

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный Исследовательский Университет ИТМО»



**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4**  
**ПРЕДМЕТ «ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО**  
**УПРАВЛЕНИЯ»**  
**ТЕМА «СЛЕЖЕНИЕ И КОМПЕНСАЦИЯ:**  
**ВИРТУАЛЬНЫЙ ВЫХОД»**

Вариант №2

Преподаватель:  
Пашенко А. В.

Выполнил:  
Румянцев А. А.

Факультет: СУиР  
Группа: R3341  
Поток: ТАУ R22 бак 1.1.1

Санкт-Петербург  
2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Задание 1. Компенсирующий регулятор по состоянию</b>	<b>2</b>
1.1	Характер внешнего возмущения . . . . .	2
1.2	Схема моделирования системы, замкнутой компенсирующим регулятором . . . . .	2
1.3	Исследование системы перед синтезом регулятора . . . . .	3
1.4	Синтез компоненты обратной связи компенсирующего регулятора . . . . .	3
1.5	Синтез компоненты прямой связи компенсирующего регулятора . . . . .	3
1.6	Компьютерное моделирование . . . . .	3
1.7	Вывод . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Задание 2. Следящий регулятор по состоянию</b>	<b>7</b>
2.1	Характер внешнего возмущения . . . . .	7
2.2	Схема моделирования системы, замкнутой следящим регулятором . . . . .	7
2.3	Исследование системы перед синтезом регулятора . . . . .	7
2.4	Синтез компоненты обратной связи следящего регулятора . . . . .	8
2.5	Синтез компоненты прямой связи следящего регулятора . . . . .	8
2.6	Компьютерное моделирование . . . . .	8
2.7	Вывод . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Задание 3. Слежение и компенсация по выходу</b>	<b>11</b>
3.1	Характер внешнего возмущения . . . . .	11
3.2	Возможность осуществления слежения и компенсации по выходу . . . . .	11
3.3	Уравнение регулятора в форме Вход-Состояние-Выход . . . . .	12
3.4	Схема моделирования системы для слежения и компенсации по выходу . . . . .	13
3.5	Исследование системы перед синтезом регулятора . . . . .	13
3.6	Синтез компоненты обратной связи . . . . .	14
3.7	Синтез матрицы коррекции наблюдателя . . . . .	14
3.8	Синтез компоненты прямой связи следящего регулятора . . . . .	14
3.9	Принцип внутренней модели . . . . .	15
3.10	Компьютерное моделирование . . . . .	15
3.11	Вывод . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Общий вывод по работе</b>	<b>26</b>
<b>5</b>	<b>Приложения</b>	<b>26</b>
5.1	Приложение 1 . . . . .	26
5.2	Приложение 2 . . . . .	27
5.3	Приложение 3 . . . . .	28

## Задание 1. Компенсирующий регулятор по состоянию

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + Bu + B_f w_f,$$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

генератор внешнего возмущения

$$\dot{w}_f = \Gamma w_f, \Gamma = \begin{bmatrix} 25 & 6 & -20 & 11 \\ 14 & 3 & -10 & 4 \\ 40 & 11 & -31 & 17 \\ 6 & 4 & -4 & 3 \end{bmatrix}, w_f(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и виртуальный выход вида

$$z = C_Z x, C_Z = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

### Характер внешнего возмущения

Для определения характера внешнего возмущения найдем собственные числа матрицы  $\Gamma$ . Программа в MATLAB находится на листинге 1 в приложении 1

$$\sigma(\Gamma) = \{\pm i, \pm 3i\}$$

Так как спектр состоит только из мнимых собственных чисел, то характер возмущения – гармоника без затухания и роста амплитуды с течением времени.

### Схема моделирования системы, замкнутой компенсирующим регулятором

Построим схему моделирования системы, замкнутой компенсирующим регулятором

$$u = K_1 x + K_2 w_f,$$

обеспечивающим выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

при внешнем воздействии, задаваемом генератором. Снимаем осциллограммы  $u(t)$ ,  $w_f(t)$ ,  $x(t)$ ,  $z(t)$

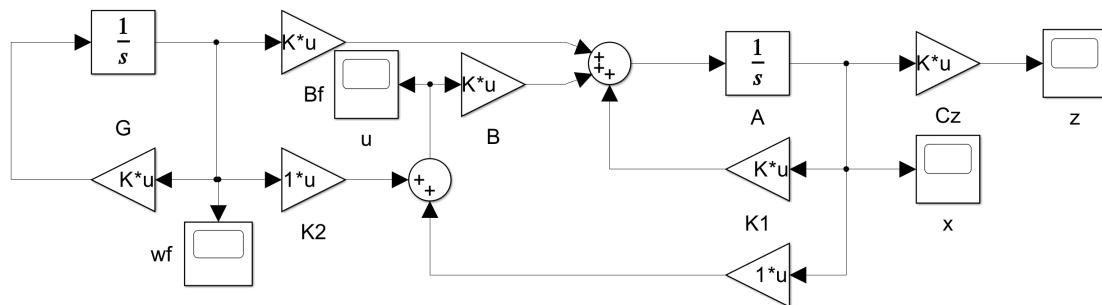


Рис. 1: Схема моделирования системы, замкнутой компенсирующим регулятором

## Исследование системы перед синтезом регулятора

Определим управляемость и стабилизируемость системы. Найдем собственные числа матрицы  $A$

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}$$

Собственное число  $\lambda_1 = -2$  асимптотически устойчивое, остальные неустойчивые. Выполним жорданово разложение матрицы  $A$  в вещественной форме. Найдем вектор  $B$  в базисе собственных векторов матрицы  $A$ . Получаем

$$A_{J_{re}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{J_{re}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Собственное число  $\lambda_1 = -2$  неуправляемое, остальные управляемые. Система не полностью управляема, стабилизируема. Максимальная степень устойчивости  $\alpha = |\min(\operatorname{Re}(\tilde{\sigma}(A) : \lambda_i \in \mathbb{C}_-))| = 2$ .

## Синтез компоненты обратной связи компенсирующего регулятора

Синтезируем  $K_1$  с помощью матричного уравнения типа Риккати

$$A^T P + PA + Q - \nu P B R^{-1} B^T P + 2\alpha P = 0, \quad K = -R^{-1} B^T P;$$

Зададим  $Q = 0$ ,  $\nu = 2$ ,  $R = 1$ . Решаем при  $\alpha = 2$ . Получаем матрицу регулятора

$$K_1 = [1.6000 \quad -11.2000 \quad 1.6000]$$

Проверим собственные числа замкнутой системы  $A + BK_1$

$$\sigma(A + BK_1) = \{-2, -2.0000 \pm 4.1231i\}$$

Желаемая степень устойчивости достигнута, регулятор синтезирован корректно.

## Синтез компоненты прямой связи компенсирующего регулятора

Чтобы синтезировать  $K_2$ , нужно найти  $K_1$ , найти  $P, Y$  как решение системы уравнений, после чего вычислить  $K_2$  по формуле

$$\begin{cases} P\Gamma - AP = BY + B_f, & K_2 = Y - K_1 P; \\ C_Z P + D_Z = 0, \end{cases}$$

Предоставим вычисления пакету `svx` в MATLAB. Получаем

$$K_2 = [-48.3631 \quad -13.0092 \quad 35.7538 \quad -23.4769]$$

## Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование разомкнутой системы ( $u = 0$ ); замкнутой регулятором только с  $K_1$  компонентой; замкнутой компенсирующим регулятором. Построим графики вектора состояния генератора внешнего возмущения  $w_f(t)$ , формируемого регулятором управления  $u(t)$ , вектора состояния объекта управления  $x(t)$  и виртуального выхода  $z(t)$ . Результаты представлены на рис. 2–9

