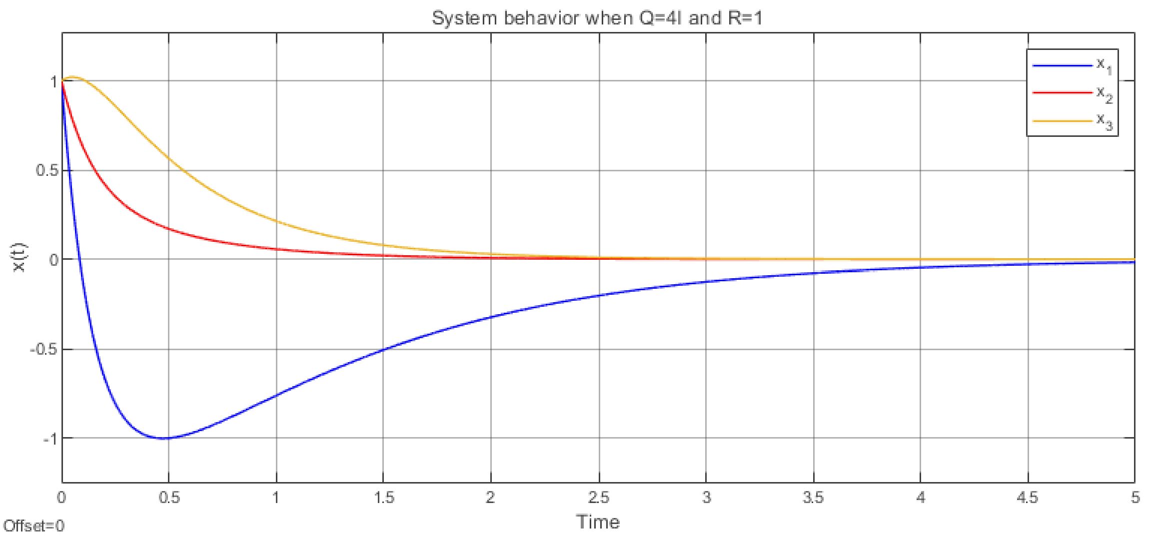

Рис. 6: График вектора состояния $x(t)$ при $K_{4I,1}$

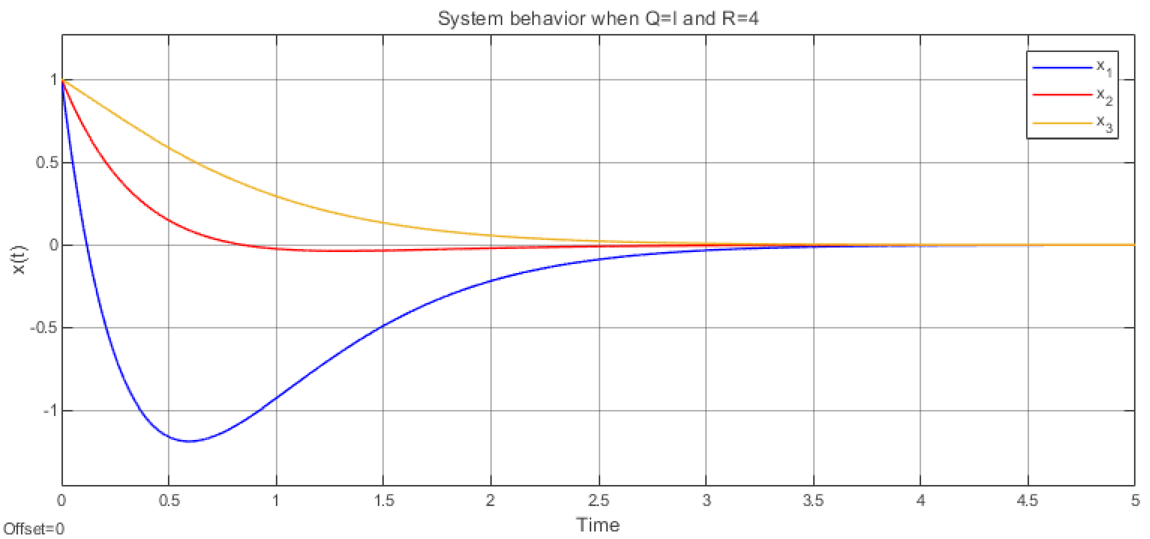

Рис. 7: График вектора состояния $x(t)$ при $K_{I,4}$

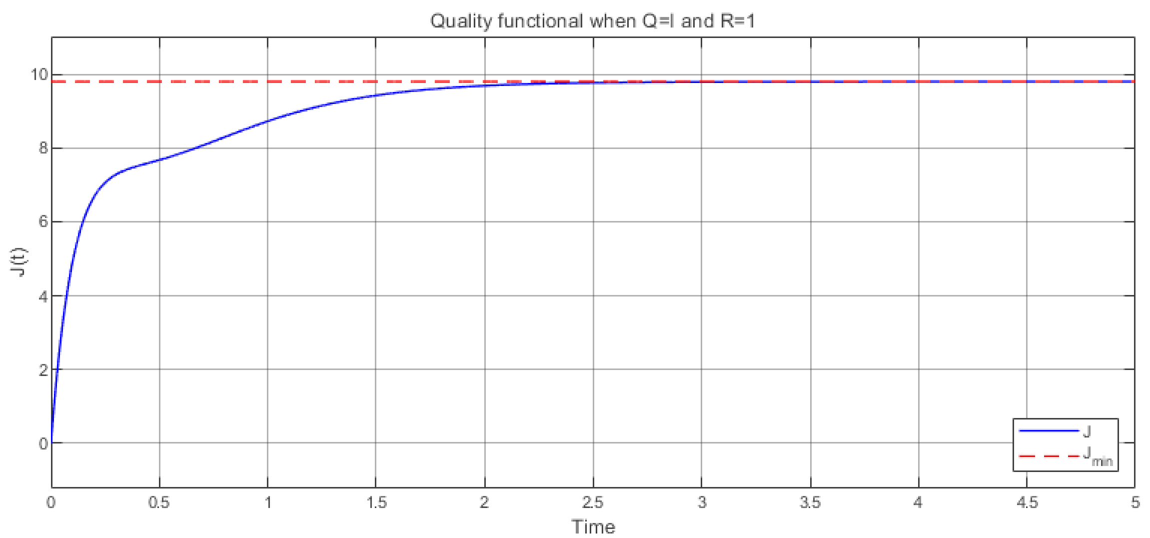

Рис. 8: График экспериментального значения функционала качества $J(t)$ при $K_{I,1}$

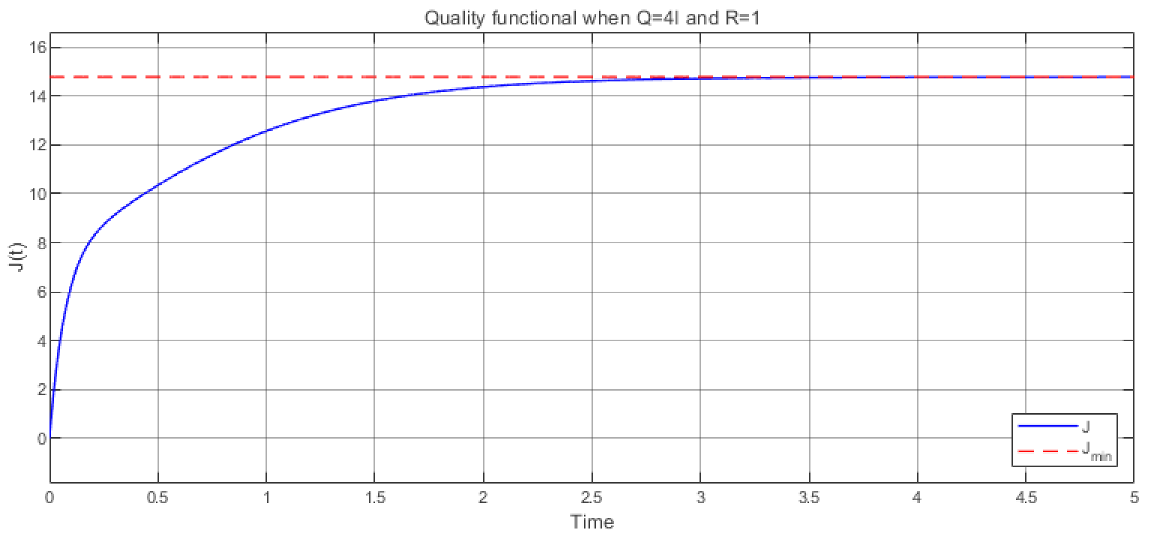

Рис. 9: График экспериментального значения функционала качества $J(t)$ при $K_{4I,1}$

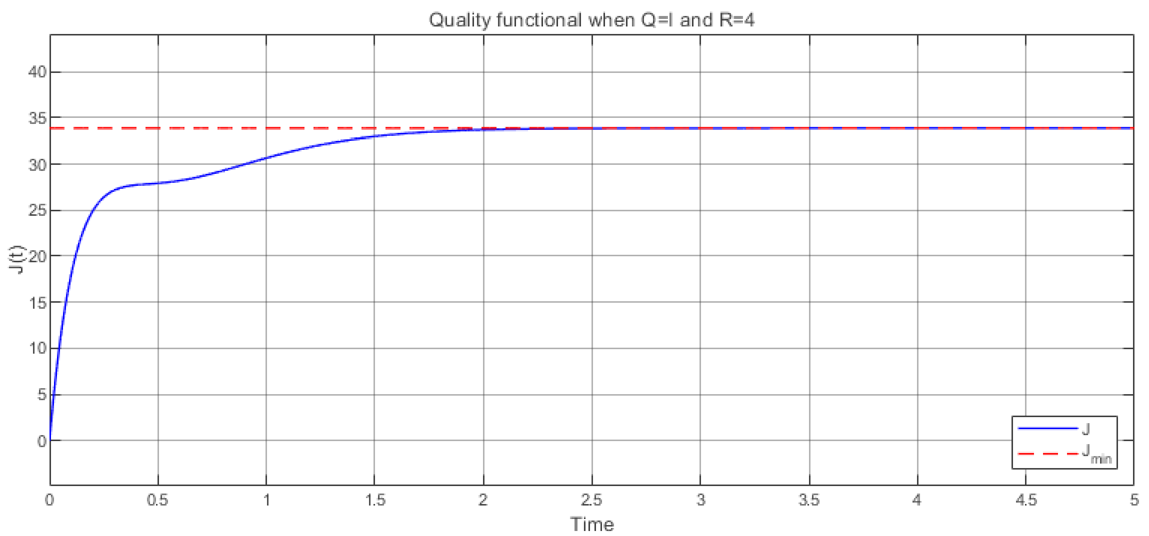

Рис. 10: График экспериментального значения функционала качества $J(t)$ при $K_{I,4}$

