

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт компьютерных наук и кибербезопасности  
Высшая школа «Компьютерных технологий и информационных систем»

## **Курсовой работа**

по дисциплине «Теория автоматического управления»

на тему: «Управление перевернутым маятником»

**Выполнил:**

студент группы 5130902/20201

\_\_\_\_\_ А. И. Сафонов  
подпись

**Проверил:**

ассистент

\_\_\_\_\_ В. В. Кравченко  
подпись

«\_\_» \_\_\_\_\_ 2025

Санкт-Петербург  
2025

# Оглавление

|   |           |
|---|-----------|
| Задание .....   | 4         |
| <b>1. Математические модели объектов и систем управления .....</b>  | <b>6</b>  |
| 1.1. Модель в пространстве состояния.....   | 6         |
| 1.2. Вывод передаточной функции и модели «вход-выход» из непрерывной модели в<br>пространстве состояний .....           | 8         |
| 1.3. Вывод эквивалентной модели в пространстве состояний из модели «вход-выход» .....                                   | 10        |
| 1.4. Доказательство эквивалентности моделей в пространстве состояний .....  | 11        |
| 1.5. Получение дискретной модели в пространстве состояний .....   | 13        |
| 1.6. Вывод дискретных передаточной функции и модели «вход-выход» из дискретной модели в<br>пространстве состояний ..... | 14        |
| <b>2. Исследование реакций во временной области.....</b>  | <b>16</b> |
| 2.1. Переход к канонической жордановой форме.....   | 16        |
| 2.2. Переходная характеристика .....  | 19        |
| 2.3. Импульсная характеристик.....  | 20        |
| 2.4. Ненулевые начальные условия .....  | 21        |
| <b>3. Частотные характеристики.....</b>   | <b>24</b> |
| 3.1. Амплитудно-частотная характеристика .....  | 25        |
| 3.2. Фазочастотная характеристика.....  | 25        |
| 3.3. Определение по графикам запасов устойчивости моделей.....  | 27        |
| 3.4. Амплитудно-фазочастотная характеристика .....  | 27        |
| <b>4. Исследование устойчивости .....</b>   | <b>30</b> |
| 4.1. Теория.....  | 30        |
| 4.2. Корневой критерий.....   | 30        |
| 4.3. Критерий Ляпунова .....  | 31        |
| 4.4. Условие Стодоль .....  | 33        |
| 4.5. Критерий Гурвица.....  | 33        |
| 4.6. Критерий Шура-Кона.....  | 35        |
| 4.7. Критерий Михайлова .....   | 37        |

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 4.8. Критерий Найквиста ..... | 40 |
| Вывод.....                    | 42 |

## Задание

Перевернутый маятник смонтирован на тележке, как показано на рисунке. Тележка должна двигаться таким образом, чтобы масса шара  $m$  на конце маятника всегда занимала вертикальное положение. В качестве выходных переменных используются: перемещение тележки  $y(t)$  и угол отклонения маятника  $\theta(t)$ . Управляющее воздействие – сила  $f(t)$ , приложенная к тележке. Задача заключается в стабилизации тележки в требуемом положении  $y(t) = y_{уст}$ .

Дифференциальные уравнения, описывающие движение данной системы, можно получить, записав выражения для суммы сил, действующих в горизонтальном направлении, и суммы моментов относительно точки вращения. Будем считать, что масса тележки  $M, M \gg m$  и угол отклонения от вертикали  $\theta$  является малым. Тогда можно ограничиться линейной моделью и использовать уравнения для суммы сил  $M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0$  и для суммы моментов  $ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0$

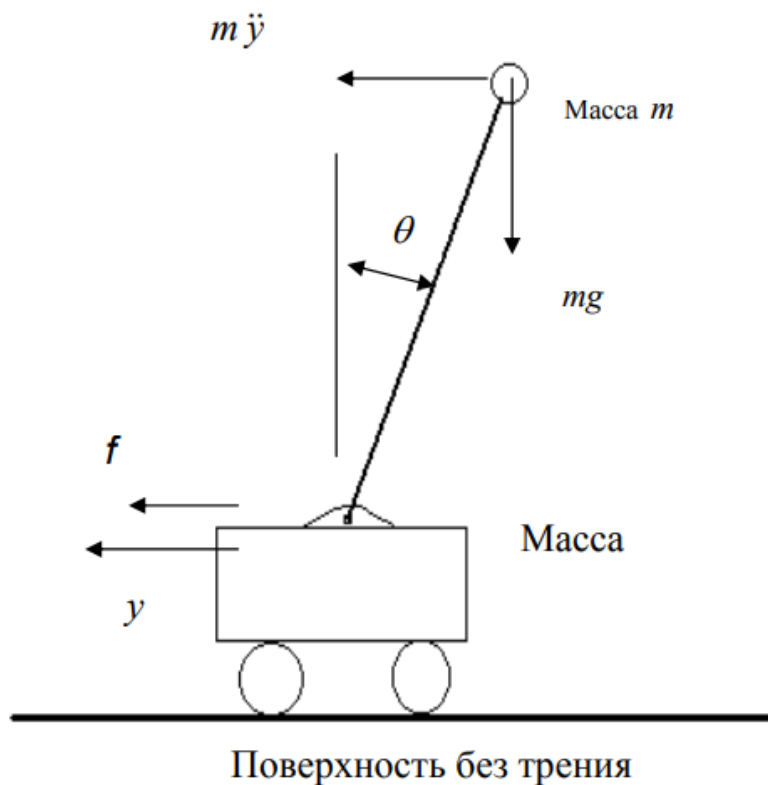


Рис. 1 Схема моделируемой системы

Таблица 1. Параметры объекта определяются следующей таблицей.

| Параметр | Вариант |     |     |     |     |
|----------|---------|-----|-----|-----|-----|
|          | 1       | 2   | 3   | 4   | 5   |
| m [кг]   | 1       | 2   | 3   | 4   | 5   |
| M [кг]   | 200     | 150 | 300 | 350 | 500 |
| l [м]    | 1.2     | 2   | 2.5 | 1.5 | 2   |

$$g = 9.81 \frac{i}{\tilde{n}^2}.$$

# 1. Математические модели объектов и систем управления

## 1.1. Модель в пространстве состояний

Из условий нам дано следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0 \\ ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Модель в пространстве состояний представляется в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = g(x, u) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1.2)$$

где вектор входных воздействий –  $u$ , а вектор выходных переменных –  $y$ .

$$\begin{aligned} M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) &= 0 \\ ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Система состоит из уравнений второго порядка, поэтому сразу составить МПС нельзя. Первым делом нужно понизить степени уравнений через замену переменных.

1. Из первого уравнения выразим  $\ddot{y}$ :

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}(u(t) - ml\ddot{\theta}) \quad (1.1.4)$$

2. Подставим выражение (1.1.4) во второе уравнение:

$$ml \frac{(u(t) - ml\ddot{\theta})}{M} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0 \quad (1.1.5)$$

3. Упростим поделив выражение на  $ml$ :

$$\frac{u(t)}{M} - \frac{ml\ddot{\theta}}{M} + l\ddot{\theta} - g\theta = 0 \quad (1.1.6)$$

4. Выразим  $\ddot{\theta}$ :

$$\ddot{\theta} = \frac{\left(g\theta - \frac{u(t)}{M}\right)}{l - \frac{ml}{M}} \quad (1.1.7)$$

5. Упростим:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l - \frac{ml}{M}} \theta - \frac{1}{(Ml - ml)} u(t) \quad (1.1.8)$$

6. Подставим (1.1.8) в (1.1.4):

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} \left( u(t) - ml \left( \frac{g}{l - \frac{ml}{M}} \theta - \frac{1}{Ml - ml} u(t) \right) \right) \quad (1.1.9)$$

7. Упростим

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} \left( u(t) - \frac{gm}{1 - \frac{m}{M}} \theta + \frac{m}{M - m} u(t) \right) \quad (1.1.10)$$

8. Сгруппируем по  $u(t)$ , и внесем в скобки  $1/M$ :

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} \left( 1 + \frac{m}{M - m} \right) u(t) - \frac{gm}{M - m} \theta \quad (1.1.11)$$

9. Приведем выражение перед  $u(t)$  под общий знаменатель, получим уравнение (1.1.12)

$$\ddot{y} = \frac{1}{M - m} u(t) - \frac{gm}{M - m} \theta \quad (1.1.12)$$

Понизим степень уравнений через замену переменных:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (1.1.13)$$

И включить новые зависимости в систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{M - m} u(t) - \frac{gm}{M - m} \theta \\ \dot{x}_4 = \frac{g}{l - \frac{ml}{M}} \theta - \frac{1}{M(l - \frac{ml}{M})} u(t) \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Эту систему можно записать в матричном виде и получить модель в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1.15)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-gm}{M - m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g}{l - \frac{ml}{M}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{M - m}{(Ml - ml)} \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0), D = 0 \quad (1.1.16)$$

Подставив значения переменных в уравнение (1.1.16), получим:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1134104046 & 0 & 0 \\ 0 & 6.615606936 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00289017 \\ -0.00192678 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (1.1.17)$$

## 1.2. Вывод передаточной функции и модели «вход-выход» из непрерывной модели в пространстве состояний

Передаточная функция в операторной форме (или матричная передаточная функция) для объекта, может быть представлена в виде:

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B + D \quad (1.2.1)$$

Для того чтобы получить формулу 1.2.1 выразим X через p, A, B, и:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ pEX &= AX + Bu \\ (pE - A)X &= Bu \\ X &= (pE - A)^{-1}Bu \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

И подставим в Y:

$$\begin{aligned} Y &= CX \\ Y &= C(pE - A)^{-1}Bu \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Для вычисления резольвенты матрицы  $(pE - A)^{-1}$  воспользуемся леммой о вычислении резольвенты:

$$\begin{aligned} (pE - A)^{-1} &= \frac{F(p)}{X_n(p)} \\ F(p) &= F_1 p^{n-1} + F_2 p^{n-2} + \dots + F_{(n-1)} p + F_n \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

$$\chi_n(p) = \det(pE - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

Коэффициенты характеристического многочлена  $a_i$  и матрицы  $F_i$  вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} F_1 &= E_n, a_1 = -\text{trace}(F_1 A) \\ F_2 &= F_1 A + a_1 E_n, a_2 = -\frac{1}{2} \text{trace}(F_2 A) \\ &\dots \\ F_k &= F_{k-1} A + a_{k-1} E_n, a_k = -\frac{1}{2} \text{trace}(F_k A) \\ &\dots \\ F_n &= F_{n-1} A + a_{n-1} E_n, a_n = -\frac{1}{2} \text{trace}(F_n A) \end{aligned}$$



Для проверки правильности вычислений воспользуемся контрольным выражением:

$$F_n A + a_n E_n = 0 \quad (1.2.5)$$

Описанные выше шаги для нахождения передаточной функции реализуем с помощью MATLAB.

```
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];
C=[1 0 0 0];D=0;

F1=eye(4);a1=-trace(A);
F2=F1*A+a1* eye(4);a2=-(1/2)*trace(F2*A);
F3=F2*A+a2* eye(4);a3=-(1/3)*trace(F3*A);
F4=F3*A+a3* eye(4);a4=-(1/4)*trace(F4*A);
Pogr=F4*A+a4*eye(4)
syms p
h=p^4+a1*p^3+a2*p^2+a3*p+a4;
W=C*( (F1*p^3+F2*p^2+F3*p+F4)/h)*B+D;
Wpa=vpa(W,5);
pretty(expand(Wpa))

%sys=ss(A,B,C,D);
%tf(sys)
```

Рис. 2 Код программы в MATLAB

```
Pogr =

      0      0      0      0
      0      0      0      0
      0      0      0      0
      0      0      0      0
```

Рис. 3 – Погрешность вычисления передаточной функции непрерывной модели

Можно сделать вывод, что все вычисления выполнены верны.

После выполнения данной программы получили передаточную функцию:

$$\frac{0.018901711798846001428949652281982 \quad 0.00289017000000001362411694572074339 \, p^2}{-1.0 \, p^4 + 6.6156069360004039481282234191895 \, p^2 - 1.0 \, p^4 + 6.6156069360004039481282234191895 \, p^2}$$

Рис. 4 Передаточная функция полученная из MATLAB.

$$W = \frac{-0.00289017p^2 + 0.0189017117988}{-p^4 + 6.615606936p^2} \quad (1.2.6)$$

Из ТАУ известно, что ПФ тесно связана с моделью «вход-выход»

$$A(p)y(p) = B(p)u(p) \rightarrow y(p) = [A(p)]^{-1}B(p)u(p) \quad (1.2.7)$$

Поэтому, сделав обратное преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, можно получить модель «вход-выход»:

$$y(p) = W(p)u(p) = \frac{B(p)}{A(p)}u(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{B(p)}{A(p)}u(t) \rightarrow A(p)y(t) = B(p)u(t) \quad (1.2.8)$$

Где  $p$  – оператор дифференцирования по времени  $t$

$$\begin{aligned} A(p) &= a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = -p^4 + 6.6156p^2 \\ B(p) &= b_0p^2 + b_1p + b_2 = -0.0029p^2 + 0.01897 \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Получаем:

$$(-p^4 + 6.615606936p^2)y(t) = (-0.00289017p^2 + 0.018901711798)u(t) \quad (1.2.10)$$

Итоговая модель “вход-выход”:

$$-y(t)^{(4)} + 6.615606936y(t)^{(2)} = -0.00289017u^{(2)}(t) + 0.018901711798u(t) \quad (1.2.11)$$

### 1.3. Вывод эквивалентной модели в пространстве состояний из модели

#### «ВХОД-ВЫХОД»

Перенесем все слагаемые в левую сторону из уравнения (1.2.10) и применим схему Горнера относительно  $p$ :

$$0.018901711798u(t) + p^2(-0.00289017u - 6.615606936y + p^2y) = 0 \quad (1.3.1)$$

Для составления вектора состояния  $X$  нужно поочередно выбрать выражения в скобках:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = px_1 \\ x_3 = -0.00289017u - 6.615606936x_1 + px_2 \\ x_4 = px_3 \\ 0.018901711798u(t) + px_4 = 0 \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Выразим  $u$ , а затем подставим в значения производных

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + 0.00289017u + 6.615606936x_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -0.018901711798u(t) \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Введем вектор состояний  $(x)$ , а также матрицы из (1.1.14):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.615606936 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.00289017 \\ 0 \\ -0.018901711798 \end{pmatrix}; C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0); D = 0 \quad (1.3.4)$$

## 1.4. Доказательство эквивалентности моделей в пространстве состояний

Матрицы, полученные из пункта 1.3 для уравнения “вход-состояние-выход” обозначим символом  $\sim (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{x})$ .

Произведем замену  $x(t) = S\tilde{x}(t)$ , где  $S$  – неособенная квадратная матрица. В результате получим следующие соотношения

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= S^{-1}AS\tilde{x} + S^{-1}Bu \\ y &= CS\tilde{x} + Du\end{aligned}\quad (1.4.1)$$

Теперь нам нужно найти такую матрицу преобразования SSS, которая сделает две системы эквивалентными, т.е. будет удовлетворять следующим условиям:

$$\tilde{A} = S^{-1}AS, \tilde{B} = S^{-1}B, \tilde{C} = CS \quad (1.4.2)$$

Для этого используем матрицу управляемости объекта. Поскольку управляющей является лишь первая компонента внешнего воздействия, то из элементов первого столбца матрицы  $B$  составим вектор  $b$  и построим матрицу управляемости объекта, отвечающую математической модели, определяемой соотношением:

$$\begin{aligned}S_y &= [b, Ab, A^2b, A^3b] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0,0029 & 0 & 0,0002 \\ 0 & -0,0019 & 0 & -0,0127 \\ 0,00289017 & 0 & 0,0002 & 0 \\ -0,018901711798 & 0 & -0,0127 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.4.3)$$

Аналогично для модели в формуле (1.3.4):

$$\begin{aligned}\tilde{S}_y &= [\tilde{b}, \tilde{A}\tilde{b}, \tilde{A}^2\tilde{b}, \tilde{A}^3\tilde{b}] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0,0029 & 0 & 0,0002 \\ 0,0029 & 0 & 0,0002 & 0 \\ 0 & -0,0189 & 0 & 0 \\ -0,0189 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.4.4)$$

Найдем матрицу  $S$  по формуле:

$$S = S_y \tilde{S}_y^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0010 & 0 & 0,0002 & 0 \\ -58,3333 & 0 & -8,8175 & 0 \\ 0 & 1,0010 & 0 & 0,0002 \\ 0 & -58,3333 & 0 & -8,8175 \end{pmatrix}\quad (1.4.5)$$

Рассчитаем погрешности вычислений:

$$\begin{aligned}Pog_{\tilde{A}} &= \tilde{A} - S^{-1}AS \\ Pog_{\tilde{B}} &= \tilde{B} - S^{-1}B \\ Pog_{\tilde{C}} &= \tilde{C} - CS\end{aligned}\quad (1.4.6)$$

Для расчета погрешностей выполним код в MATLAB:

```

% Определяем исходные матрицы A и B
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];
C=[1 0 0 0];D=0;
% Определяем матрицы с волной (Avoln и Bvoln)
Avoln = [0 1 0 0; 6.615606936 0 1 0; 0 0 0 1; 0 0 0 0];
Bvoln = [0; 0.00289017; 0; -0.018901711798];
Cvoln = [1 0 0 0];

% Вычисление b, Ab, A^2b, A^3b, A^4b для A и B
b = B;
Ab = A * B;
A2b = A * Ab;
A3b = A * A2b;

% Создание матрицы Sy (состояния для исходной системы)
Sy = [b, Ab, A2b, A3b];

% Вычисление bvoln, Abvoln, A^2bvoln, A^3bvoln для Avoln и Bvoln
bvoln = Bvoln;
Abvoln = Avoln * Bvoln;
A2bvoln = Avoln * Abvoln;
A3bvoln = Avoln * A2bvoln;

% Создание матрицы Syvoln (состояния для системы с волной)
Syvoln = [bvoln, Abvoln, A2bvoln, A3bvoln];

% Вычисление матрицы S и погрешностей
S = Sy * inv(Syvoln);

Pog_A = Avoln - inv(S)*A*S
Pog_B = Bvoln - inv(S)*B
pog_C = Cvoln - C*S
% Вывод результатов
disp('Матрица Sy = ');
disp(Sy);

disp('Матрица Syvoln = ');
disp(Syvoln);

disp('Матрица S = ');
disp(S);

```

Рис. 5 – Код MATLAB для нахождения погрешностей вычислений

```

Pog_A =

    1.0e-15 *

         0         0.1110         0         0.0031
    0.8882         0         0.2220         0
         0         0.8882         0         0.1110
         0         0         0         0

Pog_B =

         0
         0
         0
         0

pog_C =

    1.0e-08 *

    0.3862         0         0.0591         0

```

Рис. 6 – Погрешности вычислений, рассчитанные в MATLAB.

Поскольку матрицы ошибок  $Pog_{\tilde{A}}$  и  $Pog_{\tilde{B}}$  имеют незначительные значения, это говорит о том, что динамика систем в основном схожа. Однако, различие в  $Pog_{\tilde{C}}$  указывает на то, что при оценке выходов системы могут возникать более значительные различия.

## 1.5. Получение дискретной модели в пространстве состояний

Найдем шаг дискретизации. Для этого понадобится вычислить вторую норму исходной матрицы A:

$$T \approx \frac{1}{\|A\|_2} = 0.1511 \quad (1.5.1)$$

Построим модель системы в виде:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \lambda_{k+1} = A_g x_k + B_g u_k \\ y_k = C_g x_k + D_g u_k \end{cases} \\ A_g = e^{AT} \\ B_g = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B \\ C_g = C \\ D_g = D \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Для вычисления матриц A и B воспользуемся MATLAB.

```
% Определяем исходные матрицы A и B
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];
C=[1 0 0 0];D=0;
% Вычисляем вторую норму матрицы A
T_d = 1 / norm(A, 2)

% Вычисляем матрицу Ag
Ag = expm(A * T_d);
Ag = vpa(Ag, 7);

% Вычисляем матрицу Bg с использованием функции integral для интегрирования
Bg=quadv(@(t) expm(A*t), 0,T_d)*B;
Bg = vpa(Bg, 5);

% Вывод результатов
disp('Ag = ');
disp(Ag);
disp('Bg = ');
disp(Bg);
```

Рис. 7 – Код программы в MATLAB

Подставляем полученные матрицы в формулу (1.5.2) и получаем дискретную модель в пространстве состояний:

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 1.076513 & 0 & 0.1549708 \\ 0 & -0.0175753 & 1 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 1.076513 \end{pmatrix}, B_g = \begin{pmatrix} 0.000033013 \\ -0.000022284 \\ 0.00043693 \\ -0.00029859 \end{pmatrix} \quad (1.5.3)$$

$$C_g = (1 \ 0 \ 0 \ 0), D_g = (0)$$

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = A_g x_k + B_g u_k \\ y_k = C_g x_k + D_g u_k \end{cases}$$

## 1.6. Вывод дискретных передаточной функции и модели «вход-выход» из дискретной модели в пространстве состояний

Давайте теперь представим сдвиг вектора состояния в следующем виде:

$$x_k + 1 = \xi x_k \quad (1.6.1)$$

Где  $\xi$  - оператор сдвига по времени

Аналогично с непрерывной моделью:

$$\begin{aligned} \xi x_k &= A_d x_k + B_d u_k \Rightarrow \\ \xi x_k - A_d x_k &= B_d u_k \Rightarrow \\ (\xi E - A_d) x_k &= B_d u_k \Rightarrow \\ x_k &= (\xi E - A_d)^{-1} B_d u_k, \\ W_d(\xi) &= \frac{b_d(\xi)}{a_d(\xi)}, \\ (\xi E - A_d)^{-1} &= \frac{\tilde{B}_d(\xi)}{\chi_n^d(\xi)} \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

Перепишем программу из рисунка 2 для случая с дискретной моделью пространства состояний:

```

A = [
    1.0, -0.00131165, 0.1511355, -0.00006574791;
    0,    1.076513,    0,    0.1549708;
    0, -0.0175753,    1.0, -0.00131165;
    0,    1.025226,    0,    1.076513;
];
Bg = [
    0.000033126;
    -0.000021975;
    0.00043842;
    -0.00029444
];
C=[1 0 0 0];D=0;

F1=eye(4);a1=-trace(A);
F2=F1*A+a1* eye(4);a2=-(1/2)*trace(F2*A);
F3=F2*A+a2* eye(4);a3=-(1/3)*trace(F3*A);
F4=F3*A+a3* eye(4);a4=-(1/4)*trace(F4*A);
Pogr=F4*A+a4*eye(4)
syms p
h=p^4+a1*p^3+a2*p^2+a3*p+a4;
W=C*(F1*p^3+F2*p^2+F3*p+F4)/h)*Bg+D;
Wpa=vpa(W,5);
pretty(expand(Wpa))

```

Рис. 8 – Код программы в MATLAB

```

0.000033126000000001376566416411151295 p^4 - 0.000038138131042629065375915865232625 p^3 - 0.000038136116757978199666222983206171 p^2 +
-----
0.000033125366043670223622121616514807
+ -----
#1
#1
#1
where
#1 == p^4 - 4.1530259999999543651938438415527 p^3 + 6.3060521457682625623419880867004 p^2 - 4.1530262915366620291024446487427 p
+ 1.0000001457681264582788571715355

```

A

Рис. 9 – Передаточная функция дискретной модели, рассчитанная в MATLAB.