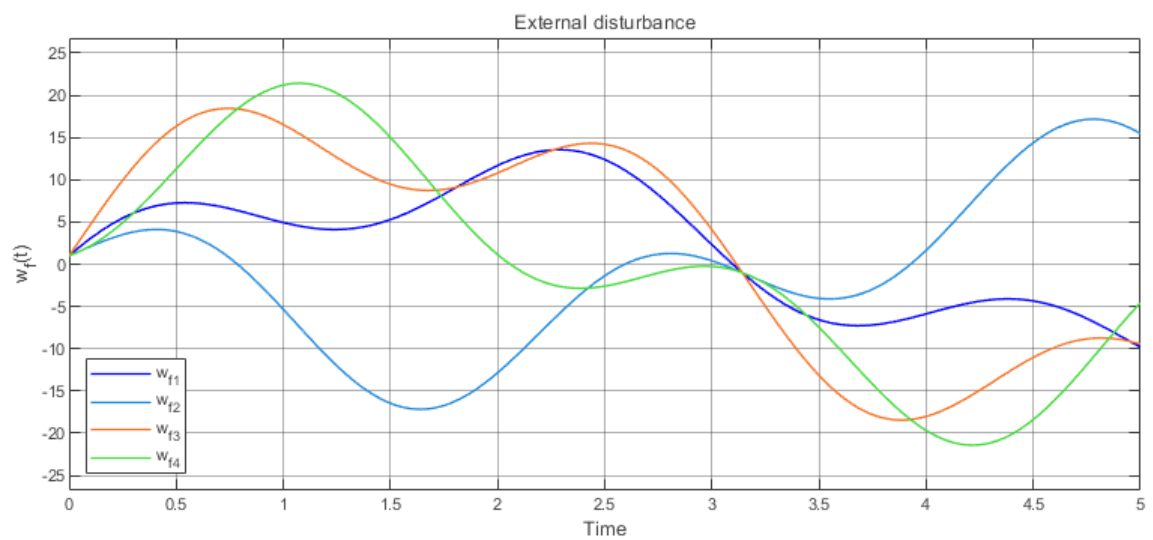


Рис. 2: График возмущений  $w_f(t)$

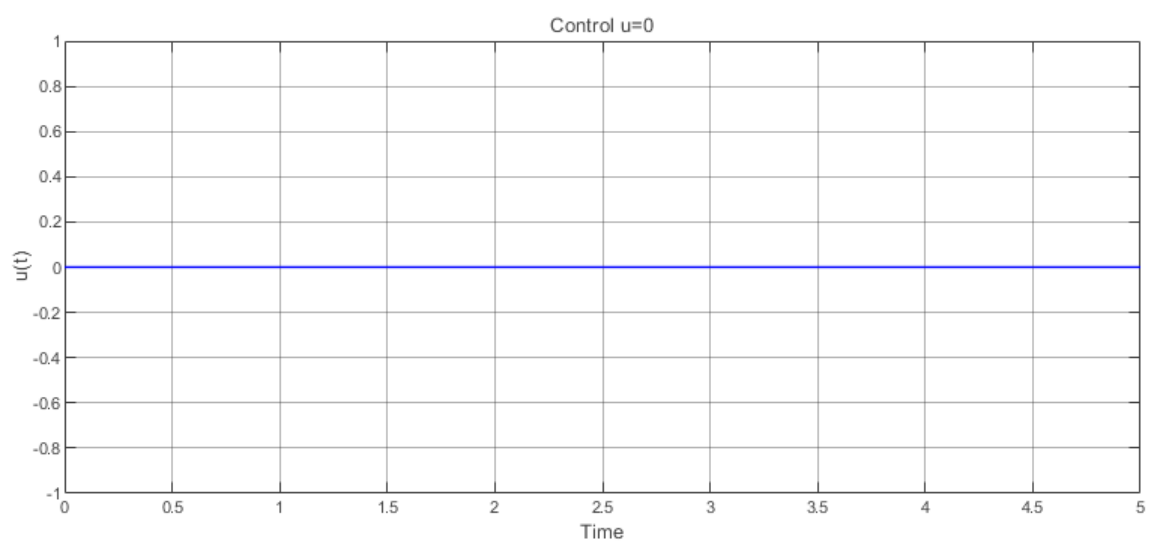


Рис. 3: График управления  $u(t) = 0$

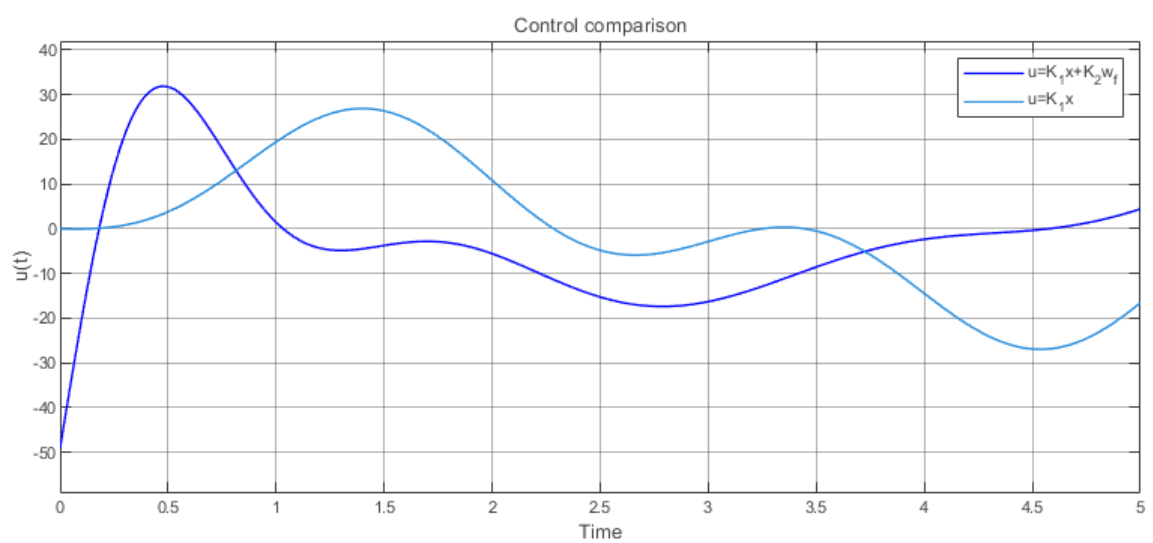


Рис. 4: График сравнения управлений  $u(t) = K_1 x$  и  $u(t) = K_1 x + K_2 w_f$

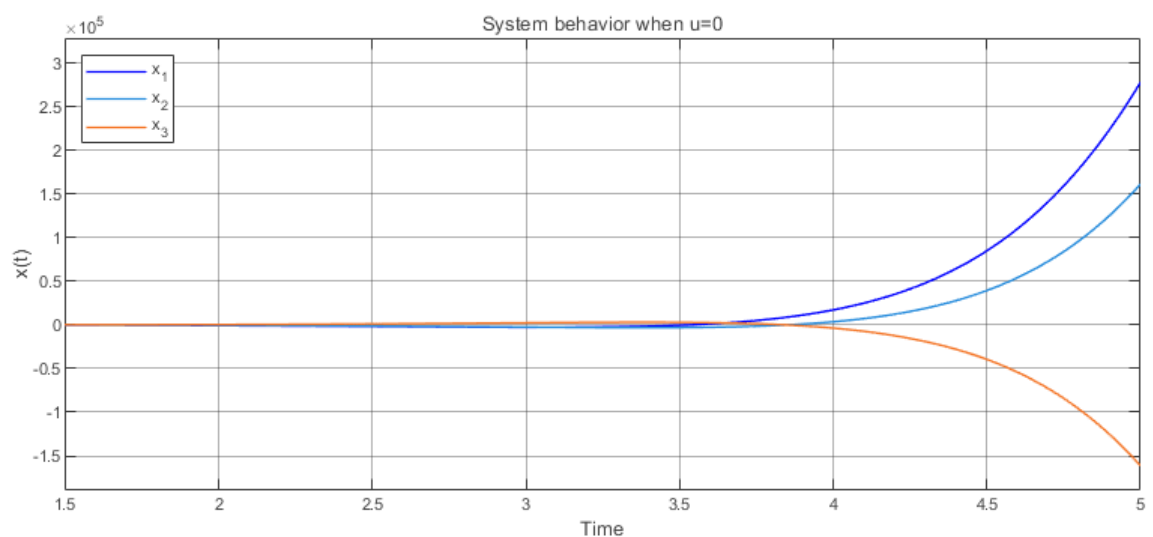


Рис. 5: График поведения системы  $x(t)$  при  $u(t) = 0$

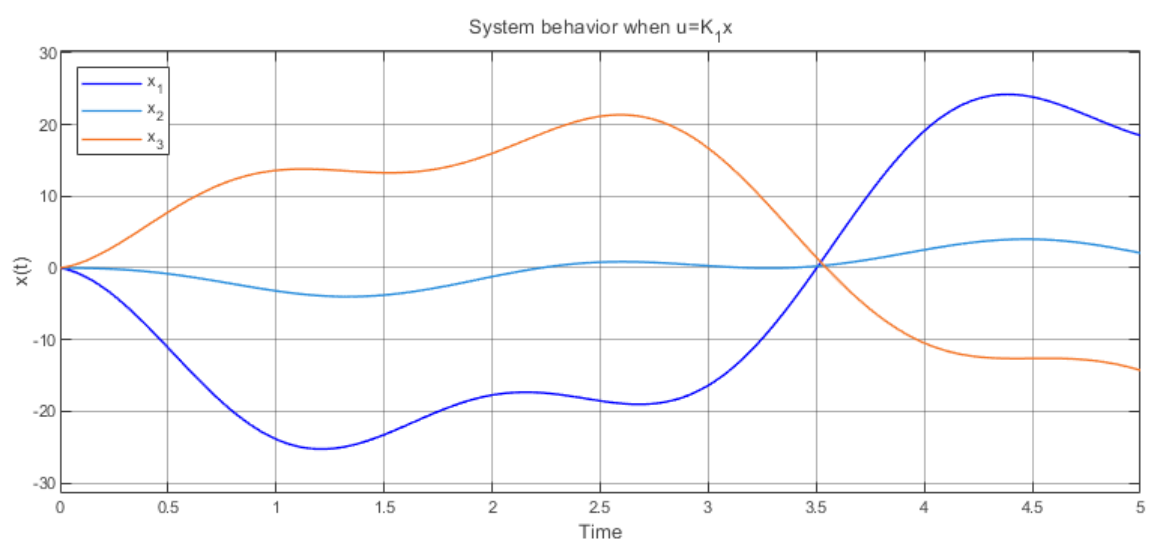


Рис. 6: График поведения системы  $x(t)$  при  $u(t) = K_1x$

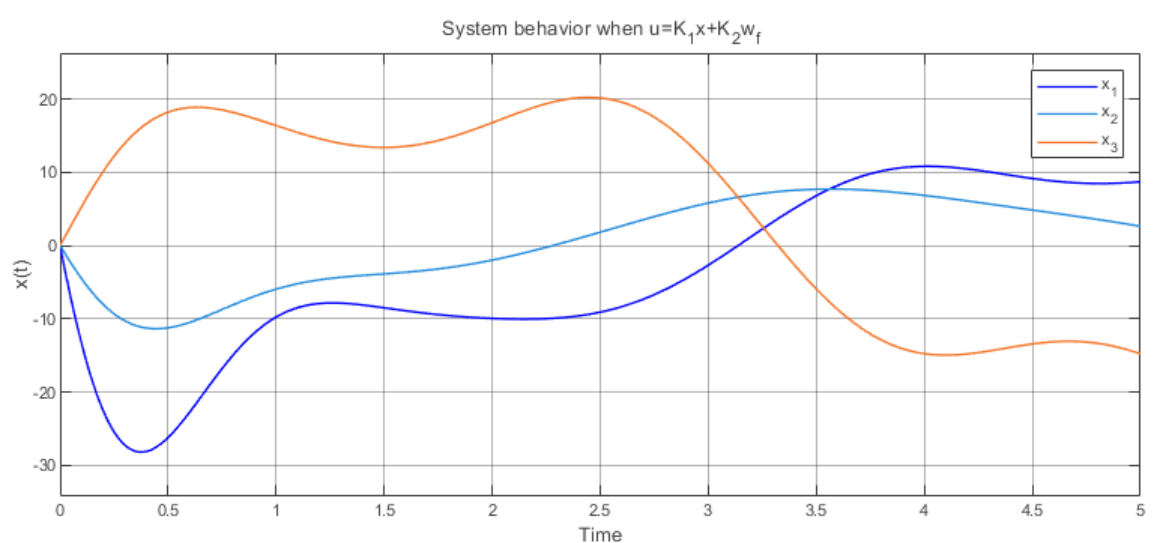


Рис. 7: График поведения системы  $x(t)$  при  $u(t) = K_1x + K_2w_f$

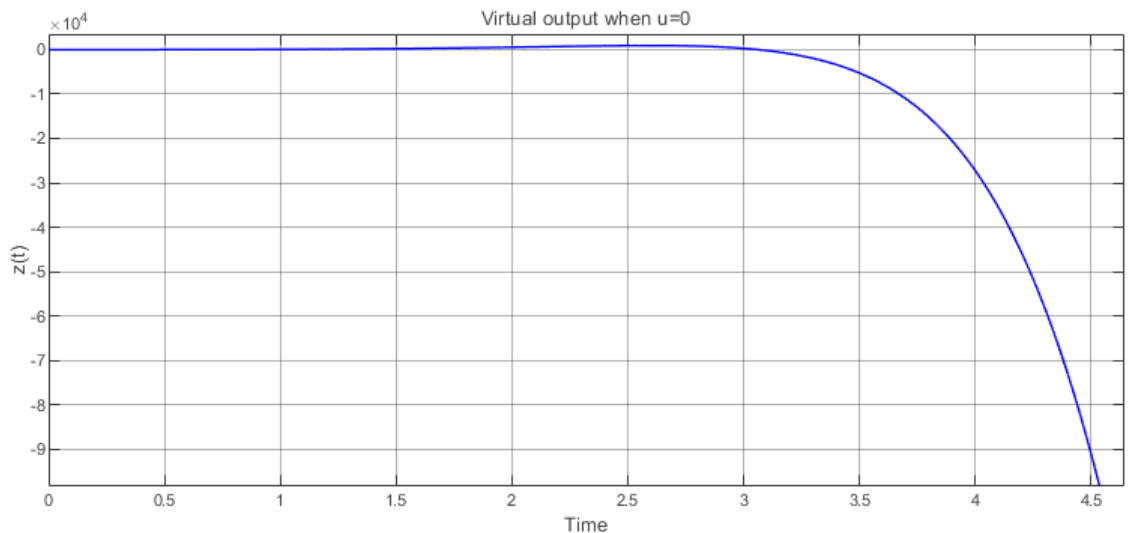


Рис. 8: График виртуального выхода  $z(t)$  при  $u(t) = 0$

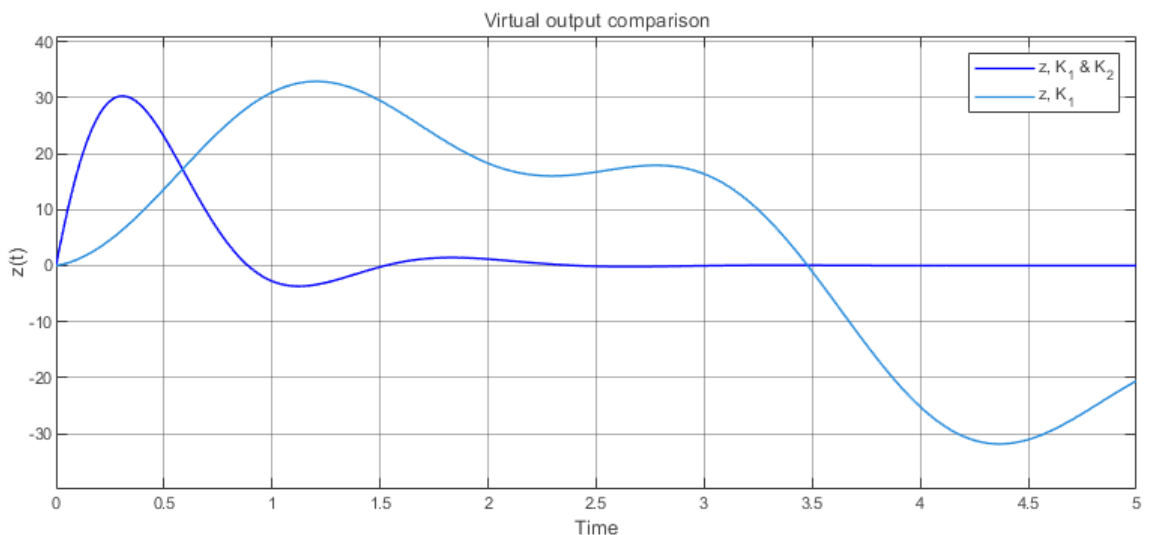


Рис. 9: График сравн. виртуальных выходов  $z(t)$  при  $u(t) = K_1x$  и  $u(t) = K_1x + K_2w_f$

Траектория  $z(t)$  при компенсирующем регуляторе стремится к нулю – регулятор выполнил свою задачу. При отсутствии  $K_2$  компоненты  $z(t)$  не стабилизируются, но и не расходятся (см. рис. 9). При разомкнутой системе виртуальный выход расходится (см. рис. 8). При отсутствии управления вектор состояния объекта управления расходится, при наличии – нет, но и не стабилизируется (см. рис. 5, 6, 7). При наличии  $K_2$  компоненты регулятор сразу начинает действовать на объект управления, при наличии только  $K_1$  компоненты регулятор постепенно управляет системой (см. рис. 4).

## Вывод

В данном задании был исследован компенсирующий регулятор по состоянию. Был синтезирован компенсирующий регулятор. Было проведено компьютерное моделирование при различных конфигурациях регулятора. Результаты были сравнены. Компенсирующий регулятор был синтезирован корректно.

## Задание 2. Следящий регулятор по состоянию

Рассмотрим систему (матрицы  $A, B, C_Z, \Gamma$  такие же, как в задании 1)

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = [1 \quad 1 \quad 1]^T,$$

генератор задающего сигнала

$$\dot{w}_g = \Gamma w_g, \quad w_g(0) = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$$

и виртуальный выход вида

$$z = C_Z x + D_Z w_g, \quad D_Z = [-20 \quad -6 \quad 16 \quad -9];$$

### Характер внешнего возмущения

Матрица  $\Gamma$  такая же, как в первом задании. Ее спектр имеет вид

$$\sigma(\Gamma) = \{\pm i, \pm 3i\}$$

Характер возмущений – гармоника без затухания и роста амплитуды с течением времени.

### Схема моделирования системы, замкнутой следящим регулятором

Построим схему моделирования системы, замкнутой следящим регулятором

$$u = K_1 x + K_2 w_g,$$

обеспечивающим выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

при внешнем воздействии, задаваемом генератором. Снимаем осциллограммы  $u(t)$ ,  $w_g(t)$ ,  $x(t)$ ,  $z(t)$

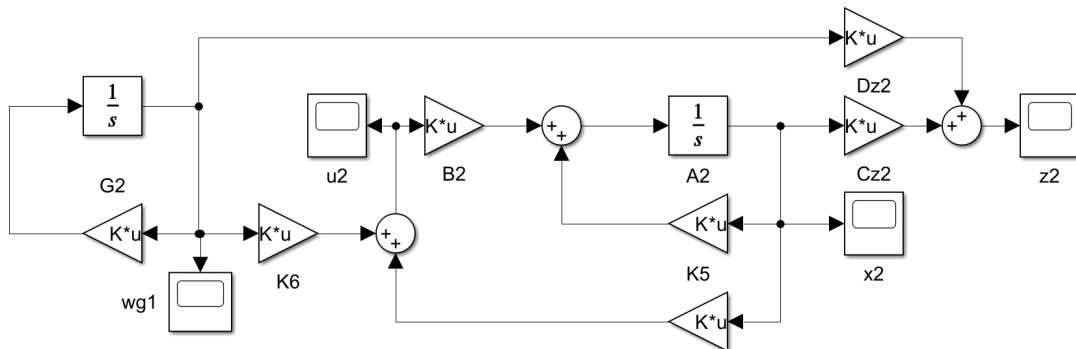


Рис. 10: Схема моделирования системы, замкнутой следящим регулятором

### Исследование системы перед синтезом регулятора

Матрицы  $A, B$  такие же, как в первом задании. Имеем

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}, \quad A_{J_{re}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{J_{re}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Система не полностью управляема, стабилизируема. Максимальная степень устойчивости  $\alpha = 2$ .



### Синтез компоненты обратной связи следящего регулятора

Синтезируем  $K_1$  так же, как в задании 1 – с помощью матричного уравнения Риккати. Матрицы, участвующие в расчетах, не изменились. Таким образом, имеем

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.6000 & -11.2000 & 1.6000 \end{bmatrix}, \quad \sigma(A + BK_1) = \{-2, -2.0000 \pm 4.1231i\};$$

В первом задании уже выяснили, что регулятор синтезирован корректно.

### Синтез компоненты прямой связи следящего регулятора

Синтезируем  $K_2$  аналогично заданию 1. Из системы уравнений пропадет  $B_f$ , взамен появится  $D_Z$ . Программа представлена на листинге 2 в приложении 2. Получаем

$$K_2 = \begin{bmatrix} 7.2 & 3.2 & -8.0 & 4.0 \end{bmatrix}$$

### Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование систем аналогично заданию 1