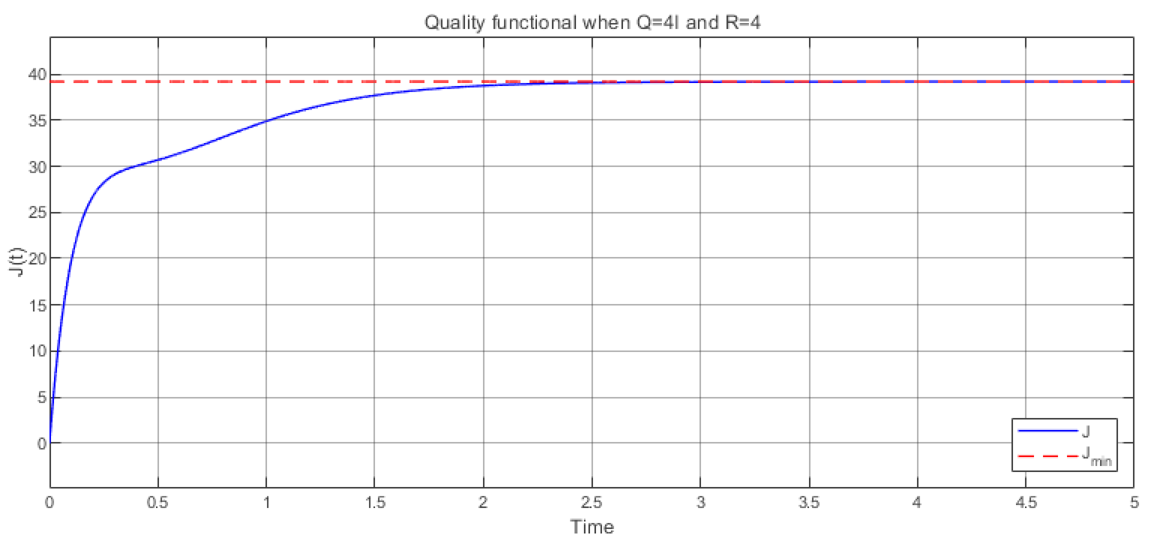

Рис. 11: График экспериментального значения функционала качества $J(t)$ при $K_{4I,4}$

Сравнение результатов

Когда нам важнее время процесса, чем затраты на управление ($Q > R$), то ожидаемо управления применяется больше (сравн. рис. 3, 4), при этом координаты $x_2(t), x_3(t)$ вектора состояния объекта быстрее сходятся к нулю (сравн. рис. 6, 7; примечание: координата $x_1(t)$ сравнительно быстрее бы сошлась к нулю при бо́льшем коэффициенте α). При $Q < R$ ситуация обратная – время процесса не так важно, как затраты на управление (сравн. те же графики). При равнозначных (равносильных) значениях Q, R результат усредненный между временем процесса и затратами на управление. Результаты $J_{exp}(t)$ примерно совпадают с вычисленными J_{min}. При этом

$$J_{min,I,1} = \frac{J_{min,4I,4}}{4}, \ 9.7962 \approx \frac{39.1846}{4} = 9.79615,$$

то есть при увеличении Q, R в один и тот же коэффициент α, минимизированное значение функционала качества увеличится в α раз.

Задание 2. Исследование фильтра Калмана

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f, \\ y = Cx + \xi, \end{cases} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

где $f(t)$ и $\xi(t)$ – *случайные* сигналы (гауссовский белый шум) – исследуем *фильтр Калмана*.

Обнаруживаемость системы

Проверим собственные числа матрицы A. Программа `MATLAB` представлена в приложении Б на листинге 2

$$\sigma(A) = \{\pm i, \pm 2i\}$$

Собственные числа устойчивые, но не асимптотически. Проверим наблюдаемость через вещественную ЖНФ

$$A_{J_{re}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \ C_{J_{re}} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix};$$

Комплексные пары наблюдаемы – система полностью наблюдаема и стабилизируема.

Схема моделирования системы

Построим схему моделирования системы с наблюдателем состояния

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$$

Снимаем осциллограммы $x(t), \hat{x}(t), e(t)$

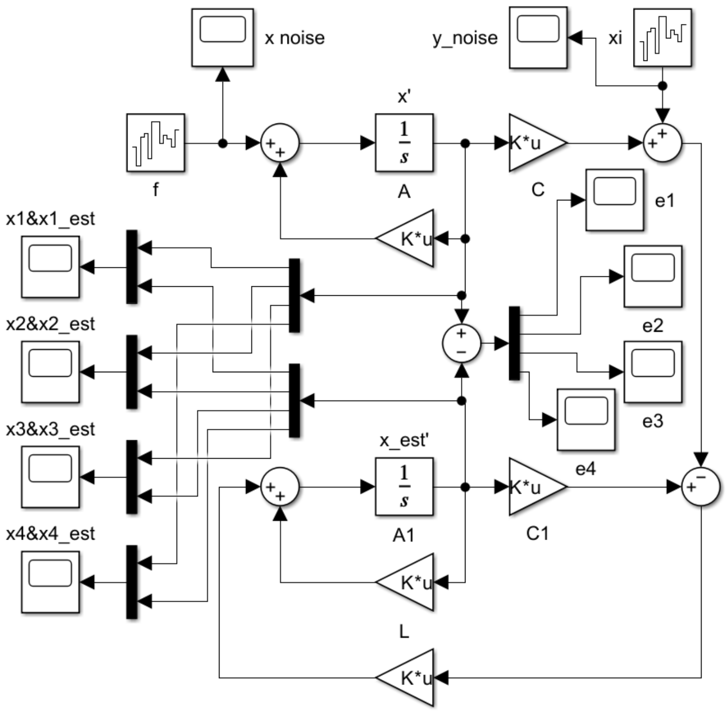

Рис. 12: Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Набор пар матриц для исследования

Зададим значения матриц $Q = I, R = 1$ (считаем помехи для $x(t)$ и $y(t)$ равнозначными) и параметр $\alpha = 100$. Таким образом, сформируем набор

$$\circ\,(Q = I, R = 1)\,,$$
$$\circ\,(Q = 100I, R = 1)\,,$$
$$\circ\,(Q = I, R = 100)\,,$$
$$\circ\,(Q = 100I, R = 100)\,;$$

Синтез наблюдателя

Для каждой из пар значений матриц (Q, R) синтезируем наблюдатель, минимизирующий средний квадрат отклонения установившейся ошибки наблюдателя

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left(||x(t) - \hat{x}(t)||^2\right)$$

путем решения соответствующего матричного уравнения Риккати при $\nu = 1$

$$AP + PA^T + Q - \nu PC^T R^{-1} CP = 0,\ L = -PC^T R^{-1};$$

Воспользуемся `icare` и получим

$$(Q = I, R = 1)\,,\ L_{I,1} = \begin{bmatrix} 0.5233 & -7.6440 & 0.0221 & 6.4594 \end{bmatrix}^T,$$
$$(Q = 100I, R = 1)\,,\ L_{100I,1} = \begin{bmatrix} 7.6954 & -15.6987 & -4.5805 & 15.1421 \end{bmatrix}^T,$$
$$(Q = I, R = 100)\,,\ L_{I,100} = \begin{bmatrix} 0.0079 & -1.7287 & 0.5099 & 2.0960 \end{bmatrix}^T,$$
$$(Q = 100I, R = 4)\,,\ L_{100I,100} = \begin{bmatrix} 0.5233 & -7.6440 & 0.0221 & 6.4594 \end{bmatrix}^T;$$

Убедимся, что спектры замкнутых систем принадлежат левой комплексной полуплоскости

$$
\begin{aligned}
\sigma\left(A + L_{I,1}C\right) &= \{-0.3454 \pm 1.4689i, -3.1349 \pm 3.3599i\}, \\
\sigma\left(A + L_{100I,1}C\right) &= \{-0.3419 \pm 1.4702i, -13.3670 \pm 5.6243i\}, \\
\sigma\left(A + L_{I,100}C\right) &= \{-0.4006 \pm 1.1676i, -0.3965 \pm 1.9848i\}, \\
\sigma\left(A + L_{100I,100}C\right) &= \{-0.3454 \pm 1.4689i, -3.1349 \pm 3.3599i\};
\end{aligned}
$$

Получили отрицательные действительные части собственных чисел. Следовательно, наблюдатели синтезированы корректно.

