

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»



ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2
ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ»
ТЕМА «МОДАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ И
НАБЛЮДАТЕЛИ»

Вариант №2

Преподаватель:
Пашенко А. В.

Выполнил:
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР
Группа: R3341
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1	Задание 1. Модальный регулятор	2
1.1	Управляемость и стабилизируемость	2
1.2	Схема моделирования системы, замкнутой регулятором	3
1.3	Достижимые спектры	3
1.4	Матрица регулятора	3
1.5	Корректность синтеза регулятора	5
1.6	Компьютерное моделирование	5
1.7	Сравнение результатов	7
1.8	Вывод	7
2	Задание 2. Наблюдатель полного порядка	8
2.1	Наблюдаемость и обнаруживаемость	8
2.2	Схема моделирования системы с наблюдателем состояния	9
2.3	Матрица коррекции наблюдателя	9
2.4	Корректность синтеза наблюдателя	10
2.5	Компьютерное моделирование	11
2.6	Сравнение результатов	19
2.7	Вывод	20
3	Задание 3. Модальное управление по выходу	20
3.1	Управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость, обнаруживаемость	20
3.2	Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния и закона управления	21
3.3	Достижимые спектры и асимптотическая устойчивость	22
3.4	Матрица регулятора	22
3.5	Матрица коррекции наблюдателя	22
3.6	Компьютерное моделирование	23
3.7	Вывод	24
4	Задание 4. Наблюдатель пониженного порядка	25
4.1	Управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость, обнаруживаемость	25
4.2	Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния пониженного порядка и закона управления	25
4.3	Желаемый спектр матрицы наблюдателя пониженного порядка	26
4.4	Синтез матрицы преобразования	27
4.5	Компьютерное моделирование	27
4.6	Вывод	28
5	Общий вывод по работе	28
6	Приложения	29
6.1	Приложение 1	29
6.2	Приложение 2	30
6.3	Приложение 3	32
6.4	Приложение 4	33
6.5	Приложение 5	34

Задание 1. Модальный регулятор

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma(A + BK) = \begin{bmatrix} \{-2, -2, -2\}, \\ \{-3, -3, -3\}, \\ \{-2, -20, -200\}, \\ \{-3, -30, -300\}, \\ \{-2, -2 \pm 6i\}, \\ \{-3, -3 \pm 9i\}; \end{bmatrix}$$

Управляемость и стабилизируемость

Найдем собственные числа матрицы A с помощью MATLAB (программу см. листинг 1 в приложении 1)

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 & -7 \\ -2 & \lambda - 1 & -2 \\ 2 & 3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\};$$

$\lambda_1 = -2 < 0$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым. $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ имеют положительные действительные части – неустойчивые, нужна управляемость. Определим управляемость собственных чисел через жорданово разложение (приведение комплексной формы к вещественной аналогично первой лабораторной работе)

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{Jre} = P_{re}^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{Jre} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Собственное число $\lambda_1 = -2$ неуправляемое, так как первый элемент в матрице входных воздействий B_{Jre} равен нулю. Остальные собственные числа управляемые. Следовательно, система не полностью управляема. Достаточное условие полной управляемости системы в нашем случае – не равенство нулю первого и [второго или третьего] элементов матрицы B_{Jre} . Оно не выполняется. Так как все неустойчивые собственные числа управляемы, то система стабилизируема.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Построим схему моделирования системы $\dot{x} = Ax + Bu$, замкнутой регулятором $u = Kx$, используя SIMULINK

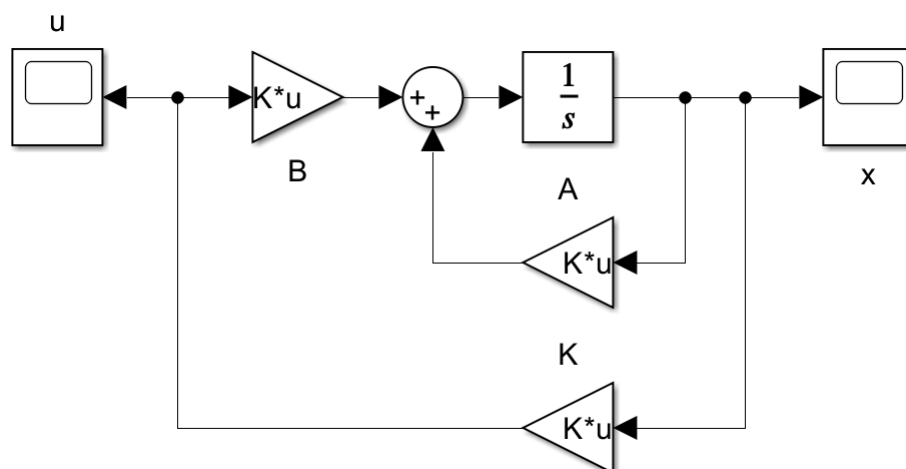


Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором

Достижимые спектры

Рассмотрим предложенные спектры замкнутой системы $(A + BK)$ и определим, какие из них достижимы. Мы хотим, чтобы матрица $(A + BK)$ была устойчивой, то есть все ее собственные числа имели отрицательную действительную часть. В нашем случае комплексная пара $\lambda_{2,3}$ являются неустойчивыми, но управляемыми – их можно переместить в устойчивую область (подобрать любые числа, меньшие нуля). Собственное число $\lambda_1 = -2$ устойчивое, но неуправляемое – его не получится переместить куда-либо. Это означает, что спектр $\sigma(A + BK)$ должен содержать это неуправляемое число, иначе регулятор не будет выполнять свою функцию, мы потеряем собственное число матрицы A . Таким образом, желаемый спектр должен содержать все неуправляемые (но устойчивые) собственные числа матрицы A , при этом остальные числа могут быть любыми, но устойчивыми. Важно уточнить, что если некоторое собственное число матрицы A неустойчиво и неуправляемо, то система не стабилизируема – модальный регулятор применить не получится.

Исходя из наших рассуждений выше, достижимыми будут следующие спектры замкнутой системы

$$\sigma(A + BK) = \begin{cases} \{-2, -2, -2\}, \\ \{-2, -20, -200\}, \\ \{-2, -2 \pm 6i\}; \end{cases}$$

Остальные спектры не содержат неуправляемое собственное число $\lambda_1 = -2$.

Матрица регулятора

Для каждого из достижимых спектров, определенных в предыдущем пункте, найдем соответствующие матрицы регулятора K , приводящие спектр замкнутой системы к желаемому.

Рассмотрим спектр $\sigma(A + BK) = \{-2, -2, -2\}$. Запишем полином Ньютона третьего порядка с $\omega_0 = 1$

$$(\lambda + 2)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8$$

Составим матрицу Γ_1 в канонической наблюдаемой форме по коэффициентам найденного полинома

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$$

Подберем Y_1 такой, чтобы пара (Y_1, Γ_1) была наблюдаема. Проверим, вычислив ранг матрицы наблюдаемости

$$Y_1 = [1 \ 0 \ 0], \text{ rank } \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_1 \Gamma_1 \\ Y_1 \Gamma_1^2 \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3;$$

Теперь, используя пакет `svx` в `MATLAB`, вычислим матрицу $P_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ как решение уравнения Сильвестра

$$AP_1 - P_1 \Gamma_1 = BY_1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \ 0 \ 0],$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.4455 & -0.0701 & -0.0288 \\ -0.0759 & -0.1036 & -0.0181 \\ 0.1649 & 0.1926 & 0.0404 \end{bmatrix};$$

Далее вычислим матрицу регулятора $K_1 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ по формуле

$$K_1 = -Y_1 P_1^{-1},$$

$$K_1 = [-1.800 \quad -7.043 \quad -4.443];$$

Повторим шаги для нахождения остальных K_i . Рассмотрим спектры

$$\sigma(A + BK) = \{-2, -20, -200\}, \quad \sigma(A + BK) = \{-2, -2 \pm 6i\};$$

Найдем их полиномы

$$(\lambda + 2)(\lambda + 20)(\lambda + 200) = \lambda^3 + 222\lambda^2 + 4440\lambda + 8000,$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 2 - 6i)(\lambda + 2 + 6i) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 48\lambda + 80;$$

Аналогично запишем матрицы Γ_i

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8000 & -4440 & -222 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -80 & -48 & -6 \end{bmatrix};$$

Подберем Y_i и выполним проверку ранга

$$Y_{2,3} = Y_1 = [1 \ 0 \ 0] = Y, \text{ rank } \begin{bmatrix} Y \\ Y \Gamma_2 \\ Y \Gamma_2^2 \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} Y \\ Y \Gamma_3 \\ Y \Gamma_3^2 \end{bmatrix} = \text{rank } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3;$$

Найдем $P_{2,3}$ и $K_{2,3}$ тем же способом

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.2259 & 0.0053 & 0.0000 \\ 0.0612 & 0.0012 & 0.0000 \\ 0.2253 & 0.0146 & 0.0001 \end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0.2546 & 0.0351 & -0.0026 \\ 0.0744 & 0.0055 & -0.0012 \\ 0.2550 & 0.0275 & 0.0094 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = [754.2 \quad -2553.6 \quad -67.0], \quad K_3 = [5.4000 \quad -25.9424 \quad -1.7424];$$

Корректность синтеза регулятора

Определим собственные числа каждой матрицы замкнутой системы $(A + BK_i)$ и сравним с соответствующими желаемыми спектрами

$$\sigma(A + BK_1) = \sigma \begin{bmatrix} -0.400 & -19.129 & -6.329 \\ 0.200 & -6.043 & -2.443 \\ -0.200 & 4.043 & 0.443 \end{bmatrix} = \{-2, -2, -2\},$$

$$\sigma(A + BK_2) = \sigma \begin{bmatrix} 2267.6 & -7658.7 & -193.9 \\ 756.2 & -2552.6 & -65.0 \\ -756.2 & 2550.6 & 63.0 \end{bmatrix} = \{-2, -20, -200\},$$

$$\sigma(A + BK_3) = \sigma \begin{bmatrix} 21.2000 & -75.8273 & 1.7727 \\ 7.4000 & -24.9424 & 0.2576 \\ -7.4000 & 22.9424 & -2.2576 \end{bmatrix} = \{-2, -2 \pm 6i\};$$

Видим, что спектры совпадают с желаемыми – регулятор синтезирован корректно.

Компьютерное моделирование

Для компьютерного моделирования воспользуемся схемой SIMULINK, представленной на рис. 1. Зададим в интегратор начальное условие $x(0) = [1 \ 1 \ 1]^T$