Перепишем полученную передаточную функцию:

$$Wg(\xi) = \frac{0.000033126\xi^3 - 0.0003813813\xi^2 - 0.0000381361\xi + 0.000033125366}{\xi^4 - 4.15302599999995\xi^3 + 6.306052145768\xi^2 - 4.15302629153666\xi + 1} \quad (1.6.3)$$

Используя полученную передаточную функцию, получаем дискретную модель «ВХОД-ВЫХОД»:

$$y_{k+4} - 4.15302599999995y_{k+3} + 6.306052145768\xi^2 y_{k+2} - 4.153026291537y_{k+1} + y_k = 0.000033126u_{k+2} + 0.0003813813u_{k+2} - 0.0000381361u_{k+1} - 0.000033125366u_k \quad (1.6.4)$$

## 2. Исследование реакций во временной области

Второй раздел РГЗ будет посвящён исследованию реакций во временной области.

Задан ОУ (см. рис. 1), динамику которого можно описать моделью в пространстве состояний (1).

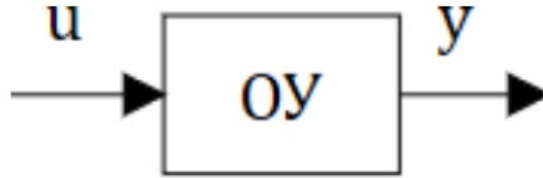


Рис. 10 – Объект управления в схематичном виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \right| \begin{aligned} x_{k+1} &= A_d x_k + B_d u_k \\ y_k &= C x_k + D u_k \end{aligned} \quad (2.0.1)$$

где  $x(0) = x_0 = x^0$ . Первое уравнение из (2.0.1) представляет собой ДУ первого порядка для непрерывной модели и разностное для дискретной, решение которых определяется интегральной и разностной формулами Коши соответственно:

$$x(t) = e^{At} x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad \left| \quad x_k = A_d^k x^0 + \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-1-i} B_d u_i \quad (2.0.2)\right.$$

Подставив (2) во второе уравнение системы (1), мы получим зависимость вида

$$y = f(x^0, u)$$

Изменяя начальные условия  $x^0$  ОУ или подавая различные воздействия на вход  $u$ , мы будем получать на выходе реакцию системы во времени в виде переходных процессов. Их анализ является одним из методов исследования свойств ОУ, которые проявляются в реакции на типовые воздействия. Всего их три, и далее мы их рассмотрим.

### 2.1. Переход к канонической жордановой форме

Для исследования реакций во временной области необходимо выделить жорданову форму матрицы, сделав преобразование подобия:

$$x = Sz,$$

Где  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – неособенная матрица. Сделаем замену в МПС и в первом уравнении домножим слева на обратную матрицу  $S$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}(t) &= S^{-1} A S z(t) + S^{-1} B u(t) \\ y(t) &= C S z(t) + D u(t) \end{aligned} \right| \begin{aligned} z_{k+1} &= S_d^{-1} A_d x_k + S_d^{-1} B_d u_k \\ y_k &= C S x_k + D u_k \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где  $z(0) = z^0 = S^{-1} x^0, z_0 = z_d^0 = S_d^{-1} x^0$ .



Преобразование вида  $S^{-1}AS$  и даст жорданову матрицу  $J$ . Матрица  $J$  имеет блочнодиагональный вид: на главной диагонали находятся собственные числа матрицы  $A$ , а на первой наддиагонали могут располагаться единицы. Наличие единиц обуславливается кратностью выбранного собственного числа и следующей формулой

$$k_l = \text{rank}(A - \lambda_{p+i}E_n)^{l-1} - 2\text{rank}(A - \lambda_{p+i}E_n)^l + \text{rank}(A - \lambda_{p+i}E_n)^{l+1}, \quad (2.1.4)$$

где  $k_l$  – число клеток порядка  $l$ . Клетки порядка  $l > 1$  характеризуются наличием единиц в первой наддиагонали. Матрица  $S$  в данном случае является собственной матрицей матрицы  $A$  и составляется из её собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1134104046 & 0 & 0 \\ 0 & 6.615606936 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5721 \\ -2.5721 \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 1.076513 & 0 & 0.1549708 \\ 0 & -0.0175753 & 1 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 1.076513 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.4751 \\ 0.6779 \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & 0.3623 & -0.3623 \\ 0 & 0 & -0.0160 & -0.0160 \\ 0 & 0 & 0.9319 & 0.9319 \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

$$S_d = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & 0.3623 & -0.3623 \\ 0 & 0 & -0.0160 & -0.0160 \\ 0 & 0 & 0.9319 & 0.9319 \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$

Код для вычисления полученных собственных векторов и собственных чисел:

```
A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 -0.1134 0 0; 0 6.6156 0 0];
% Где eigenvalues - матрица,
% на диагонали которой расположены собственные числа,
% Где eigenvectors - матрица,
% где столбцы являются собственными векторами матрицы.

[eigenvectors, eigenvalues] = eig(A);
disp('eigenvectors A');
disp(eigenvectors);
disp('eigenvalues A');
disp(eigenvalues);

Ad = [
    1.0, -0.001311533, 0.1511357, -0.00006574209;
    0,    1.076513,    0,    0.154971;
    0,   -0.01757371,    1.0,   -0.001311533;
    0,    1.025226,    0,    1.076513
];
[eigenvectors, eigenvalues] = eig(Ad);

disp('eigenvectors Ad');
disp(eigenvectors);
disp('eigenvalues Ad');
disp(eigenvalues);
```

Рис. 11 – Программа для вычислений собственных чисел и векторов

Результат выполнения программы:

```

eigenvectors A
    1.0000    -1.0000   -0.0062    0.0062
         0         0     0.3623   -0.3623
         0     0.0000   -0.0160   -0.0160
         0         0     0.9319    0.9319

eigenvalues A
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0     2.5721         0
         0         0         0    -2.5721

eigenvectors Ad
    1.0000    -1.0000   -0.0062    0.0062
         0         0     0.3623   -0.3623
         0     0.0000   -0.0160   -0.0160
         0         0     0.9319    0.9319

eigenvalues Ad
    1.0000         0         0         0
         0     1.0000         0         0
         0         0     1.4751         0
         0         0         0     0.6779

```

Рис. 12 – Полученные собственные вектора и числа для матриц  $A$  и  $A_d$

Как видно, кратными числами являются «0» и «1». Найдём для непрерывной и дискретной моделей количество «клеток» Жордана соответственно:

$$k_1 = \text{rank}(A - 0E_n)^{1-1} - 2\text{rank}(A - 0E_n)^1 + \text{rank}(A - 0E_n)^{1+1} = 0$$

$$k_2 = \text{rank}(A - 0E_n)^{2-1} - 2\text{rank}(A - 0E_n)^2 + \text{rank}(A - 0E_n)^{2+1} = 1$$

$$k_1 = \text{rank}(A_d - 1E_n)^{1-1} - 2\text{rank}(A_d - 1E_n)^1 + \text{rank}(A_d - 1E_n)^{1+1} = 0$$

$$k_2 = \text{rank}(A_d - 1E_n)^{2-1} - 2\text{rank}(A_d - 1E_n)^2 + \text{rank}(A_d - 1E_n)^{2+1} = 1$$

```

1 - A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 -0.1134 0 0; 0 6.6156 0 0];
2 - Ad = [
3 -     1.0, -0.001311533, 0.1511357, -0.00006574209;
4 -     0,     1.076513,         0,     0.154971;
5 -     0, -0.01757371,         1.0, -0.001311533;
6 -     0,     1.025226,         0,     1.076513
7 - ];
8
9 - [S, E] = eig(A); [Sd, Ed] = eig(Ad);
0 - k1 = rank(A^0) - 2*rank(A^1) + rank(A^2);
1 - k2 = rank(A^1) - 2*rank(A^2) + rank(A^3);
2 - k1d = rank((Ad-eye(4))^0) - 2*rank((Ad-eye(4))^1) + rank((Ad-eye(4))^2);
3 - k2d = rank((Ad-eye(4))^1) - 2*rank((Ad-eye(4))^2) + rank((Ad-eye(4))^3);
4 - disp('k1: " + k1 + ", k2: " + k2);
5 - disp('k1d: " + k1d + ", k2d: " + k2d);

Command Window
New to MATLAB? See resources for Getting Started.

>> kratnosty_geom
k1:0,k2: 1
k1d:0,k2d: 1

```

Рис. 13 – Программа для вычислений геометрических кратностей собственных чисел

У матрицы  $A_d$  есть кратное собственное значение ( $\lambda_0 = 0$  – кратность равная 2) . Ее жорданова форма может быть записана как:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5721 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5721 \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

У матрицы  $A_d$  есть кратное собственное значение ( $\lambda_0 = 1$  – кратность равная 2) .. Ее жорданова форма может быть записана как:

$$J_d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6779 \end{pmatrix} \quad (2.1.10)$$

## 2.2. Переходная характеристика

*Переходная* характеристика системы (ПХС) строится при нулевых начальных условиях и при входном воздействии единичной ступенчатой функции, или функции Хэвисайда:

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Учтём новые условия:

$$z(t) = \int_0^t e^{J(t-\tau)} S^{-1} B 1(\tau) d\tau = \begin{cases} z_k = \sum_{i=0}^{k-1} J_d^{k-1-i} S_d^{-1} B_d 1_i = \\ = (e^{Jt} - E_n) J^{-1} S^{-1} B. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из системы после замены переменных, приняв во внимание действие единичной функции:

$$y(t) = CS(e^{Jt} - E_n)J^{-1}S^{-1}B + D \mid y_k = C_d \sum_{i=0}^{k-1} J_d^{k-1-i} S_d^{-1} B_d + D \quad (2.2.3)$$

и получим функцию переходной характеристики системы.\

Построение и исследование графиков непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech. Построенный график представлен на рис. 13.

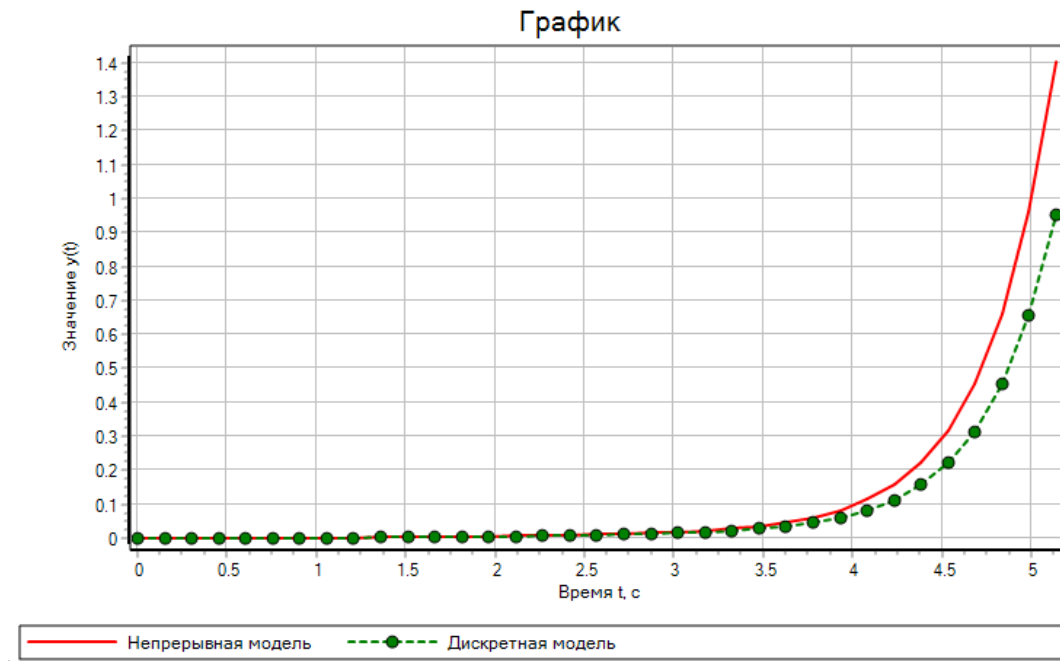


Рис. 14 – Переходная характеристика непрерывной и дискретной моделей

Из графика видно, что непрерывная модель и дискретная расходятся, поэтому снятие характеристик переходных процессов не требуется.

### 2.3. Импульсная характеристик

Импульсная характеристика системы (ИХС) строится при нулевых начальных условиях и при входном воздействии дельта-функции, или функции Дирака:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ 1, & t = t_0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Главной особенностью этой функции является её фильтрующее свойство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad \left| \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(t_i) \delta(t_i - t_0) = f(t_0). \right. \quad (2.3.2)$$

Учтём новые условия в:

$$z(t) = \int_0^t e^{J(t-\tau)} S^{-1} B \delta(\tau) d\tau = \left| \begin{aligned} z_k &= \sum_{i=0}^{k-1} J_d^{k-1-i} S_d^{-1} B_d \delta(t_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} J_d^{k-1} S_d^{-1} B_d = \end{aligned} \right. \quad (2.3.3)$$

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из (3):

$$y(t) = C S e^{Jt} S^{-1} B + D \delta(t) \quad | \quad y_k = C S_d J_d^{k-1} S_d^{-1} B_d + D \delta(t_k) \quad (2.3.4)$$

и получим функцию импульсной характеристики системы.

Построение и исследование графиков импульсной характеристики непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech. Построенный график представлен на рис. 14.

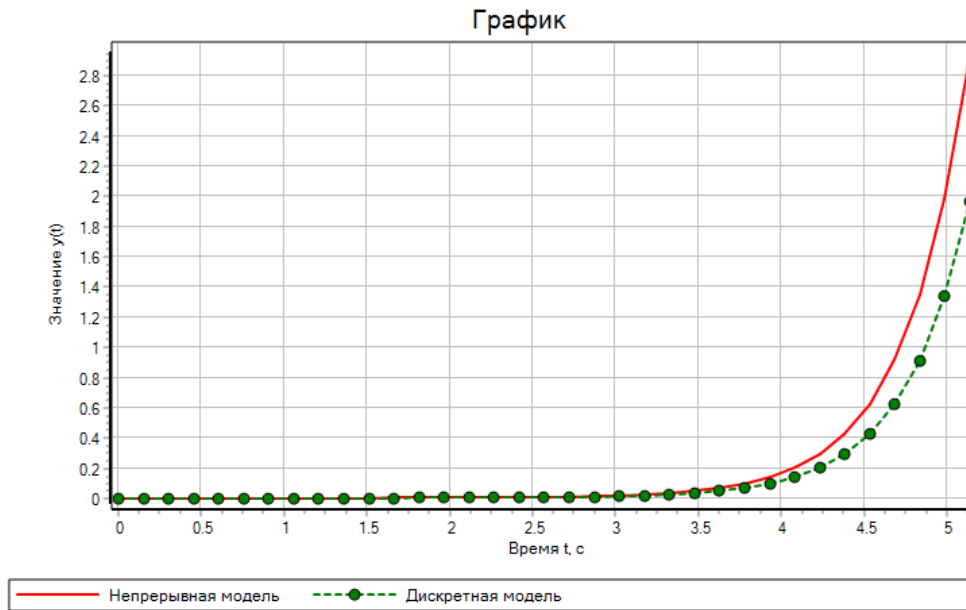


Рис. 15 – Импульсная характеристика непрерывной и дискретной моделей

Из графика ИХС видно, что непрерывная модель и дискретная расходятся, поэтому снятие характеристик переходных процессов не требуется.

## 2.4. Ненулевые начальные условия

Реакция на ненулевые начальные условия (ННУ) строится при отсутствии каких-либо внешних управлений и возмущений, но, чтобы хотя бы один элемент вектора  $x^0$  был отличен от нуля. Учтём новые условия в:

$$z(t) = e^{Jt} S^{-1} x^0 \mid z_k = J_{\text{д}}^k S_{\text{д}}^{-1} x^0. \quad (2.4.1)$$

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из (2.1.1)

$$y(t) = C S e^{Jt} S^{-1} x^0 \mid y_k = C S J_{\text{д}}^k S_{\text{д}}^{-1} x^0 \quad (2.4.2)$$

и получим функцию реакции системы (2.0.1) на ненулевые начальные условия.

Построение и исследование графиков переходной характеристики с ненулевыми начальными условиями непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech.

В качестве не нулевых условий примем матрицу

$$xN0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (2.4.3)$$

Построенный график представлен на рис. 15.

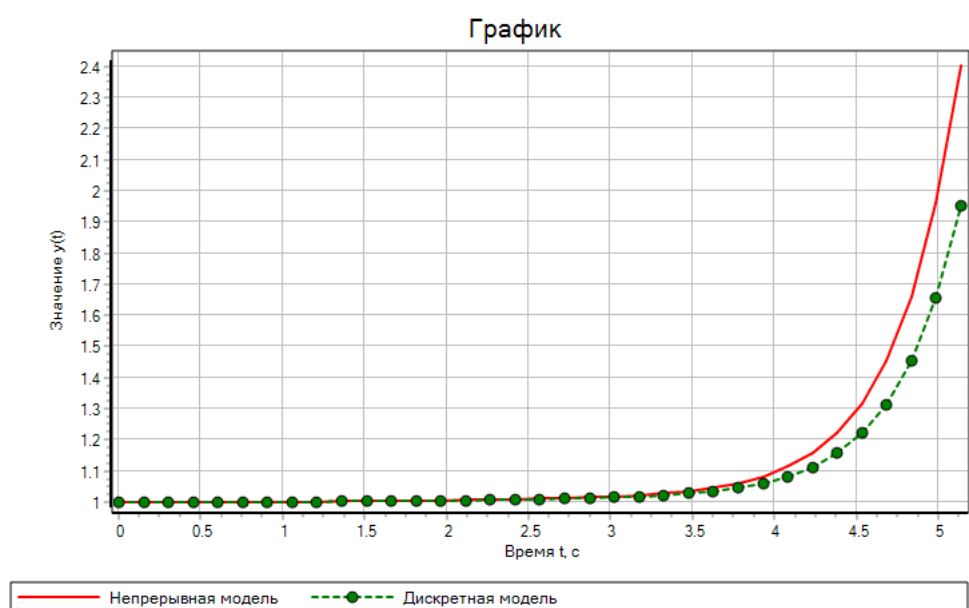


Рис. 16 – Реакция на ненулевые начальные условия непрерывной и дискретной моделей

Схема объекта в программе SimInTech представлена на рис. 14.

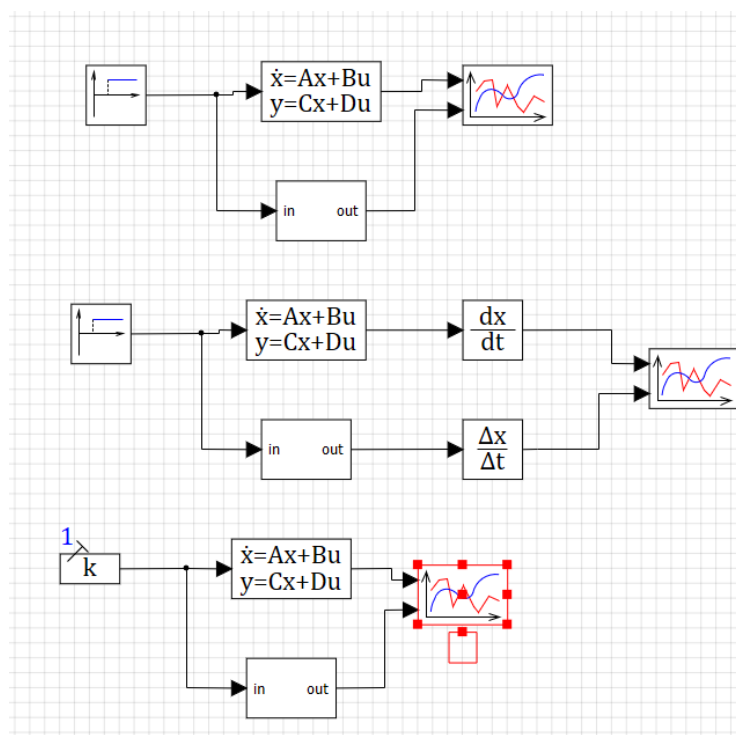


Рис. 17 – Схема объекта для исследования реакций во временной области

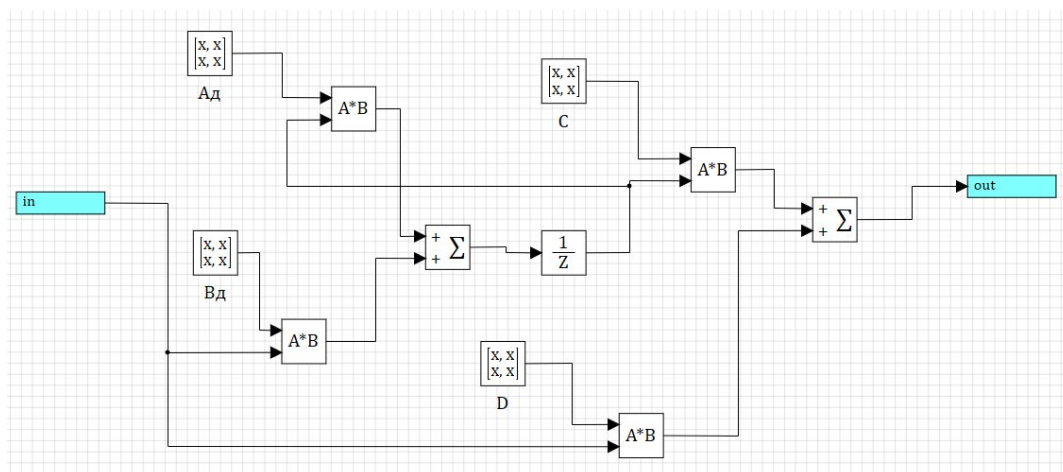


Рис. 18– Субмодель дискретной модели.