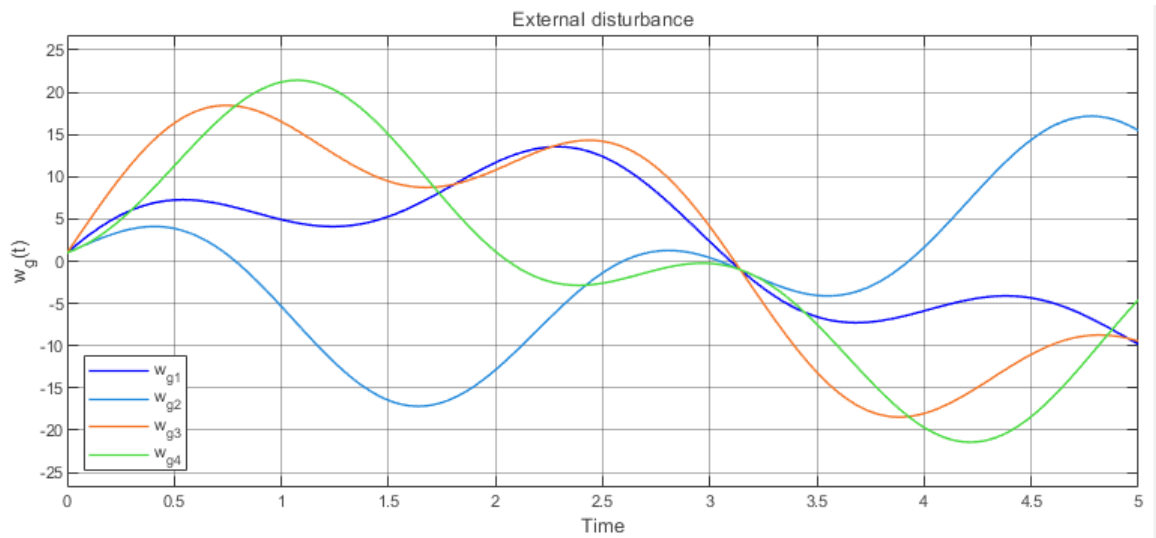


Рис. 11: График возмущений  $w_g(t)$

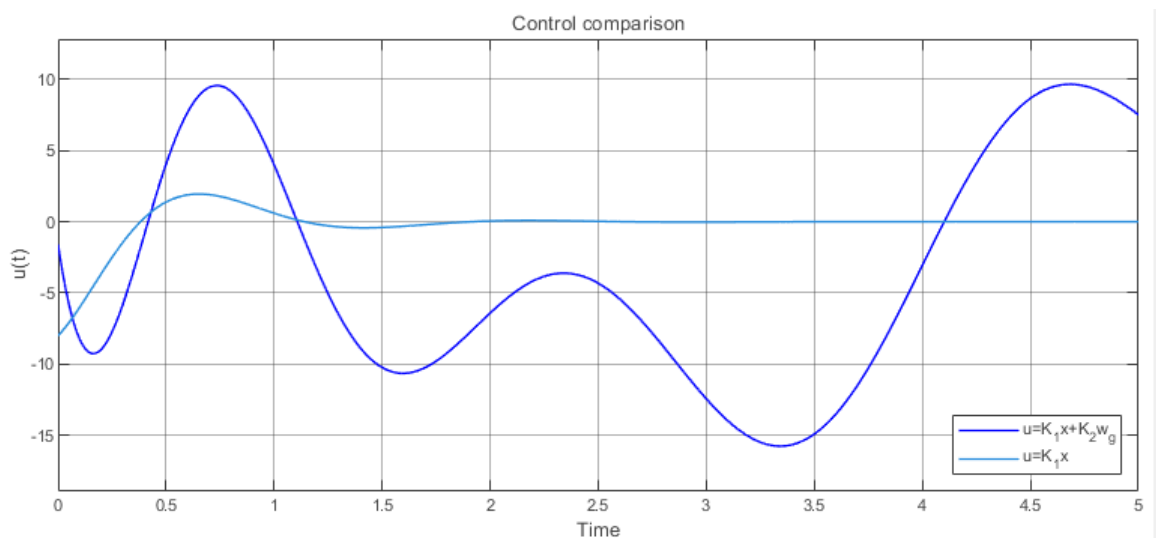


Рис. 12: График сравнения управлений  $u(t) = K_1x$  и  $u(t) = K_1x + K_2w_g$

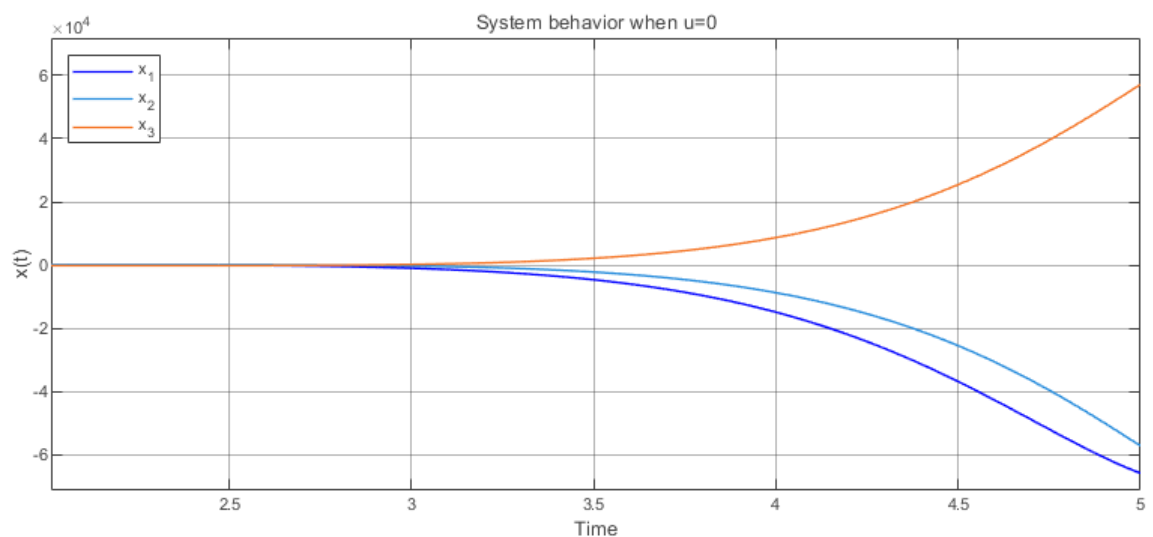


Рис. 13: График поведения системы  $x(t)$  при  $u(t) = 0$

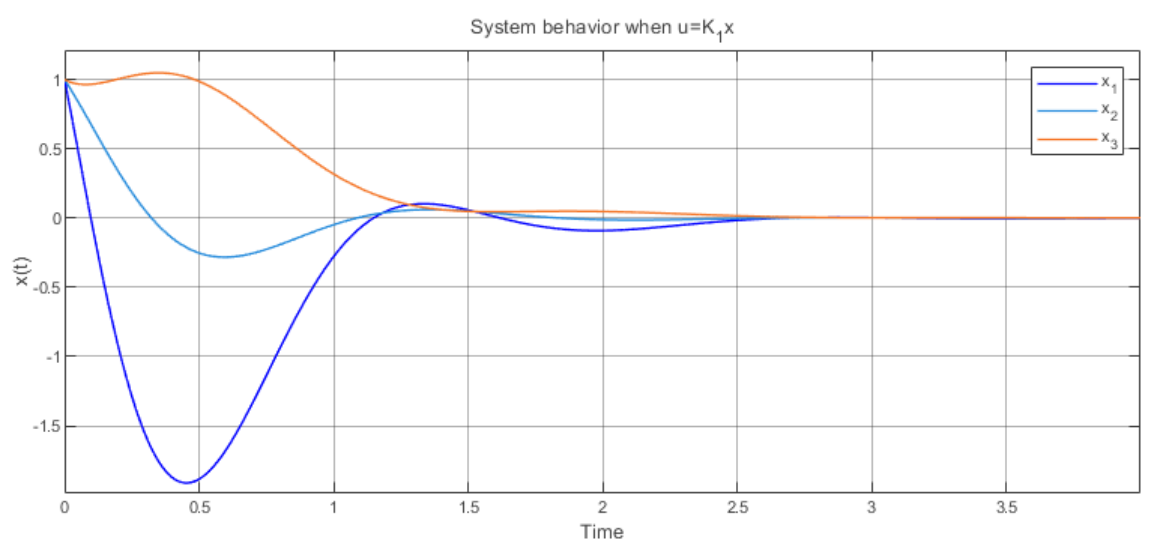


Рис. 14: График поведения системы  $x(t)$  при  $u(t) = K_1x$

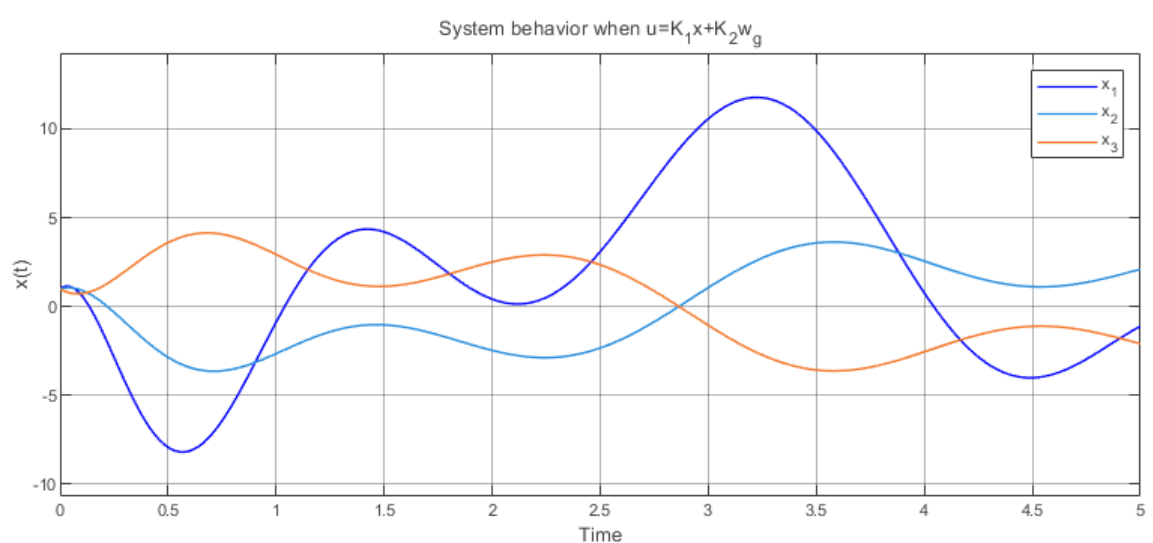


Рис. 15: График поведения системы  $x(t)$  при  $u(t) = K_1x + K_2w_g$

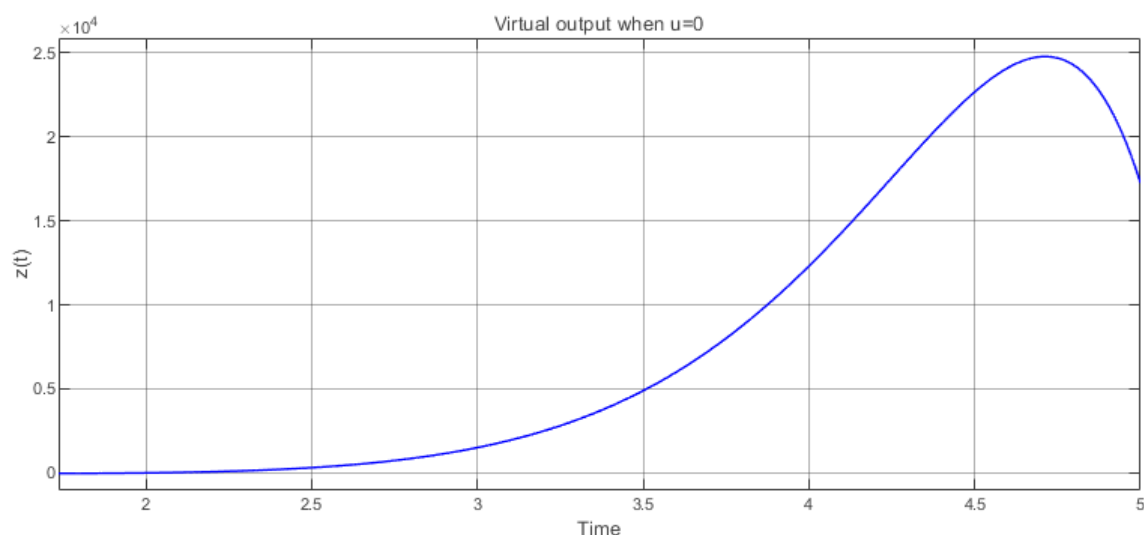


Рис. 16: График виртуального выхода  $z(t)$  при  $u(t) = 0$

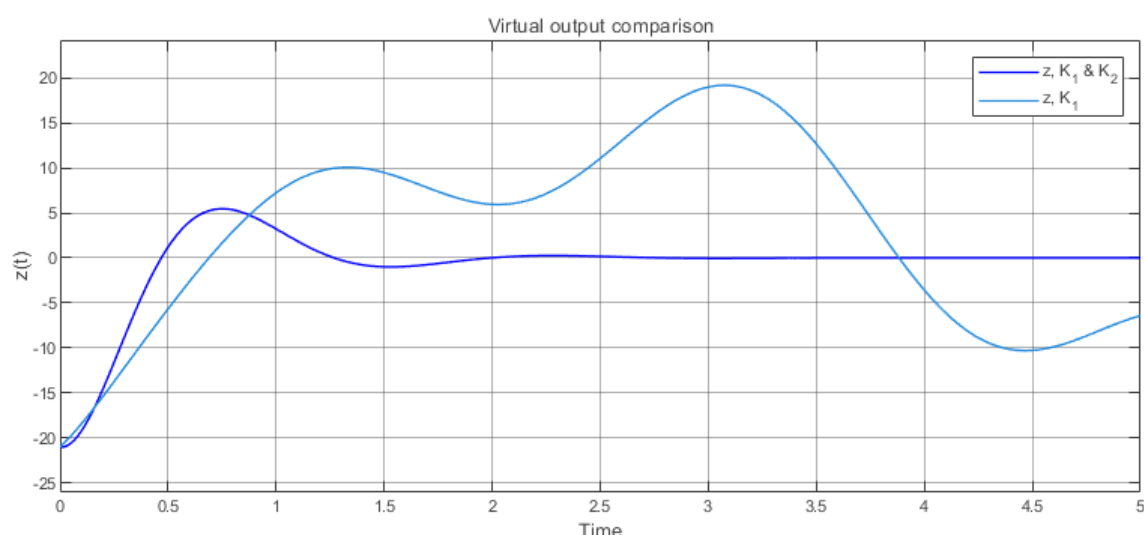


Рис. 17: График сравн. виртуальных выходов  $z(t)$  при  $u(t) = K_1x$  и  $u(t) = K_1x + K_2w_g$

Следящий регулятор выполнил свою задачу – на рис. 17  $z(t)$  стремится к нулю с увеличением времени. Виртуальный выход для регулятора только с компонентой  $K_1$  не расходится, но и не стабилизируется. При отсутствии управления  $z(t)$  расходится (см. рис. 16). Вектор состояния объекта управления под действием регулятора только с  $K_1$  компонентой стабилизируется к нулю, но виртуальный выход продолжает движение под действием внешних возмущений ( $C_Zx \rightarrow 0, D_Zw_g \nrightarrow 0$ ). При наличии компонент  $K_1, K_2$  график  $x(t)$  не стабилизируется к нулю, но и не расходится (см. рис. 15), при этом  $z(t)$  достигает целевого состояния. Без управления  $x(t)$  расходится (см. рис. 13). При наличии только компоненты  $K_1$  управление со временем стабилизируется к нулю, при наличии обеих компонент – нет (см. рис. 12).

## Вывод

В данном задании был исследован следящий регулятор по состоянию. Его синтез был проведен аналогично синтезу компенсирующего регулятора в задании 1. Было выполнено компьютерное моделирование систем со сравнением результатов.

### Задание 3. Слежение и компенсация по выходу

Рассмотрим систему (матрицы  $A, B, B_f, C_Z, D_Z$  такие же, как в предыдущих заданиях)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_fw, \\ y = Cx + Dw, \end{cases} \quad x(0) = [0 \ 0 \ 0]^T$$

и генератор внешнего воздействия

$$\dot{w} = \Gamma w, \quad w(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$$

при

$$C = [2 \ 0 \ 3], \quad D = [8 \ 2 \ -6 \ 4];$$

#### Характер внешнего возмущения

Матрица  $\Gamma$  такая же, как в предыдущих заданиях. Ее спектр содержит только мнимые числа. Характер возмущений – гармоника без затухания и роста амплитуды с течением времени.

#### Возможность осуществления слежения и компенсации по выходу

Проверим пару

$$\left( [C \ D], \begin{bmatrix} A & B_f \\ 0 & \Gamma \end{bmatrix} \right)$$

на обнаруживаемость. Обозначим

$$\mathcal{C} = [C \ D], \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A & B_f \\ \mathbf{0}_{4 \times 3} & \Gamma \end{bmatrix};$$

Найдем собственные числа матрицы  $\mathcal{A}$ . Программа в MATLAB представлена на листинге 3 в приложении 3

$$\sigma(\mathcal{A}) = \{-2, 2 \pm i, \pm i, \pm 3i\}$$

Собственное число  $\lambda_1 = -2$  асимптотически устойчивое, может быть ненаблюдаемым. Комплексные пары  $\lambda_{4,5} = \pm i, \lambda_{6,7} = \pm 3i$  устойчивые, но не асимптотически. Комплексная пара  $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$  неустойчивая, нужна наблюдаемость. Найдем вещественное жорданово разложение матрицы  $\mathcal{A}$ , а матрицу  $\mathcal{C}$  переведем в базис собственных векторов матрицы  $\mathcal{A}$ . Получаем

$$\mathcal{A}_{J_{re}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}_{J_{re}} = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.9500 \\ 2.1500 \\ -1.2192 \\ 0.5038 \end{bmatrix}^T;$$

Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам. Для комплексной пары  $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$  в  $\mathcal{C}_{J_{re}}$  один из двух соответствующих ей столбцов ненулевой, следовательно  $\lambda_{2,3}$  наблюдаемы. Остальные собственные числа наблюдаемы. Таким образом, система полностью наблюдаема и обнаруживаема. Слежение и компенсация по выходу осуществимы.

## Уравнение регулятора в форме Вход-Состояние-Выход

Найдем матрицу  $\bar{A}$ , которая будет нужна в дальнейшем для построения схемы и проведения вычислений, через запись уравнения регулятора в форме В-С-В, где вход это  $y(t)$ , а выход  $u(t)$ . Расширенный объект имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_f w, \\ \dot{w} = \Gamma w, \\ y = Cx + Dw, \\ z = C_z x + D_z w; \end{cases} \quad (1)$$

Для него можно записать следящий регулятор по выходу

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + B_f \hat{w} + L_1 (\hat{y} - y), \\ \dot{\hat{w}} = \Gamma \hat{w} + L_2 (\hat{y} - y), \\ \hat{y} = C\hat{x} + D\hat{w}, \\ u = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{w}; \end{cases} \quad (2)$$

Выполним подстановку  $\hat{y}, u$  в  $\dot{\hat{x}}$  и выразим  $\hat{x}, \hat{w}$ , чтобы позже вынести эти компоненты как вектор, на который умножается матрица  $\bar{A}$ . Аналогично с  $y$ . Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + Bu + B_f \hat{w} + L_1 (\hat{y} - y), \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + B(K_1 \hat{x} + K_2 \hat{w}) + B_f \hat{w} + L_1 (C\hat{x} + D\hat{w} - y), \\ \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + BK_1 \hat{x} + BK_2 \hat{w} + B_f \hat{w} + L_1 C\hat{x} + L_1 D\hat{w} - L_1 y, \\ \dot{\hat{x}} &= (A + BK_1 + L_1 C) \hat{x} + (BK_2 + B_f + L_1 D) \hat{w} - L_1 y; \end{aligned} \quad (3)$$

Проведем аналогичные действия для  $\dot{\hat{w}}$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{w}} &= \Gamma \hat{w} + L_2 (\hat{y} - y), \\ \dot{\hat{w}} &= \Gamma \hat{w} + L_2 (C\hat{x} + D\hat{w} - y), \\ \dot{\hat{w}} &= \Gamma \hat{w} + L_2 C\hat{x} + L_2 D\hat{w} - L_2 y, \\ \dot{\hat{w}} &= (L_2 C) \hat{x} + (\Gamma + L_2 D) \hat{w} - L_2 y; \end{aligned} \quad (4)$$

Запишем регулятор по выходу (2) с учетом подстановок (3), (4)

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = (A + BK_1 + L_1 C) \hat{x} + (BK_2 + B_f + L_1 D) \hat{w} - (L_1) y, \\ \dot{\hat{w}} = (L_2 C) \hat{x} + (\Gamma + L_2 D) \hat{w} - (L_2) y, \\ u = (K_1) \hat{x} + (K_2) \hat{w}; \end{cases} \quad (5)$$