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование с нулевыми начальными условиями наблюдателя. Построим графики $x(t)$, $\hat{x}(t)$, $e(t)$. Также приведены графики шумов $f(t)$, $\xi(t)$. Наблюдатели $L_{I,1}$, $L_{100I,100}$ совпали аналогично регуляторам в задании 1

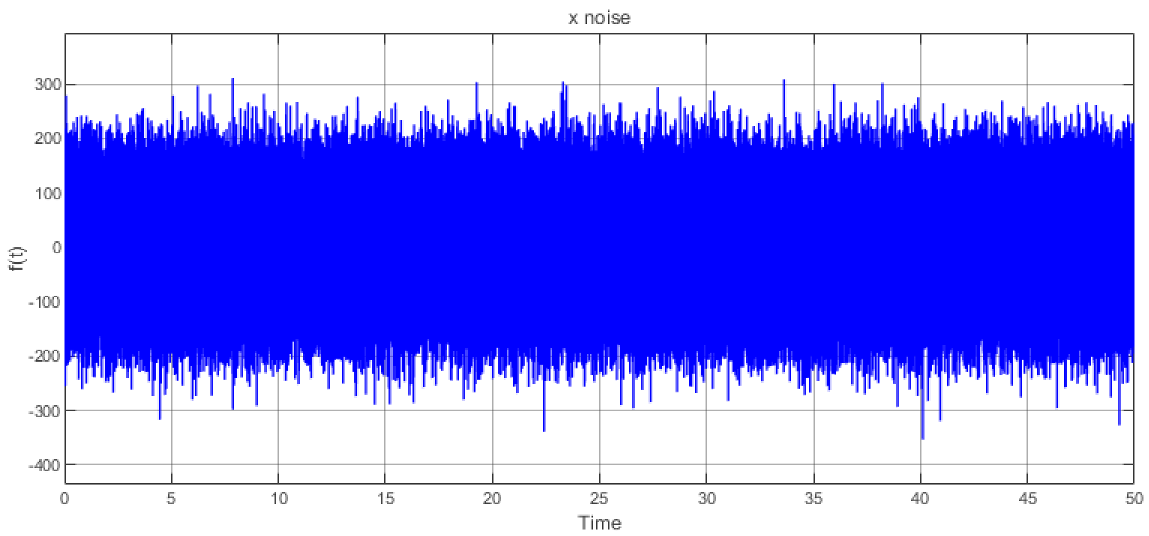

Рис. 13: График шума $f(t)$

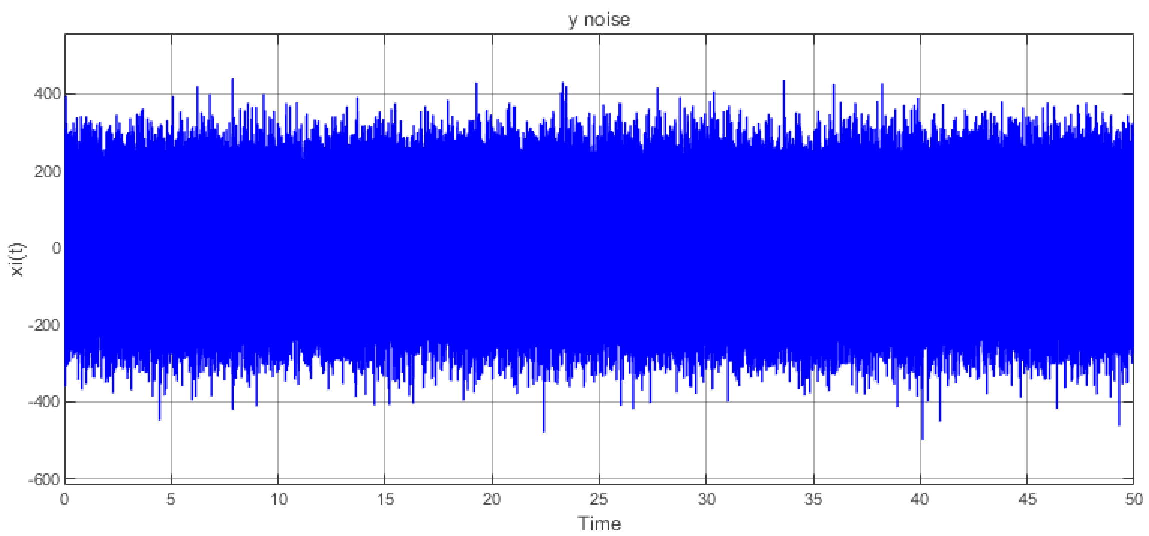

Рис. 14: График шума $\xi(t)$

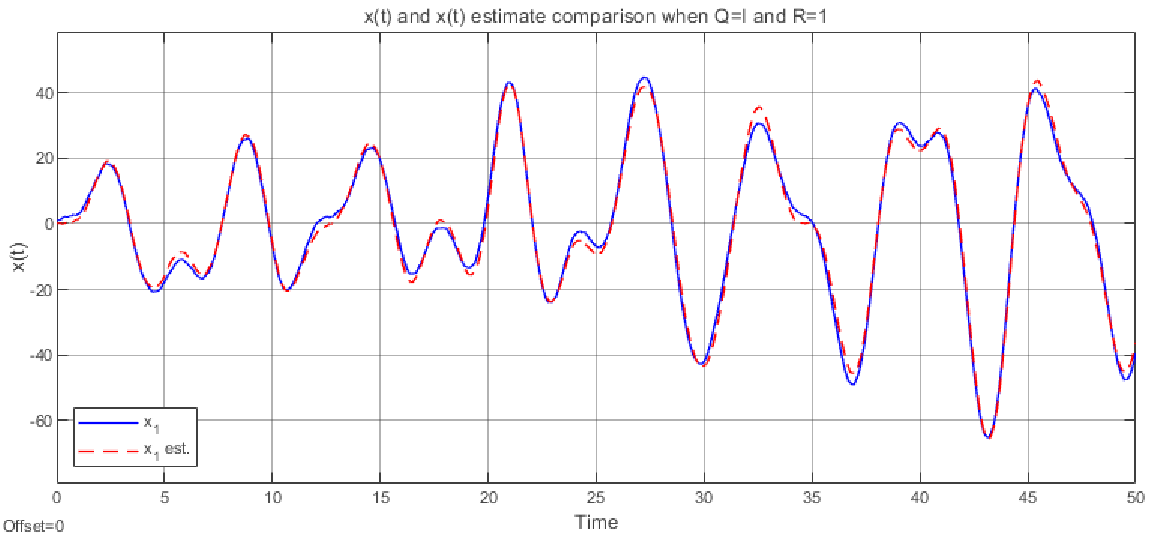

Рис. 15: График $x_1(t), \hat{x}_1(t)$ при $L_{I,1}, L_{100I,100}$

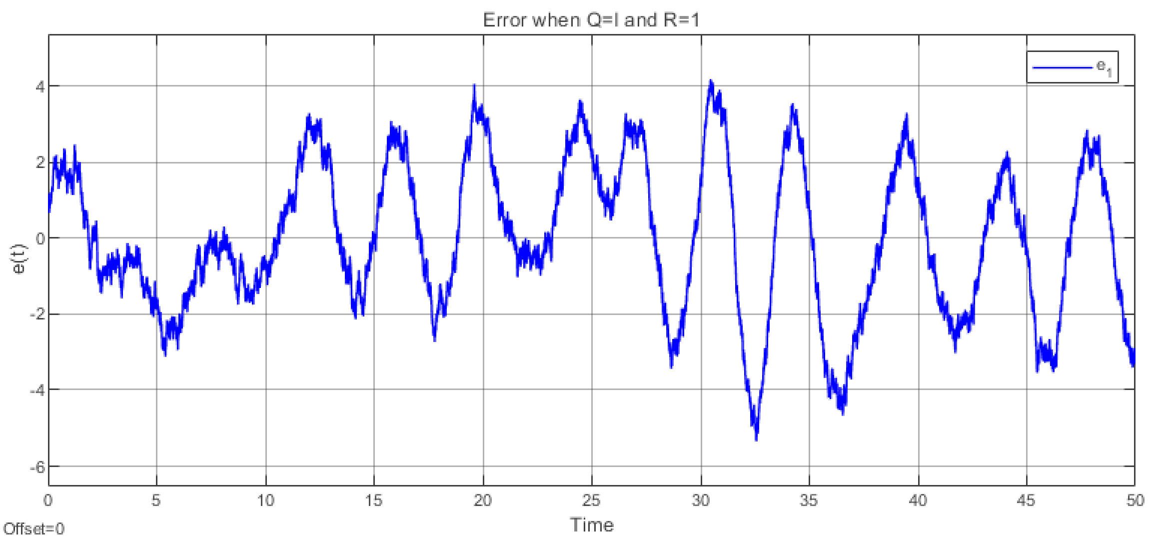

Рис. 16: График $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ при $L_{I,1}, L_{100I,100}$

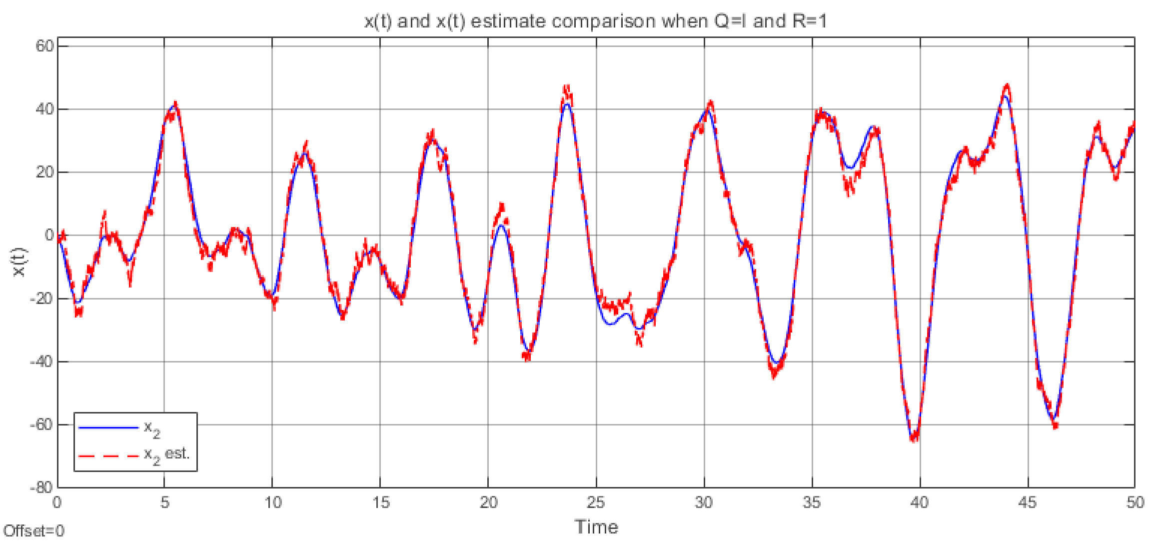

Рис. 17: График $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ при $L_{I,1}, L_{100I,100}$