### 3. Частотные характеристики

Если мы на вход  $u$  модели будем подавать гармонический сигнал, то на выходе  $y$  в установившемся режиме мы будем получать реакцию ОУ также в гармоническом виде. Зная входной и выходной сигналы, можно провести анализ передаточного звена, характеризующегося функцией  $W$ . Классическим типовым воздействием выступает единичная синусоидальная функция  $\sin(\omega t)$ .

Чтобы выходной сигнал  $y$  не был похож на экспоненту, ОУ должен быть устойчивым. Отсюда следует замечание: частотные характеристики имеют смысл только для устойчивых систем, т. к. у неустойчивых на выходе не будет гармонического сигнала, а значит нельзя будет провести частотный анализ.

Так как мы будем рассматривать гармонические сигналы, то удобно перейти к другой системе координат на основе частоты с помощью преобразования Фурье, которое является частным случаем преобразования Лапласа:

$$s = j\omega,$$

где  $j$  – мнимая единица, но с дополнительными условиями: нужно, чтобы исследуемая функция была задана на  $t \in (-\infty, +\infty)$  и была полностью интегрируема.

Пусть на вход бесконечно долго поступает гармонический сигнал, а ОУ удовлетворяет необходимым условиям. Тогда сделаем преобразование Фурье:

$$y(t) = W(p)u(t) \rightarrow y(j\omega) = W(j\omega)u(i\omega), \quad (3.0.1)$$

где  $W$  – комплексная частотная характеристика ОУ, которую по свойству комплексных чисел можно записать следующим образом:

$$W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{u(i\omega)} = \frac{b(j\omega)}{a(i\omega)} = |W(j\omega)|e^{j \arg W(j\omega)} \quad (3.0.2)$$

То есть отношение Фурье-изображений входного сигнала  $u$  и выходного сигнала  $y$  определяет изменение модуля и фазы выходного сигнала (как функцию частоты) относительно входного сигнала:

$$\begin{aligned} u(t) &= A_{\text{вх}} \sin(\omega t) \\ &\quad \downarrow \\ u(t) &= A_{\text{вх}} |W(j\omega)| \sin(\omega t + \arg W(j\omega)) = A_{\text{вых}} \sin(\omega t + \Psi) \end{aligned} \quad (3.0.3)$$

Как можно заметить из последней формулы амплитуда и фаза выходного сигнала  $y$  зависят от частоты  $\omega$ :  $A_{\text{вых}} = A_{\text{вых}}(\omega)$ ,  $\Psi = \Psi(\omega)$ . На основе этих зависимостей и проводят частотный анализ систем.



### 3.1. Амплитудно-частотная характеристика

Амплитудно-частотная характеристика системы (АЧХ) находится как отношение амплитуды выходного сигнала  $y$ , который зависит от частоты, к амплитуде входного  $u$  на определённом частотном диапазоне:

$$A(\omega) = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}} = |W(j\omega)|, \omega \in [0, +\infty]; \quad (3.1.1)$$

$$A^d(\tilde{\omega}) = \frac{A_{\text{вых}}^d}{A_{\text{вх}}} = |W_d(j\tilde{\omega})|, \tilde{\omega} \in [0, 2\pi]. \quad (3.1.2)$$

Для исследования воспользуемся программой SimInTech. В SimInTech для построения АЧХ используется блок Построение частотных характеристик (вкладка Анализ и оптимизация). Он подключается ко входу и выходу исследуемого ОУ. В свойствах данного блока выставим следующие значения:

- типы характеристик: «ЛАХ»
- начальная круговая частота: 0,0005
- конечная круговая частота: 500 для непрерывной системы и  $2\pi$  для дискретной

Полученные графики см в пункте 3.2 (рисунок 19, рисунок 20).

### 3.2. Фазочастотная характеристика

Фазочастотная характеристика системы (ФЧХ) представляется аргументом частотной характеристики ОУ  $W$  на определённом частотном диапазоне:

$$\Psi(\omega) = \arg W(j\omega), \omega \in [0, +\infty]; \quad (3.2.1)$$

$$\Psi_d(\tilde{\omega}) = \arg W_d(j\tilde{\omega}), \tilde{\omega} \in [0, 2\pi]. \quad (3.2.2)$$

В SimInTech для построения ФЧХ также используется блок Построение частотных характеристик. В свойствах данного блока выставим следующие основные значения:

- тип характеристик: «ФЧХ»
- начальная и конечная круговые частоты: такие же, как и для АЧХ.

Получим графики (см. рисунок 19 и рисунок 20):



Рис. 19 – Графики ЛАЧХ и ФЧХ исследуемой непрерывной системы, где частота представлена в логарифмическом масштабе.

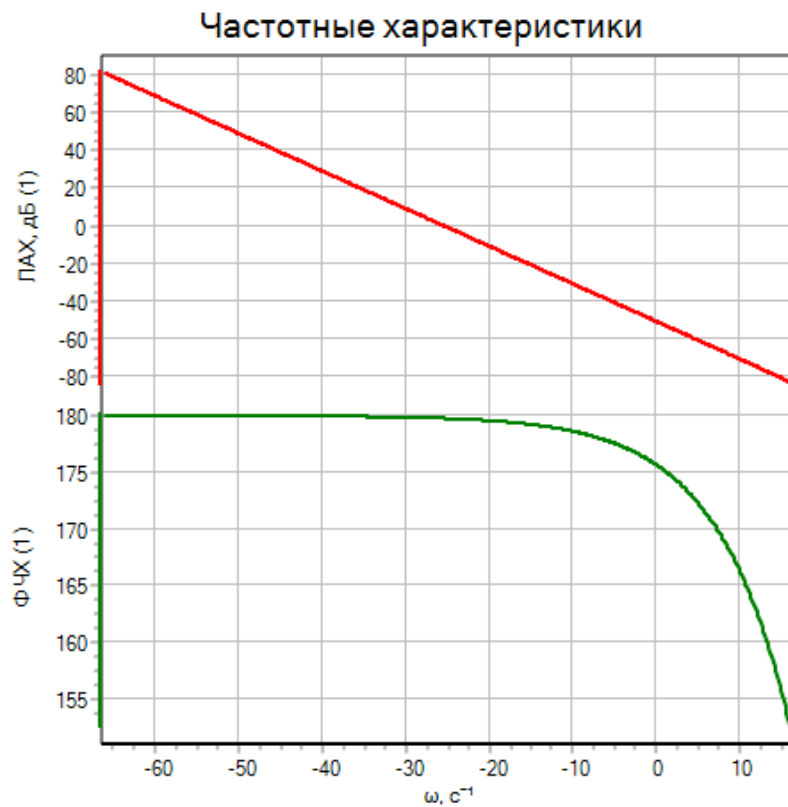


Рис. 20 – Графики ЛАЧХ и ФЧХ исследуемой дискретной системы, где частота представлена в логарифмическом масштабе.

Полученные графики не имеют никакого смысла, так как для снятия частотных характеристик системы должна быть устойчива.

### 3.3. Определение по графикам запасов устойчивости моделей

Выделяют два основных критерия, по которым оценивают систему в рамках её частотных характеристик:

- запас устойчивости по амплитуде,
- запас устойчивости по фазе.

Как следует из их названия, они показывают возможность системы сохранять устойчивость при изменении характеристик (таких как амплитуда и частота) входного воздействия  $u$ .

Чтобы определить запас устойчивости по амплитуде нужно выделить частоту, на которой график ФЧХ пересекает  $-180^\circ$ . Расстояние от АЧХ (ЛАЧХ) до нуля на этой частоте и будет искомой величиной.

В этом случае график ФЧХ непрерывной модели не пересекает  $-180^\circ$ , следовательно запас устойчивости непрерывной модели по амплитуде не определить.

Аналогичная ситуация для запаса по фазе, но обратная: выделяем частоту, на которой АЧХ (ЛАЧХ) непрерывной модели обращается в ноль и смотрим расстояние от ФЧХ до  $-180^\circ$ .

### 3.4. Амплитудно-фазочастотная характеристика

Амплитудно-фазочастотная характеристика (АФЧХ) представляется зависимостью частотной характеристики  $W$  от частоты:

$$W(\omega), \omega \in [0, +\infty];$$

$$W_d(\tilde{\omega}), \tilde{\omega} \in [0, 2\pi].$$

SimInTech для построения АФЧХ также используется блок *Построение частотных характеристик* (см. рисунок 15). В свойствах данного блока нужно выставить следующие основные значения:

- *типы характеристик*: «Годограф Найквиста»,
- начальная и конечная круговые частоты: такие же, как и для АЧХ.

Получим графики (см. рисунок 21 и рисунок 22):



Рис. 21 – Графики АФЧХ исследуемой непрерывной системы

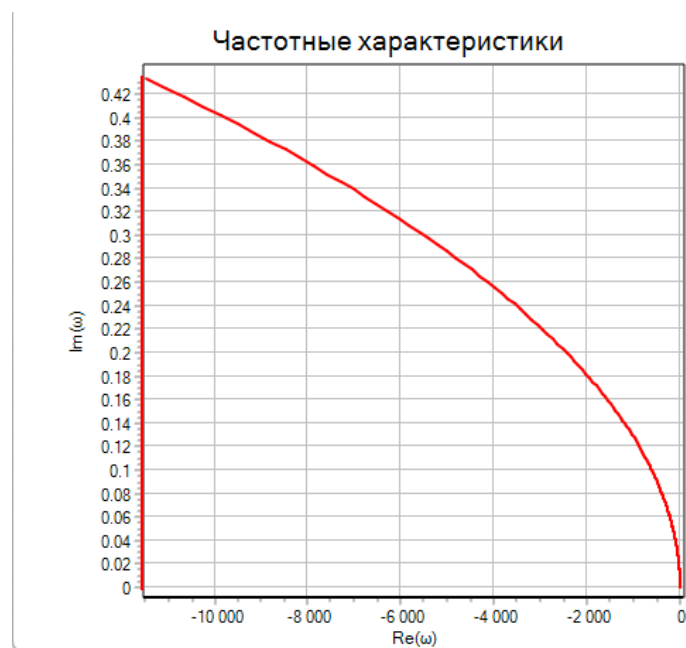


Рис. 22 – Графики АФЧХ исследуемой дискретной системы

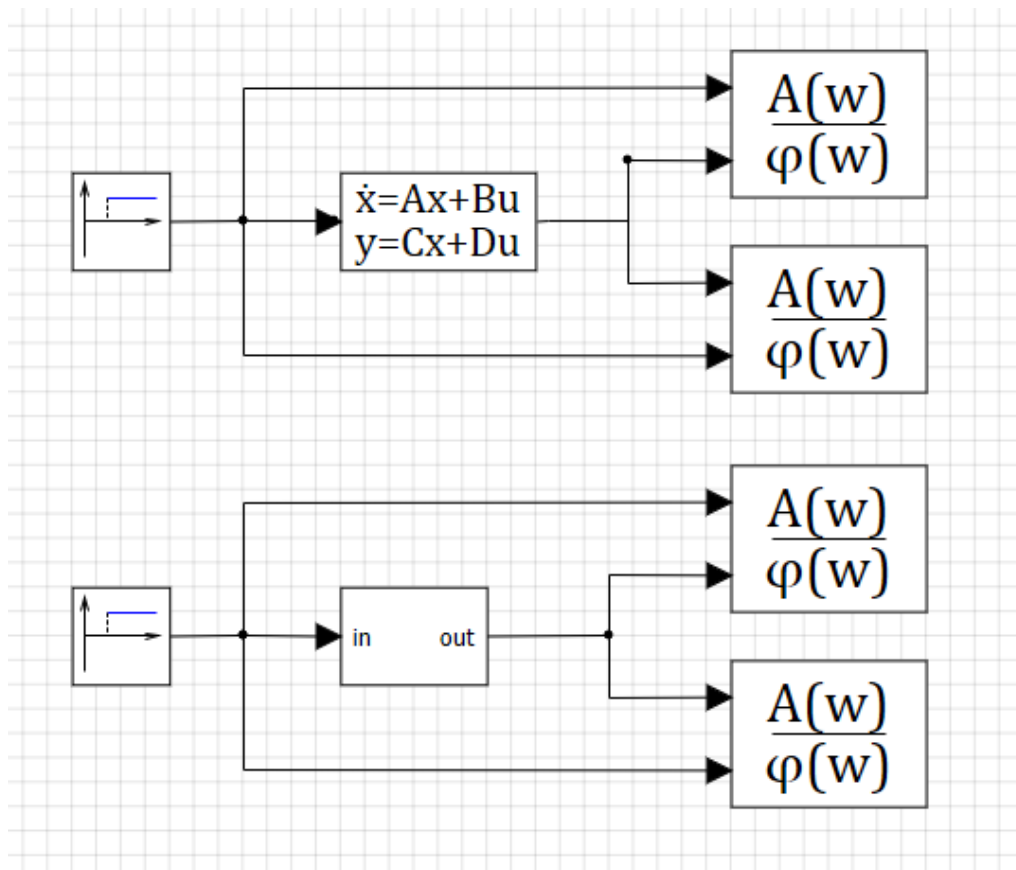


Рис. 23 – Схема объекта для исследования частотных характеристик

## 4. Исследование устойчивости

### 4.1. Теория

Из коэффициентов  $a$  знаменателя ПФ (2) можно построить характеристическое уравнение ОУ (1), которое характеризует динамику исследуемой системы:

$$\chi_n(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (4.1.1)$$

Корни этого характеристического уравнения совпадают с собственными числами матрицы  $A$ .

Устойчивость — это способность системы возвращаться в положение равновесия или чтобы управляемая величина не росла неограниченно при всех допустимых входных сигналах.

Систему называют асимптотически устойчивой, если система не просто устойчива, а еще и возвращается в положение равновесия.

Система называется асимптотически неустойчивой, если она не возвращается в положение равновесия, даже если она может быть в какой-то момент устойчивой при малых отклонениях. Такая система может быть как неустойчивой, так и устойчивой, но при малых отклонениях не возвращается в положение равновесия.

### 4.2. Корневой критерий

Ключевой критерий устойчивости, который выводится очевидным образом из формулы решения первого уравнения из МПС:

$$x(t) = Se^{Jt}S^{-1}x^0 + S \int_0^t e^{J(t-\tau)} B_J u(\tau) d\tau \quad |x_k = S_d J_d^k S_d^{-1} x_d^0 + S_d \sum_{i=0}^{k-1} J_d^{k-1-i} B_{J_d} u_i \quad (4.2.1)$$

Отсюда видно, что, чтобы решение стремилось к установившемуся значению, показатель степени числа  $e$  должен быть отрицательным, а основание степени в дискретном случае меньше единицы. Таким образом, сформулируем критерий: чтобы ОУ был асимптотически устойчив, необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения удовлетворяли следующему условию:

$$Re \lambda_{i(A)} < 0, \quad |\lambda_{i(A_d)}| < 1 \quad (4.2.2)$$

где  $i \in [1, n]$ .

Для устойчивости по Ляпунову (ограниченности решений) допускается выполнение указанных выше неравенств как равенств, при условии, что размер «ящиков» Жордана, соответствующих этим собственным числам, не превышает единицы.

На этом критерии строятся некоторые другие критерии.

Собственные числа матрицы  $A$ :

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_2 = 0$
- $\lambda_3 = 2.5721$
- $\lambda_4 = -2.5721$

$\lambda_3 = 2.5721$  имеет положительную действительную часть, что нарушает условие асимптотической устойчивости.  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  равны нулю, что тоже не удовлетворяет критерию строгой асимптотической устойчивости. Из этого можно сделать вывод, что непрерывная модель не является асимптотически устойчивой.

Собственные числа матрицы  $A_d$ :

- $\lambda_1 = 1$
- $\lambda_2 = 1$
- $\lambda_3 = 1.4751$
- $\lambda_4 = 0.6779$

Не все собственные числа по модулю меньше единицы, так что дискретная система неустойчива асимптотически.

### 4.3. Критерий Ляпунова

Использование критерия Ляпунова для анализа устойчивости линейных систем связано с решением матричного алгебраического уравнения Ляпунова

$$A^T P + P A = -Q \quad | \quad A_d^T P_d A_d + P_d A_d = -Q \quad (4.3.1)$$

где  $A$  – матрица параметров ОУ,  $Q$  – произвольная матрица, удовлетворяющая условиям:  $Q = Q^T > 0$ .

ОУ асимптотически устойчив тогда и только тогда, когда матрица  $P$ , являющаяся решением соответствующего уравнения, будет положительно определённой:  $P > 0$ .

Для решения уравнения Ляпунова можно воспользоваться функцией `lyap()` из пакета матпрограмм Matlab, которая подходит и для непрерывных, а для дискретных моделей – `dlyap()`. Для определения положительной определённости матрицы  $P$  можно воспользоваться критерием Сильвестра или найти её собственные числа.

Для непрерывной модели уравнение Ляпунова будет иметь вид:

$$A^T P + P A = -Q \quad (4.3.2)$$

Для решения воспользуемся встроенной в Matlab функцией `lyap()`. Проверять на положительную определённость будем проверкой на положительность собственных чисел матрицы  $P$ . Результат – на рисунке 24.

```
Error using lyap (line 69)
The solution of this Lyapunov equation does not exist or is not unique.

Error in Lapyanov (line 10)
P = lyap(A, Q)
```

Рис. 24 – Результат вычисления решения уравнения Ляпунова для непрерывной системы.

Решение уравнения Ляпунова получить не удалось, а значит непрерывная модель неустойчива асимптотически.

Для дискретной модели уравнение Ляпунова будет иметь вид:

$$A_d^T P + P A_d = -Q \quad (4.3.3)$$

Для решения воспользуюсь встроенной в Matlab функцией dlyap(). Проверять на положительную определенность буду проверкой на положительность собственных чисел матрицы Pd. Результат работы функции показан на рисунке 25.

```
Error using dlyap (line 67)
The solution of this Lyapunov equation does not exist or is not unique.

Error in Lapyanov (line 14)
Pd = dlyap(Ad, Q)
```

Рис. 25 – Результат вычисления решения уравнения Ляпунова для дискретной системы.

Значит дискретная модель также неустойчива асимптотически.

```
A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 -0.1134 0 0; 0 6.6156 0 0];
Ad = [
    1.0, -0.001311533, 0.1511357, -0.00006574209;
    0,    1.076513,    0,    0.154971;
    0,   -0.01757371,    1.0,   -0.001311533;
    0,    1.025226,    0,    1.076513
];

Q = eye(4)
P = lyap(A, Q)
eigenvalues = eig(P)

Qd = eye(4)
Pd = dlyap(Ad, Q)
eigenvaluesd = eig(Pd)
```

Рис. 26 – Код программы для исследования ОУ по критерию Ляпунова



#### 4.4. Условие Стодолы

Данное условие работает только с непрерывными системами.

Для устойчивости системы необходимо, но недостаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были строго положительны.

Для систем первого и второго порядков необходимое условие устойчивости является ещё и достаточным, поскольку в этом случае при положительных коэффициентах характеристического уравнения все его корни находятся в левой комплексной полуплоскости.

В нашем случае:

$$A(\lambda) = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^1 + a_4 = \lambda^4 - 6.615606936\lambda^2 \quad (4.4.1)$$

Условие Стодолы не выполняется, так как все коэффициенты должны быть строго больше нуля, а в нашем случае это не так. Это означает, что для непрерывной модели не выполняется необходимое условие устойчивости.

#### 4.5. Критерий Гурвица

В данном методе используются коэффициенты многочлена  $a(s)$  непрерывной ПФ (2) для построения матрицы Гурвица:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad (4.5.1)$$

Согласно алгебраическому критерию Гурвица для асимптотической устойчивости исследуемой системы необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 > 0$  главные диагональные миноры матрицы Гурвица были положительны.

$$\forall k \in [1, n] \quad \Delta_k(M) > 0 \quad (4.5.2)$$

Если же старший коэффициент  $a_0$  отрицателен, то это означает, что старший член имеет отрицательный знак. В таком случае, чтобы сохранить тот же порядок анализируемой системы и все выводы разностного уравнения, необходимо изменить формулировку условия. Можно переформулировать условие как:

Необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 < 0$  все главные диагональные миноры матрицы Гурвица были отрицательны.

$$\forall k \in [1, n] \quad \Delta_k(M) < 0 \quad (4.5.3)$$

Матрица Гурвица для исследуемого объекта представлена на рисунке 27

$M_1 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 6.6156 & 0 & -1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 6.6156 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 27 – матрица Гурвица непрерывной модели.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6.6156 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6.6156 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.5.4)$$

С помощью программы, написанной в Matlab, проверим выполнение этого критерия. Результат работы программы представлен на рисунке 28.

```
det_M_1 = 0
det_M_2 = 0
det_M_3 = 0
det_M_4 = 0
```

Рис. 28 – Главные диагональные миноры матрицы Гурвица непрерывной системы.

Так как все главные диагональные миноры матрицы Гурвица оказались равны нулю, исследуемая система неустойчива асимптотически.

Определение устойчивости дискретной модели по знаменателю  $a_d(z)$  ПФ с использованием дискретного аналога данного критерия основано на введении билинейной подстановки:

$$\xi = \frac{s+1}{s-1} \quad (4.5.5)$$

преобразующей границу устойчивости в виде единичной окружности на комплексной плоскости  $z$ -корней уравнения  $a_d(z) = 0$  в мнимую ось на комплексной плоскости  $s$ -корней характеристического уравнения  $a(s) = 0$ , где вся левая полуплоскость будет областью устойчивости, как в непрерывных моделях. После подстановки можно применять критерий Гурвица, используя коэффициенты нового многочлена из числителя.