Вынесем компоненты за скобками в соответствующие векторы

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK_1 + L_1 C & BK_2 + B_f + L_1 D \\ L_2 C & \Gamma + L_2 D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} y, \\ u = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix}; \end{cases} \quad (6)$$

Получили уравнение регулятора в форме Вход-Состояние-Выход. Матрица  $\bar{A}$  имеет вид

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A + BK_1 + L_1 C & BK_2 + B_f + L_1 D \\ L_2 C & \Gamma + L_2 D \end{bmatrix} \quad (7)$$

## Схема моделирования системы для слежения и компенсации по выходу

Построим схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящим из расширенного наблюдателя

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\hat{w}} \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{w} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} y$$

и закона управления

$$u = K_1 \hat{x} + K_2 \hat{w},$$

обеспечивающего выполнение целевого условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$$

при внешнем воздействии, задаваемом генератором. Снимаем осциллограммы  $u(t)$ ,  $\begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{w}(t) \end{bmatrix}$ ,  $e(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$

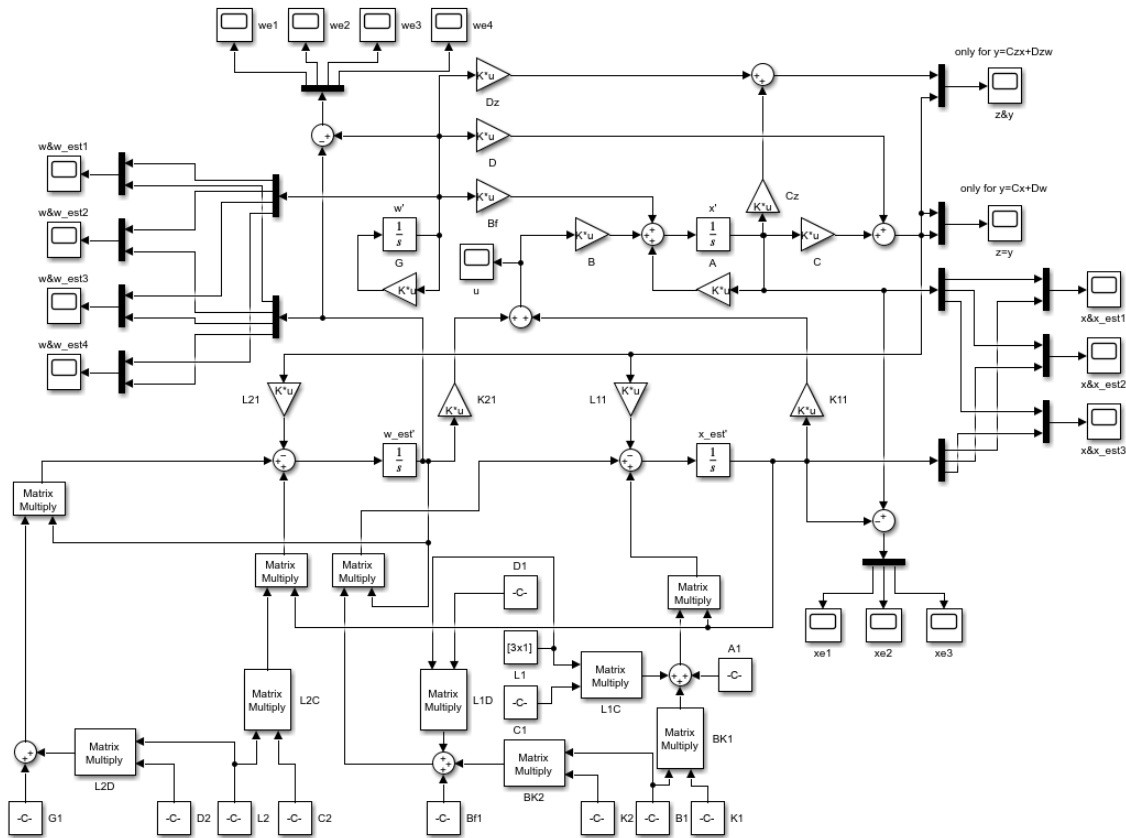


Рис. 18: Схема моделирования системы для слежения и компенсации по выходу

## Исследование системы перед синтезом регулятора

Матрицы  $A, B$  такие же, как в первом задании. Имеем

$$\sigma(A) = \{-2, 2 \pm i\}, \quad A_{J_{re}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_{J_{re}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

Система не полностью управляема, стабилизируема. Максимальная степень устойчивости  $\alpha = 2$ .

### Синтез компоненты обратной связи

Аналогично заданию 1 синтезируем  $K_1$  при помощи матричного уравнения типа Риккати. Матрицы, участвующие в расчетах, не изменились. Тогда, получаем

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.6000 & -11.2000 & 1.6000 \end{bmatrix}, \sigma(A + BK_1) = \{-2, -2.0000 \pm 4.1231i\};$$

В первом задании уже выяснили, что регулятор синтезирован корректно.

### Синтез матрицы коррекции наблюдателя

Матрицу наблюдателя  $\mathcal{L}$  будем искать с помощью матричных неравенств

$$Q \succ 0, \mathcal{A}^T Q + Q \mathcal{A} + 2\alpha Q + C^T Y^T + Y C \prec 0, \mathcal{L} = Q^{-1} Y$$

совместно с решением задачи минимизации управления. Зададим  $\alpha = 1$ . Используя `cvx`, получаем

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 41.4979 \\ 31.3700 \\ -30.9945 \\ 0.2455 \\ 1.4359 \\ 1.1914 \\ 0.6445 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \Rightarrow L_1 = \begin{bmatrix} 41.4979 \\ 31.3700 \\ -30.9945 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0.2455 \\ 1.4359 \\ 1.1914 \\ 0.6445 \end{bmatrix}; \mu = 28.1390;$$

Проверим собственные числа замкнутой системы  $\mathcal{A} + \mathcal{L}C$

$$\sigma(\mathcal{A} + \mathcal{L}C) = \left\{ \begin{array}{c} -1.4717 \\ -1.0103 \pm 3.3960i \\ -1.0300 \pm 1.7041i \\ -1.0850 \pm 0.3955i \end{array} \right\}$$

Наблюдатель синтезирован корректно.

### Синтез компоненты прямой связи следящего регулятора

Синтезируем  $K_2$  для различных виртуальных выходов. Рассмотрим

$$\begin{aligned} z_1 &= C_Z x + D_Z w \\ z_2 &= y = Cx + Dw \end{aligned}$$

Синтез возможен в том случае, если матрицы  $A + BK_1$  и  $\mathcal{A} + \mathcal{L}C$  гурвицевы. В нашем случае условия выполнены – мы проверяли собственные числа этих замкнутых систем ранее – спектры матриц принадлежат левой комплексной полуплоскости. Процедура синтеза аналогична заданию 1. Получаем

$$K_{2_{z1}} = \begin{bmatrix} -41.1631 & -9.8092 & 27.7538 & -19.4769 \end{bmatrix},$$

$$K_{2_{z2}} = \begin{bmatrix} 20.3076 & 2.7419 & -14.2967 & 8.5001 \end{bmatrix};$$

## Принцип внутренней модели

Если измеряемый выход  $y$  равен регулируемому выходу  $z$ , и если регулятор обеспечивает устойчивость объекта в случае  $w \equiv 0$ , то для решения задачи слежения и компенсации ( $z \rightarrow 0$ ) необходимо, чтобы

$$\sigma(\Gamma) \in \sigma(\bar{A})$$

Спектр матрицы  $\Gamma$  мы уже находили

$$\sigma(\Gamma) = \{\pm i, \pm 3i\}$$

Проверим спектры матриц  $\bar{A}_{z_1}$  и  $\bar{A}_{z_2}$ . Матрицу  $\bar{A}$  выводили ранее (7), когда представляли уравнения регулятора в форме В-С-В (6) с  $y(t)$  как входом,  $u(t)$  как выходом. Получаем

$$\sigma(\bar{A}_{z_1}) = \left\{ \begin{array}{c} -1.9996 \\ -6.8702 \pm 32.8647i \\ 0.0175 \pm 3.0096i \\ -0.0085 \pm 0.9756i \end{array} \right\}, \quad \sigma(\bar{A}_{z_2}) = \left\{ \begin{array}{c} -1.9996 \\ -6.8613 \pm 32.8152i \\ \pm 3.0000i \\ \pm 1.0000i \end{array} \right\};$$

Для  $z_1 = C_Z x + D_Z w$  принцип внутренней модели не выполняется, для  $z_2 = Cx + Dw$  – выполняется. Регулятор  $K_{2z_2}$  умеет воспроизводить сигналы, за которыми надо проследить или которые нужно компенсировать.

## Компьютерное моделирование

Выполним компьютерное моделирование для  $K_{2z_1}$  и  $K_{2z_2}$  с нулевыми начальными условиями наблюдателя. Построим график формируемого регулятором управления  $u(t)$ , сравнительные графики

$$\begin{bmatrix} x(t) & w(t) \end{bmatrix}^T \text{ и } \begin{bmatrix} \hat{x}(t) & \hat{w}(t) \end{bmatrix}^T,$$

график ошибки наблюдателя

$$e(t) = \begin{bmatrix} x(t) & w(t) \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} \hat{x}(t) & \hat{w}(t) \end{bmatrix}^T$$

и сравнительные графики фактического и виртуального выходов  $y(t)$  и  $z(t)$ . Результаты представлены на рис. 19–50

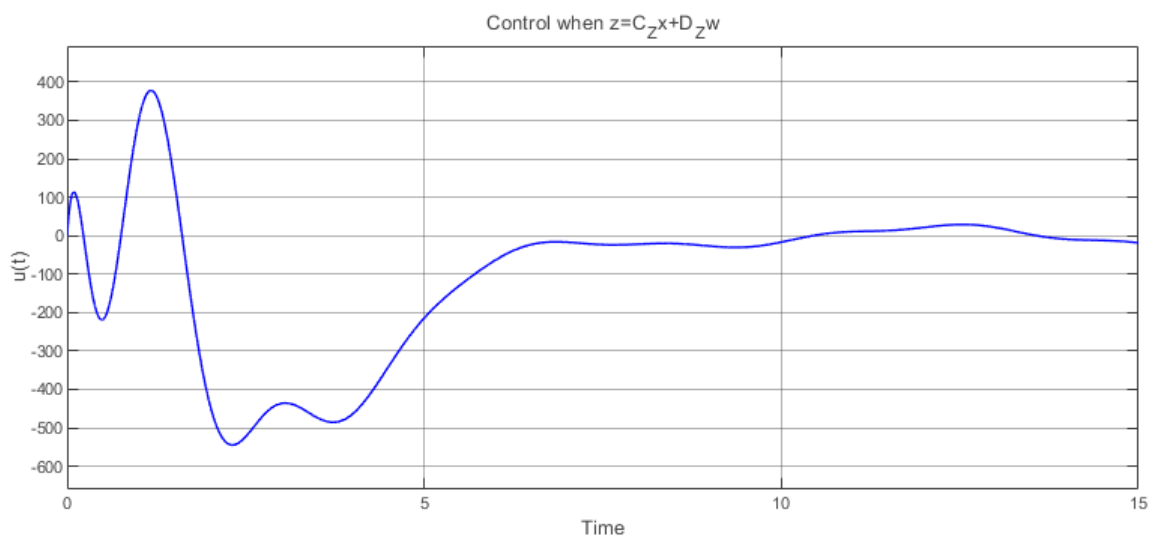


Рис. 19: График управления  $u(t)$  при  $K_{2z_1}$



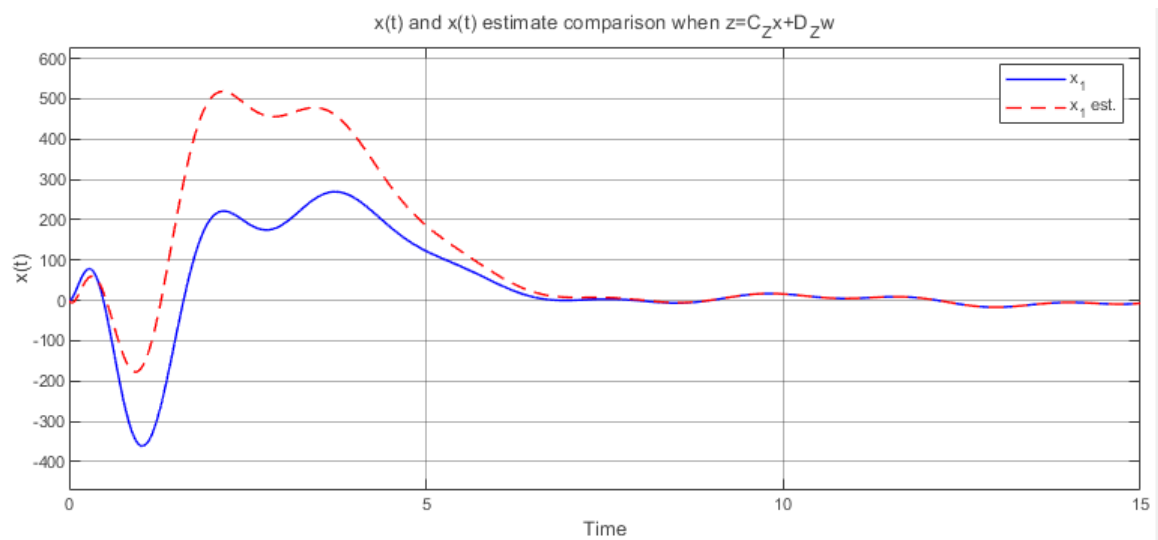


Рис. 20: График  $x_1(t), \hat{x}_1(t)$  при  $K_{2_{z1}}$

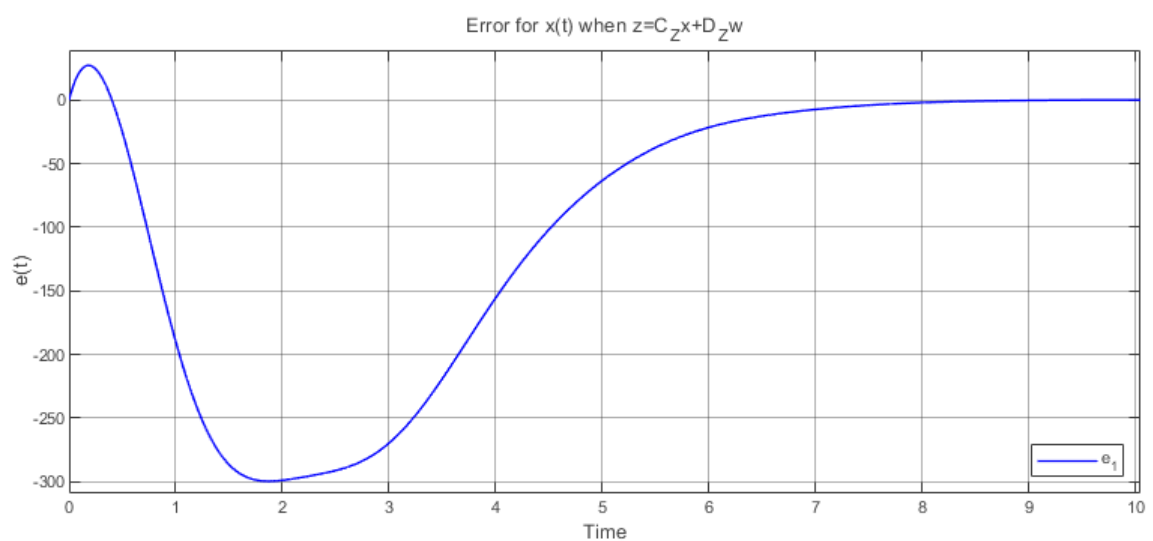


Рис. 21: График ошибки  $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$  при  $K_{2_{z1}}$