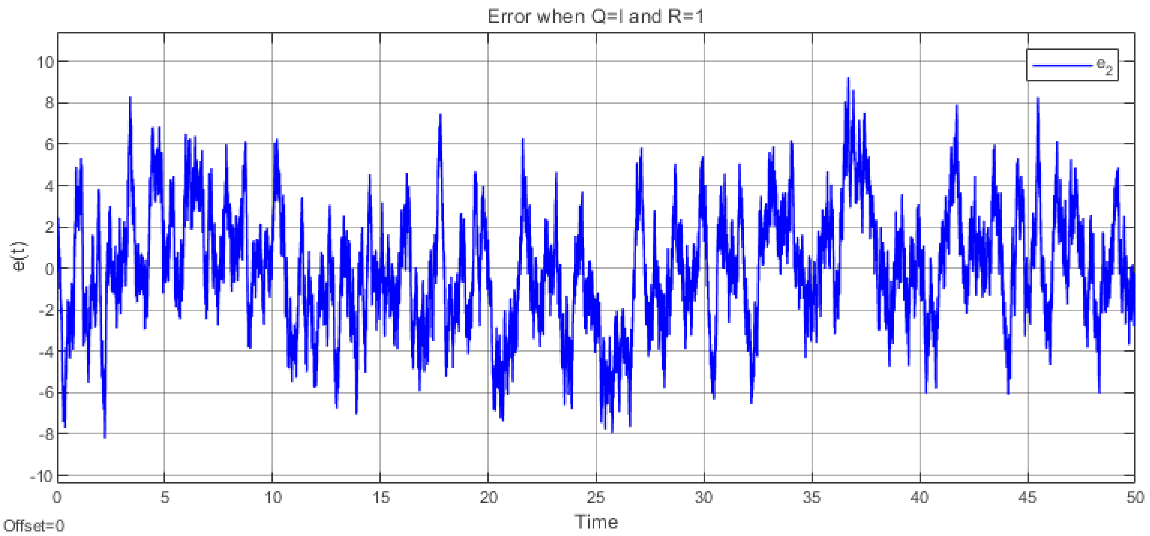

Рис. 18: График $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ при $L_{I,1}, L_{100I,100}$

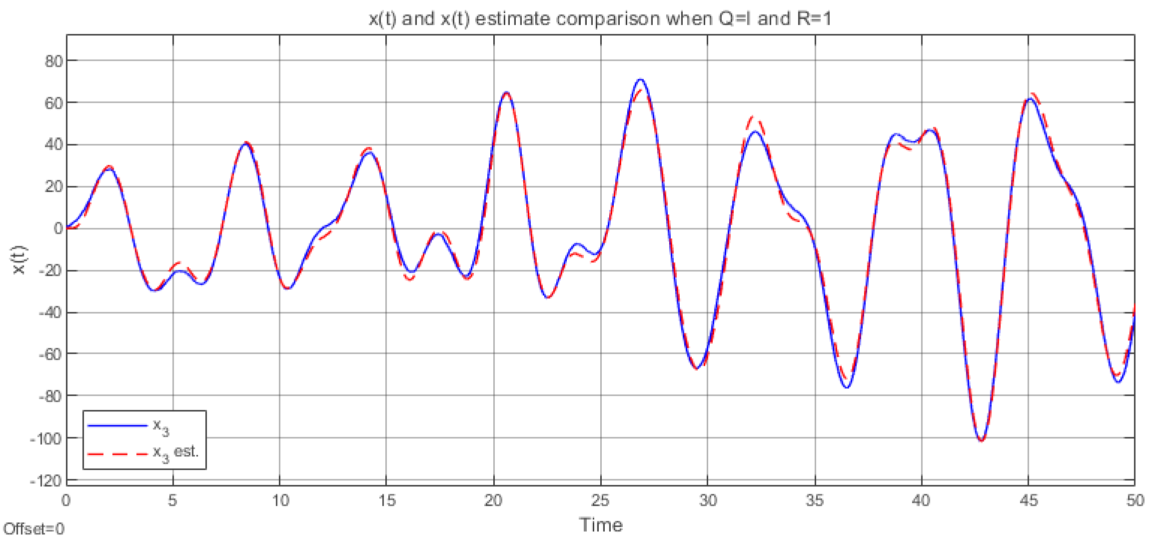

Рис. 19: График $x_3(t), \hat{x}_3(t)$ при $L_{I,1}, L_{100I,100}$

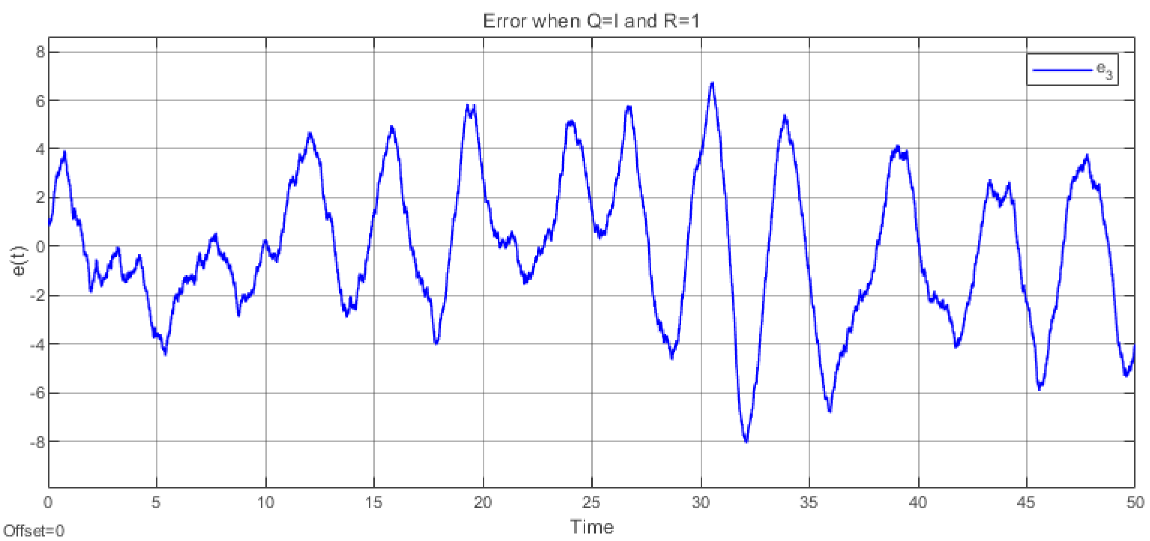

Рис. 20: График $e_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$ при $L_{I,1}, L_{100I,100}$