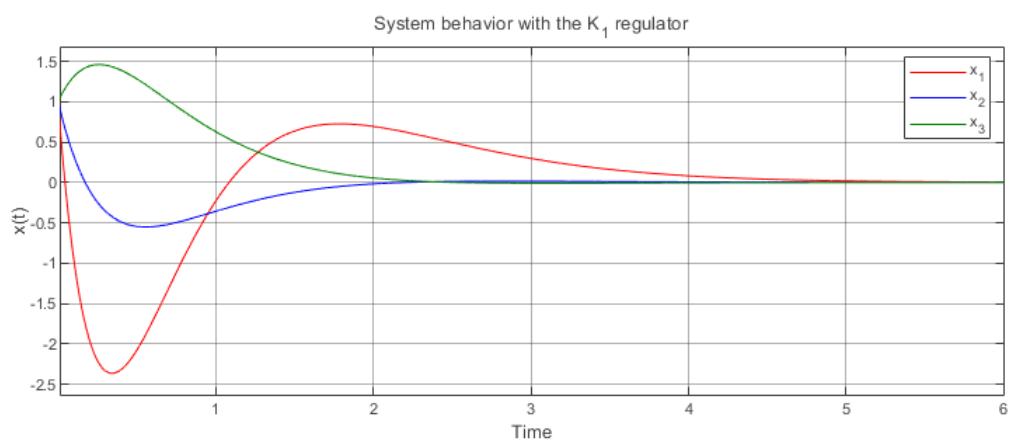


Рис. 2: График $x(t)$ для K_1

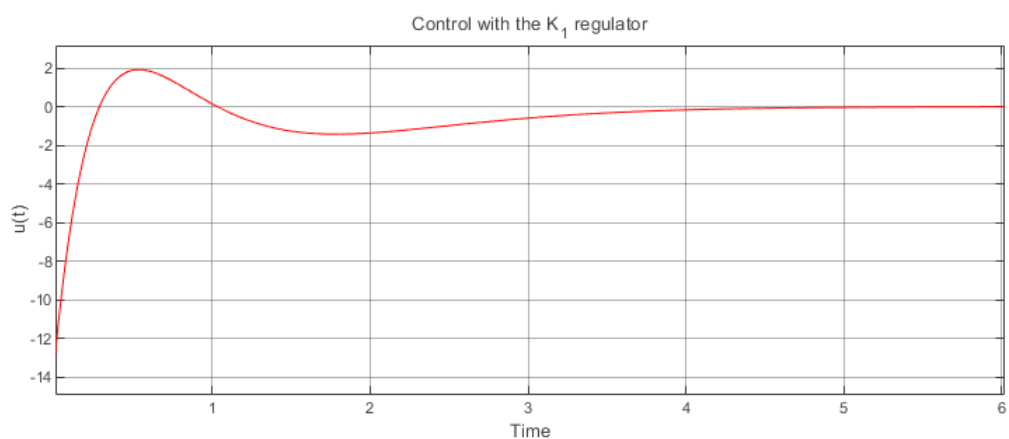


Рис. 3: График $u(t)$ для K_1

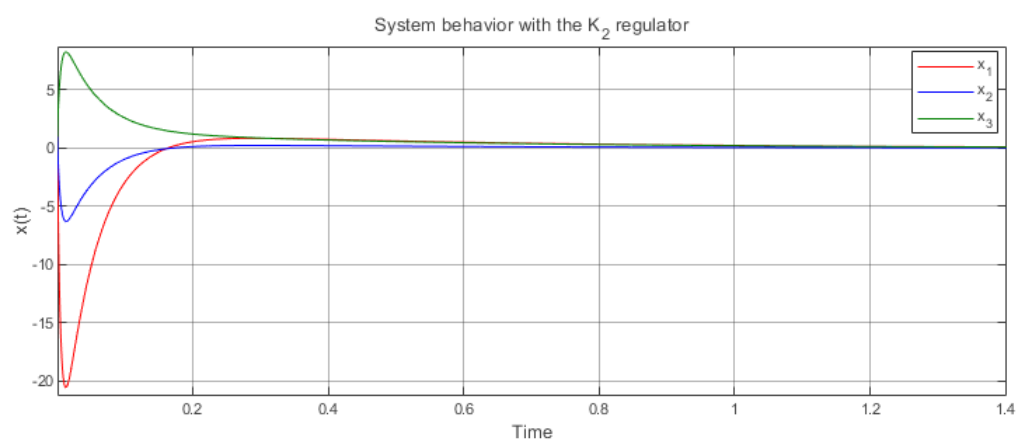


Рис. 4: График $x(t)$ для K_2

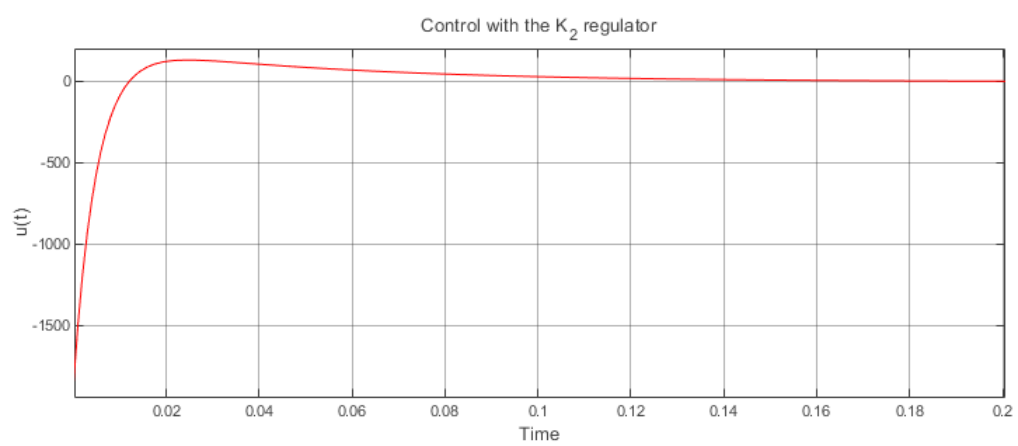


Рис. 5: График $u(t)$ для K_2

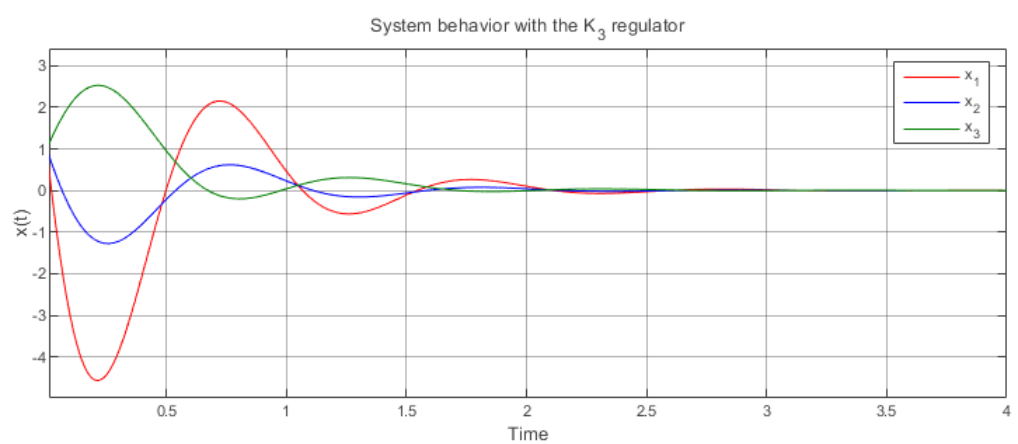


Рис. 6: График $x(t)$ для K_3

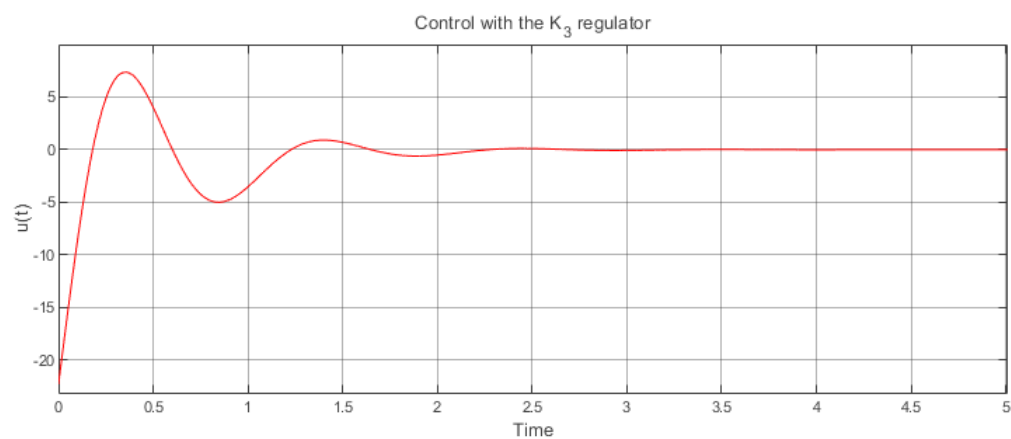


Рис. 7: График $u(t)$ для K_3

Сравнение результатов

Сопоставим полученные результаты компьютерного моделирования для рассмотренных спектров, оценим возможные сравнительные преимущества и недостатки каждого из них.

На каждом рисунке система $x(t)$ стабилизировалась – все координаты пришли в ноль, выходя из 1. Управления $u(t)$ сошлись к нулю – регуляторы выполнили свою задачу и больше не требуют активного управления.

На рис. 3 видим, что управление $u(t)$ достаточно плавное, имеет небольшое перерегулирование в сравнении с другими графиками. На рис. 2 система $x(t)$ ожидаемо медленно и плавно затухает.

На рис. 4 наблюдаем быстрое стабилизирование системы, однако при этом присутствуют большие начальные отклонения. В сравнении с другими графиками имеется ожидаемо наибольшее перерегулирование (см. рис. 5). Получили достаточно агрессивный регулятор.

На рис. 6 система, вследствие наличия комплексных собственных чисел, приобрела сравнительно небольшие осцилляции. По скорости затухания колебаний результат получился средним (быстрее, чем K_1 ; медленнее, чем K_2). Система выглядит менее предсказуемо в сравнении с остальными результатами.

Вывод

В ходе выполнения задания мы выяснили, что система не полностью управляема, но стабилизируема. Мы нашли достижимые спектры по принципу наличия в них неуправляемых (но устойчивых) собственных чисел матрицы A . Мы вычислили матрицы регулятора, убедились в корректности синтеза каждого регулятора, после чего провели компьютерное моделирование. В ходе сравнения результатов было выяснено, что при маленьких собственных числах в спектре система медленно и плавно затухает со сравнительно небольшим перерегулированием. При больших по модулю собственных числах система быстро стабилизируется, но имеет сравнительно большое перерегулирование. Наличие комплексных собственных чисел создаст некоторые осцилляции в системе, из-за чего она может быть менее предсказуема. При этом скорость затухания системы выше, чем при небольших по модулю числах, принадлежащих множеству рациональных чисел.

Задание 2. Наблюдатель полного порядка

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ y = Cx, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -26 & -7 & 20 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 16 & 4 & -14 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\sigma(A + LC) = \begin{bmatrix} \{-2, -2, -2, -2\}, \\ \{-2, -20, -200, -2000\}, \\ \{-2 \pm 3i, -2 \pm 4i\}; \end{bmatrix}$$

Наблюдаемость и обнаруживаемость

Найдем собственные числа матрицы A . Программа для вычислений в MATLAB находится в приложении 2 на листинге 2

$$\det[\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 \\ 26 & \lambda + 7 & -20 & 11 \\ 0 & -1 & \lambda + 1 & -2 \\ -16 & -4 & 14 & \lambda - 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma(A) = \{\pm 2i, \pm i\};$$

Все собственные числа комплексные и имеют нулевую действительную часть. Следовательно, они все устойчивые, но не асимптотически. То есть в системе будут незатухающие колебания. Перейдем к вещественной жордановой форме системы, чтобы определить наблюдаемость каждого собственного числа, а далее сделать выводы о наблюдаемости и обнаруживаемости системы

$$A = P_{re} J_{re} P_{re}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & -2 & 6 & -3 \\ 2 & -0 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -6 & 4 \\ 12 & 4 & -10 & 6 \end{bmatrix},$$

$$C_{Jre} = C P_{re} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0 & -1 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1 & 1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J_{re} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{Jre} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Все собственные числа, кроме λ_4 , наблюдаемы, так как соответствующие им элементы матрицы выходов C_{Jre} не равны нулю. Из этого нельзя сделать вывод, что система полностью наблюдаема. Достаточное условие полной наблюдаемости нашей системы – не равенство нулю [первого или второго] и [третьего или четвертого] элементов матрицы C_{Jre} . Так как условие выполняется, то система полностью наблюдаема, а значит, и обнаруживаема.

Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Построим в SIMULINK схему моделирования системы с наблюдателем состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$

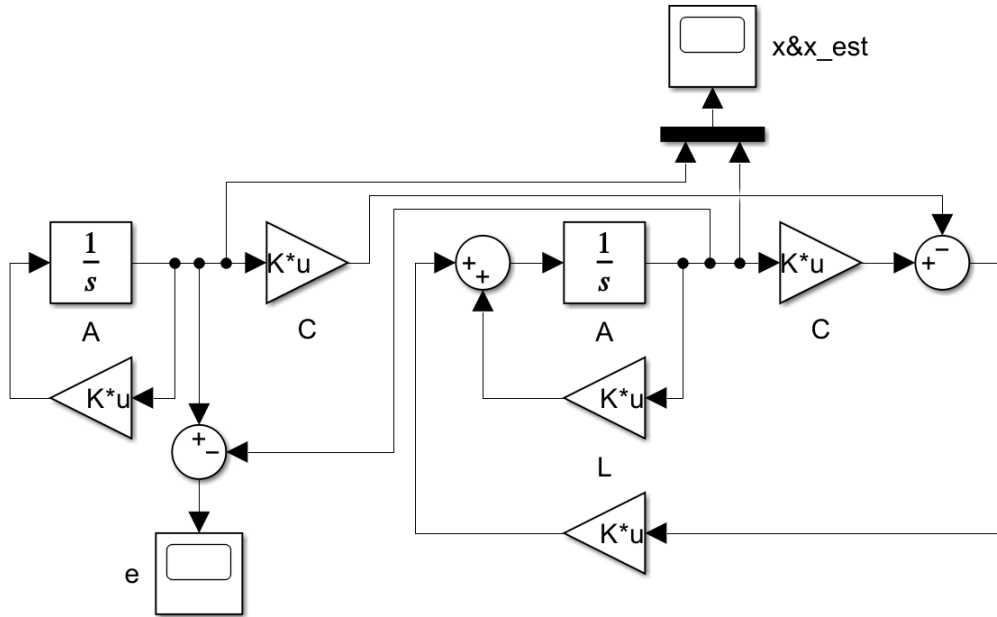


Рис. 8: Схема моделирования системы с наблюдателем состояния

Через один Score отслеживаем сигналы $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ на одном графике, через другой ошибку наблюдателя (невязку) $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

Матрица коррекции наблюдателя

Для каждого из предложенных спектров найдем матрицы коррекции наблюдателя L , обеспечивающих соответствующий желаемый спектр. Аналогично первому заданию составим полиномы

$$(\lambda + 2)^4 = \lambda^4 + 8\lambda^3 + 24\lambda^2 + 32\lambda + 16,$$

$$(\lambda + 2)(\lambda + 20)(\lambda + 200)(\lambda + 2000) = \lambda^4 + 2222\lambda^3 + 448440\lambda^2 + 8888000\lambda + 16000000,$$

$$(\lambda + 2 - 3i)(\lambda + 2 + 3i)(\lambda + 2 - 4i)(\lambda + 2 + 4i) = \lambda^4 + 8\lambda^3 + 49\lambda^2 + 132\lambda + 260;$$