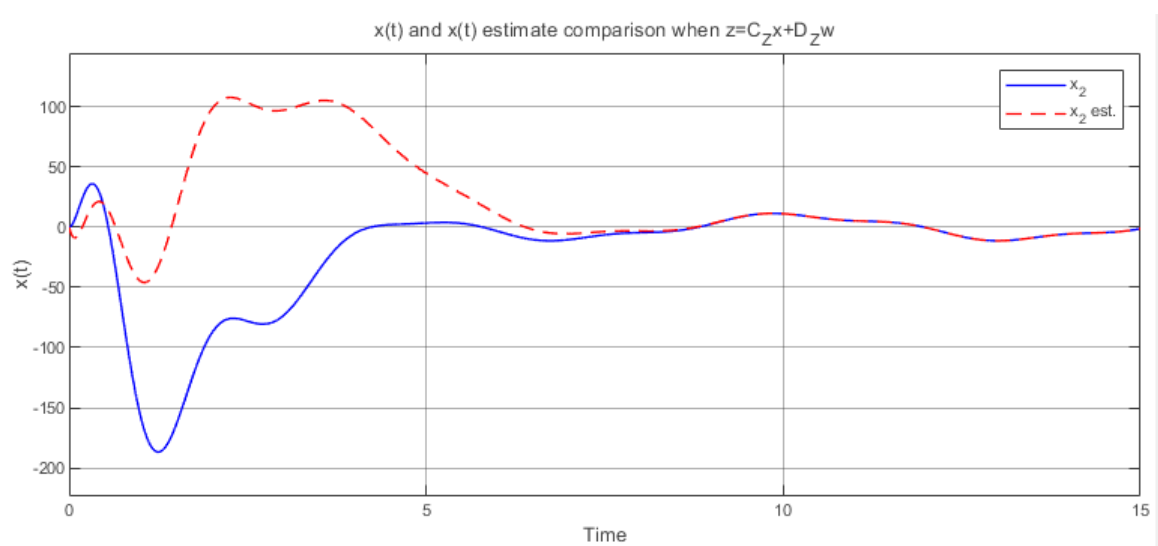


Рис. 22: График  $x_2(t), \hat{x}_2(t)$  при  $K_{2_{z1}}$

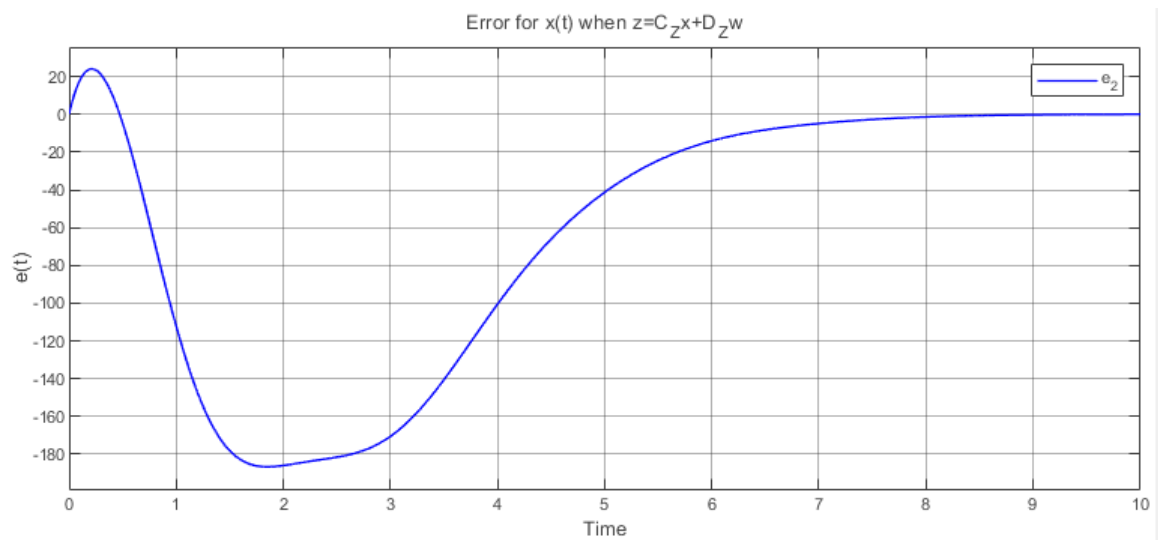


Рис. 23: График ошибки  $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$  при  $K_{2z1}$

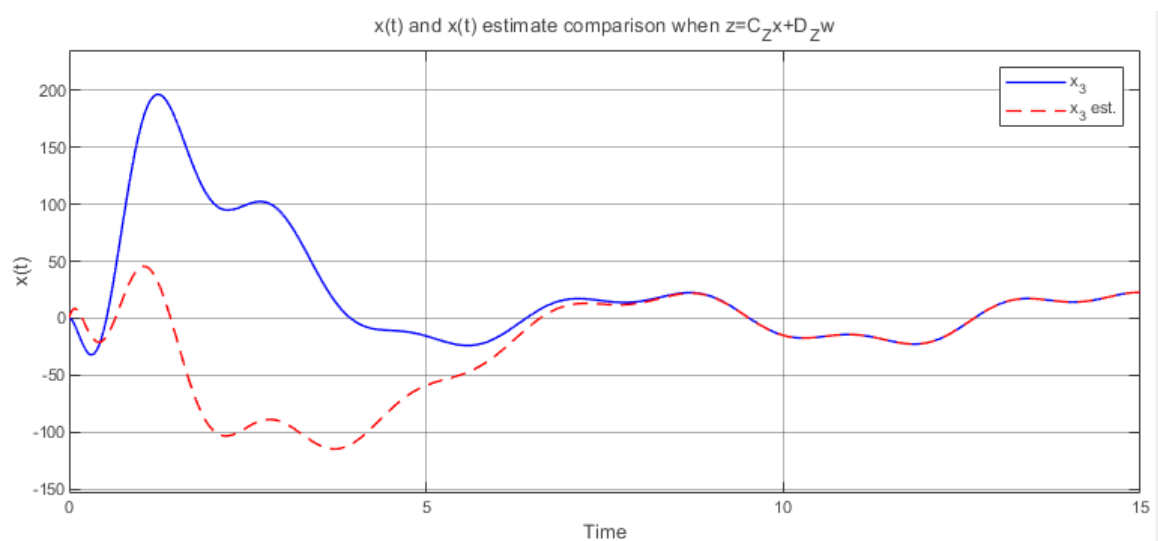


Рис. 24: График  $x_3(t), \hat{x}_3(t)$  при  $K_{2z1}$

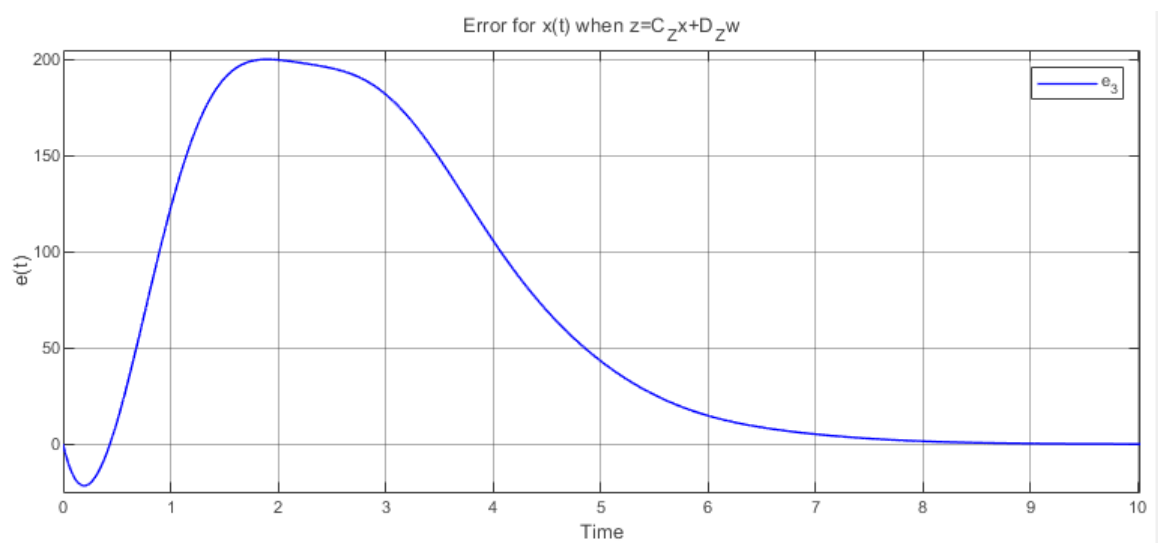


Рис. 25: График ошибки  $e_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$  при  $K_{2z1}$