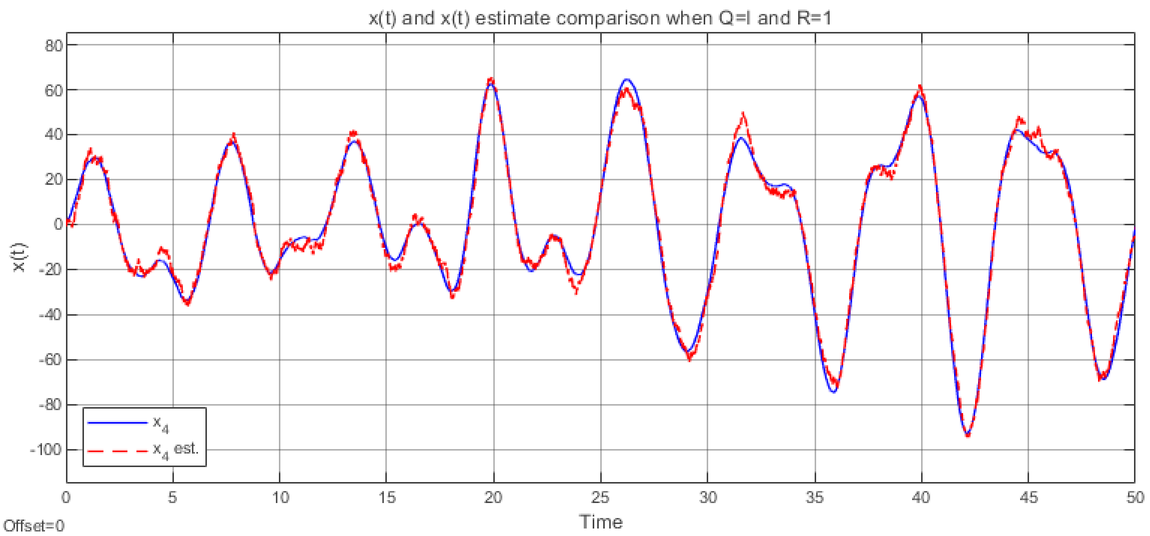

Рис. 21: График $x_4(t), \hat{x}_4(t)$ при $L_{I,1}, L_{100I,100}$

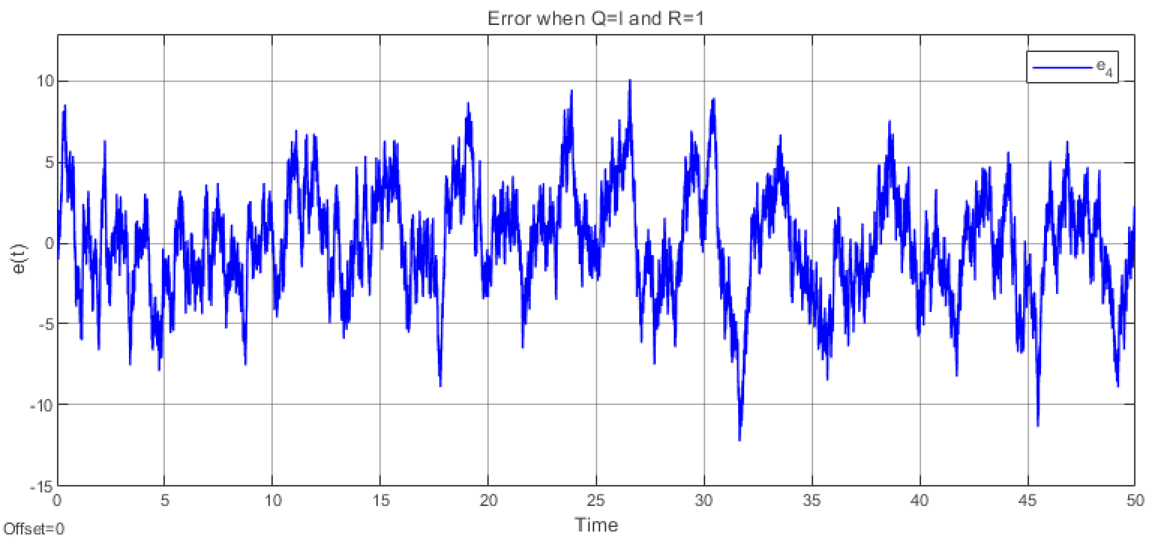

Рис. 22: График $e_4(t) = x_4(t) - \hat{x}_4(t)$ при $L_{I,1}, L_{100I,100}$

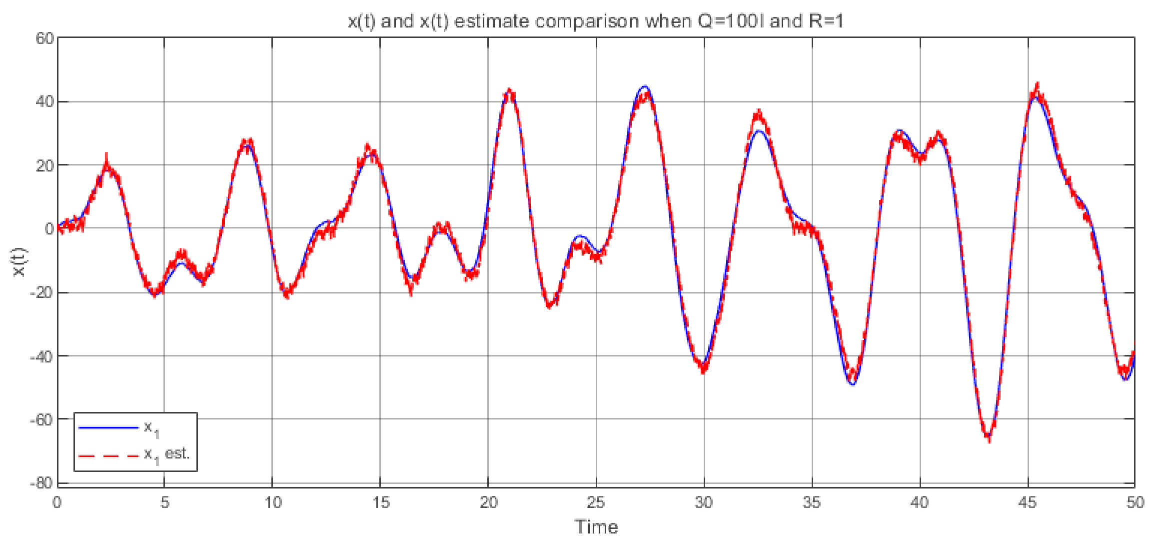

Рис. 23: График $x_1(t), \hat{x}_1(t)$ при $L_{100I,1}$

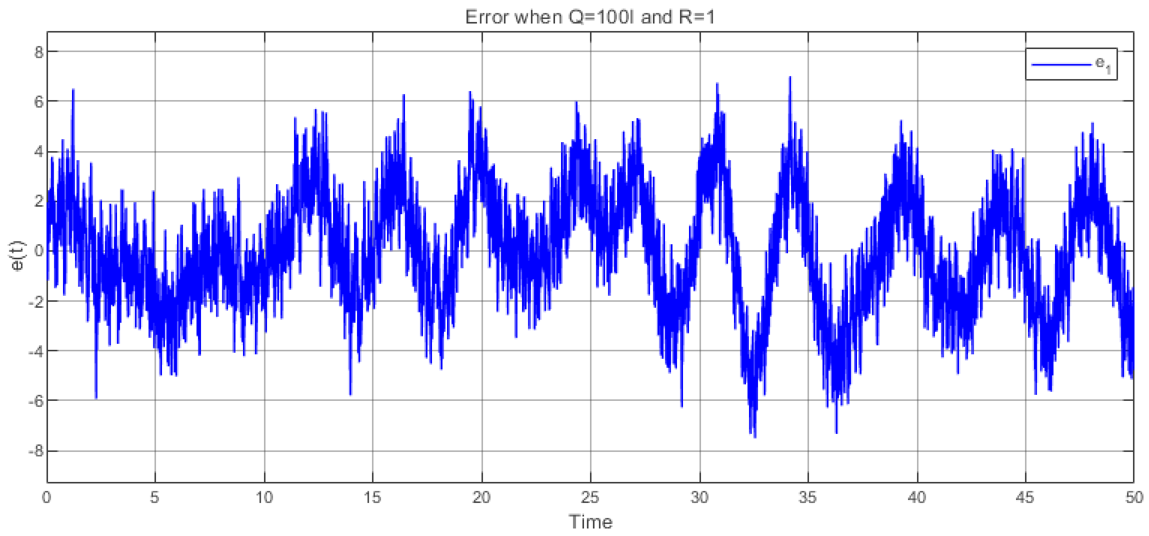

Рис. 24: График $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ при $L_{100I,1}$

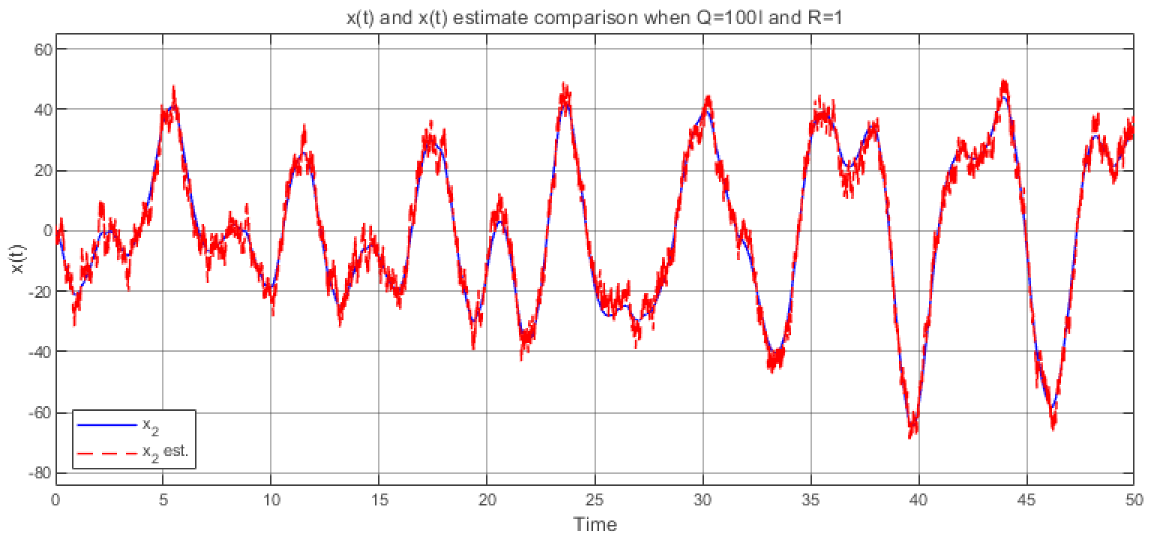

Рис. 25: График $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ при $L_{100I,1}$

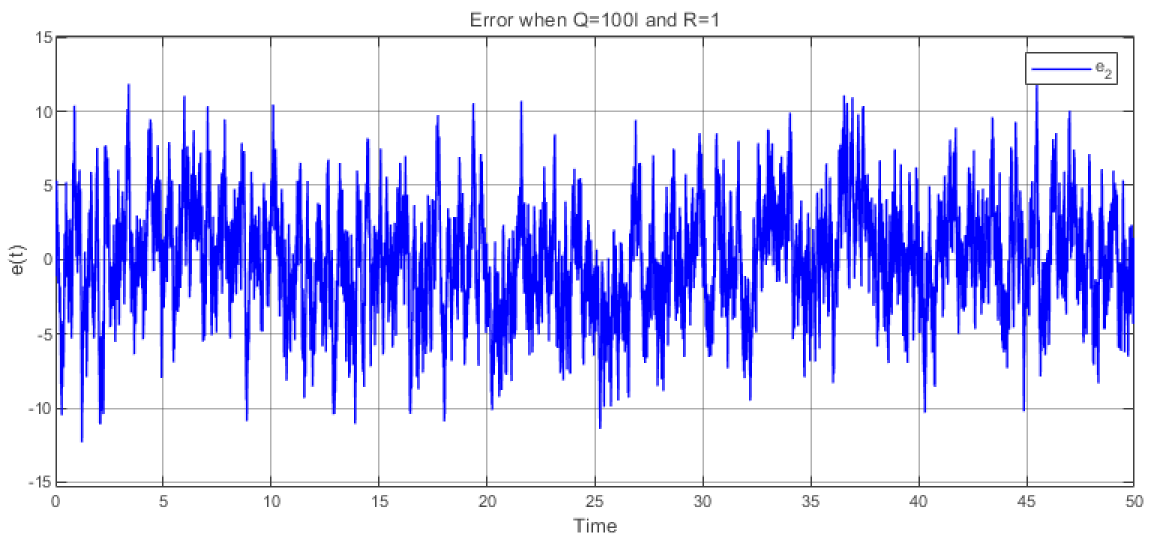

Рис. 26: График $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ при $L_{100I,1}$