Запишем матрицы Γ_i

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16 & -32 & -24 & -8 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -16000000 & -8888000 & -448440 & -2222 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -260 & -132 & -49 & -8 \end{bmatrix};$$

Все матрицы Γ_i составлены по одинаковому принципу, поэтому подберем единый Y такой, чтобы пары (Y, Γ_i) были управляемы. Проверим, вычислив ранги матриц

управляемости U_i

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U_i = [Y \quad \Gamma_i Y \quad \Gamma_i^2 Y \quad \Gamma_i^3 Y],$$

$$\text{rank} [Y \quad \Gamma_1 Y \quad \Gamma_1^2 Y \quad \Gamma_1^3 Y] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & -16 & 128 \\ 0 & -16 & 128 & -640 \end{bmatrix} = 4,$$

$$\text{rank} [Y \quad \Gamma_2 Y \quad \Gamma_2^2 Y \quad \Gamma_2^3 Y] = \text{rank} \left[10^{13} \cdot \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0036 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0036 & -7.1822 \end{bmatrix} \right] = 4,$$

$$\text{rank} [Y \quad \Gamma_3 Y \quad \Gamma_3^2 Y \quad \Gamma_3^3 Y] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -260 \\ 0 & 0 & -260 & 2080 \\ 0 & -260 & 2080 & -3900 \end{bmatrix} = 4;$$

Используя пакет `svh` в `MATLAB`, вычислим матрицы $Q_i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ как решения уравнения Сильвестра

$$\Gamma_i Q_i - Q_i A = Y C$$

После чего вычислим $L_i \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$ по формуле

$$L_i = Q_i^{-1} Y$$

Получаем следующие результаты

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -7.7426 & -2.3690 & 6.5528 & -3.5588 \\ 3.6532 & 1.1580 & -3.1096 & 1.9516 \\ 1.1176 & 0.2440 & -1.0528 & 0.3088 \\ -1.4032 & -0.4080 & 1.6096 & -1.2016 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 10.3333 \\ -21.0000 \\ 7.6667 \\ 5.3333 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} -1.7989 & -0.5605 & 1.4628 & -0.6220 \\ 3.6220 & 1.0996 & -2.9656 & 1.3166 \\ -7.5251 & -1.7746 & 6.5261 & -3.8724 \\ -15.8185 & -4.0663 & 12.1953 & -5.9314 \end{bmatrix}, \quad L_2 = 10^6 \cdot \begin{bmatrix} 0.7378 \\ 7.5493 \\ 6.0674 \\ 5.3319 \end{bmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{bmatrix} -1.4397 & -0.4741 & 1.0517 & -0.3017 \\ 6.5000 & 1.7241 & -5.3103 & 2.4655 \\ -5.3793 & -1.0172 & 5.2759 & -3.3621 \\ -27.3448 & -6.4310 & 21.4483 & -10.5345 \end{bmatrix}, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 4.0000 \\ 76.0000 \\ 58.6667 \\ 62.6667 \end{bmatrix};$$

Корректность синтеза наблюдателя

Определим собственные числа матриц наблюдателя $(A + L_i C)$ и сравним с соответствующими желаемыми спектрами

$$\sigma(A + L_1 C) = \sigma \begin{bmatrix} -10.3333 & 1.0000 & 10.3333 & -9.3333 \\ -5.0000 & -7.0000 & -1.0000 & 10.0000 \\ -7.6667 & 1.0000 & 6.6667 & -5.6667 \\ 10.6667 & 4.0000 & -8.6667 & 2.6667 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} -2.0017 \\ -2.0000 + 0.0017i \\ -2.0000 - 0.0017i \\ -1.9983 \end{array} \right\},$$

$$\sigma(A + L_2 C) = \sigma \left[10^6 \cdot \begin{bmatrix} -0.7378 & 0.0000 & 0.7378 & -0.7378 \\ -7.5494 & 0.0000 & 7.5494 & -7.5494 \\ -6.0674 & 0.0000 & 6.0674 & -6.0674 \\ -5.3318 & 0.0000 & 5.3318 & -5.3318 \end{bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} -2000 \\ -200 \\ -2 \\ -20 \end{Bmatrix},$$

$$\sigma(A + L_3 C) = \sigma \begin{bmatrix} -4.0000 & 1.0000 & 4.0000 & -3.0000 \\ -102.0000 & -7.0000 & 96.0000 & -87.0000 \\ -58.6667 & 1.0000 & 57.6667 & -56.6667 \\ -46.6667 & 4.0000 & 48.6667 & -54.6667 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \pm 4i \\ -2 \pm 3i \end{Bmatrix};$$

Отклонение в 0.085% для L_1 будем считать погрешностью вычислений в MATLAB. Остальные спектры совпали с желаемыми. Наблюдатель синтезирован корректно.

Компьютерное моделирование

Для компьютерного моделирования воспользуемся схемой SIMULINK, представленной на рис. 8. Зададим в интеграторы такие начальные условия: для системы $x(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, для наблюдателя $\hat{x}(0) = [2 \ 0 \ 0 \ -1]^T$. Также для одного из случаев приблизим график к началу времени t , чтобы убедиться в том, что каждая координата выходит из своего начального условия