Сделав данную подстановку в:

$$a_d(\xi) = \xi^4 - 4.153026\xi^3 + 6.3\xi^2 - 4.153\xi + 1 \quad (4.5.6)$$

Получим:

$$a_d(\xi) = -0.006026 s^4 - 0.000052 s^3 - 0.6 s^2 + 0.000052 s + 16.606 \quad (4.5.7)$$

Матрица Гурвица для дискретной модели представлена на рисунке 28.

```
M_1 =
-0.0001    -0.0060         0         0
 0.0001    -0.6000   -0.0001   -0.0060
         0    16.6060    0.0001   -0.6000
         0         0         0    16.6060
```

Рис. 28 – матрица Гурвица непрерывной модели

С помощью программы, написанной в Matlab, проверим выполнение этого критерия. Результат работы программы представлен на рисунке 29.

```
det_M_1 = -7.1844e-07
det_M_2 = -4.3264e-08
det_M_3 = 3.1513e-05
det_M_4 = -5.2e-05
```

Рис. 29 – Главные диагональные миноры матрицы Гурвица дискретной системы.

Один из определителей диагональных миноров матрицы Гурвица оказался положительным, что значит, что исследуемая система неустойчива асимптотически.

```
%a0 = -1;
%a1 = 0;
%a2 = 6.615606936;
%a3 = 0;
%a4 = 0;
a0 = -0.006026;
a1 = -0.000052;
a2 = -0.6;
a3 = 0.000052;
a4 = 16.606;

M_1=[a1, a0, 0, 0;
      a3, a2, a1, a0;
      0, a4, a3, a2;
      0, 0, 0, a4]

M_2=[a1, a0, 0;
      a3, a2, a1;
      0, a4, a3];

M_3=[a1, a0;
      a3, a2];
M_4=a1;

det_M_1 = det(M_1); det_M_2 = det(M_2);
det_M_3 = det(M_3); det_M_4 = det(M_4);
disp("det_M_1 = " + det_M_1); disp("det_M_2 = " + det_M_2);
disp("det_M_3 = " + det_M_3); disp("det_M_4 = " + det_M_4);
```

Рис. 30 – Код программы для исследования ОУ по критерию Гурвица

## 4.6. Критерий Шура-Кона

Данный критерий работает только с дискретными моделями.

В этом методе используются коэффициенты характеристического уравнения для построения следующих определителей:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} A_{k1} & A_{k2}^T \\ A_{k2} & A_{k1} \end{vmatrix}, \quad (4.6.1)$$

где  $k \in [1, n]$ ,

$$A_{k1} = \begin{pmatrix} a_n^D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-1}^D & a_n^D & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-2}^D & a_{n-1}^D & a_n^D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-k+1}^D & a_{n-k+2}^D & a_{n-k+3}^D & \dots & a_n^D \end{pmatrix}, \quad A_{k2} = \begin{pmatrix} a_0^D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1^D & a_0^D & 0 & \dots & 0 \\ a_2^D & a_1^D & a_0^D & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1}^D & a_{k-2}^D & a_{k-3}^D & \dots & a_0^D \end{pmatrix}.$$

Система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$\Delta_k > 0$  для чётных  $k$ ,

$\Delta_k < 0$  для нечётных  $k$ .

Для  $k=1$ :  $A_{k1} = 1, A_{k2} = 1$ ;

Для  $k=2$ :  $A_{k1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4.153 & 1 \end{bmatrix}, A_{k2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4.153 & 1 \end{bmatrix}$ ;

Для  $k=3$ :  $A_{k1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4.153 & 1 & 0 \\ 6.306 & -4.153 & 1 \end{bmatrix}, A_{k2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4.153 & 1 & 0 \\ 6.306 & -4.153 & 1 \end{bmatrix}$ ;

Для  $k=4$ :  $A_{k1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4.15 & 1 & 0 & 0 \\ 6.3 & -4.15 & 1 & 0 \\ -4.15 & 6.306 & -4.15 & 1 \end{bmatrix}, A_{k2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4.15 & 1 & 0 & 0 \\ 6.3 & -4.15 & 1 & 0 \\ -4.15 & 6.3 & -4.15 & 1 \end{bmatrix}$ ;

С помощью программы, написанной в Matlab, проверим выполнение этого критерия. Результат работы программы представлен на рисунке 24.

```
d1 =
    0

d2 =
   -8.4994e-14

d3 =
   -2.0581e-19

d4 =
   -1.7981e-32
```

Рис. 29 – Результат выполнения программы для расчета  $k$ -ых определителей

Из этого можно сделать вывод о неустойчивости дискретной системы (Не выполняется условия  $\Delta_k > 0$  для четных  $k$  и  $\Delta_k < 0$  для нечётных  $k$ ).

```

a0 = 1;
a1 = - 4.153025999999995;
a2 = 6.306052145768 ;
a3 = - 4.15302629153666;
a4 = 1;
A11=a4;
A12=a0;

d1=det([A11, A12';A12,A11'])

A21=[a4, 0;
a3, a4];
A22=[a0,0;
a1,a0];

d2=det([A21, A22';A22,A21'])

A31=[a4, 0, 0;
a3, a4, 0;
a2,a3,a4];
A32=[a0,0,0;
a1,a0,0;
a2,a1,a0];

d3=det([A31, A32';A32,A31'])

A41=[a4, 0, 0, 0;
a3, a4, 0, 0;
a2,a3,a4,0;
a1,a2, a3, a4];

A42=[a0,0,0,0;
a1,a0,0,0;
a2,a1,a0,0;
a3,a2,a1,a0];

d4=det([A41, A42';A42,A41'])

```

Рис. 30 – Результат выполнения программы для расчета  $k$ -ых определителей

## 4.7. Критерий Михайлова

Использование критерия Михайлова для анализа устойчивости связано с построением частотного годографа, или годографа Михайлова:

$$\chi_n(j\omega) = \chi_n(\lambda)|_{\lambda=j\omega} \quad \left| \quad \chi_n^A(e^{j\tilde{\omega}}) = \chi_n^A(\lambda)|_{\lambda=e^{j\tilde{\omega}}}, \right. \quad (4.7.1)$$

$$\omega \in [0, +\infty) \quad \left| \quad \tilde{\omega} = \omega h \in [0, \pi]. \right.$$

Для асимптотической устойчивости непрерывной модели необходимо и достаточно, чтобы годограф начинался на вещественной положительной полуоси ( $\chi_n(j\omega)|_{\omega=0} = a_n$ ) и поворот изображающей точки в положительном направлении вокруг начала координат был равен  $n \frac{\pi}{2}$ .

Для асимптотической устойчивости дискретной модели необходимо и достаточно, чтобы график также начинался на вещественной положительной полуоси ( $\chi_n^A(j\tilde{\omega})|_{\tilde{\omega}=0} = a_n^A$ ), а поворот изображающей точки в положительном направлении вокруг начала координат, при возрастании частоты  $\tilde{\omega}$  от 0 до  $\pi$ , был равен  $n\pi$ , где  $h$  – время дискретизации.

У исследуемой непрерывной системы характеристический многочлен:

$$\chi_n(j\omega) = (j\omega)^4 + 6.615606936(j\omega)^2 = \omega^4 - 6.615606936\omega^2 \quad (4.7.2)$$

Чтобы в критерии Михайлова правильно определить размеры выводимого графика для непрерывной модели, можно найти точки пересечения годографом действительной и мнимой осей, путём приравнивания к нулю соответствующих частей комплексного числа.

Годограф пересекает действительную ось  $y = 0$ . В нашем случае мнимой части нет, значит годограф будет идти вдоль этой оси.

Годограф пересекает мнимую ось, когда  $x=0$  ( $x+jy$ ).

$$\omega^4 - 6.615606936\omega^2 = 0$$

$$\omega_1 = 0, \omega_2 = 2.57208, \omega_3 = -2.57208$$

( $\omega = 0$  не учитывается, так как это начало графика)

С помощью программы, написанной в Matlab, проверим выполнение этого критерия. Результат ее работы представлен на рисунке 31.

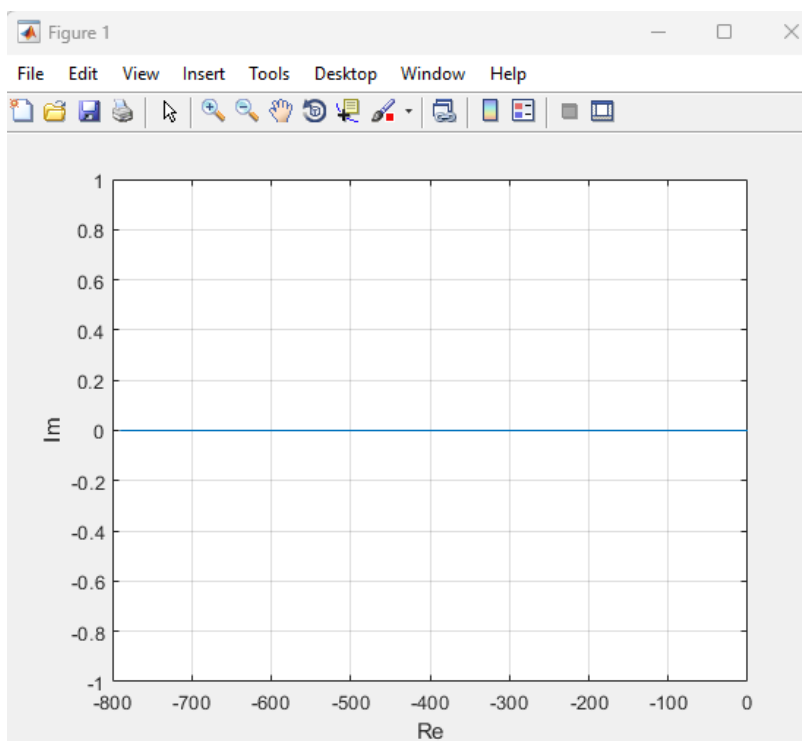


Рис. 31 – Годограф Михайлова для непрерывной системы для  $\omega \in [0, 5]$

Так как в нашем случае мнимая часть равна нулю на всем графике, годограф Михайлова на предоставленном графике является горизонтальной линией. Годограф Михайлова не начинается с положительной вещественной полуоси и годограф не выполняет необходимый поворот в  $2\pi$  вокруг начала координат. Следовательно система не устойчива.

Для устойчивости дискретной модели необходимо и достаточно, чтобы график также начинался на вещественной положительной полуоси ( $\chi_n^A(e^{j\tilde{\omega}})|_{\tilde{\omega}=0} = a_n^A$ ), а годограф в положительном направлении вокруг начала координат, при возрастании частоты  $\tilde{\omega}$  от 0 до  $\pi$ , обходил  $2n$  квадрантов.

У исследуемой дискретной системы характеристический многочлен:

$$\chi_n^A(e^{j\tilde{\omega}}) = e^{4j\tilde{\omega}} - 4.153026e^{3j\tilde{\omega}} + 6.3e^{2j\tilde{\omega}} - 4.153e^{j\tilde{\omega}} + 1$$

С помощью программы, написанной в Matlab, проверим выполнение этого критерия. Результат ее работы представлен на рисунке 32.

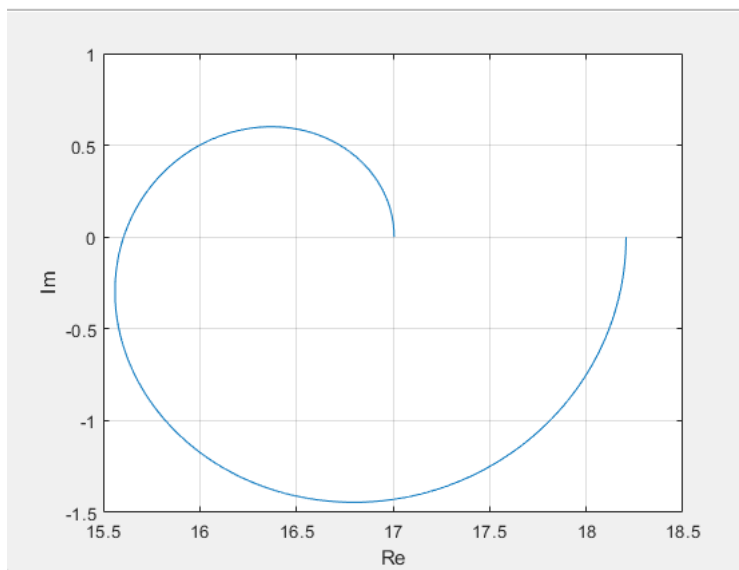


Рис. 32 – Годограф Михайлова для дискретной системы для  $\omega \in [0, \pi]$

На графиках видно, что поворот изображающей точки в положительном направлении, но не проходит через начало координат. Значит дискретная система не сходится асимптотически.

```
%a0 = -1;
%a1 = 0;
%a2 = 6.615606936;
%a3 = 0;
%a4 = 0;
%
%
%w=[0:0.001:5];
%s=li*w;
%a=a0*s.^4+a1*s.^3+a2*s.^2+a3*s+a4;

%plot([0,real(a)],[0,imag(a)])
%grid on
%ylabel('Im')
%xlabel('Re')
% Дискретная модель
a0 = -0.006026;
a1 = -0.000052;
a2 = -0.6;
a3 = 0.000052;
a4 = 16.606;
w=[0:0.00001:pi];
s=exp(li*w);
ad=s.^4+a1*s.^3+a2*s.^2+a3*s+ a4;
plot(real(ad),imag(ad))
grid on
ylabel('Im')
xlabel('Re')
```

Рис. 33 – Код программы для исследования ОУ по годографу Михайлова

## 4.8. Критерий Найквиста

Использование критерия Найквиста для анализа устойчивости замкнутой системы связано с построением АФЧХ разомкнутой системы:

$$\begin{array}{l|l} W(j\omega) = W(s)|_{s=j\omega} & W_d(e^{j\bar{\omega}}) = W_d(z)|_{z=e^{j\bar{\omega}}} \\ \omega \in [0, +\infty) & \bar{\omega} \in [0, \pi] \end{array} \quad (4.8.1)$$

ОУ, устойчивый в разомкнутом состоянии, будет устойчив в замкнутом состоянии, если АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку  $(-1, j0)$ . Если ОУ в разомкнутом состоянии неустойчив и его характеристическое уравнение имеет  $m$  корней в правой полуплоскости (или они расположены вне круга единичного радиуса для дискретной системы), то для устойчивости исследуемой системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы охватывала точку  $(-1, j0)$  в отрицательном направлении  $m/2$  раз.

Рассматриваемая система является разомкнутой, так как вектор управления  $u$  не содержит в себе выходной компоненты  $y$ . Для исследования устойчивости по Найквисту воспользуемся программой SimInTech

Рассмотрим графики непрерывной и дискретной систем:

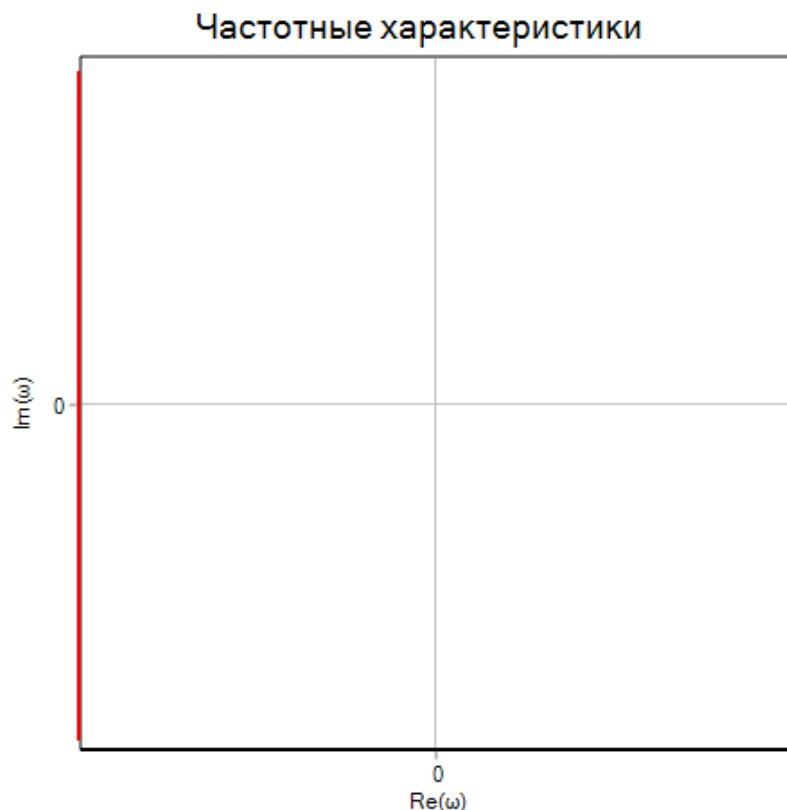


Рис. 34 – годограф Найквиста для непрерывной системы

Системы являются неустойчивыми в разомкнутом состоянии, так как передаточная функция не позволяет построить корректную АФЧХ. Критерий Найквиста неприменим,



поскольку график АФЧХ не формируется из-за критической неустойчивости системы. То есть в замкнутом состоянии модели также неустойчивы.

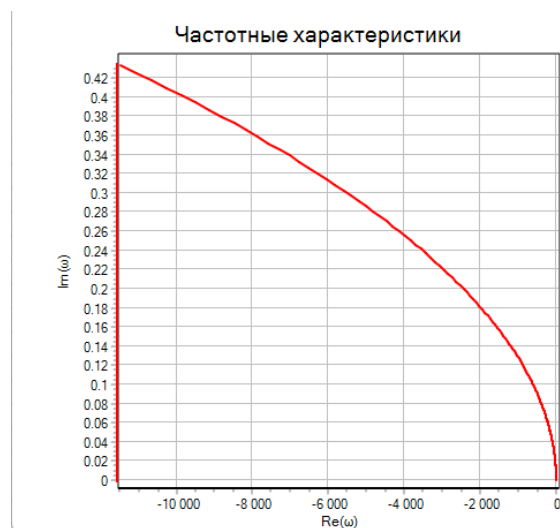


Рис. 35 – годограф Найквиста для дискретной системы

Построим гадограф Найквиста в программе matlab используя функцию Nyquist

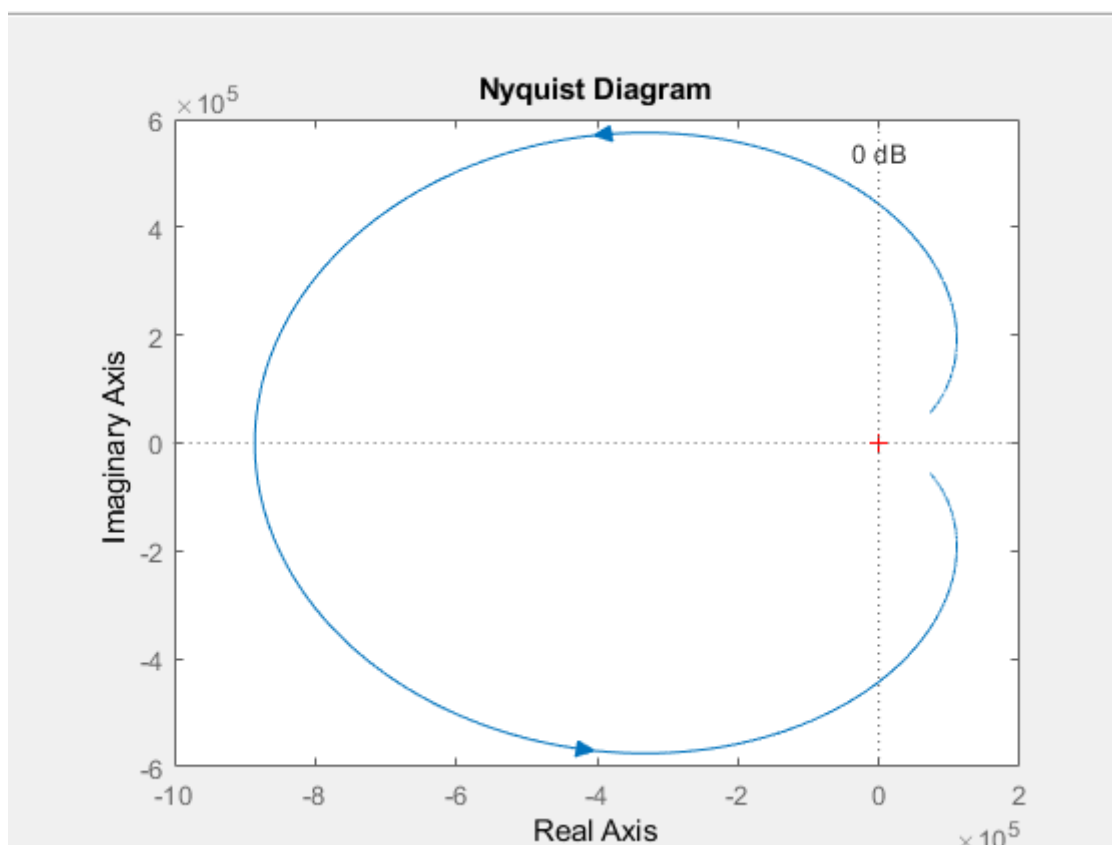


Рисунок 36 – годограф Найквиста для дискретной системы, построенный с помощью matlab

ОУ в разомкнутом состоянии имеет 1 корень, расположенный вне круга единичного радиуса, значит для устойчивости нужно чтобы АФЧХ разомкнутой системы охватывал точку  $(-1, j0)$  в отрицательном направлении 0.5 раз, что невозможно. Следовательно система не устойчива.

Код программы предоставлен на рисунке 37

```

w = 1:0.001:2*pi;
% Модель состояния
numerator = [0.000033126, -0.00003813813, -0.0000381361, 0.000033125366];
denominator = [1, -4.15302599999995, 6.306052145768, -4.15302629153666, 1];

sys_d = ss(A, B, C, 0, 'InputDelay', 0);
% Диаграмма Найквиста
figure;
nyquist(sys, w);
grid on;

```

*Рис. 37 – код программы matlab для построения Годографа Найквиста для дискретной системы*

## Вывод

В ходе выполнения первой части РГЗ было проведено исследование объекта управления с целью получения различных представлений модели и анализа её поведения в пространстве состояний, частотной и временной областях. Были построены модели в непрерывном и дискретном виде, представленные в формате "вход-состояние-выход" и "вход-выход".