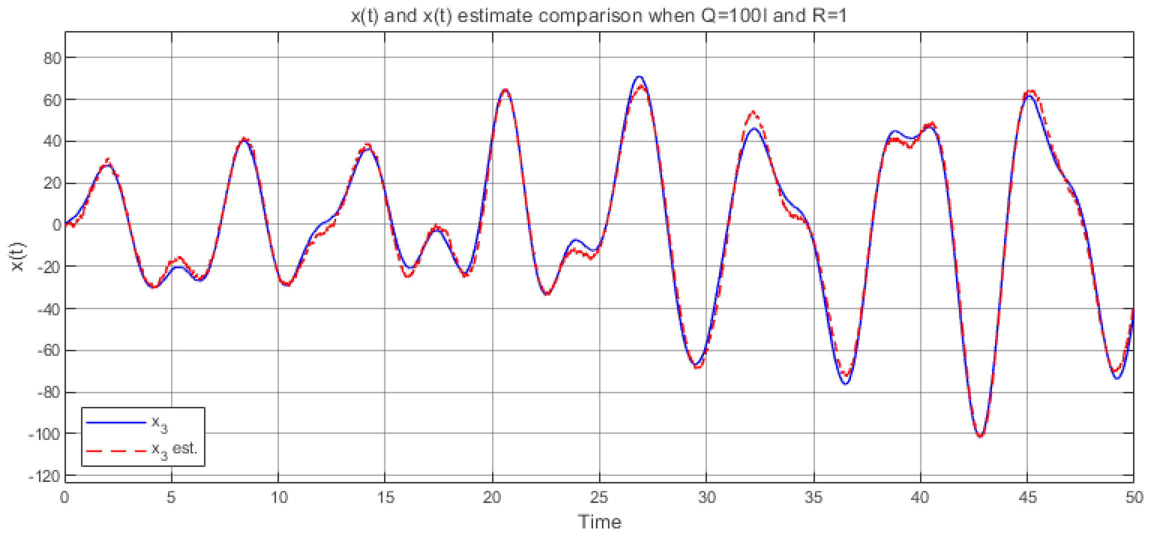

Рис. 27: График $x_3(t), \hat{x}_3(t)$ при $L_{100I,1}$

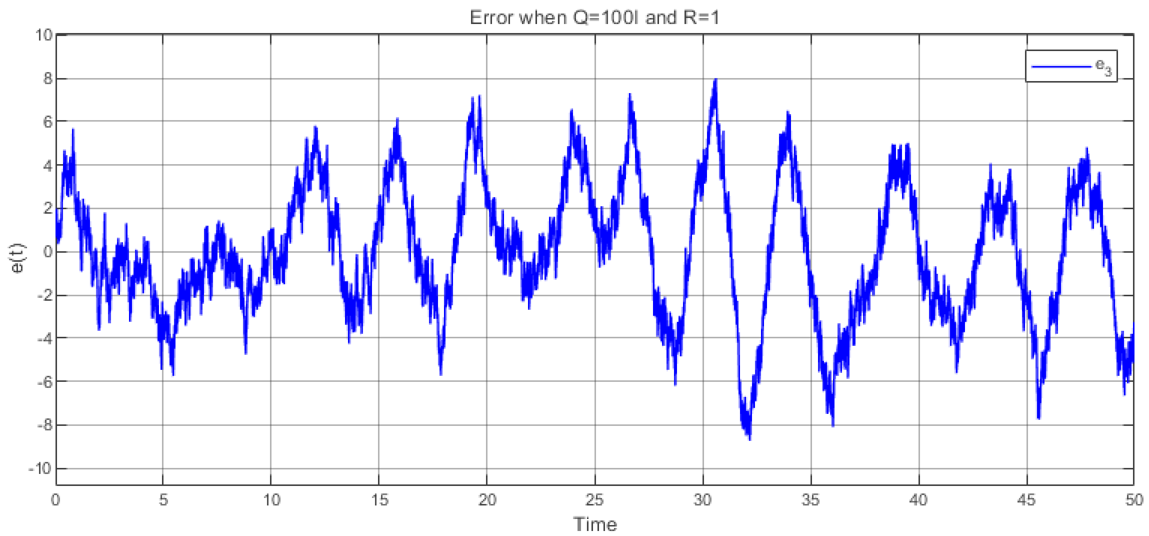

Рис. 28: График $e_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$ при $L_{100I,1}$