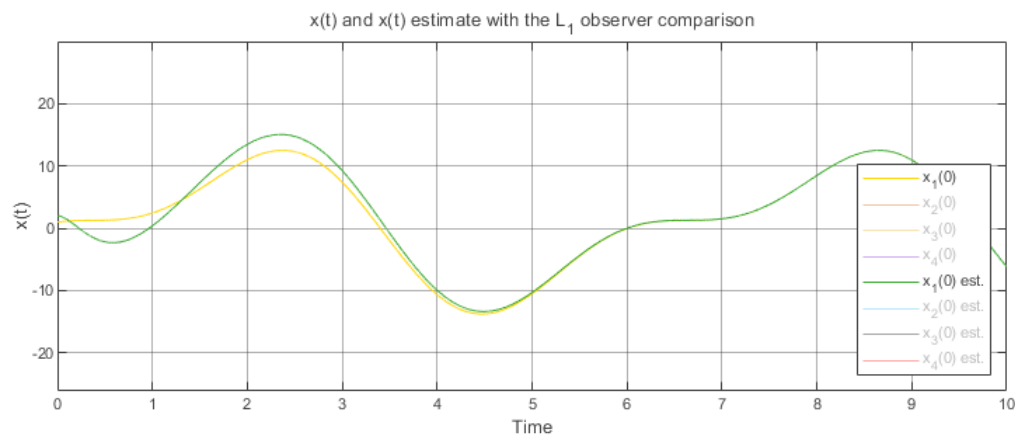


Рис. 9: Графики $x_1(t), \hat{x}_1(t)$ для L_1

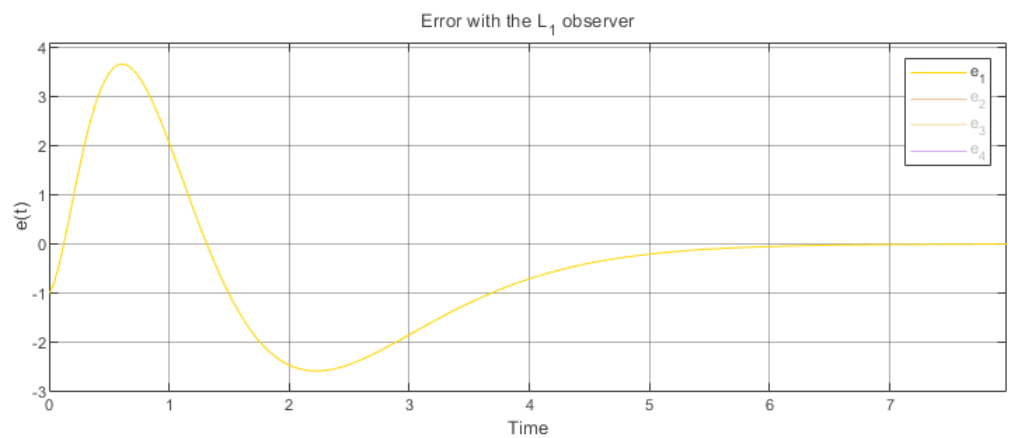


Рис. 10: График $e_1(t)$ для L_1

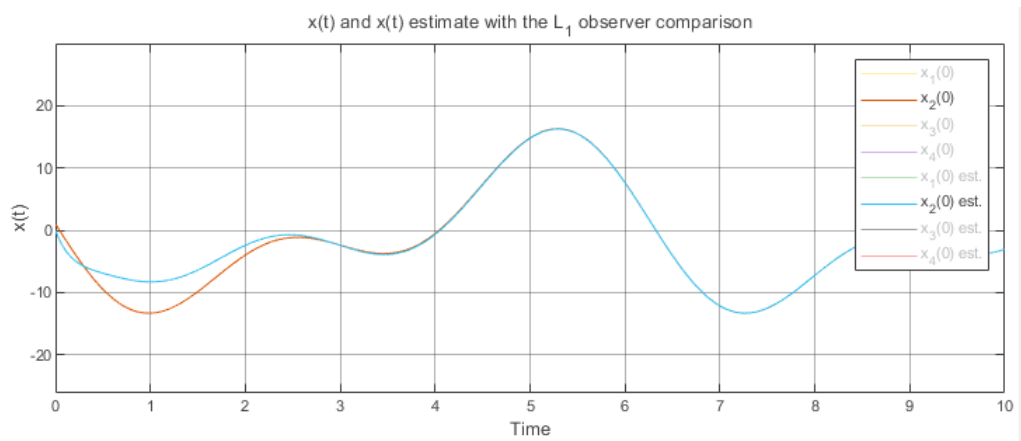


Рис. 11: Графики $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ для L_1

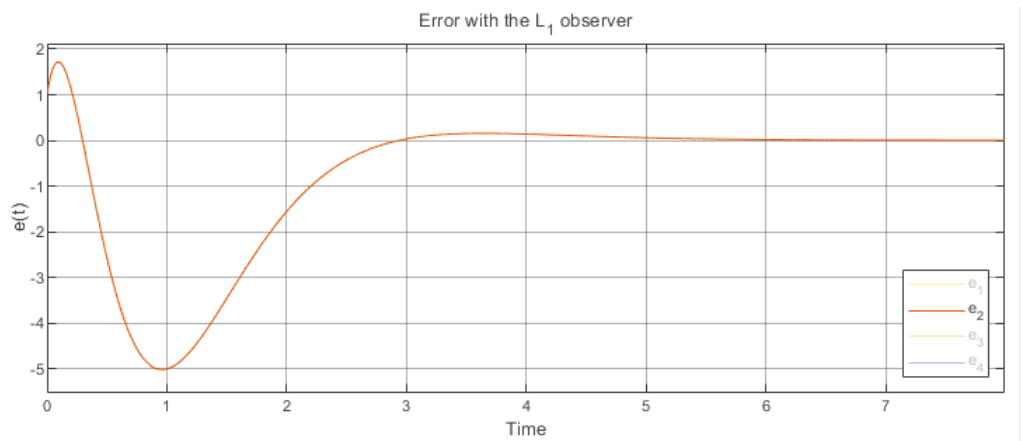


Рис. 12: График $e_2(t)$ для L_1

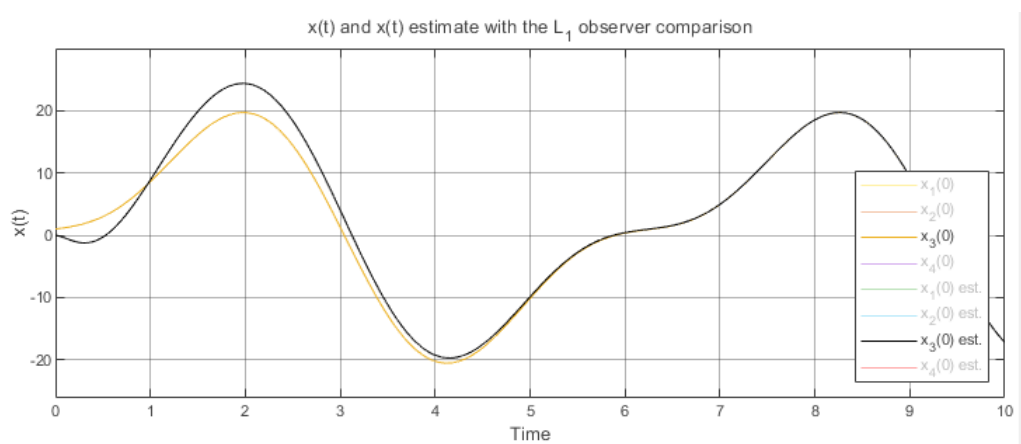


Рис. 13: Графики $x_3(t), \hat{x}_3(t)$ для L_1

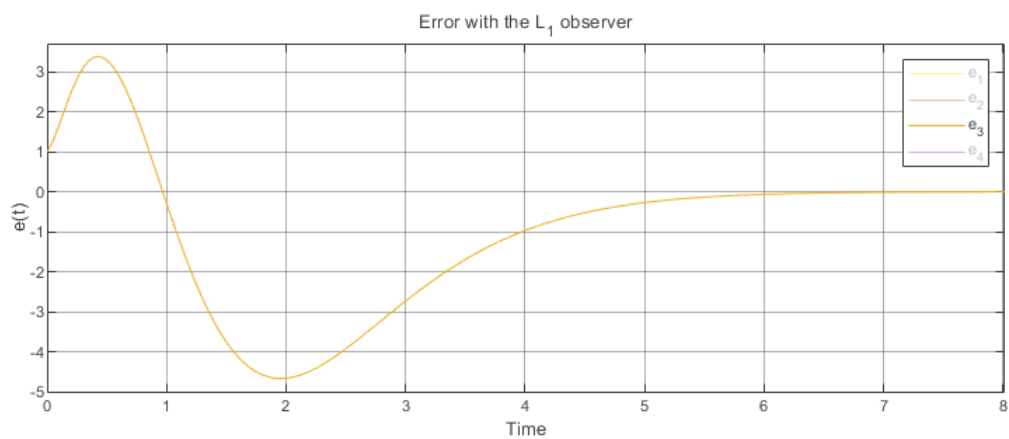


Рис. 14: График $e_3(t)$ для L_1

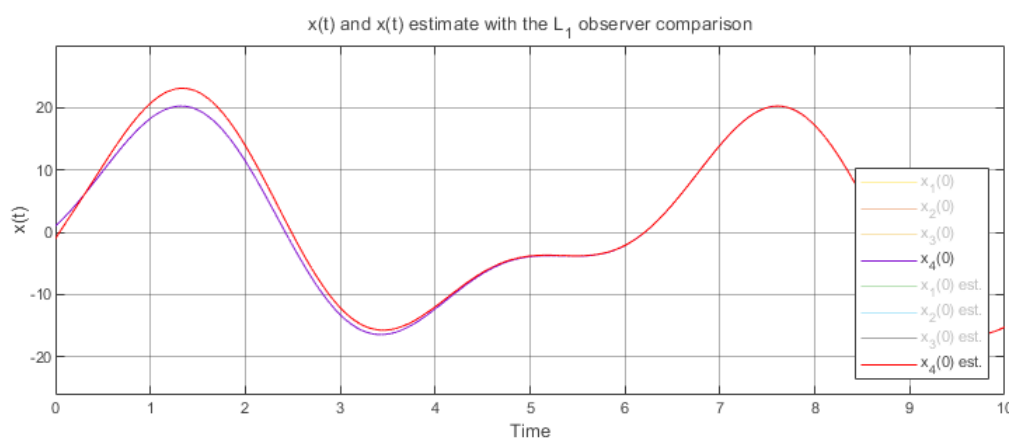


Рис. 15: Графики $x_4(t)$, $\hat{x}_4(t)$ для L_1

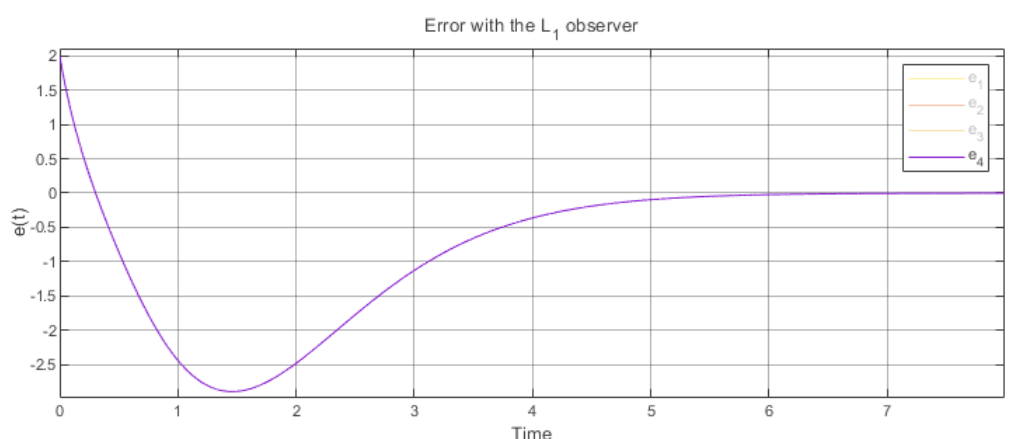


Рис. 16: График $e_4(t)$ для L_1

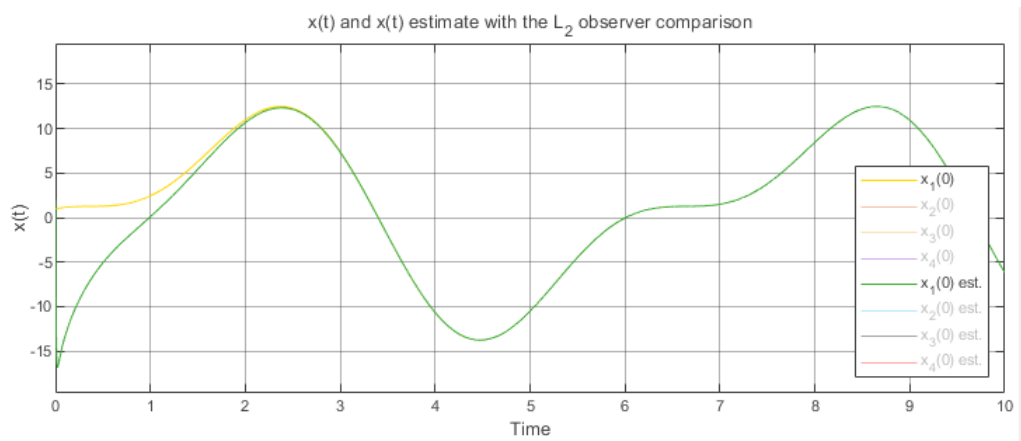


Рис. 17: Графики $x_1(t), \hat{x}_1(t)$ для L_2

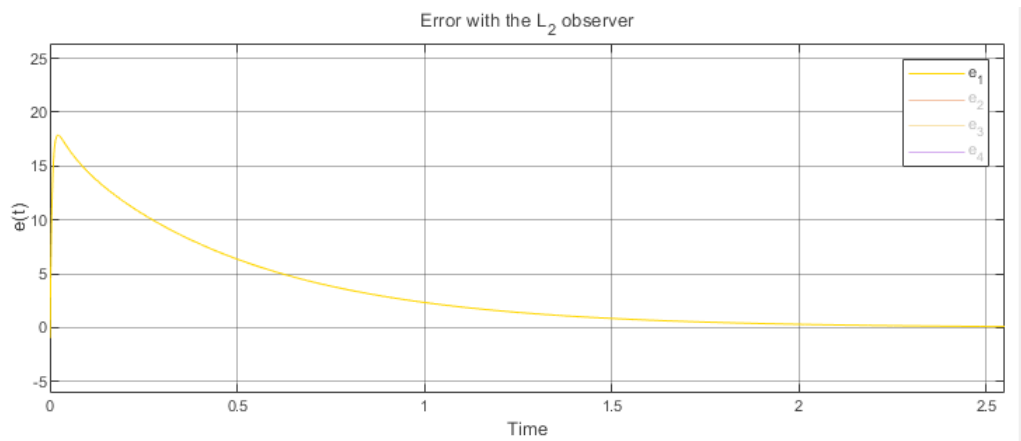


Рис. 18: График $e_1(t)$ для L_2

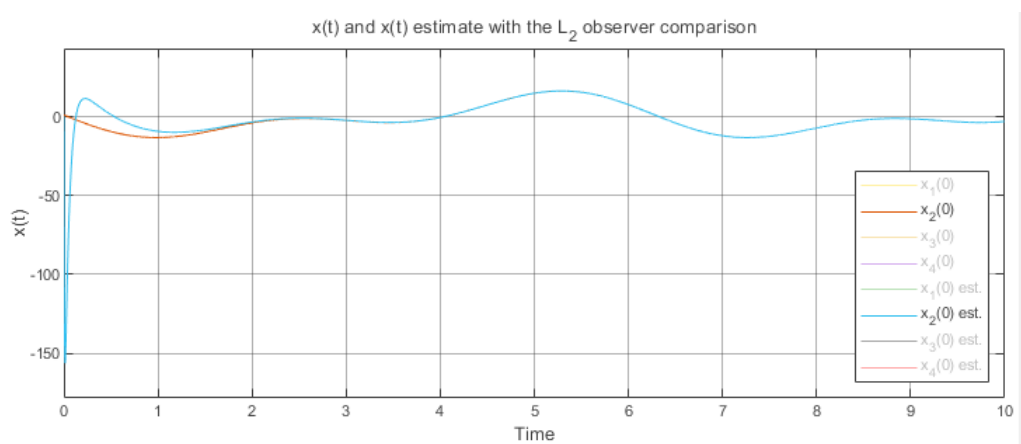


Рис. 19: Графики $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ для L_2

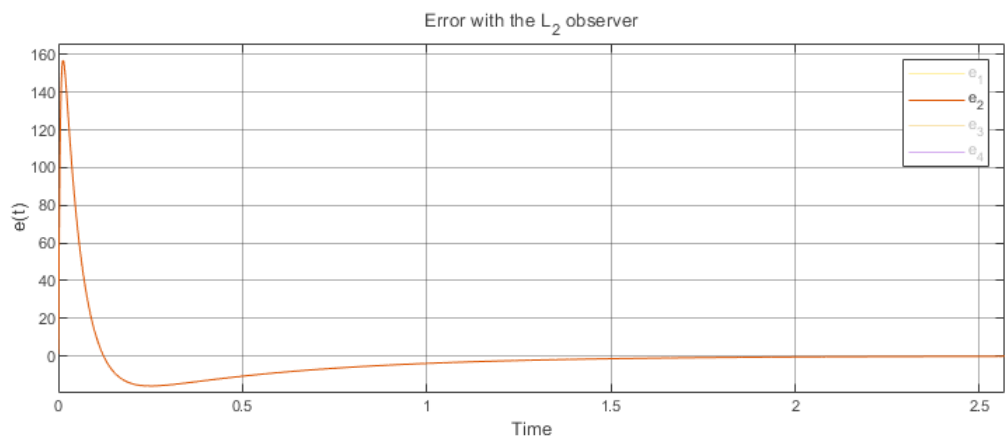


Рис. 20: График $e_2(t)$ для L_2

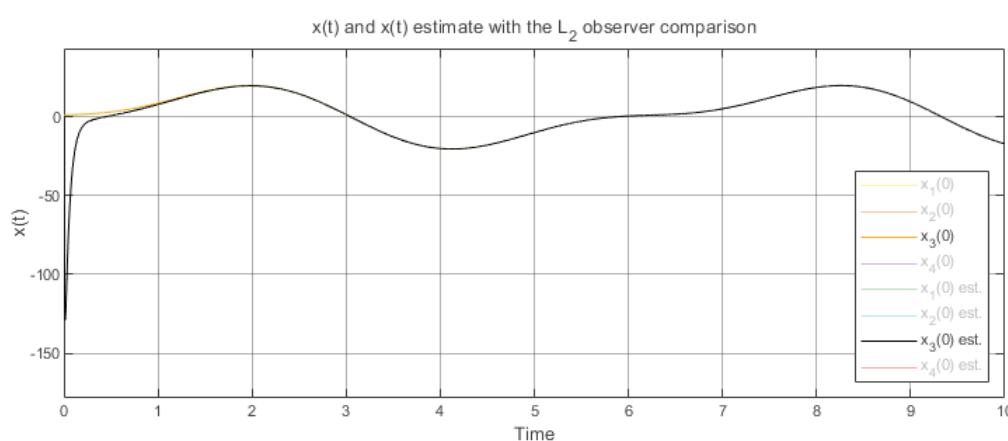


Рис. 21: Графики $x_3(t)$, $\hat{x}_3(t)$ для L_2



Рис. 22: График $e_3(t)$ для L_2

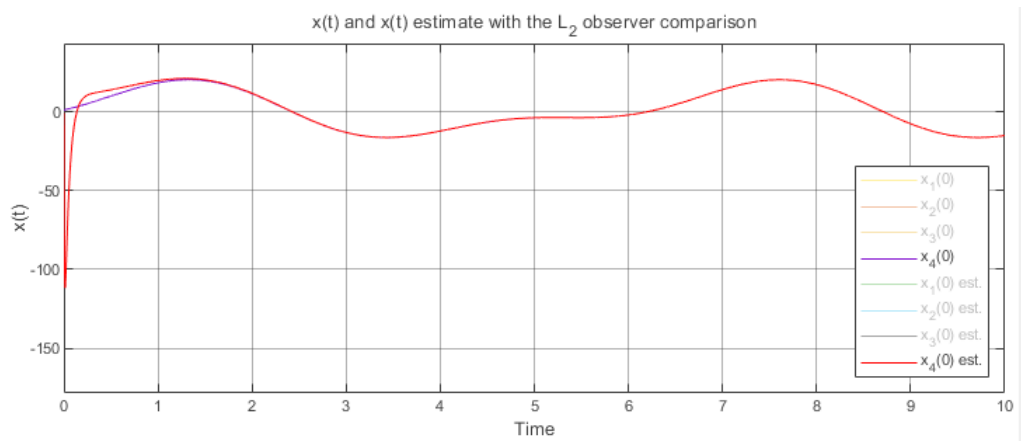


Рис. 23: Графики $x_4(t), \hat{x}_4(t)$ для L_2

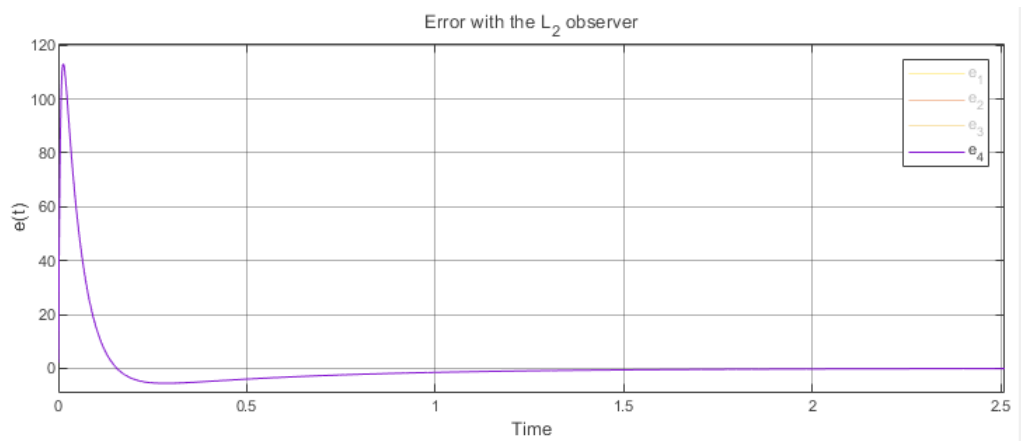


Рис. 24: График $e_4(t)$ для L_2

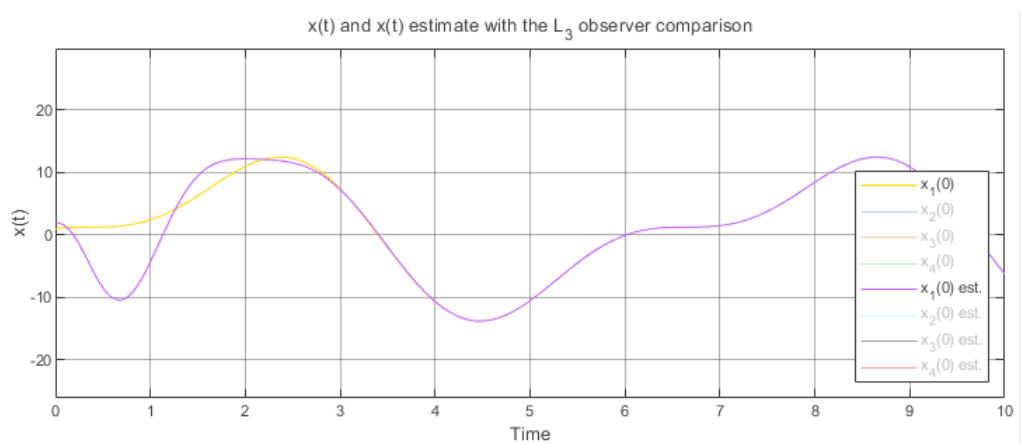


Рис. 25: Графики $x_1(t), \hat{x}_1(t)$ для L_3

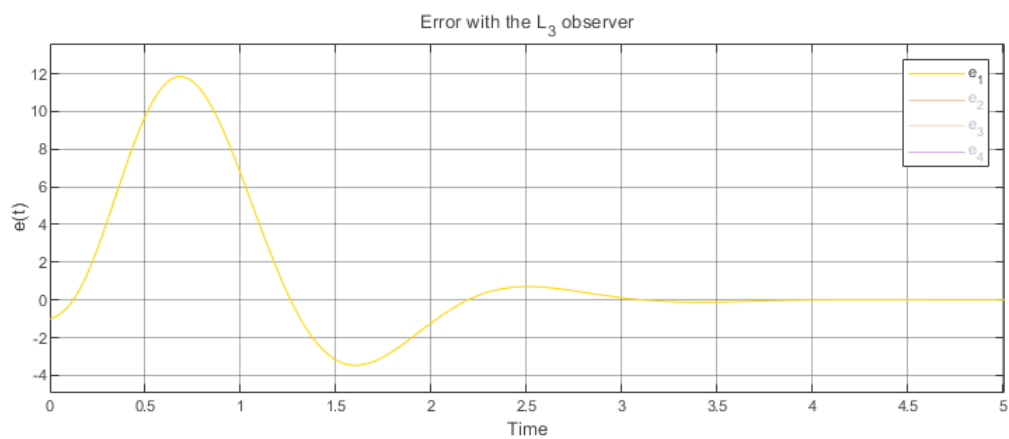


Рис. 26: График $e_1(t)$ для L_3

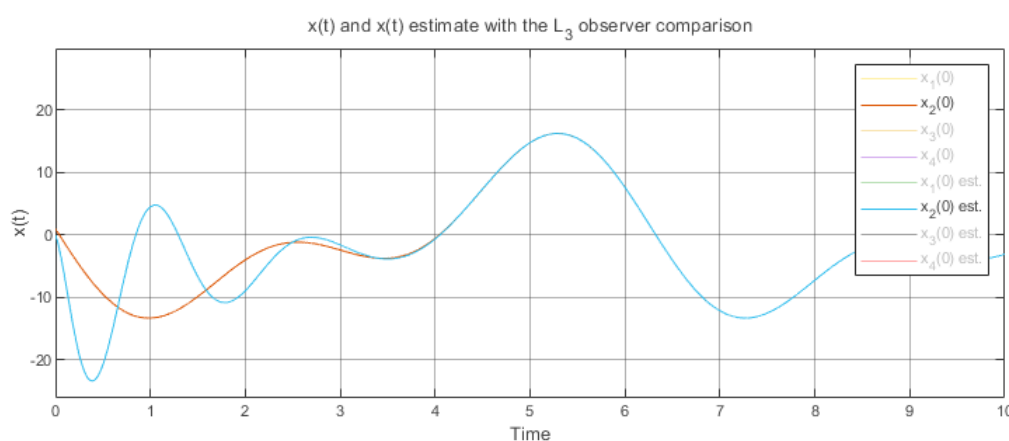


Рис. 27: Графики $x_2(t), \hat{x}_2(t)$ для L_3

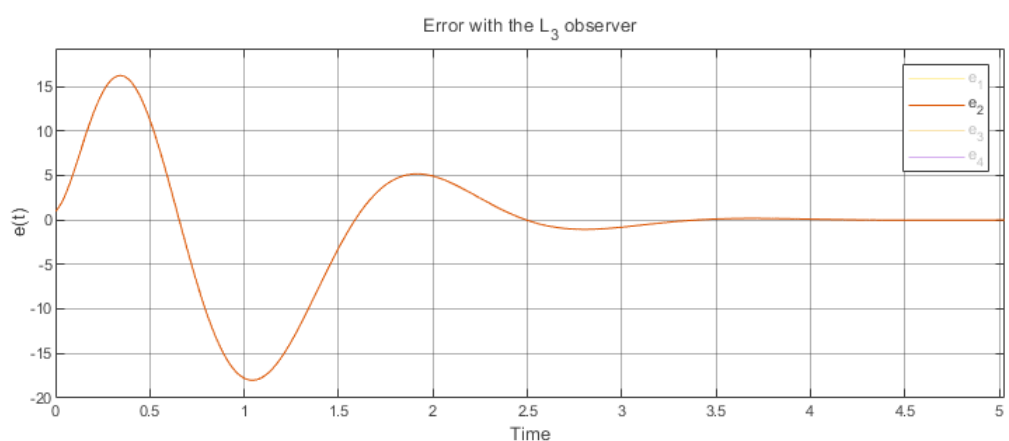


Рис. 28: График $e_2(t)$ для L_3

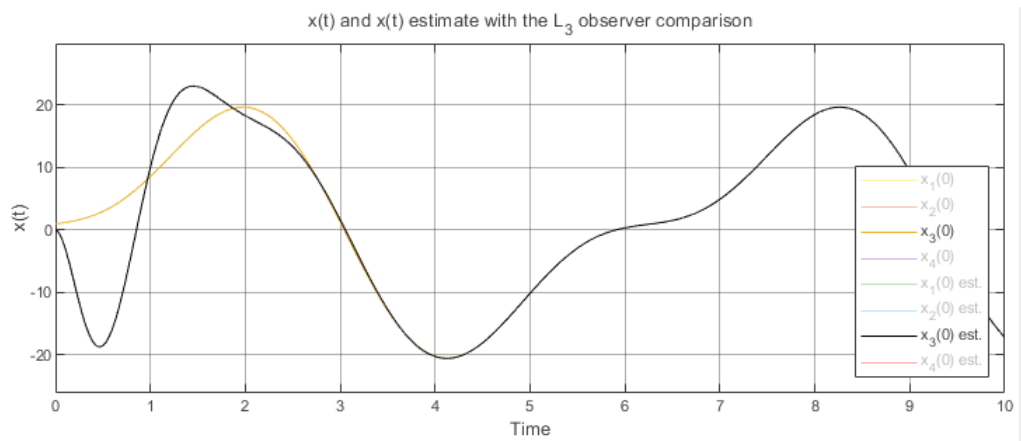


Рис. 29: Графики $x_3(t), \hat{x}_3(t)$ для L_3

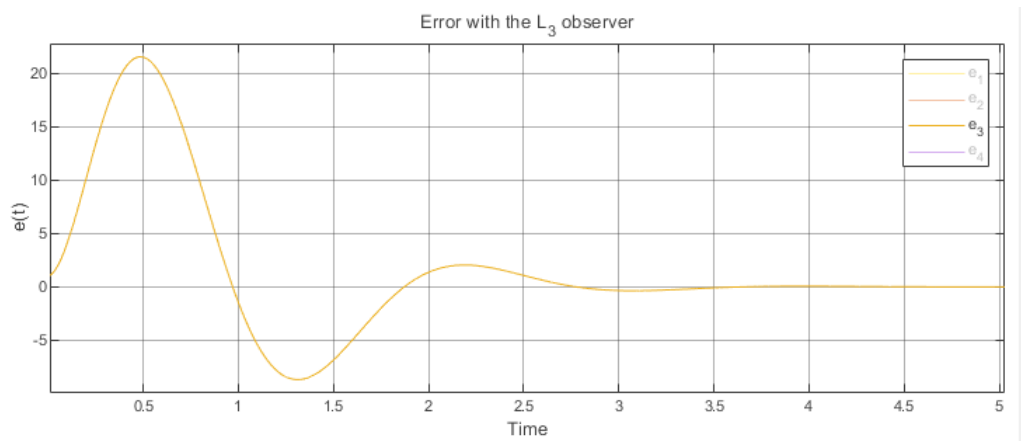


Рис. 30: График $e_3(t)$ для L_3

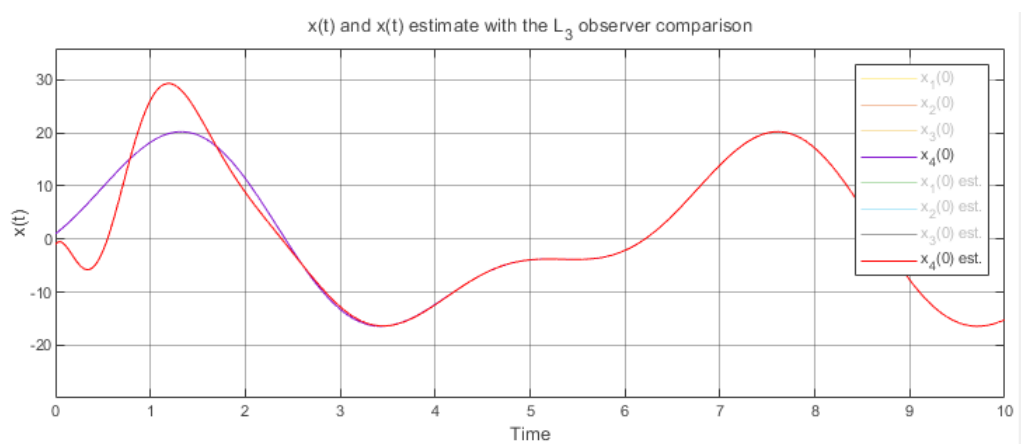


Рис. 31: Графики $x_4(t), \hat{x}_4(t)$ для L_3

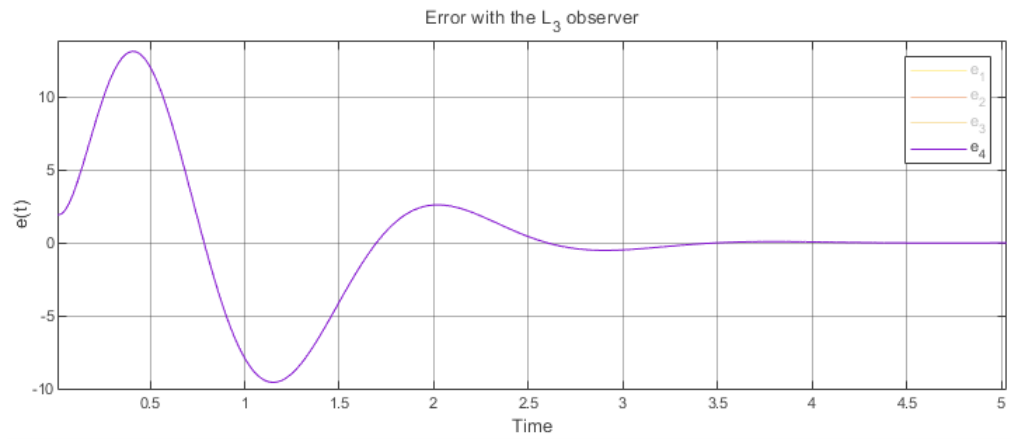


Рис. 32: График $e_4(t)$ для L_3

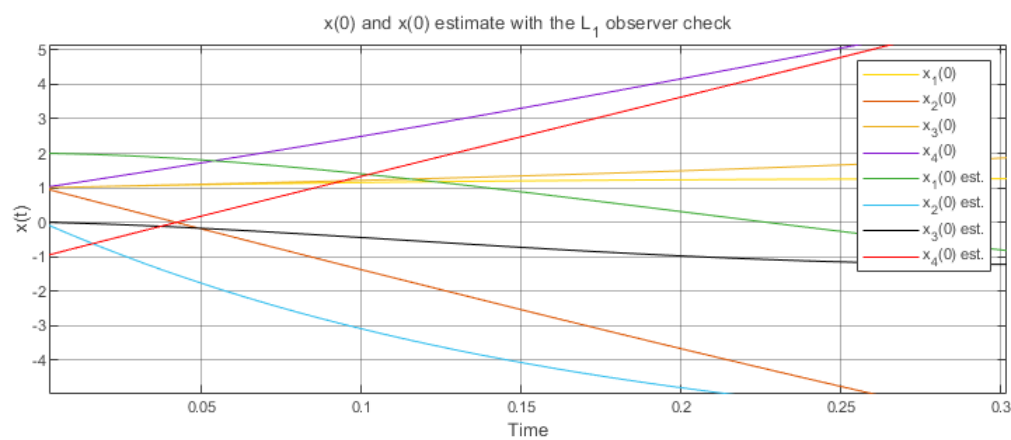


Рис. 33: Проверка начальных условий (случай для L_1)

Сравнение результатов

Видим, как на каждом графике $x(t)$, $\hat{x}(t)$ оценки координат сходятся к настоящим координатам – наблюдатель выполняет свою работу верно. Например, на рис. 9 **зеленая** оценка координаты \hat{x}_1 сходится к **желтой** истинной координате x_1 примерно за $t = 7$. Ошибки ожидаемо стремятся к нулю. На рис. 33 видим, что все координаты выходят из своих начальных условий.

На рис. 9, 11, 13, 15 видим, что примерно к $t = 7$ каждая координата наблюдателя сошлась с исходными координатами. Ошибки на рис. 10, 12, 14, 16 сравнительно небольшие, ожидаемо наибольшие в начале, далее плавно и медленно стремятся к нулю. Итого: плавное поведение наблюдателя с небольшой ошибкой, но медленное схождение к истинным координатам.