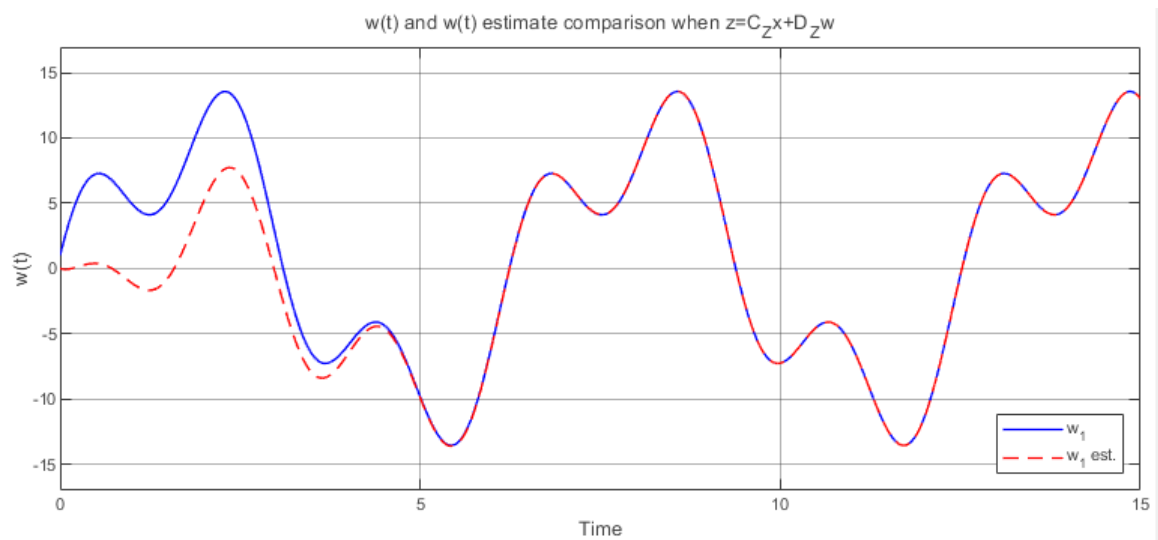


Рис. 26: График  $w_1(t), \hat{w}_1(t)$  при  $K_{2_{z1}}$

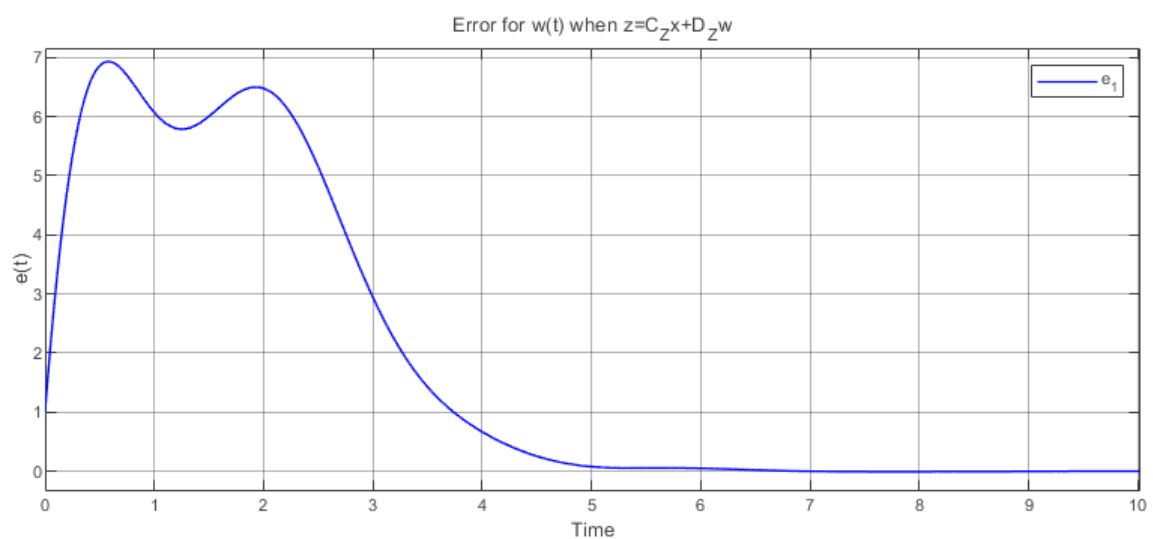


Рис. 27: График ошибки  $e_1(t) = w_1(t) - \hat{w}_1(t)$  при  $K_{2_{z1}}$

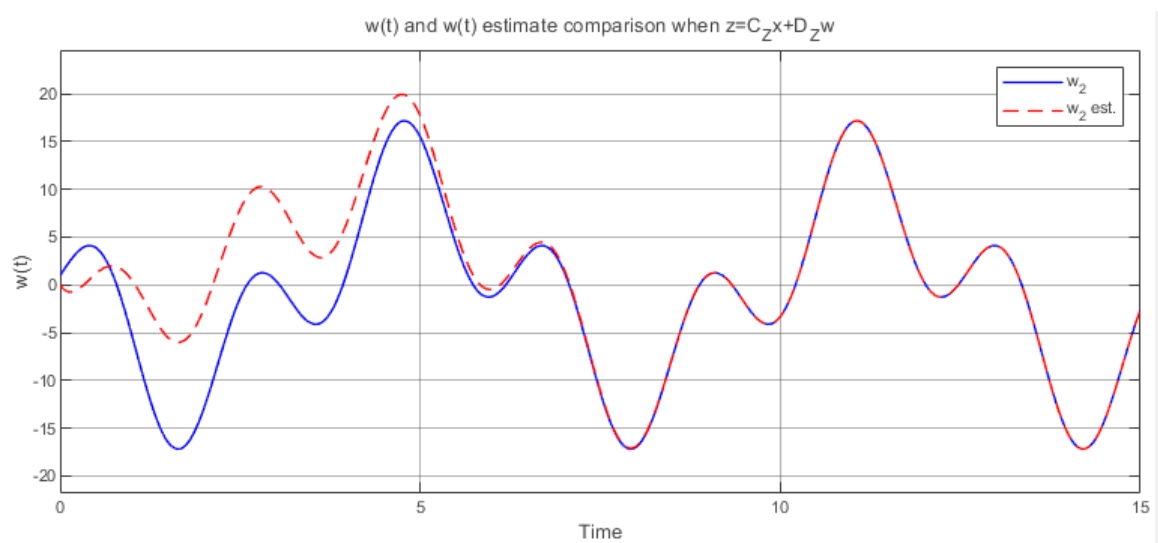


Рис. 28: График  $w_2(t), \hat{w}_2(t)$  при  $K_{2_{z1}}$

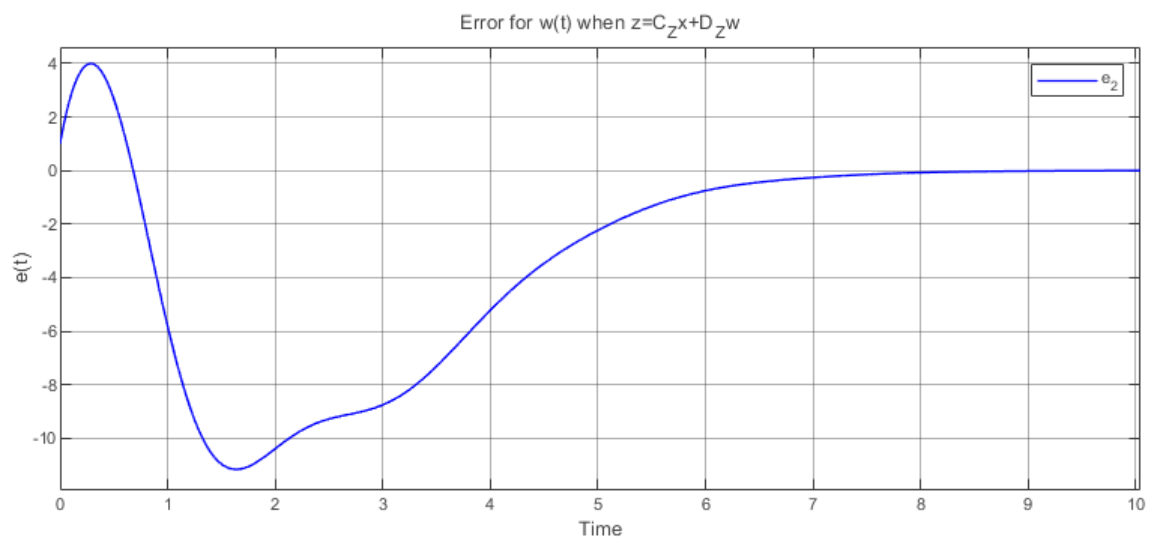


Рис. 29: График ошибки  $e_2(t) = w_2(t) - \hat{w}_2(t)$  при  $K_{2z_1}$

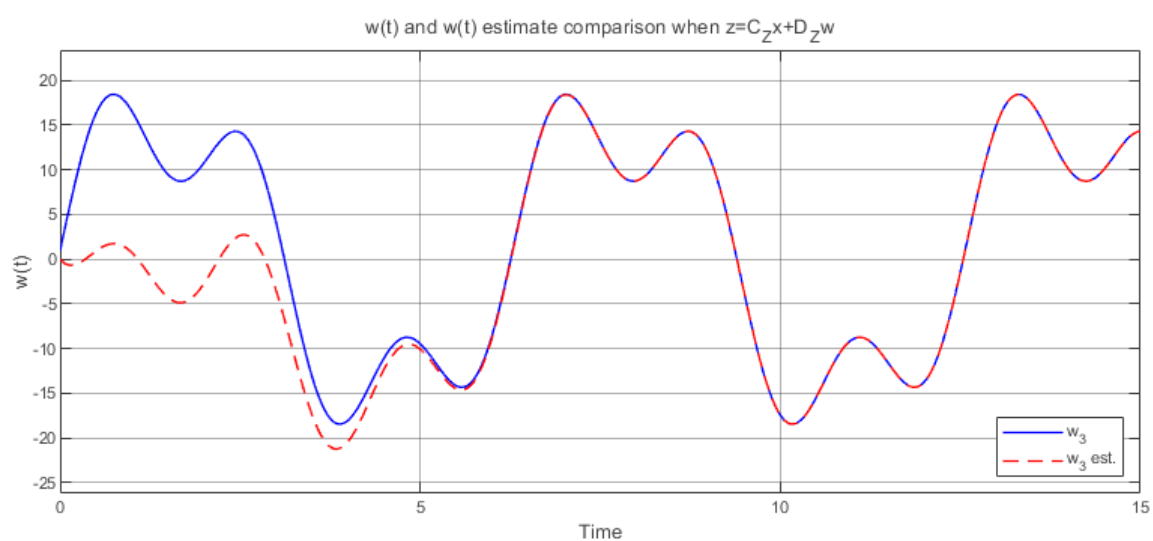


Рис. 30: График  $w_3(t), \hat{w}_3(t)$  при  $K_{2z_1}$

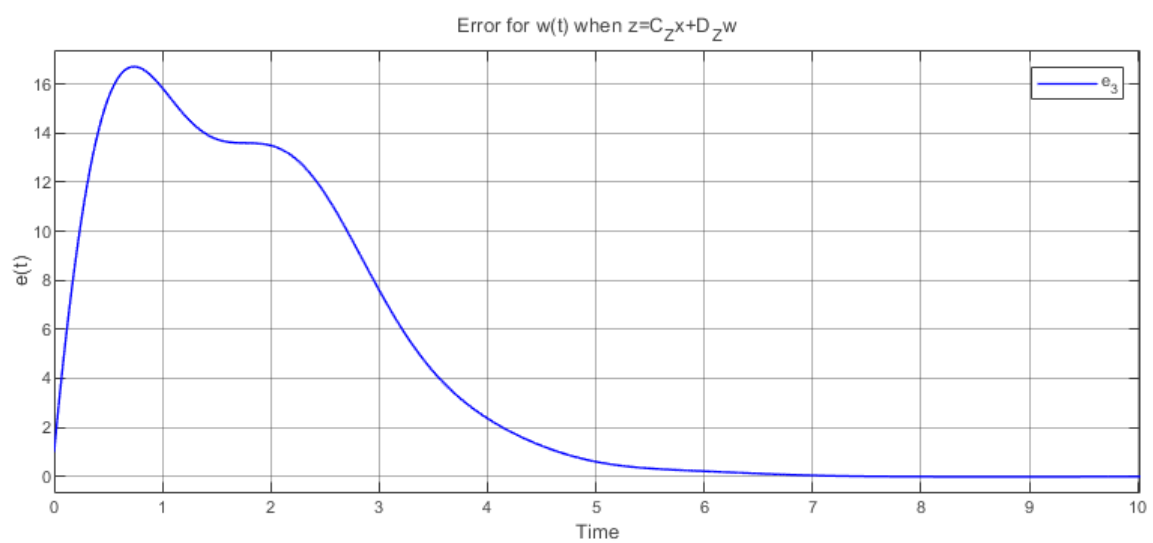


Рис. 31: График ошибки  $e_3(t) = w_3(t) - \hat{w}_3(t)$  при  $K_{2z_1}$

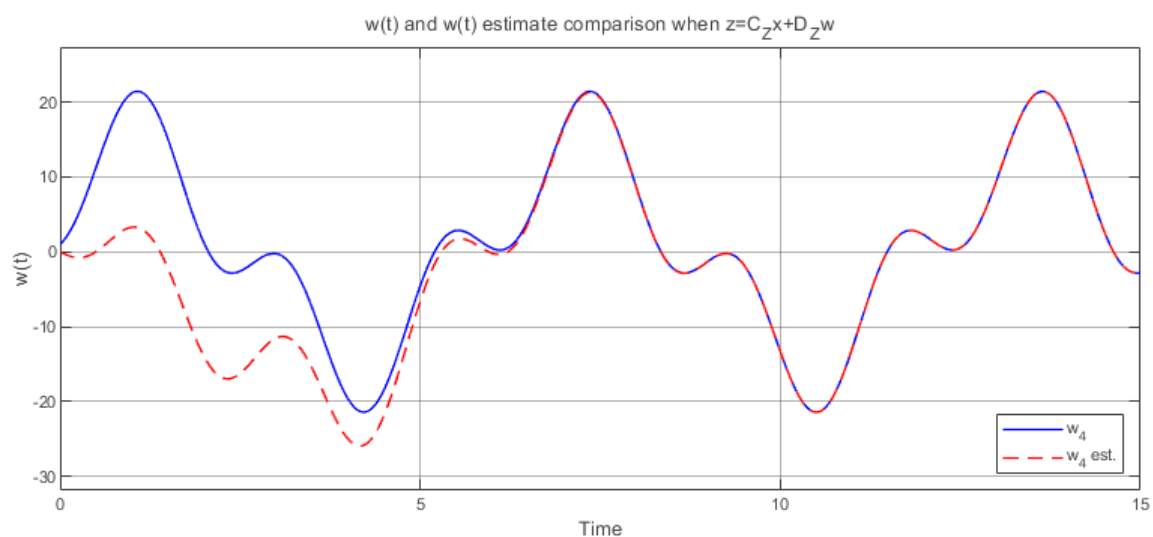


Рис. 32: График  $w_4(t), \hat{w}_4(t)$  при  $K_{2_{z1}}$

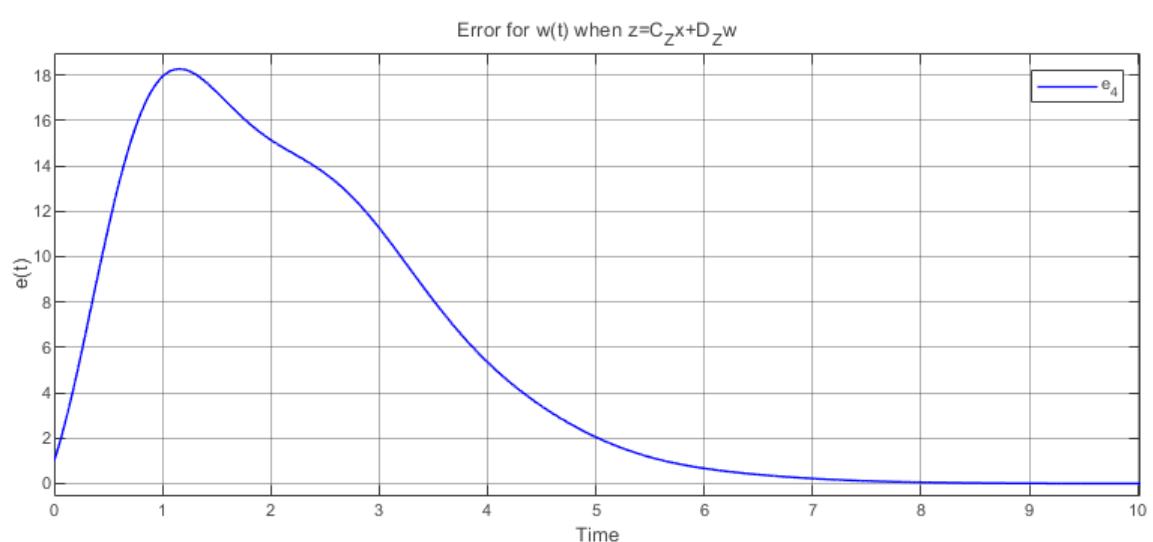


Рис. 33: График ошибки  $e_4(t) = w_4(t) - \hat{w}_4(t)$  при  $K_{2_{z1}}$

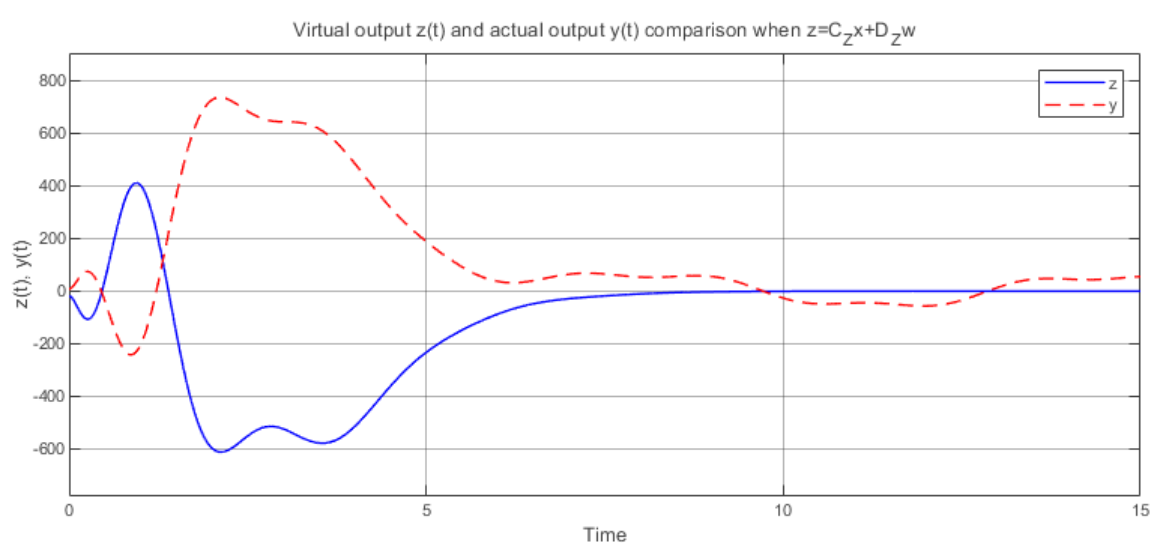


Рис. 34: График виртуального  $z(t)$  и фактического  $y(t)$  выходов при  $K_{2_{z1}}$

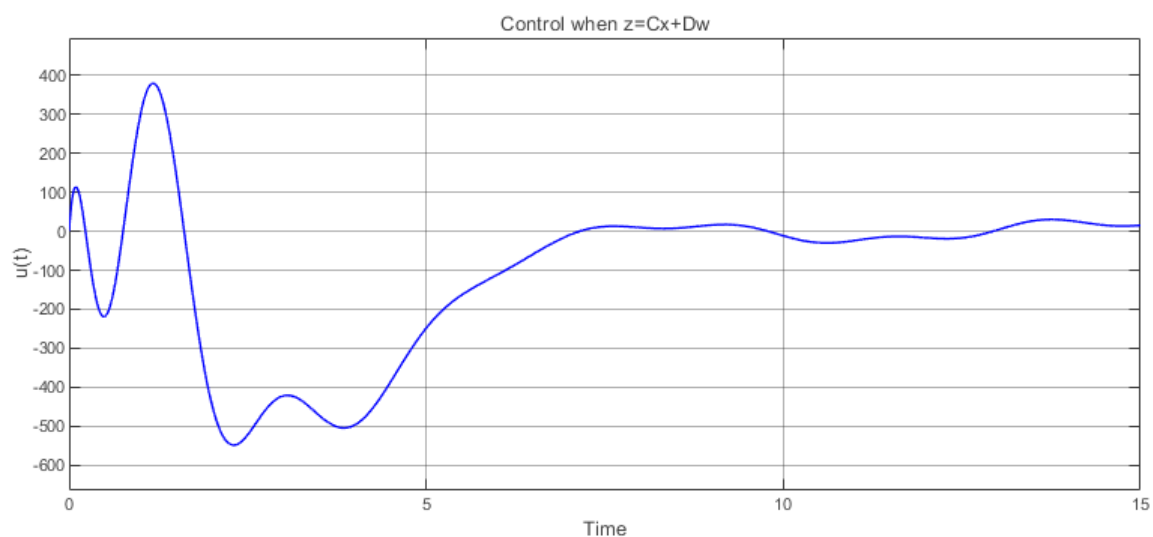


Рис. 35: График управления  $u(t)$  при  $K_{2z2}$

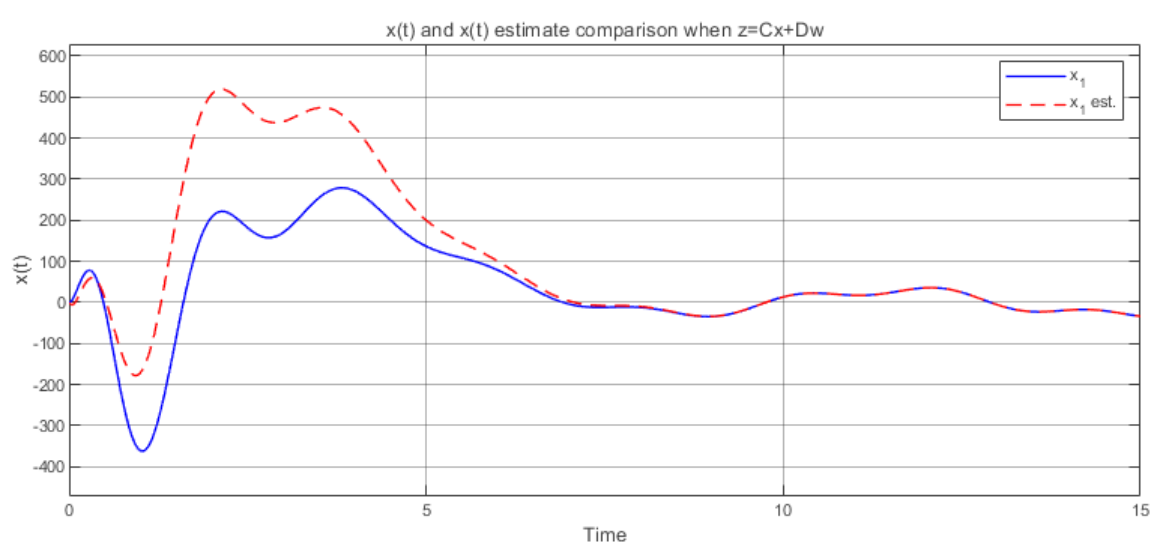


Рис. 36: График  $x_1(t), \hat{x}_1(t)$  при  $K_{2z2}$

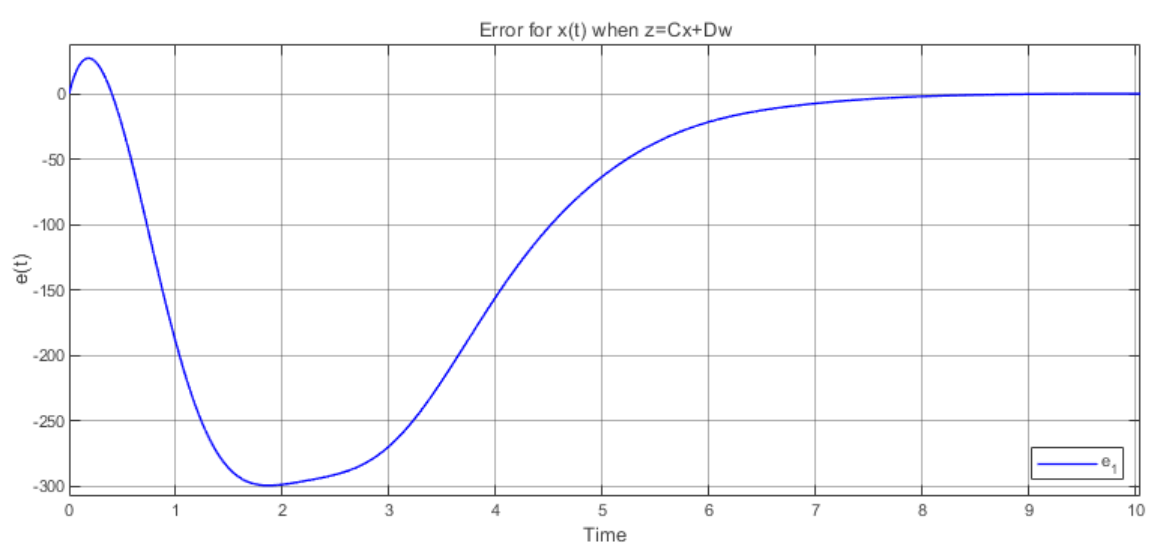


Рис. 37: График ошибки  $e_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$  при  $K_{2z2}$