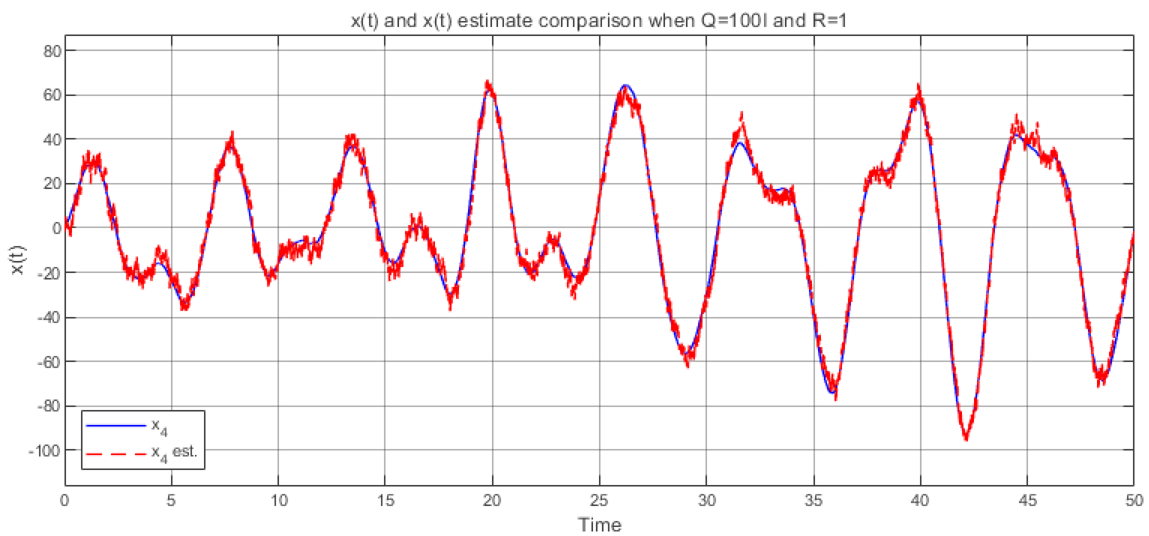

Рис. 29: График $x_4(t), \hat{x}_4(t)$ при $L_{100I,1}$

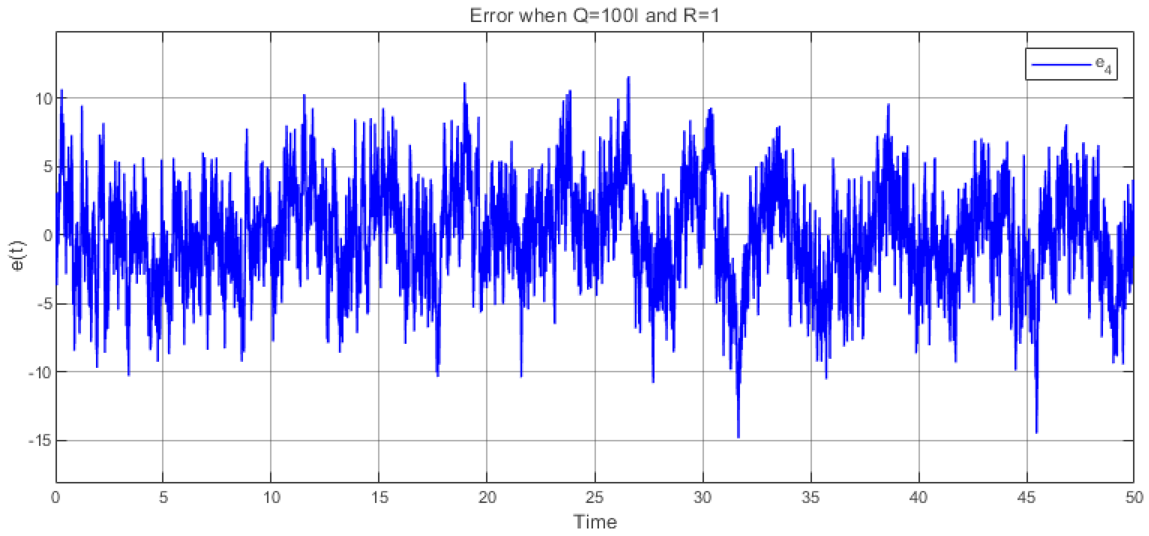

Рис. 30: График $e_4(t) = x_4(t) - \hat{x}_4(t)$ при $L_{100I,1}$

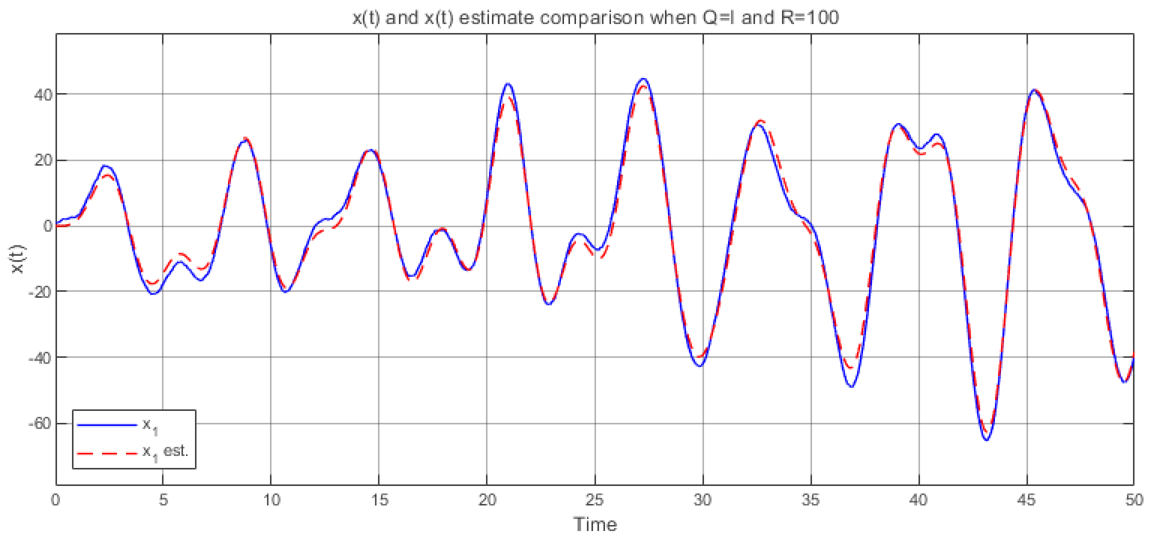

Рис. 31: График $x_1(t), \hat{x}_1(t)$ при $L_{I,100}$

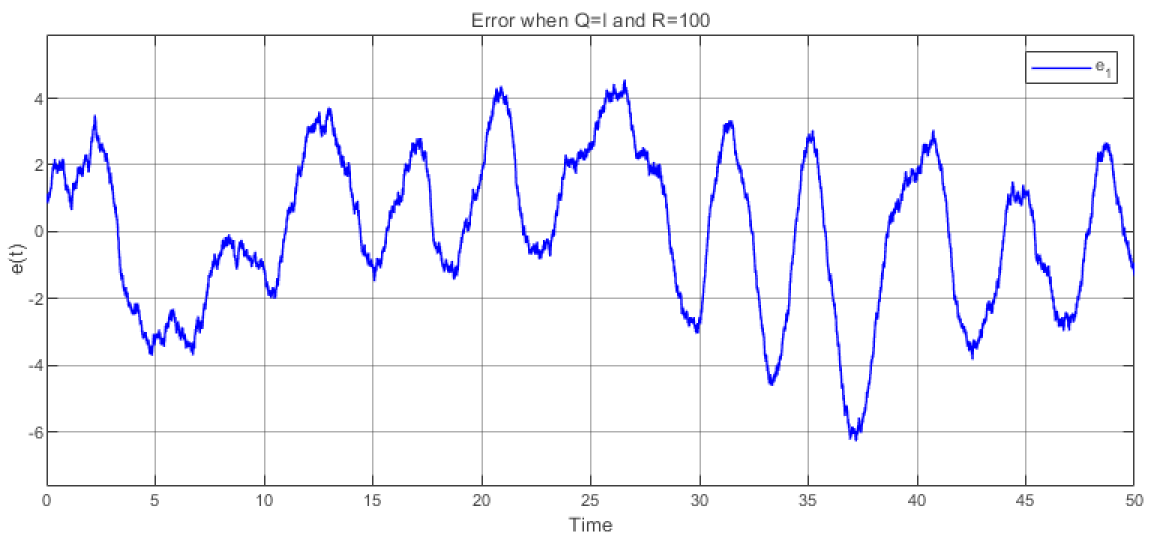

Рис. 32: График $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$ при $L_{I,100}$

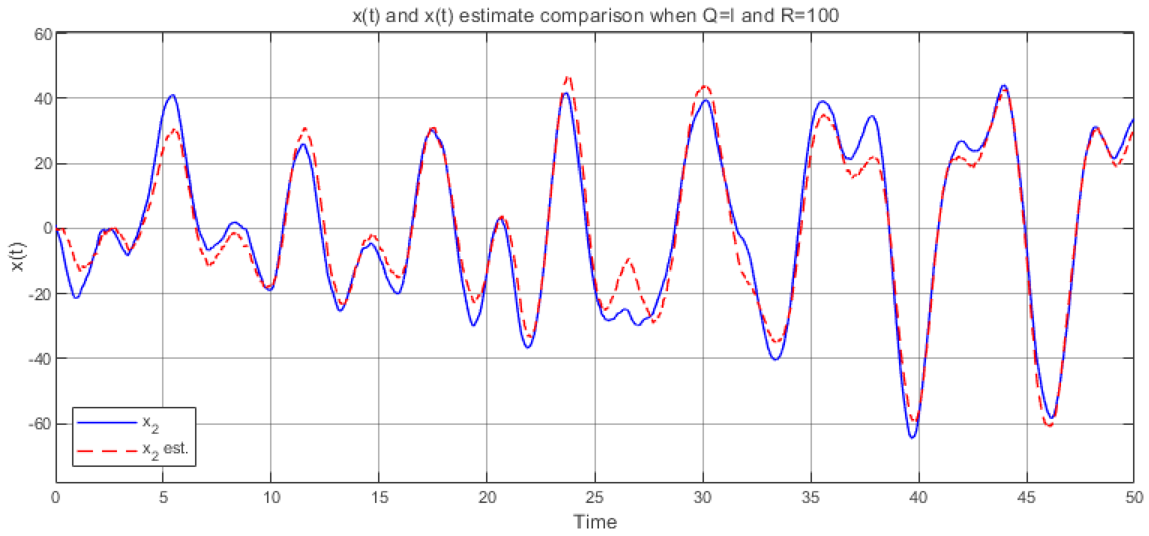

Рис. 33: График $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ при $L_{I,100}$

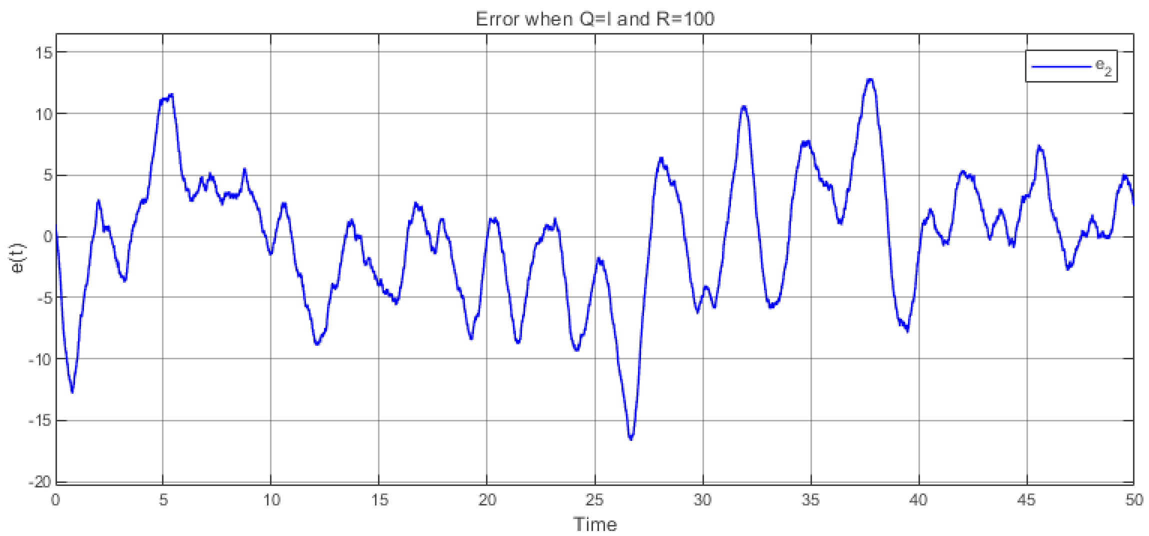

Рис. 34: График $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ при $L_{I,100}$