На рис. 17, 19, 21, 23 ситуация обратная – наблюдатель быстро сводит координаты с координатами исходной системы (примерно за $t = 3$), однако ошибки на рис. 18, 20, 22, 24 ожидаемо сравнительно большие. На практике лучше всего соблюдать баланс между величиной ошибки и скоростью сходимости.

На рис. 25, 27, 29, 31 результат в целом схож с результатом для L_1 (см. рис. 9, 11, 13, 15). Разница в том, что координаты сходятся немного быстрее, однако, что видно на рис. 26, 28, 30, 32, появляются лишние осцилляции, то есть система становится менее предсказуемой (больше скачков ошибки до ее полного схождения к нулю в сравнении со случаем для L_1 – там почти все ошибки сразу сходятся к нулю).

Вывод

Мы выяснили, что система является полностью наблюдаемой, а следовательно, и обнаруживаемой. Мы вычислили матрицы коррекции наблюдателя и убедились в том, что наблюдатель синтезирован верно. Мы промоделировали систему с наблюдателем состояния и сравнили полученные результаты. В целом выводы аналогичны первому заданию. Лучше всего брать небольшие по модулю рациональные или комплексные числа. Выбор зависит от того, что нам важнее. Если важнее скорость – комплексные. Если точность – рациональные.

Задание 3. Модальное управление по выходу

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость, обнаруживаемость

Найдем собственные числа матрицы A . Программа для вычислений в MATLAB представлена в приложении 3 на листинге 3

$$\det [\lambda I - A] = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & \lambda - 2 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & \lambda - 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\sigma(A) = \{-4, 0, 4, 8\};$$

Собственное число $\lambda_1 = -4$ асимптотически устойчивое, может быть неуправляемым и/или ненаблюдаемым. $\lambda_2 = 0$ устойчивое, но не асимптотически. $\lambda_{2,3} > 0$ неустойчивые, нужна управляемость и наблюдаемость. Перейдем к жордановой форме системы

$$A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & -0.25 & -0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & -0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix},$$

$$B_J = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25 \\ -0.25 & -0.25 & -0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & -0.25 & 0.25 \\ -0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$C_J = CP = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix};$$

Итого имеем