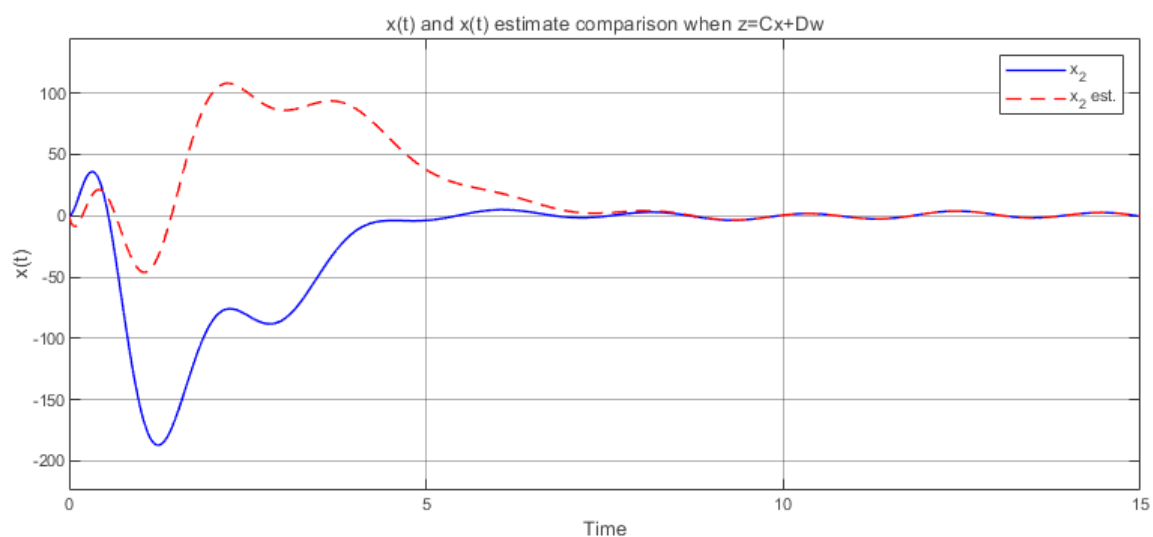


Рис. 38: График  $x_2(t), \hat{x}_2(t)$  при  $K_{2z2}$

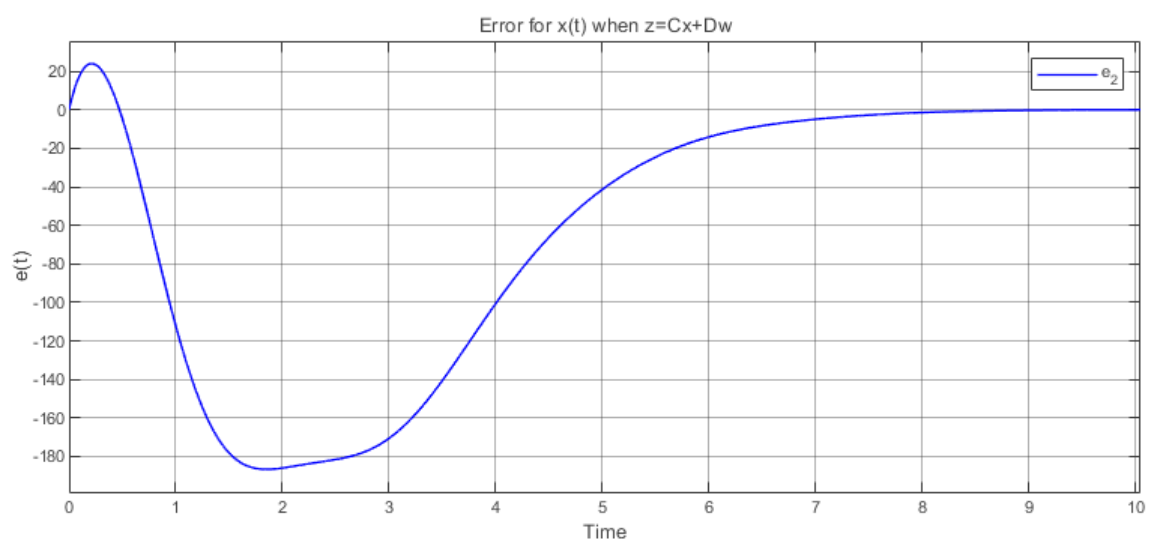


Рис. 39: График ошибки  $e_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$  при  $K_{2z2}$