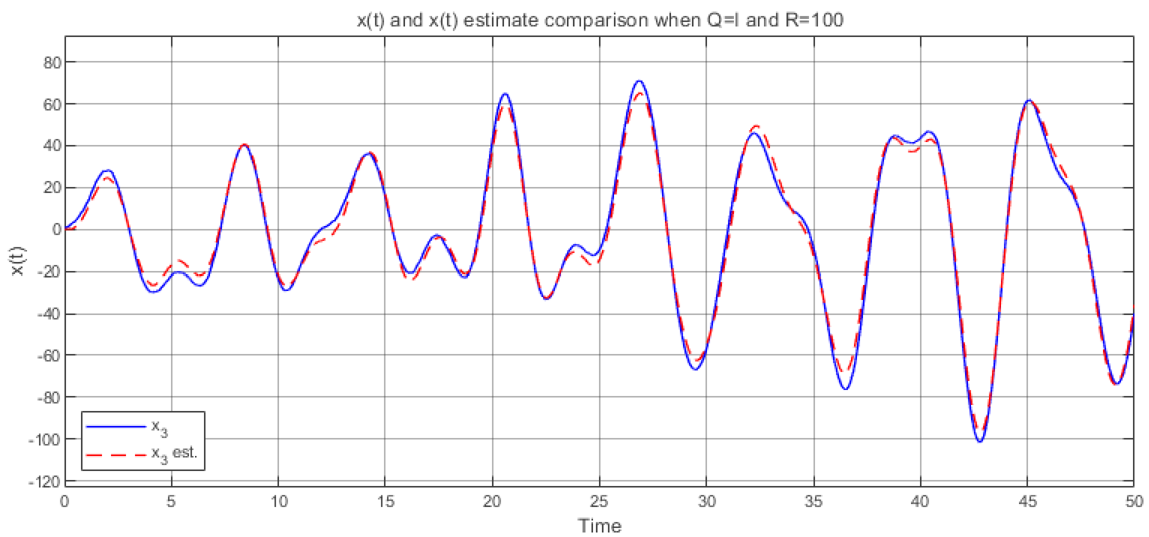

Рис. 35: График $x_3(t), \hat{x}_3(t)$ при $L_{I,100}$

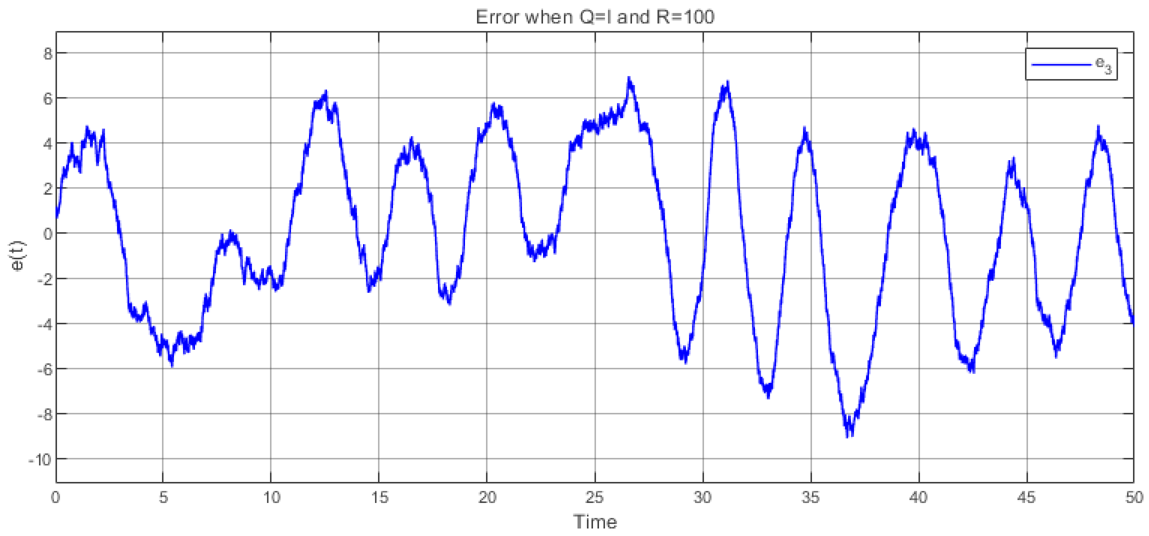

Рис. 36: График $e_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$ при $L_{I,100}$

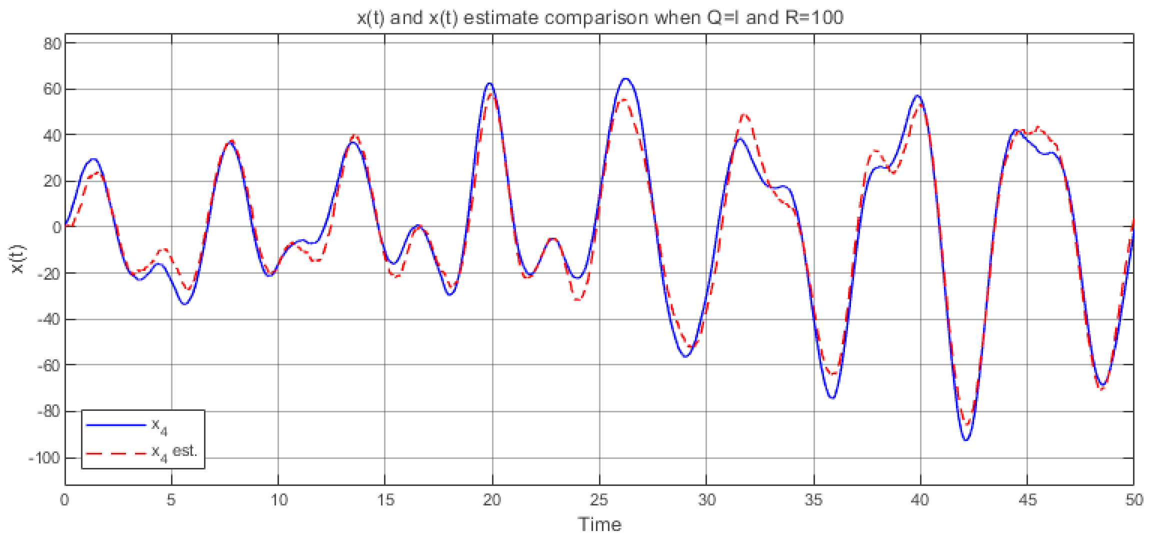

Рис. 37: График $x_4(t), \hat{x}_4(t)$ при $L_{I,100}$

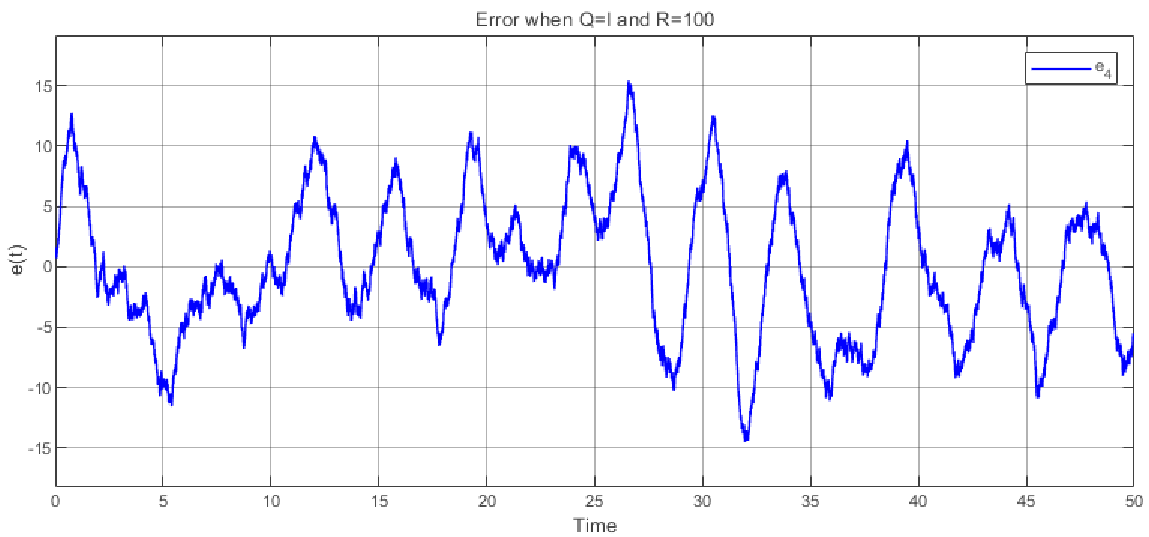

Рис. 38: График $e_4(t) = x_4(t) - \hat{x}_4(t)$ при $L_{I,100}$

Сравнение результатов

Возмущение $f(t)$ имеет меньшую амплитуду, чем помеха $\xi(t)$, т.е. $f(t) < \xi(t)$. При $Q > R$ наблюдатель верит в то, что в среднем больше случайное возмущение f, чем случайная помеха ξ. При $Q < R$ ситуация обратная – наблюдатель меньше верит датчикам, чем прошлым состояниям объекта. На графиках при $Q < R$ видим, что наблюдатель достаточно уверенно ошибается в повторении поведения системы, так как не верит показаниям y, т.е. избыточно фильтрует сигнал; при $Q > R$ наоборот, наблюдатель недостаточно фильтрует сигнал, в результате воспроизведение поведения системы шумное, хотя траектория более точная, чем при $Q < R$ (например, сравн. рис. 33 с 25). Результаты при $Q = R$ выглядят усредненно. Наблюдатель точнее повторяет поведение системы в сравнении со случаями при $Q < R$ и при этом имеет меньше шумов, чем в результатах при $Q > R$ (например, сравн. рис. 17 с 25, 33).

Задание 3. Синтез LQG

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + f, \\ y = Cx + Du + \xi, \end{cases} \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \\ 6 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $f(t), \xi(t)$ – *детерминированные* сигналы (гармонические возмущения).

Стабилизируемость и обнаруживаемость

Проверим собственные числа матрицы A. Программу `MATLAB` см. листинг 3, приложение B

$$\sigma(A) = \{-4, 0, 4, 8\}$$

Число $\lambda_1 = -4$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым/ненаблюдаемым. $\lambda_2 = 0$ устойчивое, но не асимптотически. Остальные собственные числа неустойчивые, требуется управляемость/наблюдаемость. Найдем A_J, B_J, C_J

$$A_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \; B_J = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \; C_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix};$$

Полностью нулевых строк в B_J нет, поэтому система полностью управляема, стабилизируема. В C_J нулевому столбцу соответствует число -4 в A_J – система не полностью наблюдаема, обнаруживаема.

Схема моделирования системы

Построим схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния и закона управления $u = K\hat{x}$

...

Вывод

...

Приложение А

```
% plant parameters
A = [5 2 7; 2 1 2; -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];
x0 = [1;1;1];

% A matrix eigenvalues
eig_A = eig(A)

% Jordan matrix
[P_J, A_J] = jordan(A);
P_Jre(:,1) = P_J(:,1);
P_Jre(:,2) = imag(P_J(:,2));
P_Jre(:,3) = real(P_J(:,3));
A_Jre = P_Jre^-1 * A * P_Jre
B_jre = P_Jre^-1 * B

% solving Riccati
a = 4;
Q= a*eye(3);
R = a*1;

[P,K,e]=icare(A,B,Q,R);
P
K=-inv(R)*B'*P
e=eig(A+B*K)

% quality functional
J_min = x0'*P*x0
```

Листинг 1: Программа для задания 1

Приложение Б

```
% plant parameters
A = [0 1 0 1;
    -26 -7 20 -11;
     0 1 -1 2;
     16 4 -14 8];
C = [-1 0 1 -1];

% A matrix eigenvalues
eig_A = eig(A)

% Jordan matrix
[P_J, A_J] = jordan(A);
P_Jre(:,1) = real(P_J(:,1));
P_Jre(:,2) = imag(P_J(:,2));
P_Jre(:,3) = real(P_J(:,3));
```

```
P_Jre(:,4) = imag(P_J(:,4));
A_Jre = P_Jre^-1 * A * P_Jre
C_jre = C*P_Jre

% solving Riccati
a = 100;
Q= a*eye(4);
R = a*1;

[P,L,e]=icare(A',C',Q,R);
P
L=-P*C'*R^-1
e=eig(A+L*C)
```

Листинг 2: Программа для задания 2

Приложение B

```
    tbd
```

Листинг 3: Программа для задания 3