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad C_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix};$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Матрица B_J не содержит нулевых элементов – все собственные числа матрицы A управляемы, следовательно, система полностью управляема, а значит, и стабилизируема. Матрица C_J содержит нулевой столбец, соответствующий $\lambda_2 = -4$ – это собственное число ненаблюдаемо. Остальные собственные числа наблюдаемы, следовательно, система не полностью наблюдаема. Так как все неустойчивые собственные числа наблюдаемы, а ненаблюдаемое $\lambda_2 < 0$, то система обнаруживаема.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния и закона управления

Построим в SIMULINK схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + (B + LD)u + L(C\hat{x} - y)$ и закона управления $u = K\hat{x}$

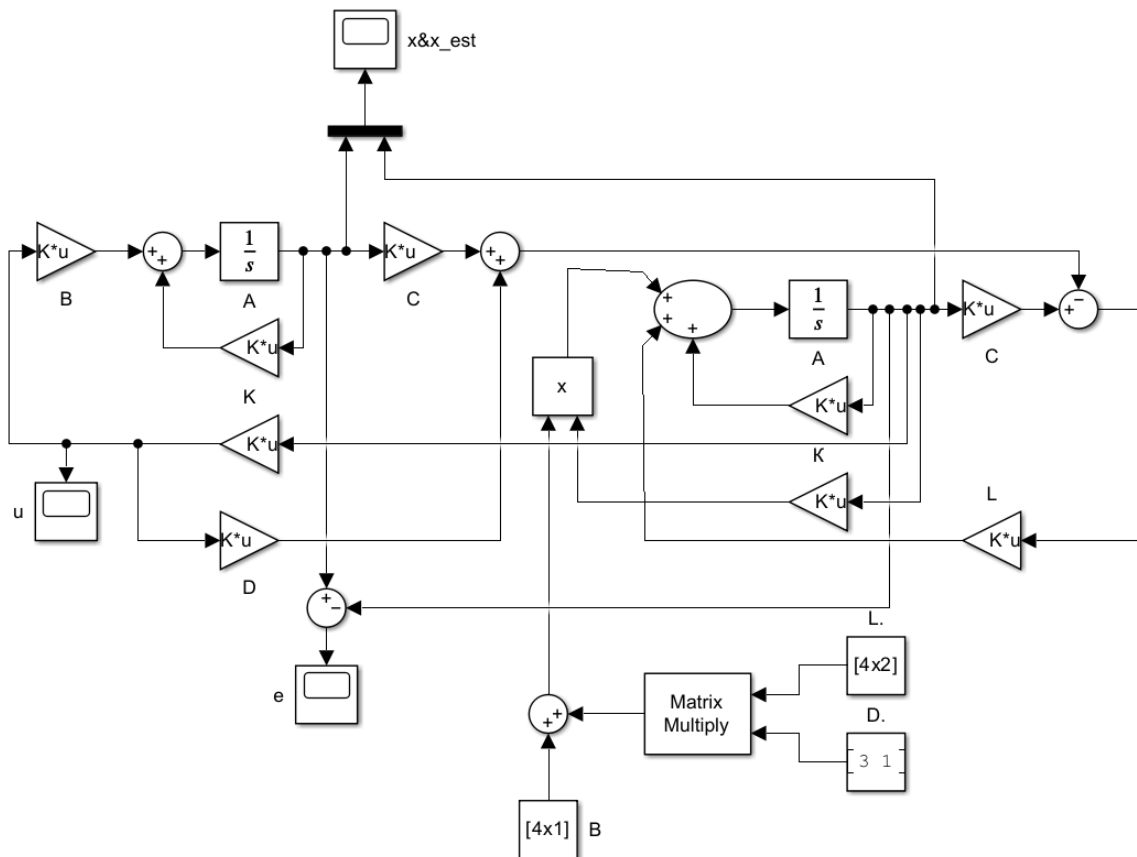


Рис. 34: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния и закона управления

Отслеживаем на одном графике $x(t), \hat{x}(t)$, на другом $e(t)$ аналогично второму заданию. На третьем рассматриваем $u(t)$.

Достижимые спектры и асимптотическая устойчивость

Для асимптотической устойчивости все числа в спектре должны иметь отрицательную действительную часть.

Система полностью управляема, поэтому спектр для матрицы регулятора можно задать любой. Пусть

$$\sigma(A + BK) = \{-1, -1, -1, -1\}$$

Система не полностью наблюдаема. Значит, ненаблюдаемое собственное число нужно обязательно использовать в желаемом спектре, иначе он будет недостижим. Пусть

$$\sigma(A + LC) = \{-4, -3, -3, -3\}$$

Матрица регулятора

Синтезируем регулятор K аналогично заданию 1. Запишем полином, составим матрицу Γ_K , зададим Y_K , проверим ранг матрицы наблюдаемости пары (Y_K, Γ_K) . После чего решим уравнение Сильвестра относительно P и вычислим K

$$(\lambda + 1)^4 = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 \Rightarrow \Gamma_K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -6 & -4 \end{bmatrix},$$

$$Y_K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} \begin{bmatrix} Y_K \\ Y_K \Gamma_K \\ Y_K \Gamma_K^2 \\ Y_K \Gamma_K^3 \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4,$$

$$AP - P\Gamma_K = BY_K \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 11.0046 & 17.8620 & 11.9525 & 3.0063 \\ -10.9986 & -17.6516 & -11.9451 & -2.9809 \\ 12.5015 & 18.2862 & 12.0475 & 3.0184 \\ 13.4953 & 18.2002 & 12.0549 & 2.9944 \end{bmatrix},$$

$$K = -Y_K P^{-1} \Rightarrow K = [-2.3888 \quad -1.7772 \quad 2.4930 \quad -1.8840];$$

Проверим корректность синтеза регулятора – определим собственные числа матрицы замкнутой системы $(A + BK)$ и сравним с соответствующим желаемым спектром

$$\sigma(A + BK) = \sigma \begin{bmatrix} -2.7777 & -3.5544 & 0.9860 & -1.7679 \\ -9.5553 & -5.1087 & 7.9720 & -3.5358 \\ -18.3330 & -12.6631 & 16.9580 & -11.3037 \\ -17.1107 & -10.2174 & 19.9440 & -13.0716 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.9992 + 0.0008i \\ -0.9992 - 0.0008i \\ -1.0008 + 0.0008i \\ -1.0008 - 0.0008i \end{Bmatrix}$$

Отклонение в 0.08% будем считать погрешностью вычислений в MATLAB. Регулятор синтезирован корректно – получили желаемый спектр.