По проведенным анализам поведения системы в пространстве состояний, можно сделать вывод что объект управления является неустойчивым. Это утверждение было подтверждено при помощи нескольких критериев устойчивости (см пункт 4).

Неустойчивость системы обусловлена тем, что в положении  $\theta=0$  любое малейшее отклонение приводит к нарастающему моменту, который без корректирующего воздействия уводит маятник в неустойчивое положение. Управляющее воздействие необходимо для стабилизации системы путём постоянного корректирования положения тележки. Таким образом, устойчивость может быть достигнута только с активным управлением, например, с помощью регуляторов ПИД-регулятора.

## 5. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

### 5.1. Управление и управляемость

В большинстве заданий для курсовой работы вектор управления  $u$  раскладывается на два компонента: управляющее воздействие и возмущающее воздействие:

$$u = \begin{pmatrix} u_{\text{упр}} \\ v_{\text{возм}} \end{pmatrix}. \quad (5.1.1)$$

Управляющее воздействие – это когда, например, вы поворачиваете ручку управления, и ваш генератор начинает выдавать большее или меньшее напряжение.

Основная задача: перевод САУ из одного состояния в другое. Естественно, идеального перехода достичь почти невозможно, поэтому вводят целевое условие:

$$e(t) = y_{\text{зад}} - y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0, \quad (5.1.2)$$

где  $y_{\text{зад}}$  – заданное значение выхода, а  $e(t)$  называют динамической ошибкой САУ.

Возмущающим воздействием наоборот управлять нельзя, тем не менее оно способно менять состояние системы вплоть до потери устойчивости. В нашем примере это может быть нагрузка, к которой подключён генератор. Возмущающее воздействие действует всегда или периодически, но главное, что мы не можем на него повлиять, но можем компенсировать: как раз с помощью управляющего воздействия.

Давайте введём понятие управляемости и критерий Калмана с уже знакомой нам матрицей управляемости. Управляемость, вообще говоря, – существование управления, т.е. такого ограниченного воздействия, которое переводит САУ из одного состояния в другое за конечное время. Чтобы удостовериться в существовании такого управления, используют критерий Калмана: линейная система вполне управляема тогда и только тогда, когда матрица управляемости

$$S_y = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B) \quad (5.1.3)$$

имеет ранг, равный  $n$ , т.е. равный размерности вектора состояния.

Процесс поиска управления называется синтезом управления и заключается в построении регулятора, который превращает ошибку (5.1.2) в управляющее воздействие  $u_{\text{упр}}$ .

Синтез управления можно вести и без выполнения критерия Калмана, но заранее гарантировать адекватность такого управления нельзя.

$$S_y = \begin{bmatrix} 0 & 0.00289017 & 0 & 0.000218516899375 \\ 0 & -0.00192678 & 0 & -0.012746819132146 \\ 0.00289017 & 0 & 0.000218516899375 & 0 \\ -0.00192678 & 0 & -0.012746819132146 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.1.4)$$

$$S_{dy} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.033126 & 0.0994350082333 & 0.165925774364684 & 0.232750222949245 \\ -0.021975 & -0.06928597552 & -0.12719950354173 & -0.2045778526857 \\ 0.43842 & 0.439192419443 & 0.44085544357667 & 0.443663558217948 \\ -0.29444 & -0.3394978290 & -0.43650761001127 & -0.6003143549941 \end{bmatrix}.$$

Посчитаем ранг этих матриц с помощью функции встроенной в Matlab `rank()`. Ранг  $S_y$  и  $S_{dy}$  матриц равен четырем.

```
rank_S_y =
```

```
4
```

```
rank_Sd_y =
```

```
4
```

*Рис. 38 – Ранг матриц управляемости непрерывной и дискретной систем*

Ранг матрицы управляемости непрерывной и дискретной системы равен размерности вектора состояния (равен 4). Тогда можно сделать вывод об управляемости исследуемых систем.

## 5.2. Наблюдение и наблюдаемость

Задача восстановить вектор состояния  $x$  по измерениям векторов входа  $u$  и выхода  $y$ . Это и есть наблюдение, откуда выходят понятие наблюдаемости: получение по векторам  $u$  и  $y$ , а также их производных, такой оценки  $\tilde{x}$ , что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{x}(t) = x(t), \quad \left| \lim_{t \rightarrow +\infty} \tilde{x}_k(t) = x_k(t) \right., \quad (5.2.1)$$

и критерий наблюдаемости: линейная система вполне наблюдаема тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости

$$S_y = (C^T A^T C^T (A^T)^2 C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T) \quad (5.2.2)$$

имеет ранг, равный  $n$ , т.е. равный размерности вектора состояния.

Если система наблюдаема, то можно построить так называемый наблюдатель, который на выходе будет давать оценку  $\tilde{x}$ . Как и в случае с управляемостью, можно построить наблюдатель и без выполнения критерия наблюдаемости, но гарантировать его адекватность нельзя.

$$S_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1134104046 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1134104046 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$S_{dH} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0.00131165 & -0.005447316496378 & -0.013039863610896 \\ 0 & 0.1511355 & 0.302271 & 0.4534065 \\ 0 & -0.00006574791 & -0.000538030718233 & -0.001885593725024 \end{bmatrix}$$

Посчитаем ранг этих матриц с помощью функции встроенной в Matlab `rank()`. Ранг  $S_H$  и  $S_{dH}$  матриц равен четырем.

```
rank_S_H =
```

```
4
```

```
rank_Sd_H =
```

```
4
```

Рис. 39 – Ранг матриц наблюдаемости непрерывной и дискретной систем

Ранг матрицы наблюдаемости непрерывной и дискретной системы равен размерности вектора состояния (равен 4). Тогда можно сделать вывод об наблюдаемости исследуемых систем.

Код программы для расчета матриц наблюдаемости и управляемости представлен на рисунке 40.

```

kalman.m*  disk_model.m  +
1 - format long
2 - A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
3 - b=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];
4 - C=[1 0 0 0];d=0;
5 - Ad = [
6     1.0, -0.00131165, 0.1511355, -0.00006574791;
7     0, 1.076513, 0, 0.1549708;
8     0, -0.0175753, 1.0, -0.00131165;
9     0, 1.025226, 0, 1.076513;
10 ];
11 - bd = [
12     0.000033126;
13     -0.000021975;
14     0.00043842;
15     -0.00029444
16 ];
17 - Cd=[1 0 0 0];D=0;
18
19 - S_y = [b, A*b, A^2*b, A^3*b]
20 - Sd_y = [bd, Ad*bd, Ad^2*bd, Ad^3*bd]
21 - rank_S_y = rank(S_y)
22 - rank_Sd_y = rank(Sd_y)
23 - S_H = [C', A'*C', A'^2*C', A'^3*C']
24 - Sd_H = [Cd', Ad'*Cd', Ad'^2*Cd', Ad'^3*Cd']
25 - rank_S_H = rank(S_H)
26 - rank_Sd_H = rank(Sd_H)

```

Рис. 40 – Код программы в MATLAB

## 6. Модальное управление

### 6.1. Теория

Задача размещения полюсов передаточной матрицы линейной системы (задача размещения спектра матрицы замкнутого контура в заданной области комплексной плоскости) является классической задачей теории автоматического управления. Формирование желаемого спектра путем введения обратной связи позволяет скорректировать динамические свойства и обеспечить заданные прямые показатели качества.

Для начала необходимо разбить входной вектор  $u$  на две компоненты:

$$u = \begin{pmatrix} u_y \\ v_b \end{pmatrix} \quad (6.1.1)$$

где  $u_y$  – управляющее воздействие,  $v_b$  – возмущающее воздействие.

Необходимо найти стабилизирующий регулятор:

$$u(x) = -k_p x \quad (6.1.2)$$

такой, что спектр замкнутой системы (схема замкнутой системы представлена на рисунке 41):

$$\dot{x} = (A - Bk_p)x = A_3 x \quad (6.1.3)$$

совпадает или является подмножеством предписываемого спектра, задаваемого последовательностью  $\lambda^{\text{уст}}_i = \lambda^{\text{уст}}_1 \dots \lambda^{\text{уст}}_n$ :

$$\rho(A_3) \subseteq \rho(-F) \quad (6.1.4)$$

Здесь  $F = \text{diag}(\lambda^{\text{уст}}_i)_1^n \in R^{n \times n}$  – матрица, на главной диагонали которой расположены числа  $\lambda^{\text{уст}}_i$ .

Задача нахождения регулятора  $k_p$  сводится к решению матричного уравнения Сильвестра:

$$AP + PF = BG \quad (6.1.5)$$

Относительно матрицы  $P$  с произвольной матрицей  $G$  и решению матричного уравнения:

$$k_p P = G \quad (6.1.6)$$

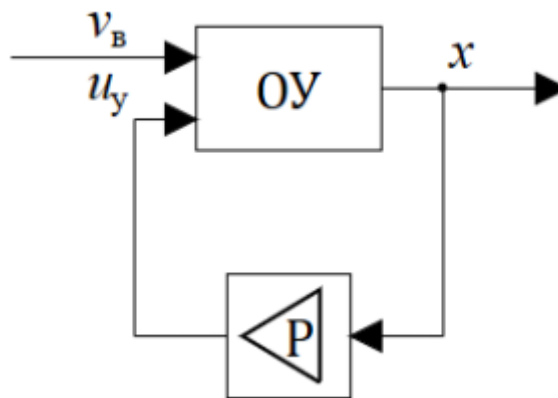


Рис. 41 – замкнутая САУ

Для динамической системы условия существования решения задачи размещения полюсов и методика синтеза содержатся в следующей теореме.

Теорема. Пусть для системы выполнены следующие условия:

- 1) Матрица  $G \in R^{m \times n}$  полного ранга:  $\text{rank} G = \min(m, n)$ ;
- 2) Матричная пара  $(A, B)$  управляема;
- 3) Матричная пара  $(G, F)$  наблюдаема;
- 4) Спектры матриц  $F$  и  $A$  не пересекаются:  $\rho(A) \cap \rho(F) = \emptyset$ ;
- 5) Числа  $\lambda^{\text{уст}}_i (i = \overline{1, n})$  попарно различны.

Тогда существует управление такое, что матрица замкнутого контура  $A_z = A - Bk_p$  имеет спектр, совпадающий со спектром эталонной матрицы  $(-F)$ , то есть выполнено  $\rho(A_z) = \rho(-F)$ .

Параметры регулятора определяются из соотношения  $k_p P = G$ , где матрица  $P$  – решение уравнения Сильвестра.

## 6.2. Выбор параметров

Пусть собственные числа  $\lambda^{\text{уст}}$  будут следующими:

$$\lambda^{\text{уст}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \lambda_d^{\text{уст}} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.8 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix} \quad (6.2.1)$$

Собственные числа  $\lambda^{\text{уст}}$  не должны пересекаться с собственными числами матриц  $A$ ,  $A_d$  исходных систем. Исходные собственные числа матриц  $A$ ,  $A_d$ :

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5721 \\ -2.5721 \end{pmatrix}, \lambda_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.4751 \\ 0.6779 \end{pmatrix} \quad (6.2.2)$$

Отсюда видно, что  $\lambda^{\text{уст}}$  отличаются от исходных собственных чисел.

Построим матрицы F для непрерывной и дискретной моделей:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad F_d = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (6.2.3)$$

Зададим матрицы G следующим образом:

$$G = G_d = (1 \ 1 \ 1 \ 1) \quad (6.2.4)$$

Матричные пары (G, F) должны быть наблюдаемы. Для проверки этого, с помощью функции rank были найдены ранги матриц наблюдаемости для этих пар. Результаты представлены на рисунке 42.

```
S_H_G =
1.0000000000000000 -1.0000000000000000 1.0000000000000000 -1.0000000000000000
1.0000000000000000 -2.0000000000000000 4.0000000000000000 -8.0000000000000000
1.0000000000000000 -1.5000000000000000 2.2500000000000000 -3.3750000000000000
1.0000000000000000 -0.5000000000000000 0.2500000000000000 -0.1250000000000000

Sd_H_G =
1.0000000000000000 0.5000000000000000 0.2500000000000000 0.1250000000000000
1.0000000000000000 0.8000000000000000 0.6400000000000000 0.5120000000000000
1.0000000000000000 0.3000000000000000 0.0900000000000000 0.0270000000000000
1.0000000000000000 0.2000000000000000 0.0400000000000000 0.0080000000000000

rank_S_H =
4

rank_Sd_H =
4
```

Рис. 42 – матрицы наблюдаемости пар (G, F) дискретной и непрерывной моделей и их ранги.

Ранги полученных матриц равны размерности пространства состояния, а значит данные матричные пары наблюдаемы.

Рассчитаем матрицу E и Ed по формуле:

$$E = BG \quad 6.2.5$$

Получим:



$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.00289017 & 0.00289017 & 0.00289017 & 0.00289017 \\ -0.00192678 & -0.00192678 & -0.00192678 & -0.00192678 \end{pmatrix}$$

$$E_d = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.033126 & 0.033126 & 0.033126 & 0.033126 \\ -0.021975 & -0.021975 & -0.021975 & -0.021975 \\ 0.43842 & 0.43842 & 0.43842 & 0.43842 \\ -0.29444 & -0.29444 & -0.29444 & -0.29444 \end{pmatrix} \quad (6.2.6)$$

### 6.3. Синтез управления

Для получения значений регуляторов необходимо решить матричное уравнение Сильвестра для дискретной и непрерывной модели:

$$AP + PF = E \quad (6.3.1)$$

Уравнение Сильвестра можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$Wp = e \quad (6.3.2)$$

где:

- $W$  — матрица коэффициентов,  $W = (I_n \otimes A - F^T \otimes I_n)$
- $p$  — вектор, содержащий элементы матрицы  $P$ , выписанные в столбец,
- $e$  — вектор, содержащий элементы матрицы  $E$ , выписанные в столбец.

$$e_i = (0 \quad 0 \quad 0.00289017 \quad -0.00192678)^T$$

$$e_d = 10^{-3} (0.033126 \quad -0.021975 \quad 0.43842 \quad -0.29444)^T$$

$$W = \begin{pmatrix} W_1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & W_2 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & W_3 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & W_4 \end{pmatrix}, \quad W_d = \begin{pmatrix} W_{d1} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & W_{d2} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & W_{d3} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & W_{d4} \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1134104046 & 1 & 0 \\ 0 & 6.615606936 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1134104046 & 2 & 0 \\ 0 & 6.615606936 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$W_3 = \begin{pmatrix} 1.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1134104046 & 1.5 & 0 \\ 0 & 6.615606936 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}, \quad W_4 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1134104046 & 0.5 & 0 \\ 0 & 6.615606936 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \quad (6.3.3)$$

$$W_{d1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 0.576513 & 0 & 0.1549708 \\ 0 & -0.0175753 & 0.5 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 0.576513 \end{pmatrix},$$

$$W_{d2} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 0.276513 & 0 & 0.1549708 \\ 0 & -0.0175753 & 0.2 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 0.276513 \end{pmatrix},$$

$$W_{d3} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 0.776513 & 0 & 0.1549708 \\ 0 & -0.0175753 & 0.7 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 0.776513 \end{pmatrix};$$

$$W_{d4} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 0.876513 & 0 & 0.1549708 \\ 0 & -0.0175753 & 0.8 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 0.876513 \end{pmatrix}$$

С помощью кода, написанного на языке MATLAB, были получены значения матриц  $P$ .

$$P = \begin{pmatrix} -0.00285125757 & -0.00070165663 & -0.001262273695 & -0.01142336904 \\ -0.0003431116 & -0.00073664738 & -0.00044135444 & -0.00030268598 \\ 0.00285125757 & 0.00140331326 & 0.00189341054 & 0.00571168452 \\ 0.0003431117 & 0.00147329476 & 0.00066203166 & 0.00015134299 \end{pmatrix} \quad (6.3.4)$$

$$P_d = \begin{pmatrix} -0.00019975024 & -0.00146547588 & -0.00008798731 & -0.00006214572 \\ 0.00018998946 & -0.00047989462 & 0.00006432385 & 0.00004326952 \\ 0.00088129214 & 0.00215461421 & 0.00062705966 & 0.00054834186 \\ -0.0008485882 & 0.00071447075 & -0.00046410876 & -0.00038653282 \end{pmatrix} \quad (6.3.5)$$

Код программы для расчета матриц  $P$   $P_d$  представлен на рисунке 43.

```

A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
T = 0.151135504765592;
F = diag([-1,-2,-1.5, -0.5]);
Fd = diag([0.5, 0.8, 0.3, 0.2]);
Ad = [
    1.0, -0.00131165, 0.1511355, -0.00006574791;
    0, 1.076513, 0, 0.1549708;
    0, -0.0175753, 1.0, -0.00131165;
    0, 1.025226, 0, 1.076513;
];
G = [1,1,1,1];
Bg = [0.000033126; -0.000021975; 0.00043842; -0.00029444];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];

I = eye(4);

W = kron(I, A) - kron(F.', I);

Wd = kron(I, Ad) - kron(Fd.', I);

E = B * G;
Ed = Bg * G;

e = [E(:,1)', E(:,2)', E(:,3)', E(:,4)']';
ed = [Ed(:,1)', Ed(:,2)', Ed(:,3)', Ed(:,4)']';

p = linsolve(W,e)
P = [p(1:4), p(5:8), p(9:12), p(13:16)]

```

Рис. 43 – код программы в MATLAB

Из формулы

$$k_p P = G \quad (6.3.6)$$

Выразим  $k_p$ :

$$k_p = GP^{-1} \quad (6.3.7)$$

На основе полученных матриц  $P$  был проведен расчет параметров регуляторов  $k_p$  для непрерывной и дискретной моделей.

$$k_p = 10^3 * \begin{pmatrix} -0.079357891812304 \\ -8.093796247718581 \\ -0.330657882551267 \\ -3.090989885930520 \end{pmatrix}$$

$$k_{dp} = 10^3 * \begin{pmatrix} -0.558721546935325 \\ -3.975524390249701 \\ -0.6906198557968677 \\ -1.593636118280469 \end{pmatrix} \quad (6.3.8)$$

Код программы для расчета матриц  $k_p$  и  $k_{dp}$  представлен на рисунке 44.

```
Fd = diag([0.5, 0.8, 0.3, 0.2]);
Ad = [
    1.0, -0.00131165, 0.1511355, -0.00006574791;
    0, 1.076513, 0, 0.1549708;
    0, -0.0175753, 1.0, -0.00131165;
    0, 1.025226, 0, 1.076513;
];
G = [1,1,1,1];
Bg = [0.000033126; -0.000021975; 0.00043842; -0.00029444];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];

I = eye(4);

W = kron(I, A) - kron(F.', I);

Wd = kron(I, Ad) - kron(Fd.', I);

E = B * G;
Ed = Bg * G;

e = [E(:,1)', E(:,2)', E(:,3)', E(:,4)']';
ed = [Ed(:,1)', Ed(:,2)', Ed(:,3)', Ed(:,4)']';

p = linsolve(W,e)
P = [p(1:4), p(5:8), p(9:12), p(13:16)]

pd = linsolve(W_d,ed)
Pd = [pd(1:4), pd(5:8), pd(9:12), pd(13:16)]

kp=G/P
kdp=G/Pd
```

Рис. 44 – Код программы в MATLAB

Получение матриц  $A_z$  замкнутых непрерывной и дискретной моделей:

$$A_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.229357798 & 23.279036697 & 0.955657492 & 8.93348624 \\ -0.152905199 & -8.9793577982 & -0.637104995 & -5.9556575 \end{pmatrix}$$

$$A_{dz} = \begin{pmatrix} 1.1850820996 & 1.3156205595 & 0.3799102334 & 0.52784215263 \\ -0.12277905993 & 0.2028915152 & -0.1517637133 & -0.19523073699 \\ 2.449547006 & 17.4119187317 & 4.0278155718 & 6.98550781977 \\ -1.6450997228 & -10.6803080147 & -2.0334611034 & -3.61578918667 \end{pmatrix} \quad (6.3.9)$$

Код программы для расчета матриц  $A_z$  и  $A_{dz}$  представлен на рисунке 45.

```

A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
T = 0.151135504765592;
F = diag([-1,-2,-1.5, -0.5]);
Fd = diag([0.5, 0.8, 0.3, 0.2]);
Ad = [
    1.0, -0.00131165, 0.1511355, -0.00006574791;
    0, 1.076513, 0, 0.1549708;
    0, -0.0175753, 1.0, -0.00131165;
    0, 1.025226, 0, 1.076513;
];
C = [1, -1,0,0];
G = [1,1,1,1];
Bg = [0.000033126; -0.000021975; 0.00043842; -0.00029444];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];

I = eye(4);

W = kron(I, A) - kron(F.', I);

Wd = kron(I, Ad) - kron(Fd.', I);

E = B * G;
Ed = Bg * G;

e = [E(:,1)', E(:,2)', E(:,3)', E(:,4)']';
ed = [Ed(:,1)', Ed(:,2)', Ed(:,3)', Ed(:,4)']';
p = linsolve(W,e)
F = [p(1:4), p(5:8), p(9:12), p(13:16)]

pd = linsolve(W_d,ed)
Pd = [pd(1:4), pd(5:8), pd(9:12), pd(13:16)]

kp=G/P
kdp=G/Pd

Az = A-b*kp
Adz = Ad-bd*kdp
eigAz = eig(Az)
eigAdz = eig(Adz)
sysZ = ss(Az,b,C,0);
sysZd=ss(Adz,bd,C,0, T);

```

Рис. 45 – Код программы в MATLAB

Сравним собственные числа матриц замкнутых систем и  $\lambda^{уст}$ . Для непрерывной системы числа совпали с точностью до погрешности:

$$\lambda^{уст} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \text{eig}(A_z) = \begin{pmatrix} -2.000000000000000 \\ -1.500000000000018 \\ -0.999999999999991 \\ -0.499999999999999 \end{pmatrix} \quad (6.3.10)$$

Для дискретной собственные числа тоже совпали:

$$\lambda_d^{уст} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.8 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \text{eig}(A_{dz}) = \begin{pmatrix} 0.800000000000001 \\ 0.199999999999919 \\ 0.300000000000150 \\ 0.499999999999967 \end{pmatrix} \quad (6.3.11)$$

Собственные числа полученных матриц совпали с заданными собственными числами.