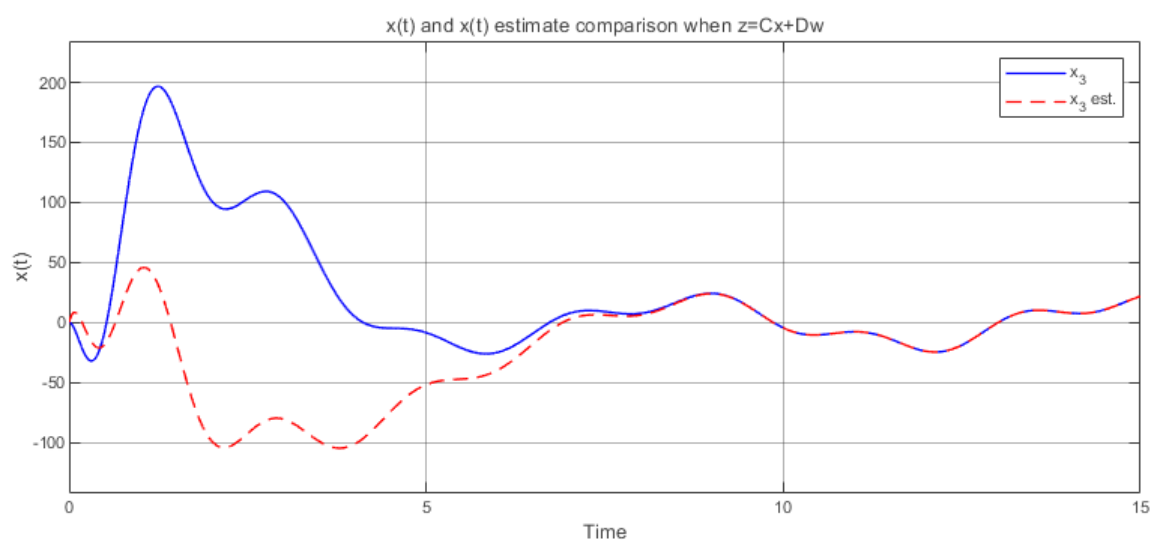


Рис. 40: График  $x_3(t), \hat{x}_3(t)$  при  $K_{2z2}$

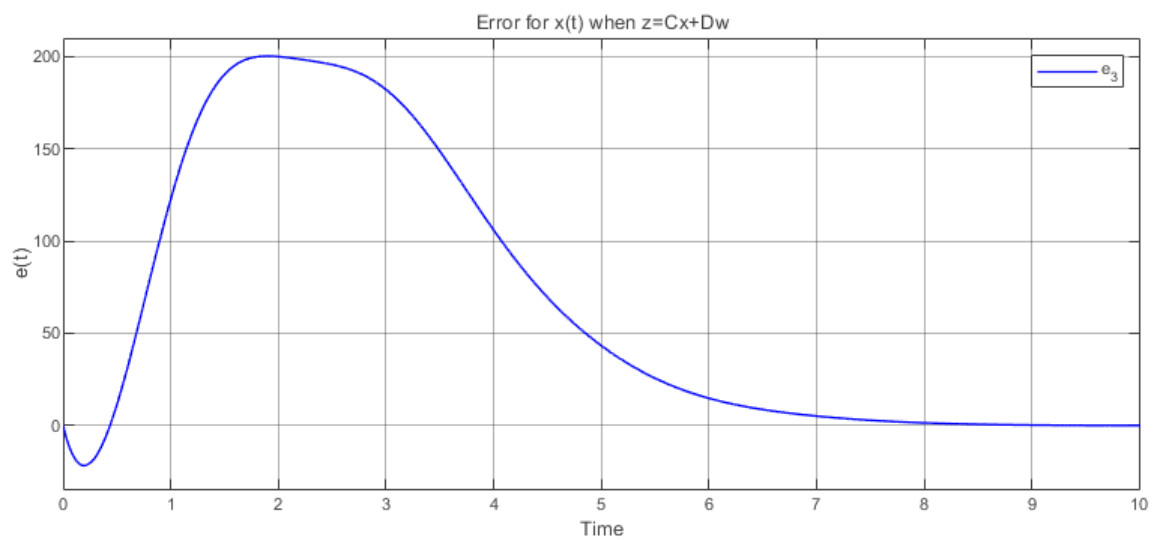


Рис. 41: График ошибки  $e_3(t) = x_3(t) - \hat{x}_3(t)$  при  $K_{2z2}$

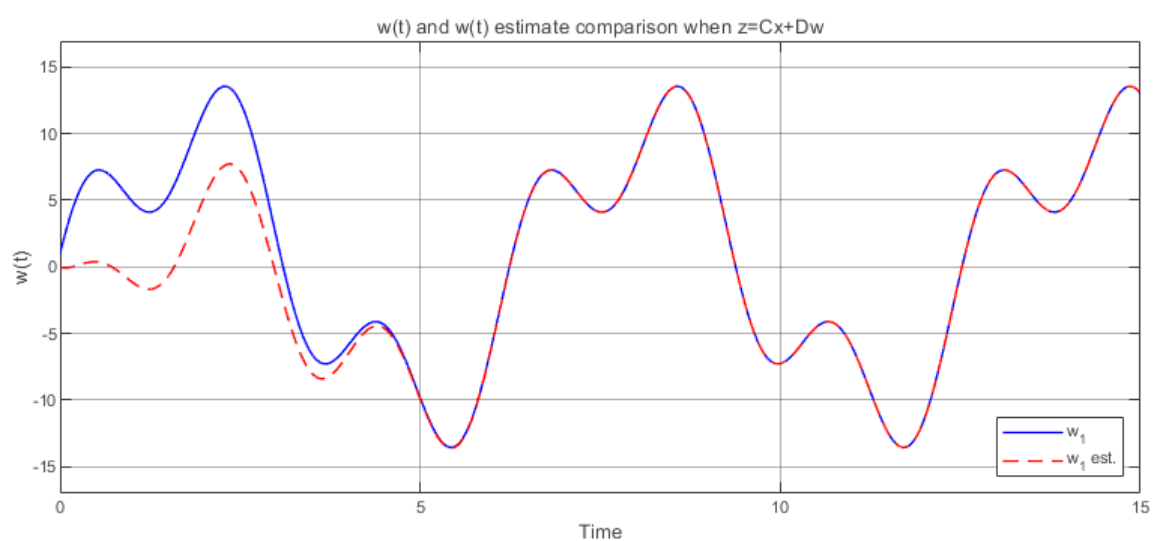


Рис. 42: График  $w_1(t), \hat{w}_1(t)$  при  $K_{2z2}$

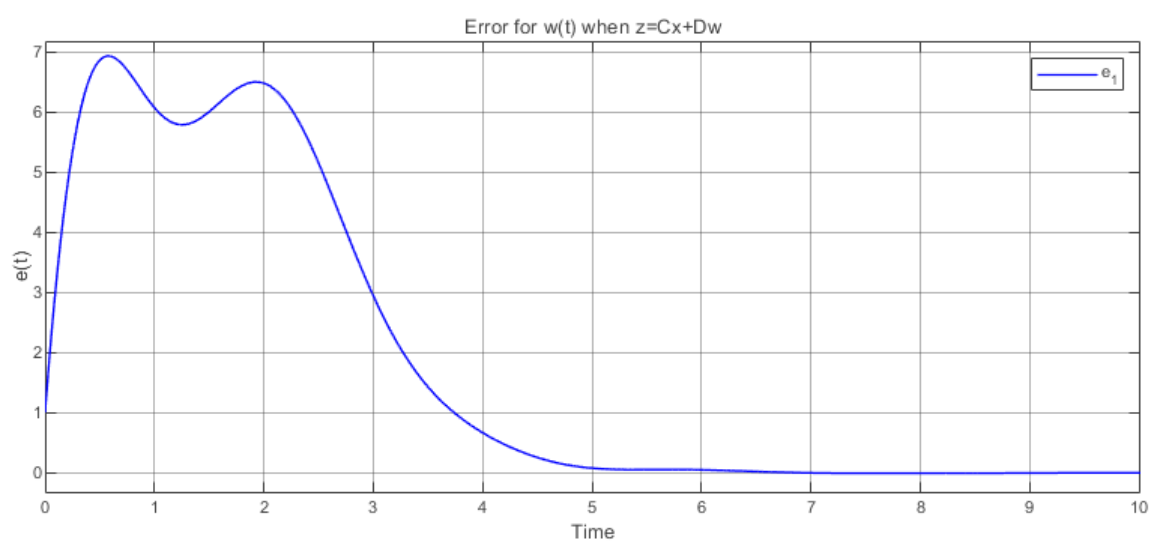


Рис. 43: График ошибки  $e_1(t) = w_1(t) - \hat{w}_1(t)$  при  $K_{2z2}$



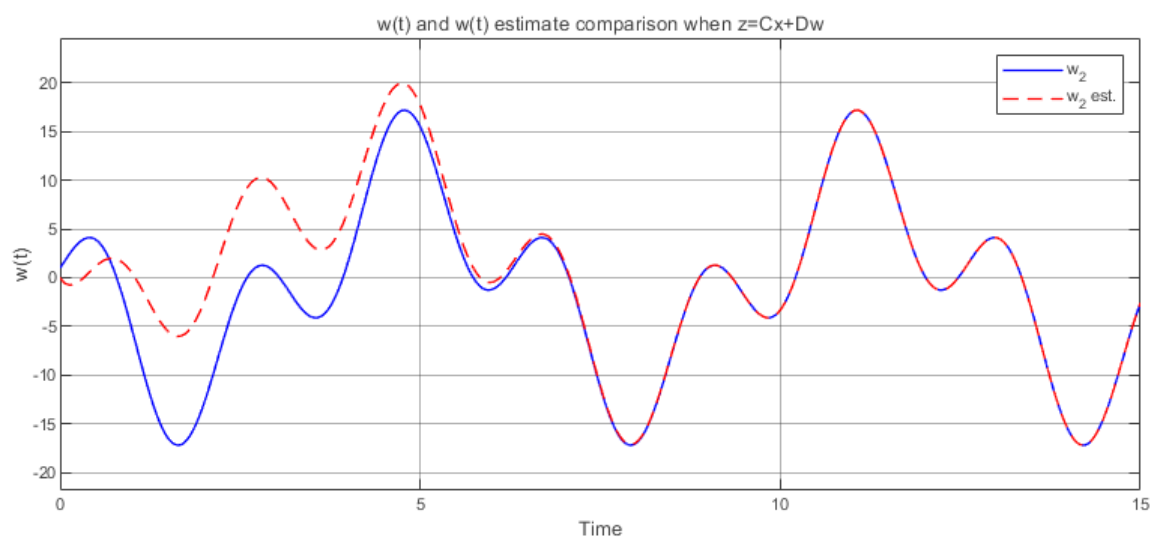


Рис. 44: График  $w_2(t), \hat{w}_2(t)$  при  $K_{2z_2}$

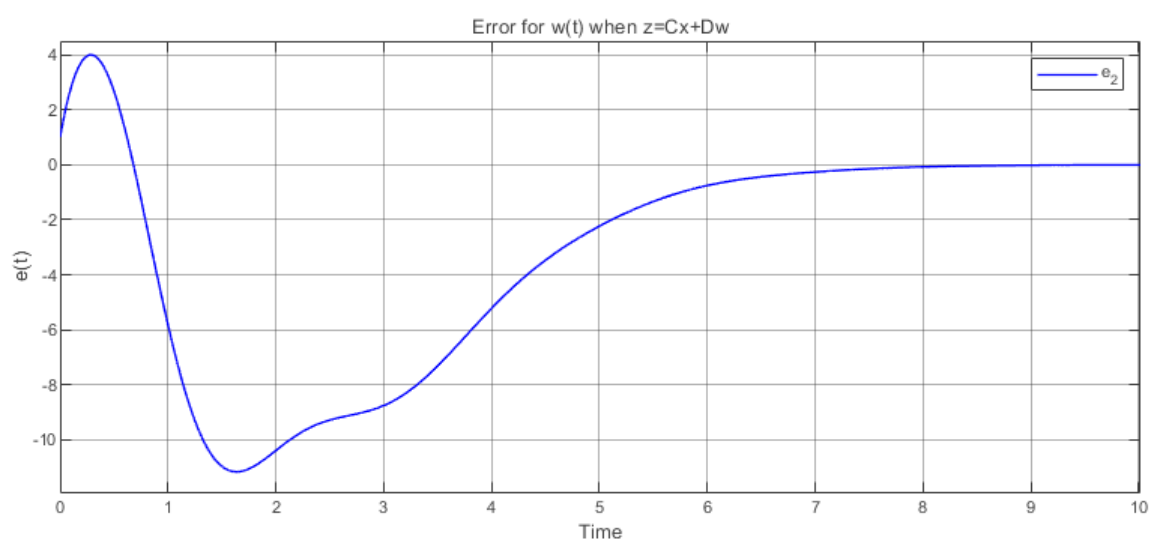


Рис. 45: График ошибки  $e_2(t) = w_2(t) - \hat{w}_2(t)$  при  $K_{2z_2}$

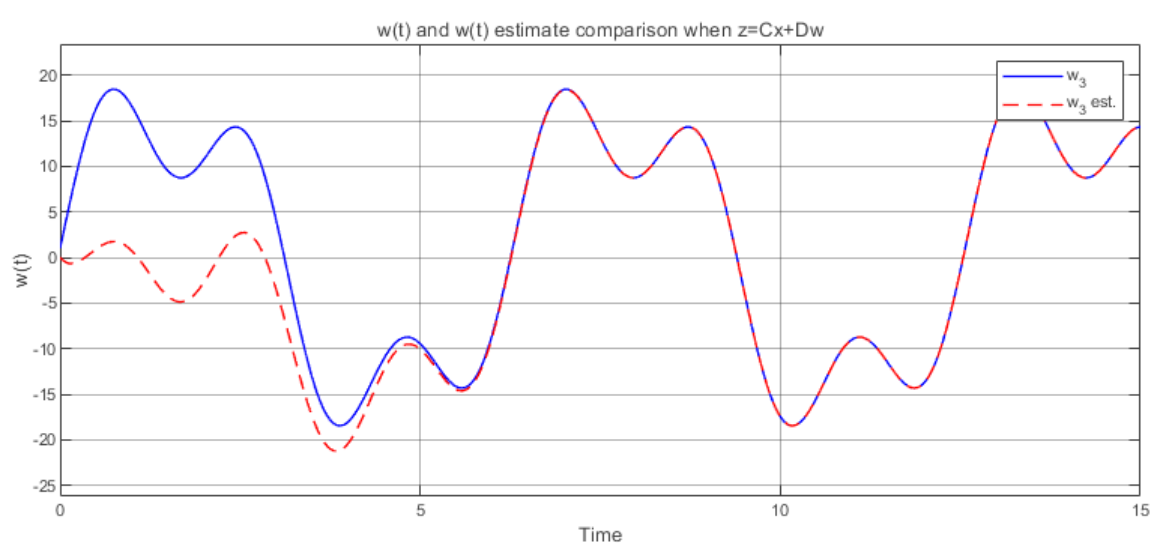


Рис. 46: График  $w_3(t), \hat{w}_3(t)$  при  $K_{2z_2}$

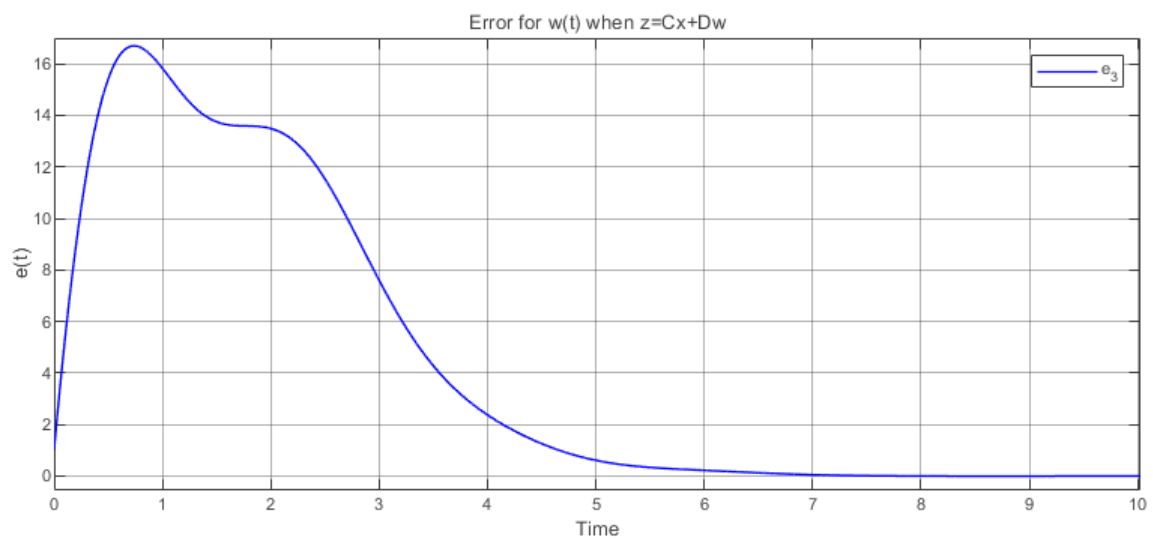


Рис. 47: График ошибки  $e_3(t) = w_3(t) - \hat{w}_3(t)$  при  $K_{2z_2}$

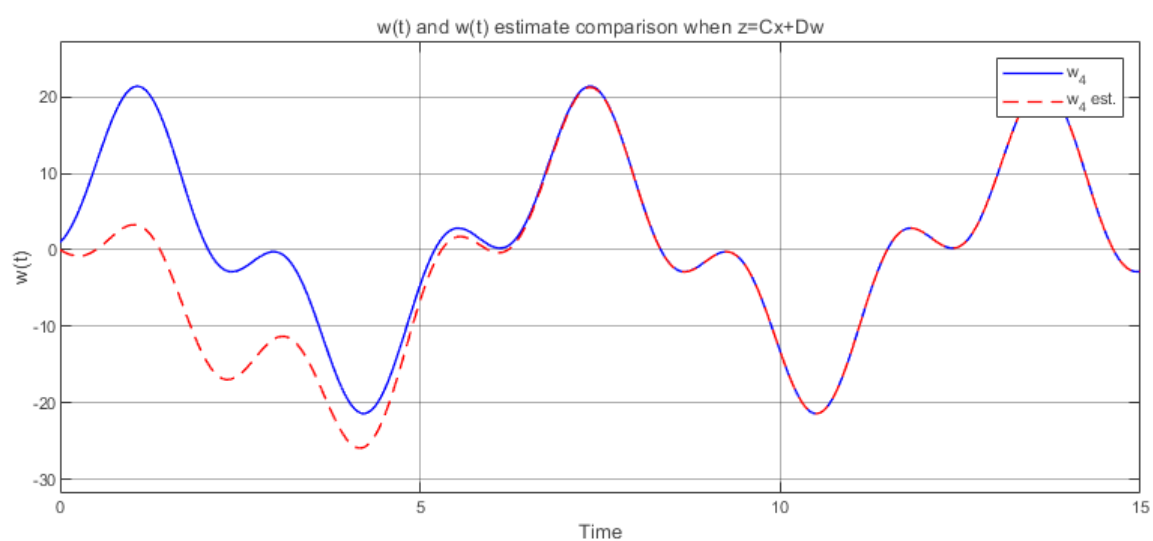


Рис. 48: График  $w_4(t), \hat{w}_4(t)$  при  $K_{2z_2}$

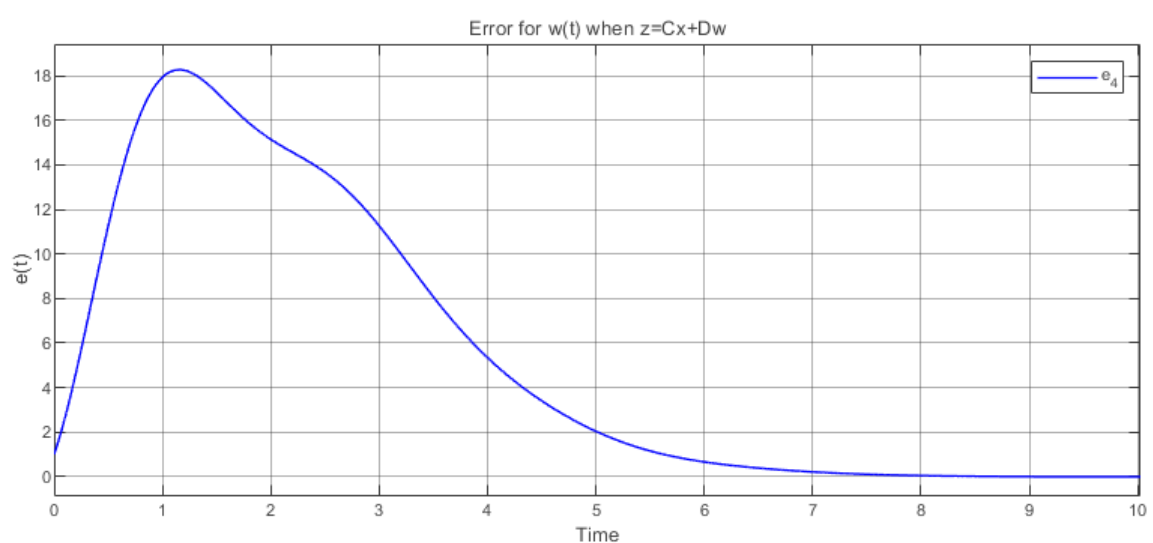


Рис. 49: График ошибки  $e_4(t) = w_4(t) - \hat{w}_4(t)$  при  $K_{2z_2}$

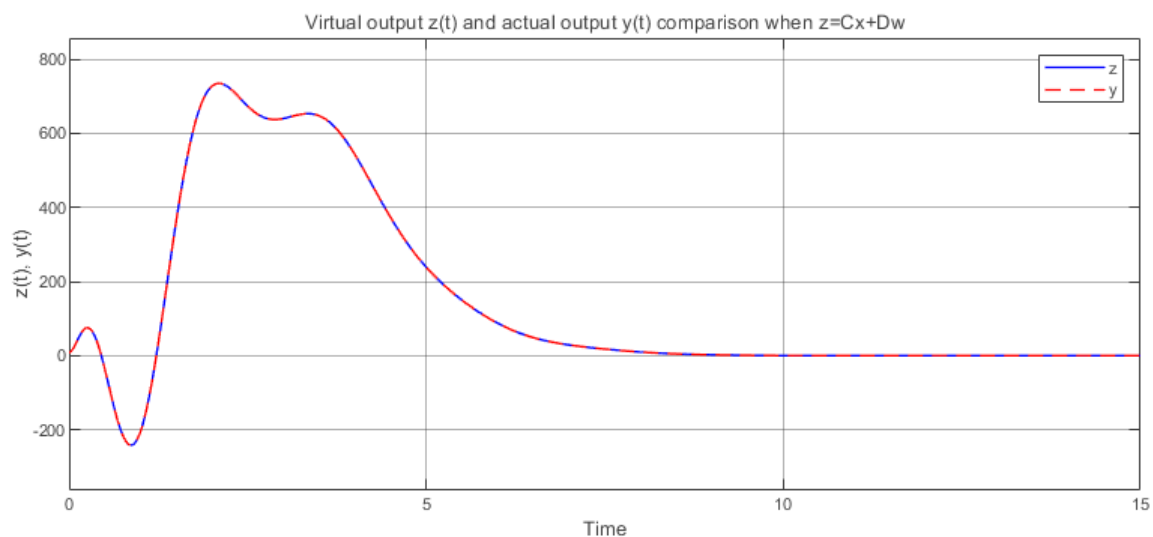


Рис. 50: График виртуального  $z(t)$  и фактического  $y(t)$  выходов при  $K_{2z2}$

## Вывод

Оценки возмущения  $\hat{w}_i$  сошлись к истинным возмущениям  $w_i$  во всех случаях. Оценки состояния объекта  $\hat{x}_i$  тоже сошлись к истинным  $x_i$  во всех случаях. Управление при  $z_1$  почти не отличается от управления при  $z_2$ . В обоих случаях виртуальный выход стремится к нулю, то есть регуляторы справляются с внешними возмущениями. Принцип внутренней модели выполняется только при  $z_2 = Cx + Dw$ .

## Общий вывод по работе

...

## Приложения

### Приложение 1

```
% plant parameters
A = [5 2 7;
     2 1 2;
     -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];
Bf = [-4 0 0 -1;
      0 0 0 0;
      4 0 0 0];

G = [25 6 -20 11;
     14 3 -10 4;
     40 11 -31 17;
     6 4 -4 3];

Cz = [-2 1 -1];
D = 0;

% G eigenvalues
G_eig = eig(G)
```

```

% A eigenvalues
A_eig = eig(A)

% Jordan matrix
[Aj, J] = jordan(A);
Pjre(:,1) = Aj(:,1);
Pjre(:,2) = imag(Aj(:,2));
Pjre(:,3) = real(Aj(:,3))
Pjre_inv = Pjre^-1
Aj_re = Pjre_inv * A * Pjre
B_jre = Pjre_inv * B

% solving Riccati
Q = 0;
v = 2;
R = 1;
a = 2;

Aa = A + eye(3) * a;
[Pk,K,e]=icare(Aa,sqrt(2)*B,Q,R);
K1=-inv(R)*B'*Pk
eK1=eig(A+B*K1)

% K2 regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P(3,4)
variable Y(1,4)
P*G-A*P == B*Y+Bf;
Cz*P + D == 0;
cvx_end

K2 = Y-K1*P

```

Листинг 1: Программа для задания 1

## Приложение 2

```

% plant parameters
A = [5 2 7;
      2 1 2;
      -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];
Bg = 0;

G = [25 6 -20 11;
      14 3 -10 4;
      40 11 -31 17;
      6 4 -4 3];

Cz = [-2 1 -1];
Dz = [-20 -6 16 -9];

% solving Riccati
Q = 0;
v = 2;
R = 1;

```

```

a = 2;

Aa = A + eye(3) * a;
[Pk,K,e]=icare(Aa,sqrt(2)*B,Q,R);
K1=-inv(R)*B'*Pk
eK1=eig(A+B*K1)

% K2 regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P(3,4)
variable Y(1,4)
P*G-A*P == B*Y+Bg;
Cz*P + Dz == 0;
cvx_end

K2 = Y-K1*P

```

Листинг 2: Программа для задания 2

### Приложение 3

```

% plant parameters
A = [5 2 7;
      2 1 2;
      -2 -3 -4];
B = [3; 1; -1];
Bf = [-4 0 0 -1;
       0 0 0 0;
       4 0 0 0];

G = [25 6 -20 11;
      14 3 -10 4;
      40 11 -31 17;
      6 4 -4 3];

Cz = [-2 1 -1];
Dz = [-20 -6 16 -9];

C = [2 0 3];
D = [8 2 -6 4];

% matrices
bigC = [C Dz];
bigA = [A Bf;
        zeros(4,3) G];

% eig bigA
eig_bigA = eig(bigA)

% re jordan
[P, J] = jordan(bigA);
P_re(:,1) = P(:,1);
P_re(:,2) = imag(P(:,2));
P_re(:,3) = real(P(:,3));
P_re(:,4) = imag(P(:,4));
P_re(:,5) = real(P(:,5));
P_re(:,6) = imag(P(:,6));

```

```

P_re(:,7) = real(P(:,7))
Pre_inv = P_re^-1
bigA_J_re = Pre_inv * bigA * P_re
C_J_re = bigC * P_re

% solving Riccati
Q = 0;
v = 2;
R = 1;
a = 2;

Aa = A + eye(3) * a;
[Pk,K,e]=icare(Aa,sqrt(2)*B,Q,R);
K1=-inv(R)*B'*Pk
eK1=eig(A+B*K1)

% find L: solving LMI with control constraint
al = 1;
xw0=[0;0;0;1;1;1;1];
xw0_est=[0;0;0;0;0;0;0];
xwe0=xw0-xw0_est;

cvx_begin sdp
variable Q(7,7)
variable Y(7,1)
variable mumu
minimize mumu
Q>0.0001*eye(7);
bigA'*Q + Q*bigA+ 2*al*Q + bigC'*Y' + Y*bigC <= 0;
[Q xwe0;
 xwe0' 1]>0;
[Q Y;
 Y' mumu]>0;
cvx_end
mu = sqrt(mumu)
bigL=inv(Q)*Y
e_bigL=eig(bigA+bigL*bigC)

% K2_CD regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P1(3,4)
variable Y1(1,4)
P1*G-A*P1 == B*Y1+Bf;
C*P1 + D == 0;
cvx_end

K2_CD = Y1-K1*P1

% K2_CzDz regulator synthesis
cvx_begin sdp
variable P2(3,4)
variable Y2(1,4)
P2*G-A*P2 == B*Y2+Bf;
Cz*P2 + Dz == 0;
cvx_end

K2_CzDz = Y2-K1*P2

```

```

L1 = [bigL(1); bigL(2); bigL(3)]
L2 = [bigL(4); bigL(5); bigL(6); bigL(7)]

% the principle of the internal model
eig_G = eig(G)
bar_A_CD = [A+B*K1+L1*C B*K2_CD+Bf+L1*D;
            L2*C G+L2*D]
bar_A_CzDz = [A+B*K1+L1*C B*K2_CzDz+Bf+L1*D;
              L2*C G+L2*D]
eig_bar_A_CD = eig(bar_A_CD)
eig_bar_A_CzDz = eig(bar_A_CzDz)

```

Листинг 3: Программа для задания 3