Матрица коррекции наблюдателя

Найдем матрицу коррекции наблюдателя L , обеспечивающую желаемый спектр, аналогично второму заданию (поменялась только размерность выхода)

$$(\lambda + 3)^4 = \lambda^4 + 12\lambda^3 + 54\lambda^2 + 108\lambda + 81 \Rightarrow \Gamma_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -108 & -135 & -63 & -13 \end{bmatrix},$$

$$Y_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{rank} [Y_L \quad \Gamma_L Y_L \quad \Gamma_L^2 Y_L \quad \Gamma_L^3 Y_L] =$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -108 & -135 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -108 & -135 & 1404 & 1647 \\ 0 & 0 & -108 & -135 & 1404 & 1647 & -11448 & -12906 \end{bmatrix} = 4,$$

$$\Gamma_L Q - Q A = Y_L C \Rightarrow Q = \begin{bmatrix} -0.1175 & 0.0885 & -1.0492 & -1.0781 \\ -0.1944 & -0.0370 & 0.1944 & -0.0370 \\ 0.7595 & -0.6108 & 1.2405 & 1.3893 \\ -0.6643 & 1.8546 & 0.6646 & 1.8544 \end{bmatrix},$$

$$L = Q^{-1} Y_L \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 26040 & 28794 \\ 26032 & 28786 \\ 26035 & 28793 \\ -26037 & -28794 \end{bmatrix}$$

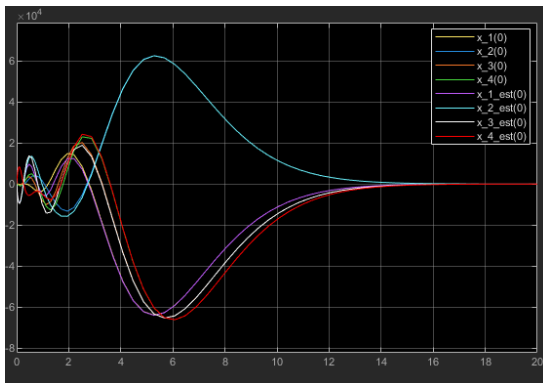
Проверим корректность синтеза наблюдателя

$$\sigma(A + LC) = \sigma \begin{bmatrix} 5510 & 52080 & 52080 & 109670 \\ 5510 & 52070 & 52060 & 109640 \\ 5510 & 52070 & 52070 & 109660 \\ -5510 & -52070 & -52070 & -109660 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.0001 \\ -3.0165 \pm 0.0298i \\ -2.9670 \end{Bmatrix}$$

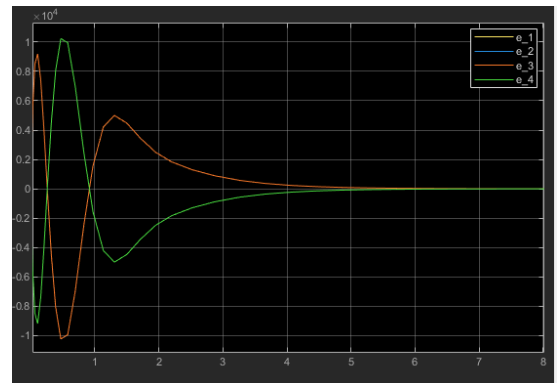
Примем неточности за погрешность вычислений в MATLAB. Тогда, наблюдатель синтезирован корректно – желаемый спектр получен.

Компьютерное моделирование

Для компьютерного моделирования воспользуемся схемой SIMULINK, представленной на рис. 34. Зададим в интеграторы такие начальные условия: для системы $x(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$, для наблюдателя $\hat{x}(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$



(а) Графики $x(t), \hat{x}(t)$



(б) График $e(t)$

Рис. 35: Графики $x(t), \hat{x}(t), e(t)$

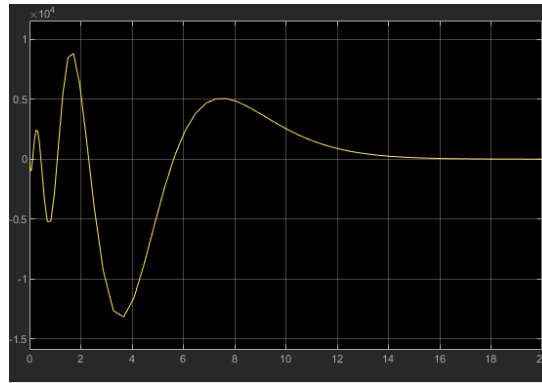
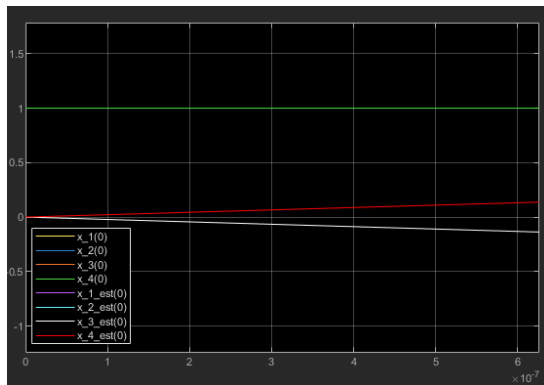
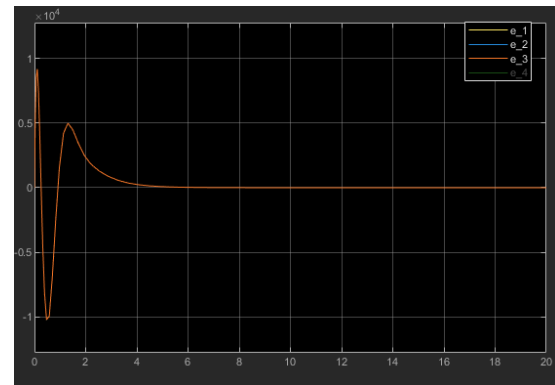


Рис. 36: График $u(t)$

Проведем небольшие уточнения. Проверим начальные условия $x(0), \hat{x}(0)$, а также уберем один из графиков ошибки



(а) Проверка нач. усл. $x(0), \hat{x}(0)$



(б) График $e(t)$ без одной из ошибок

Рис. 37: Графики $x(t), \hat{x}(t), e(t)$

Регулятор и наблюдатель выполнили свою задачу. Оценки координат сходятся к истинным со временем, что видно на рис. 35а. Ошибка уходит в ноль. Система сходится к нулю, управления со временем нужно все меньше (см. рис. 36), пока оно уже будет совсем не нужно. Система исходит из заданных начальных условий – траектории накладываются друг на друга, поэтому видны не все координаты (см. рис. 37а). Три ошибки идентичны, четвертая зеркальная (см. рис. 35б, 37б).

Вывод

Система полностью управляема, стабилизируема, не полностью наблюдаема, но обнаруживаема. Были взяты достижимые спектры, далее получены матрицы регулятора и коррекции наблюдателя, которые приводят спектры к желаемым. В ходе компьютерного моделирования по построенной схеме было выяснено, что регулятор и наблюдатель выполняют свою задачу. Система стабилизируется к 0, наблюдатель повторяет траектории за системой. Ошибка сходится к нулю. Начальные условия соблюдены.

Задание 4. Наблюдатель пониженного порядка

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

Управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость, обнаруживаемость

Приведем систему к жордановой форме. J, B_J мы уже находили в задании 3

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B_J = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix};$$

Все собственные числа управляемы, система полностью управляема и стабилизируема. Найдем C_J в базисе собственных векторов матрицы A . Программа MATLAB для задания 4 находится в приложении 4 на листинге 4

$$C_J = CP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Так как столбцов с нулевыми элементами в матрице C_J нет, то система полностью наблюдаема (все собственные числа наблюдаемы), а следовательно, обнаруживаема.

Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния пониженного порядка и закона управления

Построим схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния пониженного порядка

$$\dot{\hat{z}} = \Gamma \hat{z} - Yy + (QB + YD)u, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y - Du \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

и закона управления $u = K\hat{x}$. Модальный регулятор K берем из задания 3. Схема расположена на следующей странице на рис. 38. Параметры блока MATLAB Function расположены в приложении 5 на листинге 5

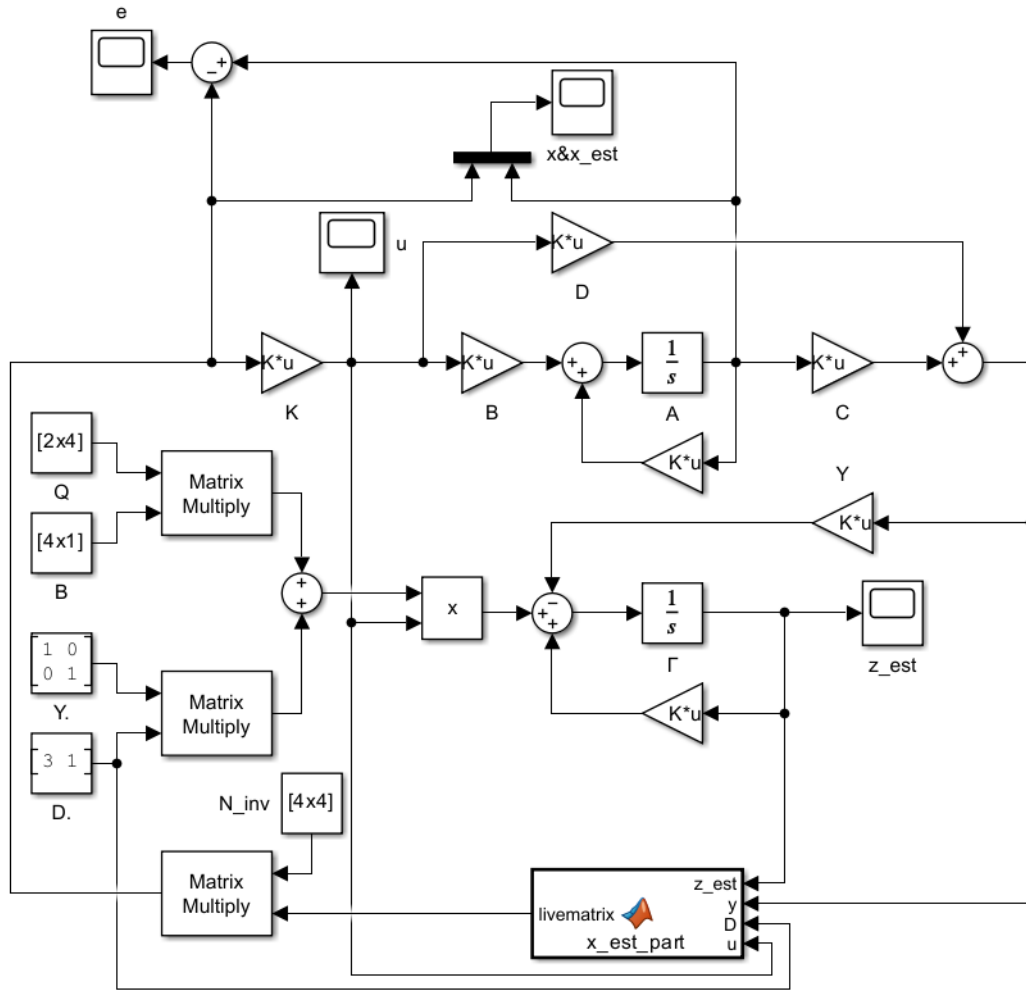


Рис. 38: Схема моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из наблюдателя состояния пониженного порядка и закона управления

Желаемый спектр матрицы наблюдателя пониженного порядка

Для начала определим размерности матриц Γ , Q , Y . Размерность выхода $k = 2$ – это измеряемая часть. Порядок системы $n = 4$. Тогда

$$Q_{(n-k) \times n} \Rightarrow Q_{2 \times 4},$$

$$\Gamma_{(n-k) \times (n-k)} \Rightarrow \Gamma_{2 \times 2},$$

$$Y_{(n-k) \times k} \Rightarrow Y_{2 \times 2};$$

Так как система полностью наблюдаема, то можем задать любой спектр матрицы наблюдателя пониженного порядка Γ . Ограничение – асимптотическая устойчивость, то есть действительные части всех собственных чисел должны быть отрицательными. Пусть

$$\sigma(\Gamma) = \{-2, -2\} \Rightarrow \Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}[Y \quad \Gamma Y] = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2;$$

Синтез матрицы преобразования

Для синтеза матрицы преобразования нужно решить уравнение типа Сильвестра

$$\Gamma Q - QA = YC$$

Предоставим вычисления MATLAB. Получаем

$$Q = \begin{bmatrix} -0.0678 & 0.2378 & -0.1822 & -0.2622 \\ -0.0667 & 0.2667 & 0.0667 & -0.2333 \end{bmatrix}$$

Также найдем матрицу

$$N = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix},$$

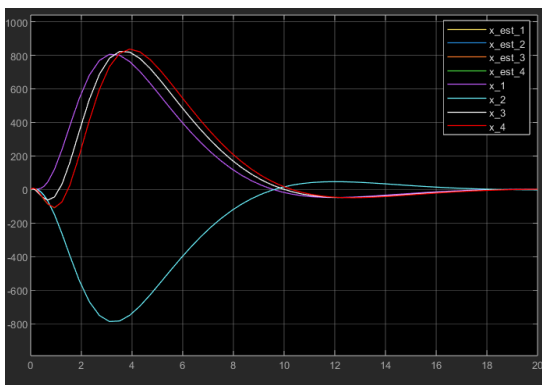
обратная от которой необходима для вычисления \hat{x}

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.0678 & 0.2378 & -0.1822 & -0.2622 \\ -0.0667 & 0.2667 & 0.0667 & -0.2333 \end{bmatrix},$$