## 6.4. Исследование непрерывной САУ

Построим в программе SimInTech САУ без регулятора и с регулятором и сравним их.

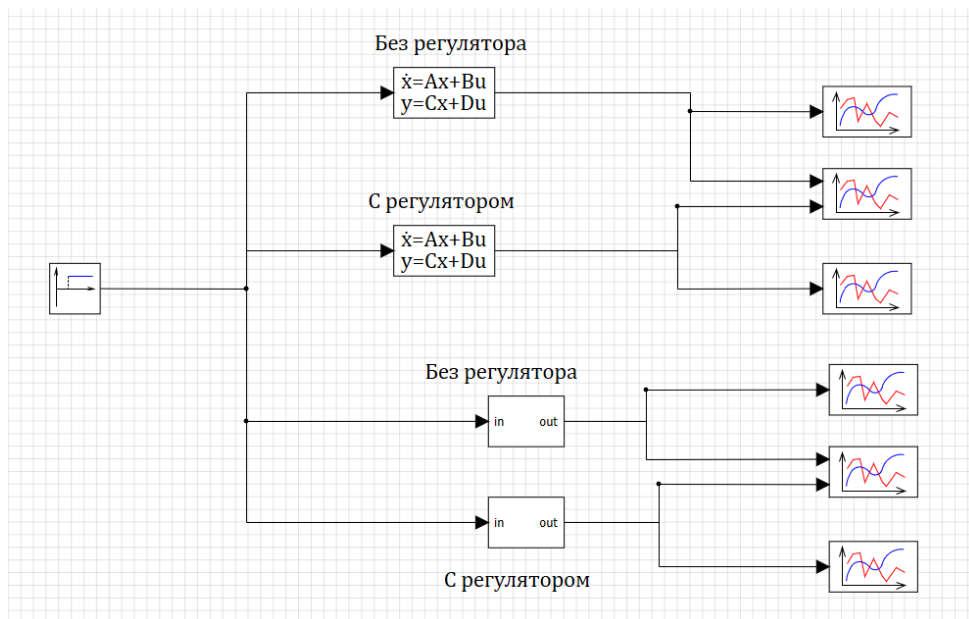


Рис. 46 – САУ с и без регулятора

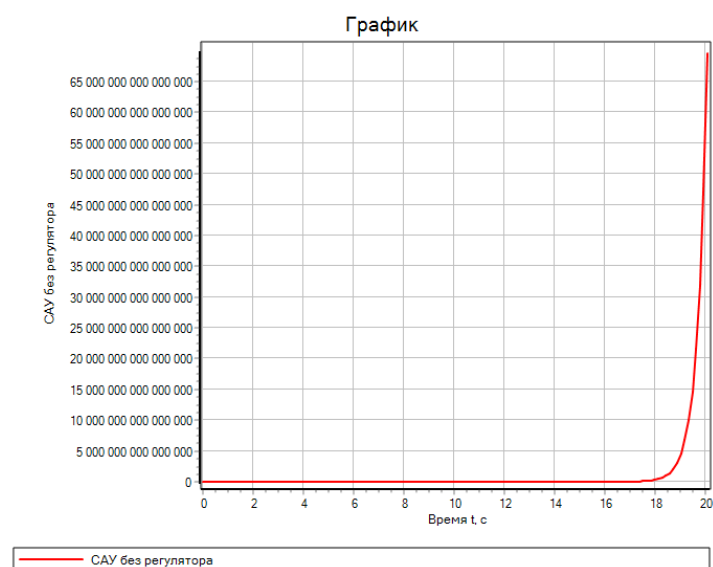


Рис. 47 – ПХС САУ без регулятора

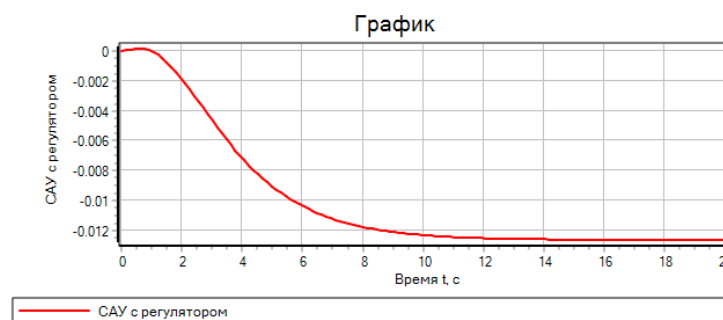


Рис. 48 – ПХС САУ с регулятором

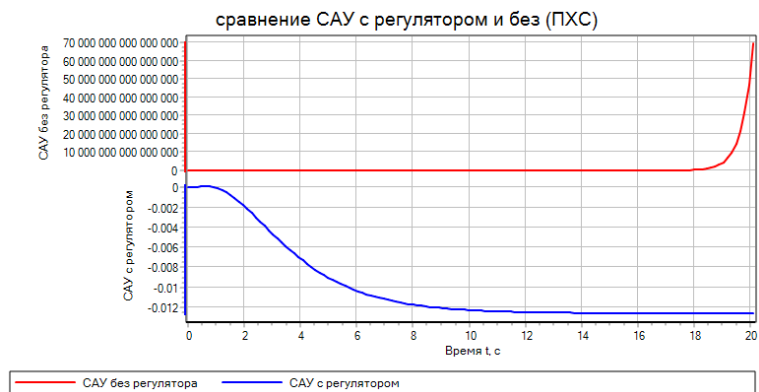


Рис. 49 – ПХС САУ с и без регулятора

Характеристика переходного процесса для ПХС САУ с регулятором:

1) Установившиеся значение сигнала:  $y(+\infty) = -0.012599$

2) Время переходного процесса:

$$e = 0.05 \cdot (0.0001313295 - 0.012599) = -0.00062338352c$$

$$t_{пп} = 7.1017$$

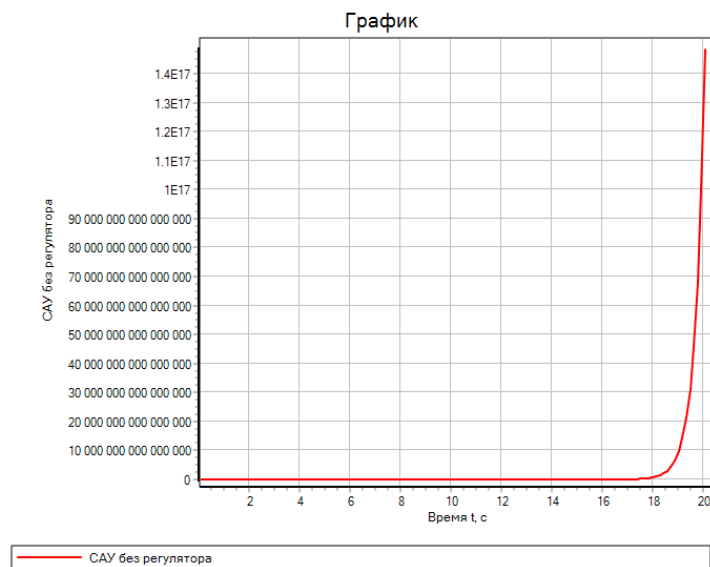


Рис. 50 – ИХС САУ без регулятора

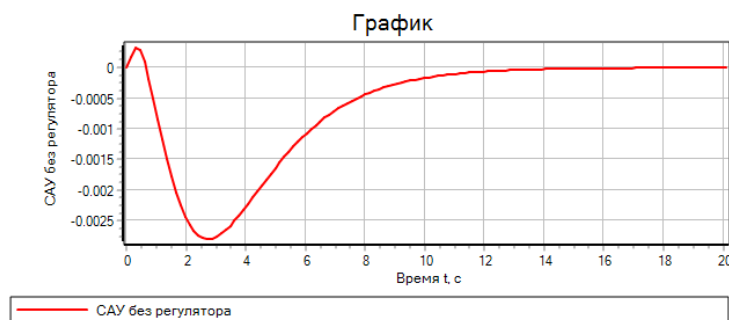


Рис. 51 – ИХС САУ с регулятором

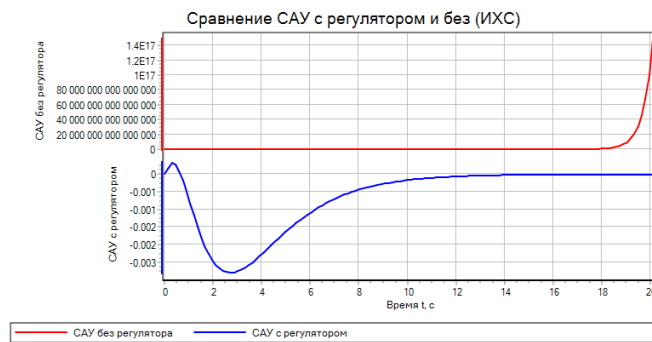


Рис. 52 – ИХС САУ с и без регулятора

Характеристика переходного процесса для ИХС САУ с регулятором:

1) Установившееся значение сигнала:  $y(+\infty) = -1.08921836748539E - 6$

2) Время переходного процесса:

$$e = 0.05 \cdot (0.000326504687781387 + 0.00279934510334674) = 0.00015629248$$

$$t_{пп} = 10.1237c$$

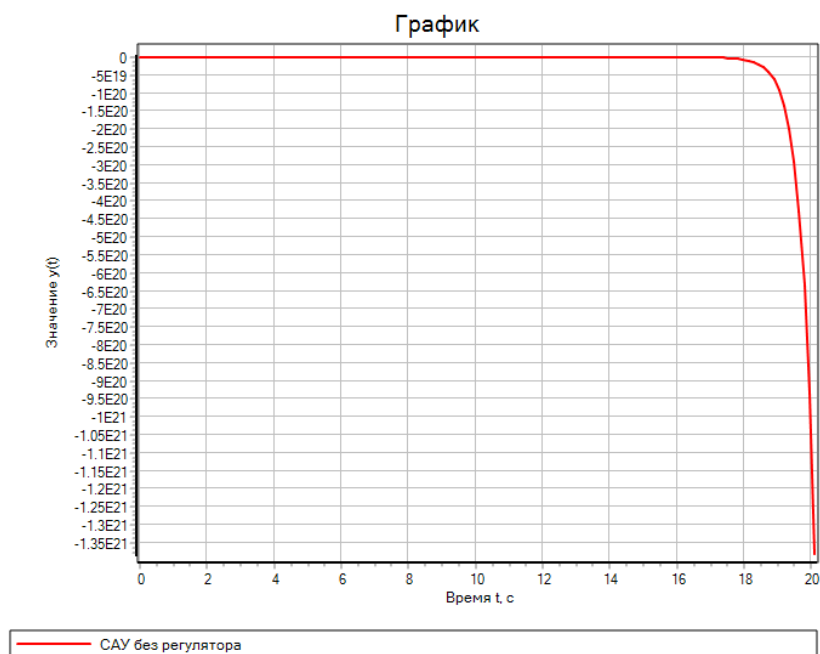


Рис. 53 – ННУ САУ без регулятора

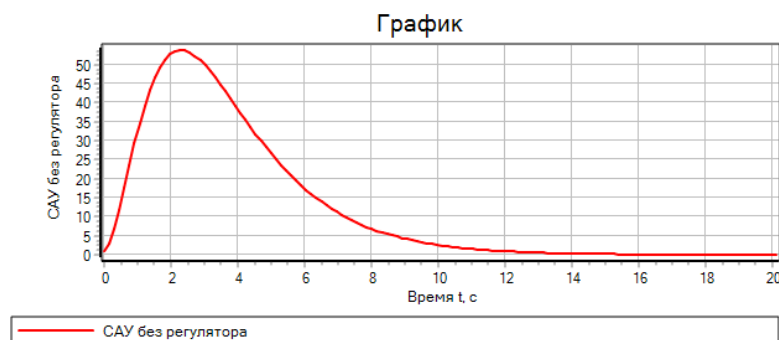


Рис. 54 – ННУ САУ с регулятором

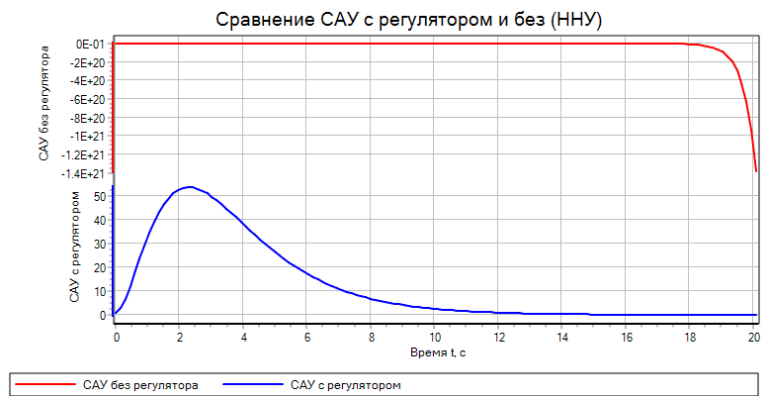


Рис. 55 – ННУ САУ с и без регулятора

Характеристика переходного процесса для ПХС САУ с регулятором:

1) Установившиеся значение сигнала:  $y(+\infty) = 0.0169119622550408$

2) Время переходного процесса:

$$\epsilon = 0.05 \cdot (53.8494692970931 - 0.0169119622550408) = 2.69162786674$$

$$t_{пп} = 9.8215\text{с}$$

## 6.5. Исследование дискретной САУ

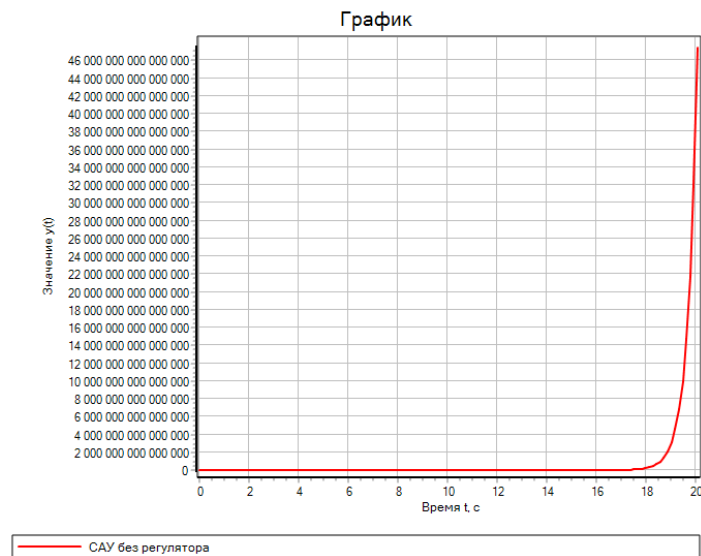


Рис. 56 – ПХС САУ без регулятора

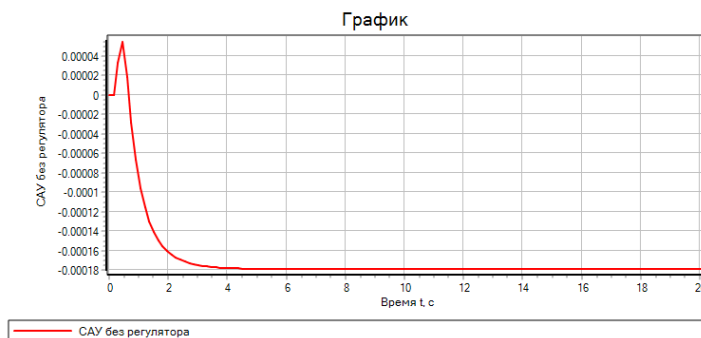


Рис. 57 – ПХС САУ без регулятора



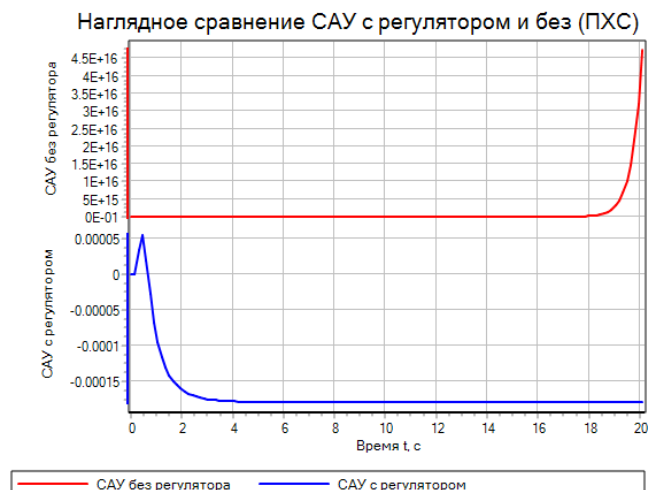


Рис. 58 – ПХС САУ с и без регулятора

Характеристика переходного процесса для ПХС САУ с регулятором:

1) Установившиеся значение сигнала:  $y(+\infty) = -0.000178980031374289$

2) Время переходного процесса:

$$e = 0.05 * (5.46146689573716E-5 - 0.00017898003137428931) = -0.00000621826$$

$$t_{\text{пп}} = 3.6264\text{с}$$

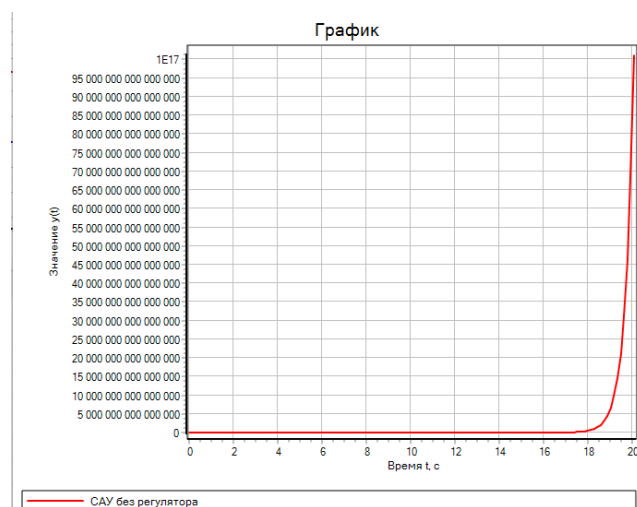


Рис. 59 – ИХС САУ без регулятора

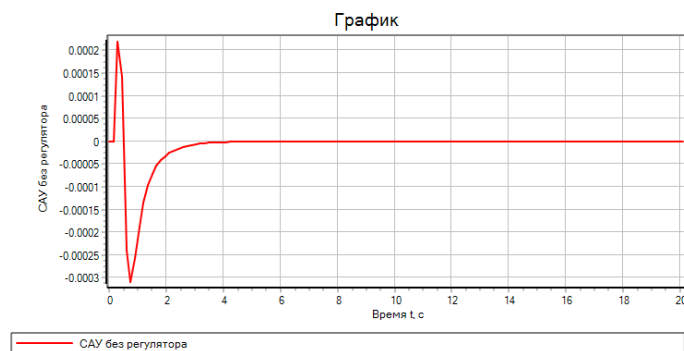


Рис. 60 – ИХС САУ с регулятором

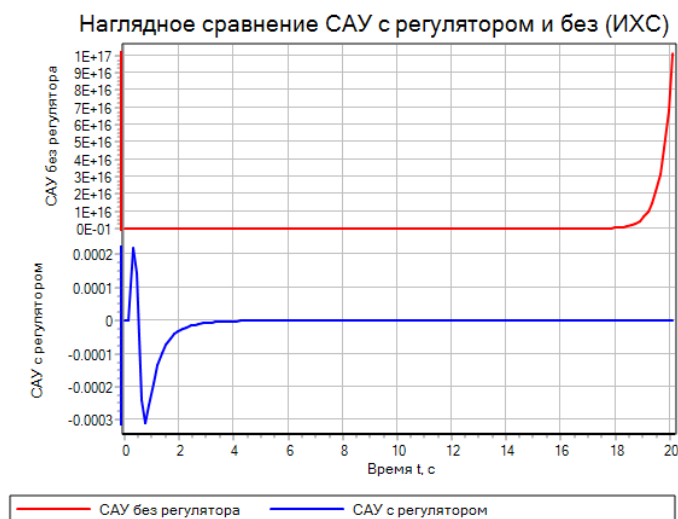


Рис. 61 – ИХС САУ с и без регулятора

Характеристика переходного процесса для ПХС САУ с регулятором:

1) Установившееся значение сигнала:  $y(+\infty) = -0.000178980031374289$

2) Время переходного процесса:

$$e = 0.05 * (0.000219232296492389 + 0.000309235600539601) = -0.00000621826$$

$$t_{\text{пп}} = 1.0577 \text{ с}$$

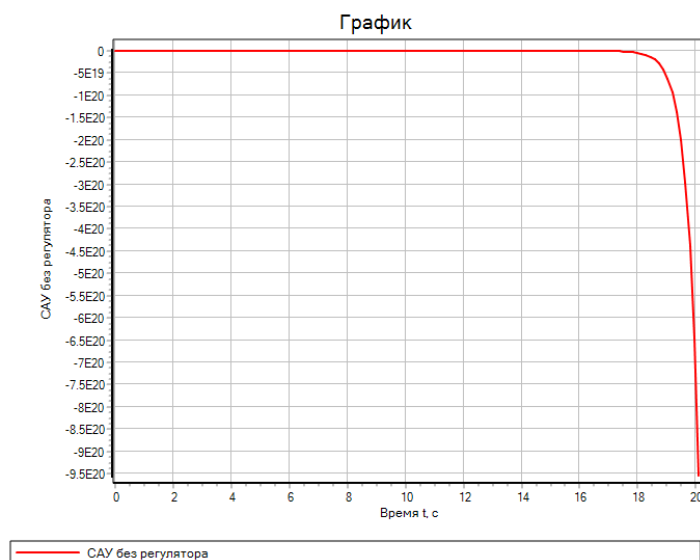


Рис. 62 – ННУ САУ без регулятора

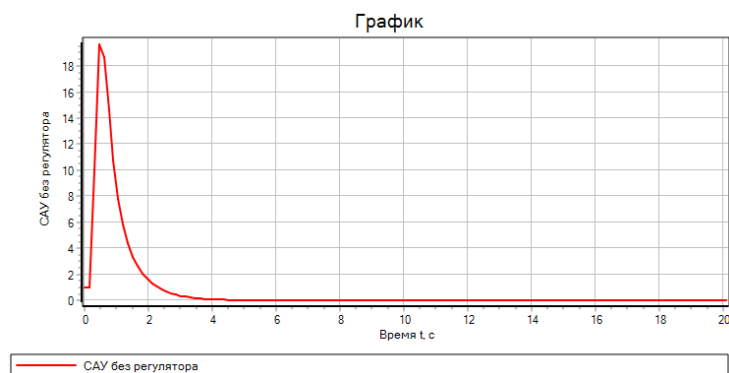


Рис. 63 – ННУ САУ с регулятором

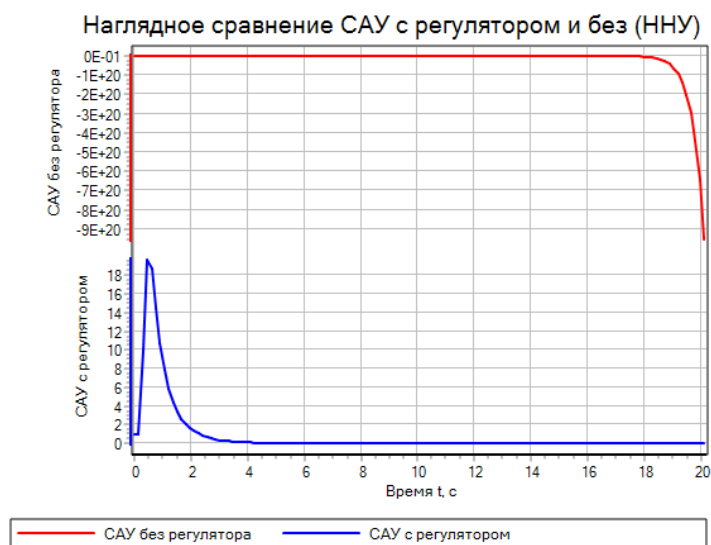


Рис. 64 – ННУ САУ с и без регулятора

Характеристика переходного процесса для ПХС САУ с регулятором:

3) Установившиеся значение сигнала:  $y(+\infty) = 3.74782048775371E - 12$

4) Время переходного процесса:

$$e = 0.05 \cdot (19.6728667439851 - 3.74782048775371E - 12) = 0.98364333719$$

$$t_{\text{пп}} = 2.4176 \text{ с}$$

Графики системы автоматического управления (САУ) с регулятором демонстрируют сходимость к нулю (или к установившемуся значению в случае переходной характеристики), что подтверждает эффективность разработанного регулятора.

## 7. Оптимальный регулятор

### 7.1. Теория

Задана система автоматического управления (САУ), динамику которой можно описать моделью в пространстве состояний (7.1.1).

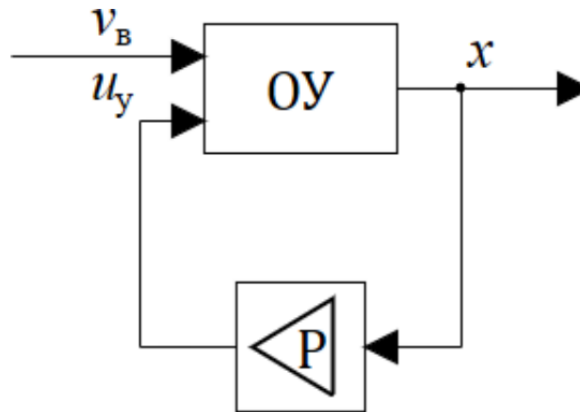


Рис. 65 – Замкнутая система автоматического управления в схематичном виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_3 x(t) + b_B v_3(t) \\ y(t) = E_n x(t) \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x_{k+1} = A_{3d} x_k + b_{Bd} v_{Bk} \\ y_k = E_n x_k \end{array} \right. \quad (7.1.1)$$

где  $b_B$  и  $b_{Bd}$  – части матриц  $B$  и  $B_d$ , относящихся к соответствующим возмущающим воздействиям  $v_B$  и  $v_{Bk}$ ,  $x(0) = x_0 = x^0$ .

Как и в случае модального регулятора, мы будем синтезировать линейное управление

$$u_y = k_p x \quad (7.1.2)$$

где  $k_p$  – коэффициенты регулятора. Тогда матрица замкнутой системы будет иметь вид:

$$A_3 = A + b_y k_p \quad (7.1.3)$$

Прежде, чем перейти к синтезу, рассмотрим особенности оптимального управления. В модальном управлении ядром синтеза был выбор собственных чисел замкнутой модели. Это позволяло определить характер переходных процессов (апериодический, колебательный и т.п.), но не позволяло ставить на них различные ограничения, загоняя их в необходимые для работы или исследования рамки. Оптимальное управление позволяет эти ограничения задать. Конечно, таким образом нельзя будет утверждать, каким характером будут обладать переходные процессы, но здесь уже важно выполнение условий – оптимальность, – а не то, как именно это будет достигаться.

Ограничения задаются с помощью функционала качества. В общем виде это некоторая интегральная функция от времени и векторов состояния и управления, которую можно выбирать согласно поставленным задачам. Для линейных систем обычно выбирают квадратичный функционал качества:

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad | \quad J = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \quad (7.1.5)$$

где  $Q = Q^T > 0$  и  $R = R^T > 0$  – это квадратные матрицы, которые и будут задавать ограничения для замкнутой САУ.

Поставим задачу найти такое управление  $u_y$ , чтобы  $J \rightarrow \min_{u_y}$ .

То есть будем говорить, что отклонения  $x$  и управления  $u$  с течением времени должны будут стремиться к нулю, что и будет обуславливать ограниченность интеграла или суммы, а значит и существование минимума.

## 7.2. Выбор ограничений

Перед началом синтеза управления нужно задать ограничения, т.е. сформировать матрицы  $Q$  и  $R$ :

1) выбираем желаемые максимальную статическую ошибку  $y_{\text{ош}}$ , т.е. величину. отличия от установившегося значения  $y(+\infty)$ , если исследуемая система устойчива, и время переходного процесса  $t_{\text{пп}}$ ;

Пусть  $y_{\text{ош}} = 0,0001313295$  и  $t_{\text{пп}} = 6.5$  с.

2) формируем матрицу  $\tilde{Q}$ :

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1/y_{\text{ош}}^2 & 0 \\ 0 & t_{\text{пп}}^2/9y_{\text{ош}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,614,43 & 0 \\ 0 & 272\,182\,138,435 \end{pmatrix} \quad (7.2.1)$$

3) находим матрицу  $H$ :

$$H = \begin{pmatrix} e_p \\ e_p A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2.2)$$

$$H_d = \begin{pmatrix} e_p \\ e_p A_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \end{pmatrix} \quad (7.2.3)$$

где  $e_p$  – вектор-строка размерности  $n$  с единицей в  $p$ -ой позиции, которая указывает, оптимальности какого компонента вектора состояния  $x$  мы будем добиваться;

4) используем следующее преобразование, чтобы получить требуемую матрицу  $Q$ :

$$Q = H^T \tilde{Q} H = 10^8 \begin{pmatrix} 0.0000761443 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.72182138435 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2.4)$$

$$Q_d = H_d^T \tilde{Q} H_d = 10^4 \begin{pmatrix} 2721.897528 & -0.3570077 & 411.3638358 & 0.0178954 \\ -0.3570077 & 0.000468269 & -0.0539565 & 0.0000234725 \\ 411.36384 & -0.0539565 & 6.2171679 & 0.0027046 \\ -0.0178954 & 0.00002347 & -0.00027046 & 0.0000001176 \end{pmatrix} \quad (7.2.5)$$

5) матрицу  $R$  выбираем единичной, т.к. нет необходимости следить за качеством управления: нас интересует только качество замкнутой системы; тем не менее, чтобы ресурсозатратность была минимальной, нужно уменьшить суммарную величину управляющего воздействия.

### 7.3. Синтез управления

Для поиска минимальной траектории используют необходимое условие оптимальности, или уравнение Беллмана:

$$\min_{u_y} (\dot{V}(t) + x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) = 0 \quad (7.3.1)$$

$$\min_k (\Delta V_k + x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) = 0 \quad (7.3.2)$$

где  $V$  – функция Ляпунова.

Формула расчёта коэффициентов регулятора:

$$k_p = -R^{-1}b_y^T P, \quad | \quad k_{pd} = -\bar{R}^{-1}b_{yd}^T P A_d \quad (7.3.3)$$

где  $\bar{R} = R + B_d^T P B_d$ . Тем не менее сейчас мы их посчитать не можем, т.к. нам не известна матрица  $P$ . Её находят из уравнения Риккати:

$$A^T P + P A - P b_y R^{-1} b_y^T P = -Q \quad | \quad A_d^T P A_d - P - A_d^T P b_{yd} \bar{R}^{-1} b_{yd}^T P A_d = -Q \quad (7.3.4)$$

Решения матричных нелинейных алгебраических уравнений не единственны.

Необходимо с помощью численных методов найти такое решение, чтобы  $P > 0$ .

Его существование определяется теоремой со следующими условиями:

- 1) объект управления должен быть вполне управляемый;
- 2)  $R > 0$ ;
- 3) выполняется одно из условий:
  - 3.1)  $Q > 0$ ,
  - 3.2)  $Q = \bar{Q}^T \bar{Q} \geq 0$ , причём пара  $(A^T, \bar{Q}^T)$  – наблюдаемая.

Собственные числа матрицы  $Q$ :

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_2 = 0$
- $\lambda_3 = 7614.43$
- $\lambda_4 = 272182138.435$

Матрица не является положительно определённой, так как у неё есть нулевые собственные значения.

Собственные числа матрицы Qd:

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_2 = 10^{-15}$
- $\lambda_3 = 170.0522145$
- $\lambda_4 = 278407220.1595985$

Матрица не является положительно определённой, так как у неё есть нулевые собственные значения.

Так как не выполняется условие  $Q > 0$ , необходимо проверить условие 7.2. Для этого были вычислены матрицы  $\bar{Q}$ ,  $\bar{Q}_d$ :

$$\bar{Q} = SJS^{-1} \rightarrow J^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \pm\sqrt{\lambda_4} \end{pmatrix} \quad (7.3.5)$$

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 87.260701349462 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16497.9434607772 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.3.6)$$

$$\bar{Q}_d = \begin{pmatrix} 1631 & -21.38 + 6.57 * 10^{-16}i & 2463 + 5.508 * 10^{-18}i & -1.0717 - 4.47 * 10^{-16}i \\ -21.38 & 0.0291 + 1.47e * 10^{-5}i & -3.344 + 1.239 * 10^{-7}i & 0.001602 - 10^{-5}i \\ 2463 & -3.344 + 1.24 * 10^{-7}i & 385.346408303368 + 1.039 * 10^{-9}i & -0.1676 - 8.44 * 10^{-8}i \\ 1.071 & 0.001602 - 10^{-5}i & -0.167634426574975 - 8.438 * 10^{-8}i & 0.0002904 + 6.85 * 10^{-6}i \end{pmatrix}. \quad (7.3.7)$$

Далее были найдены матрицы наблюдаемости пар  $(A^T, \bar{Q}^T)$  и их ранги:

```
rank_S_Q_H =
4

rank_S_Qd_H =
4
```

Рис. 66 – Ранги матриц наблюдаемости матричных пар  $(A^T, \bar{Q}^T)$  непрерывной и дискретной систем.

В связи с тем, что ранги полученных матриц равны размерности систем, можно сделать вывод о наблюдаемости матричных пар  $(A^T, \bar{Q}^T)$ .

Так как ОУ является вполне управляемым, матрица  $R > 0$ ,  $Q \geq 0$  и пары  $(A^T, \bar{Q}^T)$  – наблюдаемые, достаточное условие по теореме выполняется.

Для получения матрицы  $P$  в Matlab можно воспользоваться функцией `icare`, причём вторым параметром подаётся произведение:

$$b_y R^{-1} b_y^T | b_{y_d} R^{-1} b_{y_d}^T \quad (7.3.8)$$

$$P = \begin{pmatrix} 1445736 & 4559981 & 1158537 & 1783094 \\ 4559981 & 3491838903 & 864011685 & 1365396630 \\ 1158537 & 864011685 & 219504338 & 337855319 \\ 1783094 & 1365396630 & 337855319 & 533904389 \end{pmatrix} \quad (7.3.9)$$

$$P_d = \begin{pmatrix} 0.004465936 & 5.38732 & 0.57163182 & 2.1009442 \\ 5.38732 & 2108501 & 1375.55 & 819786 \\ 0.57163 & 1375.56 & 145.979 & 537.2997 \\ 2.10094 & 819786.66 & 537.2996 & 318734.53 \end{pmatrix} \quad (7.3.10)$$

Теперь подставляем  $P$  в уравнение  $k_p$ , находим его и собираем матрицу замкнутой САУ.

$$k_p = (87.26 \ 133678 \ 16568 \ 52256) \quad (7.3.11)$$

$$k_{dp} = (0.0004679 \ 407.5725 \ 0.1197978 \ 158.4622) \quad (7.3.12)$$

Подстановка  $k_p$  в  $u_y = k_p x$  и подача синтезированного управления на вход ОУ.

Получение матриц  $A_3$  замкнутых непрерывной и дискретной моделей:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2521982 & 386.239 & 47.884387 & 151.03159 \\ -0.1681321 & -250.953 & -31.9229 & -100.6877 \end{pmatrix} \quad (7.3.13)$$

$$A_{d3} = \begin{pmatrix} 0.9459668 & 0.0491909 & 0.000662676 & 0.0052572 \\ -0.974599 & 0.973057 & 0.03635233 & -0.002815 \\ -0.009873 & 0.178643 & 1.00005 & 0.106048196 \\ -0.002435 & -0.12005 & -3.58235 \cdot 10^{-5} & 0.953342 \end{pmatrix} \quad (7.3.14)$$

Их собственные числа:

Для матрицы  $A_3$

$$\lambda_1 = -47.6834511337453$$

$$\lambda_2 = -0.00528918662540467$$

$$\lambda_3 = -2.55809494121656$$

$$\lambda_4 = -2.55650476255877$$

Для матрицы  $A_{d3}$

$$\lambda_1 = 0.954852445094709 + 0.201977306681321i$$

$$\lambda_2 = 0.954852445094709 - 0.201977306681321i$$

$$\lambda_3 = 0.967657178303805$$



$$\lambda_4 = 0.995054450302245$$

Код для расчета матриц  $A_3$  и  $A_{d3}$  предоставлен на рисунке 67

```
lambda = eig(Q);
eighd = eig(Qd);
disp(lambda);
disp(eighd);

[S,J] = eig(Q)
Q_j = S*sqrtm(J)/S

[Sd,Jd] = eig(Qd)
Qd_j = Sd*sqrtm(Jd)/Sd

AQ = [Q_j', A'*Q_j', A'^2*Q_j', A'^3*Q_j']
AQd = [Qd_j', Ad'*Qd_j', Ad'^2*Qd_j', Ad'^3*Qd_j']

rank_AQ = rank(AQ)
rank_AQd = rank(AQd)

R = eye(1);

P = icare(A, b, Q, R)
P_d = dare(Ad, b, Q_d, R)

k_p = -R^-1 * b' * P
R_line = R + bd' * P_d * bd
k_p_d = -R_line^-1 * bd' * P_d * Ad

A_z = A + b * k_p
A_z_d = A_d + bd * k_p_d

lamda_A_z = eig(A_z)
lamda_A_z_d = eig(A_z_d)
```

Рис. 67 – Код программы в MATLAB

## 7.4. Построение и исследование регулятора для непрерывной модели

Для построения были использованы те же схемы, что и в предыдущем разделе, но с другими матрицами  $A_3$ .

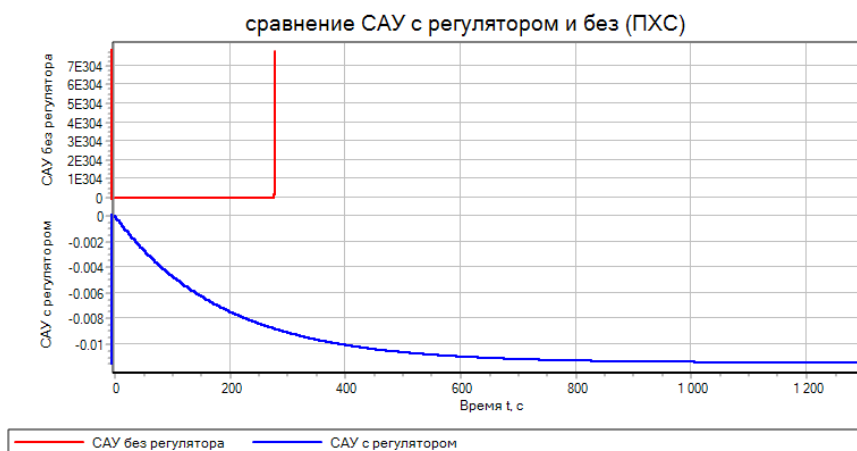
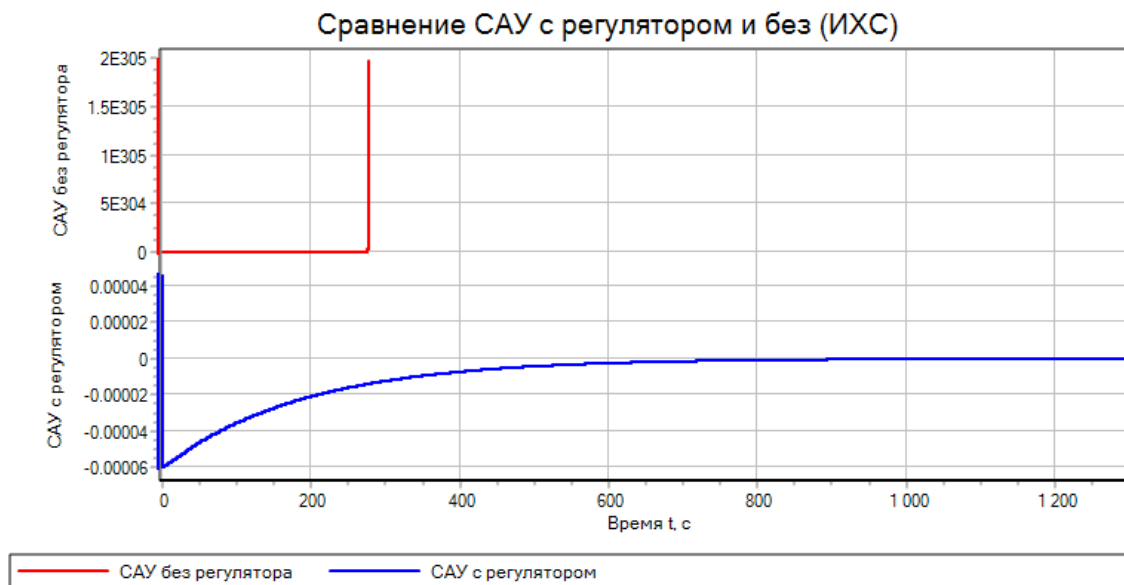


Рис. 68 – ПХС САУ с регулятором и без

Снимем характеристики переходного процесса для ПХС:

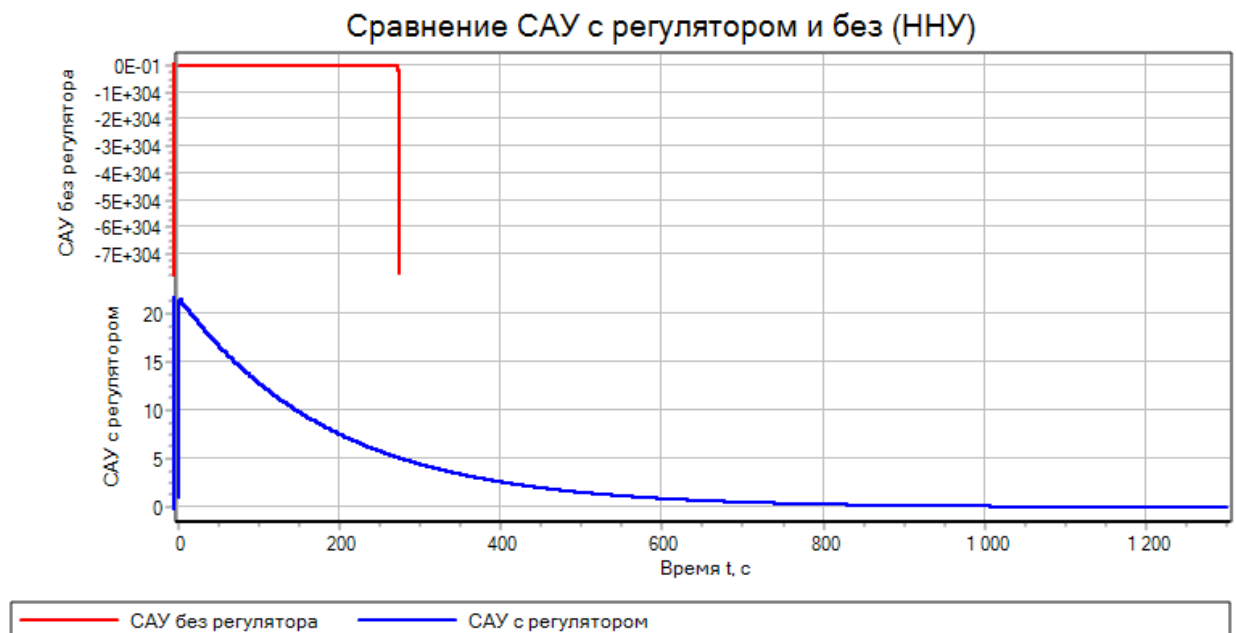
- установившееся значение:  $y(+\infty) = -0,01144803177319$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 563,51$ ;
- статическая ошибка:  $y_{\text{co}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = 0,000572401588595$ ;



*Рис. 69 – ИХС САУ с регулятором и без*

Снимем характеристики переходного процесса для ИХС:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = -0,0000000628409002$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 460,02$ ;
- статическая ошибка:  $y_{\text{co}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = 0,0000052797689807$ ;



*Рис. 70 – Реакция на ненулевые начальные условия*

*САУ с регулятором и без ( $x_0 = [1 \ 5 \ 3 \ 2]$ )*

Снимем характеристики переходного процесса для ННУ:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = 0,022482203387$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 565,48$ ;
- статическая ошибка:  $y_{\text{co}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = 1,071692462075605635$ ;

## 7.5. Построение и исследование регулятора для дискретной модели

Для исследования дискретной САУ были также использованы схемы из предыдущего раздела, но с другими матрицами А.