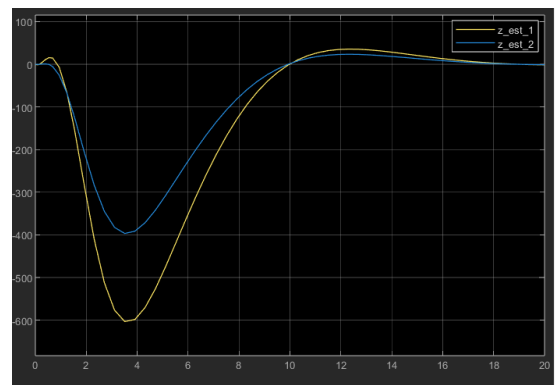
$$N^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4.1538 & 0.1154 & -16.1538 & 18.1538 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4.4615 & -0.1538 & -18.4615 & 16.4615 \end{bmatrix};$$

Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование, соответствующее схеме 38, с начальными условиями системы $x(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ и наблюдателя $\hat{z}(0) = [0 \ 0]^T$. Зададим $K = [-2.3888 \ -1.7772 \ 2.4930 \ -1.8840]$. Построим графики $u(t)$, $\hat{z}(t)$, $x(t)$, $\hat{x}(t)$, $e(t)$

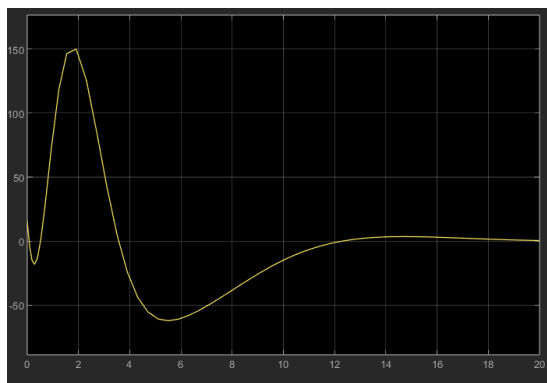


(а) Графики $x(t)$, $\hat{x}(t)$

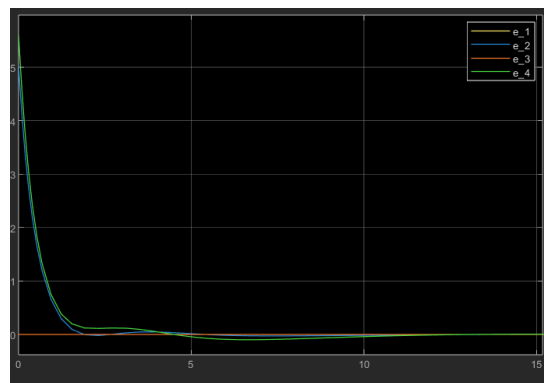


(б) График $\hat{z}(t)$

Рис. 39: Графики $x(t)$, $\hat{x}(t)$, $\hat{z}(t)$



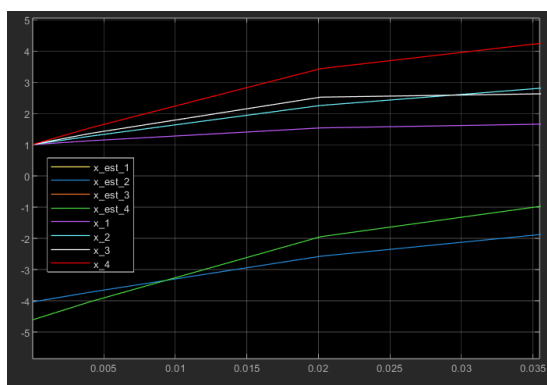
(a) График $u(t)$



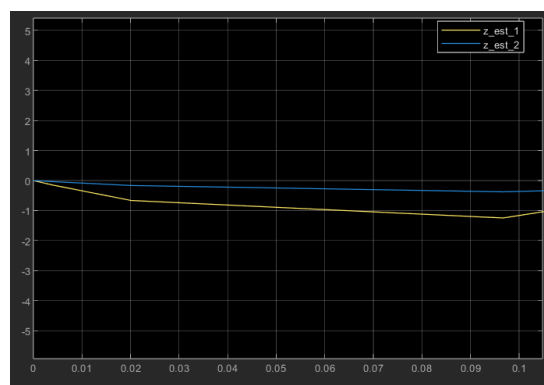
(b) График $e(t)$

Рис. 40: Графики $u(t), e(t)$

Проверим начальные условия



(a) Графики $x(t), \hat{x}(t)$



(b) График $\hat{z}(t)$

Рис. 41: Проверка начальных условий $x(t), \hat{x}(t), \hat{z}(t)$

Вывод

Система полностью управляема, стабилизируема. Система полностью наблюдаема, обнаруживаема. Была найдена матрица преобразования на основании желаемого спектра матрицы наблюдателя пониженного порядка. Было выполнено компьютерное моделирование с начальными условиями и получены графики формируемого регулятором управления $u(t)$, вектора состояния наблюдателя пониженной размерности $\hat{z}(t)$, сравнения $x(t), \hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t)$. Начальные условия соблюдены. Ошибка получилась наибольшей в начале, далее она плавно стремится к нулю. Графики $x(t), \hat{x}(t)$ сошлись и со временем с некоторого момента t стремятся к нулю. Управления также со временем нужно меньше. График $\hat{z}(t)$ со временем сходится к нулю.

Общий вывод по работе

В данной лабораторной работе мы исследовали модальный регулятор, наблюдатель полного порядка, модальное управление по выходу и наблюдатель пониженного

порядка. Мы определяли управляемость, стабилизируемость, наблюдаемость и обнаруживаемость систем. На основе этих данных мы задавали желаемые спектры и синтезировали матрицы. В конце каждого задания мы моделировали системы. Таким образом, мы убеждались, что наши вычисления и рассуждения верны.

Приложения

Приложение 1

```
% input data
A = [5 2 7; 2 1 2; -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
Pre(:,1) = P(:,1);
Pre(:,2) = imag(P(:,2));
Pre(:,3) = real(P(:,3));
Pre_inv = Pre^-1;
J_re = Pre_inv * A * Pre;
B_jre = Pre_inv * B;
disp(Pre);
disp(Pre_inv);
disp(J_re);
disp(B_jre);

% G matrices
G1 = [0 1 0; 0 0 1; -8 -12 -6];
Y1 = [1 0 0];
O1 = [Y1; Y1*G1; Y1*G1^2];
rank_O1 = rank(O1);
disp(O1);
disp(rank_O1);

G2 = [0 1 0; 0 0 1; -8000 -4440 -222];
Y2 = [1 0 0];
O2 = [Y2; Y2*G2; Y2*G2^2];
rank_O2 = rank(O2);
disp(O2);
disp(rank_O2);

G3 = [0 1 0; 0 0 1; -80 -48 -6];
Y3 = [1 0 0];
O3 = [Y3; Y3*G3; Y3*G3^2];
rank_O3 = rank(O3);
disp(O3);
disp(rank_O3);

% regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P1(3,3)
variable P2(3,3)
```

```

variable P3(3,3)
A*P1-P1*G1 == B*Y1;
A*P2-P2*G2 == B*Y2;
A*P3-P3*G3 == B*Y3;
cvx_end

K1 = -Y1*inv(P1);
disp(P1);
disp(K1);

K2 = -Y2*inv(P2);
disp(P2);
disp(K2);

K3 = -Y3*inv(P3);
disp(P3);
disp(K3);

% A+BK eigenvalues
ABK1 = A+B*K1;
ABK2 = A+B*K2;
ABK3 = A+B*K3;

ABK1_eig = eig(ABK1);
ABK2_eig = eig(ABK2);
ABK3_eig = eig(ABK3);

disp(ABK1);
disp(ABK1_eig);

disp(ABK2);
disp(ABK2_eig);

disp(ABK3);
disp(ABK3_eig);

```

Листинг 1: Программа для первого задания

Приложение 2

```

% input data
A = [0 1 0 1;
     -26 -7 20 -11;
     0 1 -1 2;
     16 4 -14 8];
C = [-1 0 1 -1];

% A matrix eigenvalues
A_e = eig(A);
disp(A_e);

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P_re(:,1) = real(P(:,1));
P_re(:,2) = imag(P(:,2));
P_re(:,3) = real(P(:,3));
P_re(:,4) = imag(P(:,4));

```

```

P_re_inv = P_re^-1;
J_re = P_re_inv * A * P_re;
C_jre = C * P_re;
disp(P_re);
disp(P_re_inv);
disp(J_re);
disp(C_jre);

% G matrices
Y = [1; 0; 0; 0];

G1 = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -16 -32 -24 -8];
U1 = [Y G1*Y G1^2*Y G1^3*Y];
disp(U1);
disp(rank(U1));
disp(eig(G1));

G2 = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -16000000 -8888000 -448440 -2222];
U2 = [Y G2*Y G2^2*Y G2^3*Y];
disp(U2);
disp(rank(U2));
disp(eig(G2));

G3 = [0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -260 -132 -49 -8];
U3 = [Y G3*Y G3^2*Y G3^3*Y];
disp(U3);
disp(rank(U3));
disp(eig(G3));

% observer synthesis
cvx_begin sdp
variable Q1(4,4)
variable Q2(4,4)
variable Q3(4,4)
G1*Q1-Q1*A == Y*C;
G2*Q2-Q2*A == Y*C;
G3*Q3-Q3*A == Y*C;
cvx_end

L1 = inv(Q1)*Y;
disp(Q1);
disp(L1);

L2 = inv(Q2)*Y;
disp(Q2);
disp(L2);

L3 = inv(Q3)*Y;
disp(Q3);
disp(L3);

% A+LC eigenvalues
ALC1 = A+L1*C;
ALC2 = A+L2*C;
ALC3 = A+L3*C;

ALC1_eig = eig(ALC1);
ALC2_eig = eig(ALC2);

```



```

ALC3_eig = eig(ALC3);

disp(ALC1);
disp(ALC1_eig);

disp(ALC2);
disp(ALC2_eig);

disp(ALC3);
disp(ALC3_eig);

```

Листинг 2: Программа для второго задания

Приложение 3

```

% input data
A = [2 0 -4 2;
     0 2 -2 4;
     -4 -2 2 0;
     2 4 0 2];
B = [2;4;6;8];
C = [-2 2 2 2;
     2 0 0 2];
D = [3;1];

% A eigenvalues
disp(eig(A));

% controllability
U = [B A*B A^2*B A^3*B];
disp(rank(U));

% observability
V = [C;C*A;C*A^2;C*A^3];
disp(rank(V));

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P_inv = inv(P);
disp(P);
disp(J);
disp(P_inv);

B_new = P_inv*B;
C_new = C*P;
disp(B_new);
disp(C_new);

% G control
G_K = [0 1 0 0;
       0 0 1 0;
       0 0 0 1;
       -1 -4 -6 -4];
Y_K = [1 0 0 0];
O = [Y_K; Y_K*G_K; Y_K*G_K^2; Y_K*G_K^3];
disp(O);
disp(rank(O));

```

```

% regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P(4,4)
A*P-P*G_K == B*Y_K;
cvx_end

K = -Y_K*inv(P);
disp(P);
disp(K);

% A+BK eigenvalues
ABK = A+B*K;
disp(ABK);
disp(eig(ABK));

% G observe
G_L = [0 1 0 0;
        0 0 1 0;
        0 0 0 1;
        -108 -135 -63 -13];
Y_L = [1 0;
        0 1;
        0 0;
        0 0];
U = [Y_L G_L*Y_L G_L^2*Y_L G_L^3*Y_L];
disp(U);
disp(rank(U));

% observer synthesis
cvx_begin sdp
variable Q(4,4)
G_L*Q-Q*A == Y_L*C;
cvx_end

L = inv(Q)*Y_L;
disp(Q);
disp(L);

% A+LC eigenvalues
ALC = A+L*C;
disp(ALC);
disp(eig(ALC));

```

Листинг 3: Программа для третьего задания

Приложение 4

```

% input data
A = [2 0 -4 2;
      0 2 -2 4;
      -4 -2 2 0;
      2 4 0 2];
B = [2;4;6;8];
C = [0 0 1 0;
      1 0 0 0];
D = [3;1];

```

```

% Jordan matrix
[P, J] = jordan(A);
P_inv = inv(P);
disp(P);
disp(J);
disp(P_inv);

B_new = P_inv*B;
C_new = C*P;
disp(B_new);
disp(C_new);

% G 2x2, Q 2x4, Y 2x2
G = [-2 1; 0 -2];
Y = [1 0; 0 1];
U = [Y G*Y];
disp(U);
disp(rank(U));

% observer synthesis
cvx_begin sdp
variable Q(2,4)
G*Q-Q*A == Y*C;
cvx_end
disp(Q);

N = [C; Q];
disp(N);

N_inv = inv(N);
disp(N_inv);

```

Листинг 4: Программа для четвертого задания

Приложение 5

```

function livematrix = x_est_part(z_est, y, D, u)
livematrix = [y - D * u; z_est];
end

```

Листинг 5: Параметры блока MATLAB Function (задание 4)