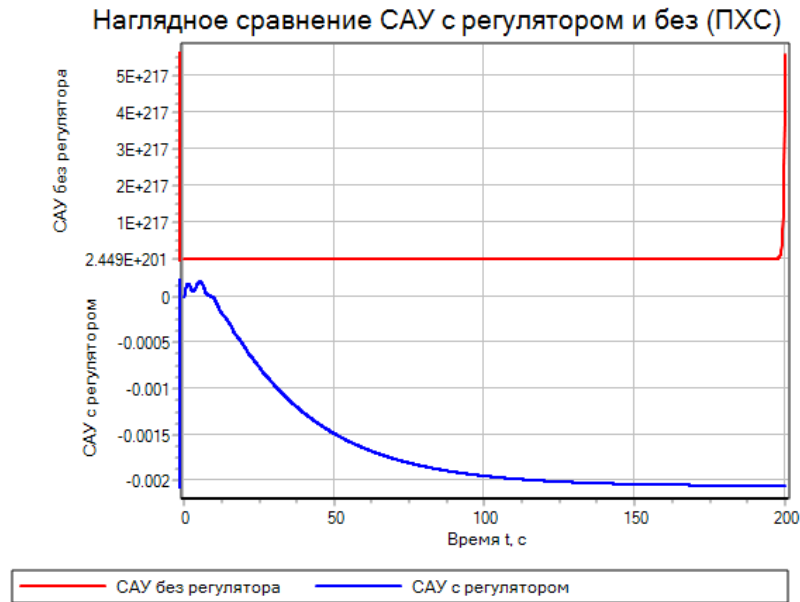


Рис. 71 – ПХС САУ с регулятором и без

Снимем характеристики переходного процесса для ПХС:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = -0,0020536418$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 146,2648$ ;
- статическая ошибка:  $y_{\text{co}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = -0,0000200275$ ;

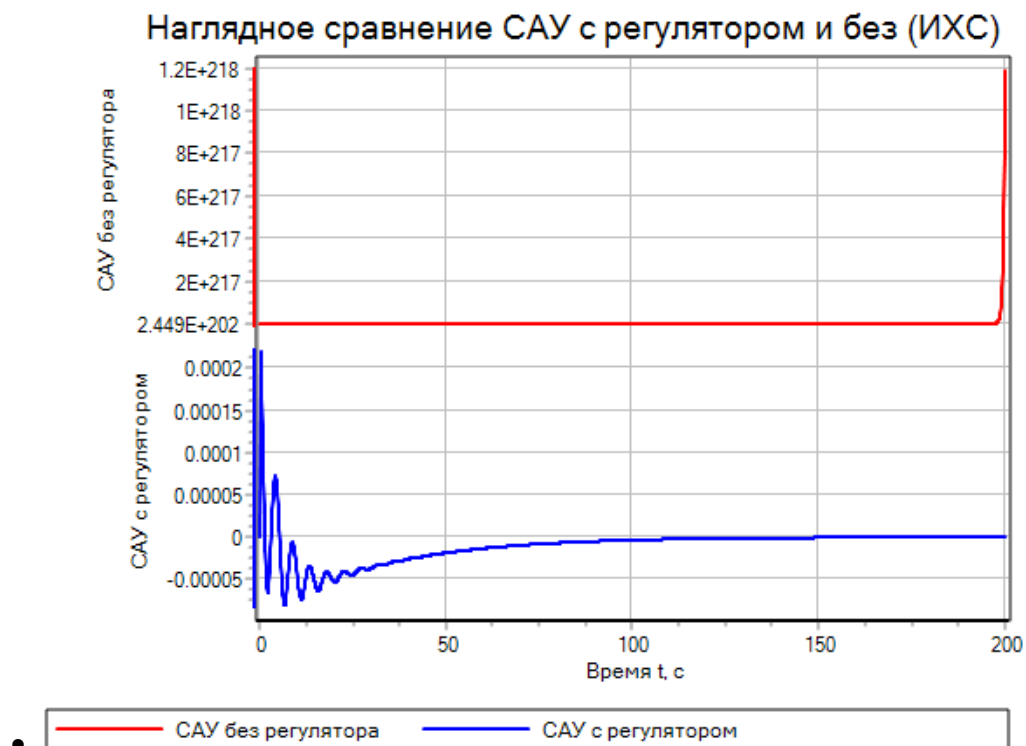
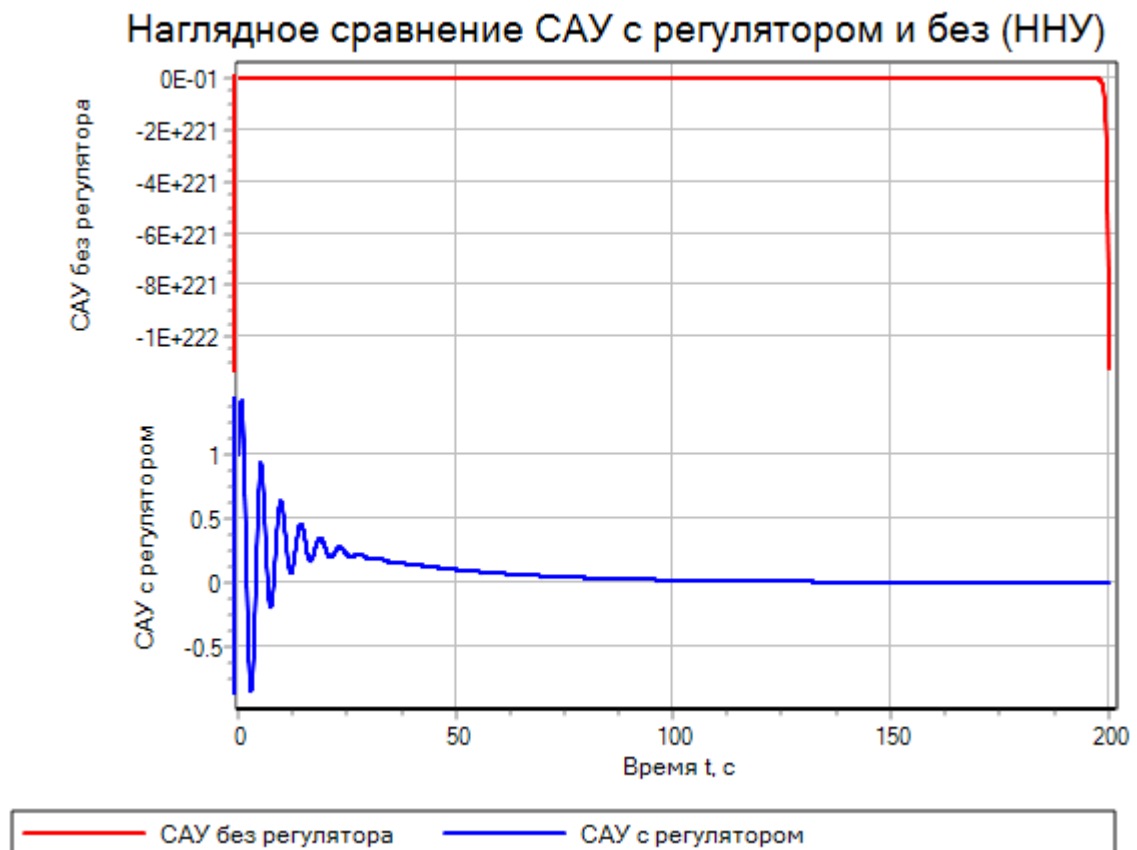


Рис. 72 – ИХС САУ с регулятором и без

Снимем характеристики переходного процесса для ПХС:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = -0,00000013683027$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 56.8136$ ;
- статическая ошибка:  $y_{\text{co}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = 0,0000149744935$ ;



*Рис. 73 – Реакция на ненулевые начальные условия САУ с регулятором и без ( $x_0 = [1 \ 5 \ 3 \ 2]$ )*

Снимем характеристики переходного процесса для ПХС:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = 0,000739784569042085$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 46.5288$ ;
- статическая ошибка:  $y_{\text{со}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = -0,114044486251986$ ;

Графики САУ с регулятором в дискретном случае и в непрерывном случае сходятся к нулю, что показывает успешность сформированного регулятора, за исключением того, что время переходного процесса значительно выше, чем ожидалось. Статическая ошибка же в свою очередь в среднем удовлетворяет нашим требованиям.

## 8. Наблюдатель

### 8.1. Теория

В общем случае вектор состояния  $x$  недоступен для считывания. Тем не менее в модальном и оптимальном регуляторах использовалось линейное управление вида

$$u_y = k_p^T x, \quad (8.1.1)$$

которое явно требует этот вектор. Поэтому возникает новая задача восстановления вектора состояния  $\tilde{x}$ , который должен выполнять следующее условие:

$$\begin{aligned} e(t) = x(t) - \tilde{x}(t) &\rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty, \\ e_k = x_k - \tilde{x}_k &\rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

где  $e$  – ошибка наблюдателя.

Пусть изначально доступны ОУ в виде чёрного ящика и все матрицы из модели. МПС в полном виде нам дана, но таким образом мы можем получить только общее решение, ведь не заданы начальные условия. Тем не менее нам даны входные воздействия в виде входного вектора  $u$ , и реакция ОУ в виде выходного вектора  $y$ . Эти данные позволяют собрать новое устройство – наблюдатель, – задача которого будет по векторам  $u$  и  $y$  восстанавливать  $\tilde{x}$ , используя доступные параметры ОУ:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) + Bu(t) + LCe(t), \\ \tilde{x}_{k+1} &= A_d\tilde{x}_k + B_d u_k + L_d C e_k. \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

Данный наблюдатель предложен Люенбергером, поэтому носит его имя. При выполнении условия (8.1.2), уравнение (8.1.3) будет стремиться к первому уравнению МПС, т.е. восстановленный вектор  $\tilde{x}$  можно считать адекватным, чтобы описать модель.

Ранее мы уже проходили понятие наблюдаемости, к которому привязан ранговый критерий наблюдаемости. Если он выполняется, то для восстановления вектора состояния наблюдателю понадобится конечное время.

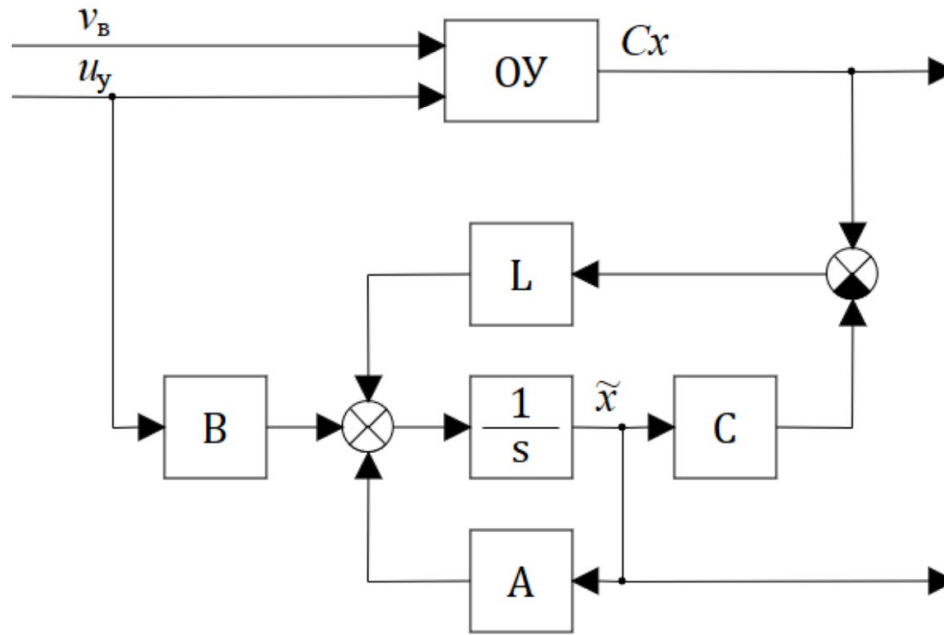


Рис. 74 – Структура наблюдателя Люенбергера (на данной схеме опущена матрица  $D$ , т.к. при расчёте выходного сигнала на правом сумматоре они бы и так сокращались).

## 8.2. Переход к канонической форме

МПС называется моделью в канонической форме Фробениуса, если матрица  $A$  и вектор при управляющем воздействии  $b$  имеют следующий вид:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & | & E_{n-1} \\ -a_n & \dots & -a_1 \end{pmatrix} = I_n^{(1)} - e_n a^T, \hat{b} = e_n, \quad (8.2.1)$$

где  $I_n^{(1)}$  – матрица с единицами над главной диагональю,  $e_n = (0 \dots 0 \ 1)^T$ ,  $a$  – коэффициенты характеристического многочлена ОУ.

Переход к канонической форме Фробениуса делается через замену переменных:

$$x = Q\hat{x}, \quad (8.2.2)$$

где матрицу  $Q$  ищут из выражения

$$Q = S_y T, \quad (8.2.3)$$

где  $S_y$  – матрица управляемости,  $T$  – матрица, составленная из коэффициентов характеристического многочлена ОУ:

$$T = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.2.4)$$

Теперь можно преобразовать модель к новой системе координат:

$$\left. \begin{aligned} Q\dot{\hat{x}}(t) &= AQ\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= Q^{-1}AQ\hat{x}(t) + Q^{-1}Bu(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}(t) + \hat{B}u(t) \end{aligned} \right| \begin{aligned} Q_{\text{д}}\hat{x}_{k+1} &= A_{\text{д}}Q_{\text{д}}\hat{x}_k + B_{\text{д}}u_k \\ \hat{x}_{k+1} &= Q_{\text{д}}^{-1}A_{\text{д}}Q_{\text{д}}\hat{x}_k + Q_{\text{д}}^{-1}B_{\text{д}}u_k \\ \hat{x}_{k+1} &= \hat{A}_{\text{д}}\hat{x}_k + \hat{B}_{\text{д}}u_k \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

Коэффициенты характеристического уравнения ОУ были вычислены ранее:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, a_1 = 0, a_2 = -6.615606936, a_3 = 0, a_4 = 1, \\ a_0^{\text{д}} &= 1, a_1^{\text{д}} = -4.153026, a_2^{\text{д}} = 6.30605, a_3^{\text{д}} = -4.15302, a_4^{\text{д}} = 1. \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

Вычислим матрицы  $T$  для непрерывной и дискретной моделей:

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6.6156 & 0 & 1 \\ -6.6156 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_{\text{д}} &= \begin{pmatrix} a_3^{\text{д}} & a_2^{\text{д}} & a_1^{\text{д}} & 1 \\ a_2^{\text{д}} & a_1^{\text{д}} & 1 & 0 \\ a_1^{\text{д}} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.15302 & 6.30605 & -4.153026 & 1 \\ 6.30605 & -4.153026 & 1 & 0 \\ -4.153026 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

Вычислим матрицы  $Q$  для непрерывной и дискретной моделей:

$$\begin{aligned} Q &= S_y T = \begin{pmatrix} -0.018901 & 0 & 0.00289017 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00192678 & 0 \\ 0 & -0.0189 & 0 & 0.00289017 \\ 0 & 0 & 0 & -0.00192678 \end{pmatrix}, \\ Q_{\text{д}} &= S_{y_{\text{д}}} T_{\text{д}} = \begin{pmatrix} 3.312e-05 & -3.814e-05 & -3.814e-05 & 3.313e-05 \\ -2.197e-05 & 2.197e-05 & 2.198e-05 & -2.198e-05 \\ -0.000438 & 0.001382 & -0.00138 & 0.0004384 \\ 0.0002944 & -0.0008833 & 0.000883 & -0.0002944 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

Вычислим матрицы  $\hat{A}$  для непрерывной и дискретной моделей:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6.616 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{A}_{\text{д}} &= Q_{\text{д}}^{-1}A_{\text{д}}Q_{\text{д}} = \begin{pmatrix} 7.5495e-15 & 0.999 & 0 & -2.22e-15 \\ -2.145e-06 & -1.066e-14 & 0.9999 & 1.776e-15 \\ -2.619e-06 & -1.776e-14 & 0 & 1 \\ -0.999 & 4.153 & -6.306 & 4.15302 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.2.9)$$

Вычислим матрицы  $\hat{B}$  для непрерывной и дискретной моделей:

$$\begin{aligned} \hat{B} &= Q^{-1}B = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T \\ \hat{B}_{\text{д}} &= Q_{\text{д}}^{-1}B_{\text{д}} = (-8.65e-06 \quad 0.000171 \quad 0.0114 \quad 0.1528)^T \end{aligned} \quad (8.2.10)$$



### 8.3. Построение модального регулятора и наблюдателя

Выберем желаемые собственные числа для модальных регуляторов, как в п. 2.1:

$$\lambda^{\text{уст}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \lambda_d^{\text{уст}} = \begin{pmatrix} 0.859761 \\ 0.73919 \\ 0.7971 \\ 0.9272 \end{pmatrix} \quad (8.3.1)$$

Вычислим коэффициенты их характеристических многочленов:

$$\begin{aligned} a^{\text{уст}} &= (1 \quad 5 \quad 8.75 \quad 6.25 \quad 1.5), \\ a_d^{\text{уст}} &= (1 \quad -3.33385 \quad 4.132 \quad -2.2778 \quad 0.469776). \end{aligned} \quad (8.3.2)$$

Выберем желаемые собственные числа для наблюдателей:

$$\lambda^{\text{н}} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -2.5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda_d^{\text{н}} = \begin{pmatrix} 0.79719 \\ 0.6854 \\ 0.73919 \\ 0.85976 \end{pmatrix} \quad (8.3.3)$$

Вычислим коэффициенты их характеристических многочленов:

$$\begin{aligned} a^{\text{н}} &= (1 \quad 7 \quad 17.75 \quad 19.25 \quad 7.5), \\ a_d^{\text{н}} &= (1 \quad -3.0815 \quad 3.552 \quad -1.816 \quad 0.34725). \end{aligned} \quad (8.3.4)$$

Вычислим матрицы  $Q_{\text{н}}$  для непрерывной и дискретной моделей:

$$\begin{aligned} Q_{\text{н}} &= S_{\text{н}} T = \begin{pmatrix} 0 & -6.6156 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1134 & 0 & 0 \\ -6.6156 & 0 & 1 & 0 \\ -0.1134 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ Q_{\text{нд}} &= S_{\text{нд}} T_{\text{д}} = \begin{pmatrix} -0.999 & 3.153 & -3.153 & 1 \\ 0.00131 & 5.652e-11 & -0.00131 & 0 \\ 0.1511 & -0.3254 & 0.15113 & 0 \\ -6.5747e-05 & -0.000265 & -6.575e-05 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.3.5)$$

Вычислим параметры модальных регуляторов  $k_p$  для непрерывной и дискретной моделей:

$$\begin{aligned} k_p &= (Q^T)^{-1}(a - a^{\text{уст}}) = (79.358 \quad 8093.79 \quad 330.66 \quad 3090.98)^T, \\ k_{pд} &= (Q_{\text{д}}^T)^{-1}(a_{\text{д}} - a_d^{\text{уст}}) = (53.78 \quad 6893.9 \quad 229.059 \quad 2650.3)^T. \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

Вычислим параметры наблюдателей  $L$  для непрерывной и дискретной моделей:

$$\begin{aligned} L &= -(Q_{\text{н}}^T)^{-1}(a - a^{\text{н}}) = (7 \quad -578.07 \quad 24.3656 \quad -1487.458)^T, \\ L_{\text{д}} &= -(Q_{\text{нд}}^T)^{-1}(a_{\text{д}} - a_d^{\text{н}}) = (1.071472 \quad -78.582 \quad 3.36456 \quad -202.15)^T. \end{aligned} \quad (8.3.7)$$

Вычислим матрицы  $A_z$  непрерывной и дискретной САУ с регуляторами и наблюдателями:

$$\begin{aligned}
A_z &= \begin{pmatrix} A + b_y k^T & -b_y k^T \\ 0_{n \times n} & A - LC \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.229 & 23.28 & 0.956 & 8.93 & -0.23 & -23.4 & -0.95 & -8.93 \\ -0.153 & -8.98 & -0.64 & -5.96 & 0.15 & 15.6 & 0.64 & 5.96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 578 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24.4 & -0.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1487 & 6.616 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
A_{zd} &= \begin{pmatrix} A_d + b_{y_d} k_{pd}^T & -b_{y_d} k_{pd}^T \\ 0_{n \times n} & A_d - L_d C \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1.001 & 0.23 & 0.15 & 0.088 & -0.002 & -0.23 & -0.0076 & -0.088 \\ -0.001 & 0.93 & -0.005 & 0.097 & 0.001 & 0.15 & 0.005 & 0.058 \\ 0.023 & 3 & 1.1 & 1.16 & -0.023 & -3 & -0.1 & -1.16 \\ -0.015 & -1 & -0.067 & 0.29 & 0.016 & 2.03 & 0.067 & 0.78 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.071 & -0.001 & 0.151 & -6 * 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 78.58 & 1.077 & 0 & 0.155 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.36 & -0.0175 & 1 & -0.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 202.1 & 1.025 & 0 & 1.08 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{8.3.8}$$

Вычислим собственные числа матриц  $A_z$ :

$$\lambda(A_z) = \begin{matrix} -1.99 \\ -1.5 \\ -0.5 \\ -0.999 \\ -1 \\ -1.49 \\ -2 \\ -2.5 \end{matrix}, \tag{8.3.9}$$

$$\lambda(A_{zd}) = (0.927 \quad 0.8578 \quad 0.7995 \quad 0.7383 \quad 0.86 \quad 0.79 \quad 0.74 \quad 0.68)^T.$$

Полученные собственные числа совпадают с желаемыми.

Поскольку в нашем случае в исходной модели нет внешнего возмущения, введем фиктивное возмущение  $b_b = b_y = B$ .

Вычислим матрицы  $b_z$  непрерывной и дискретной САУ с регуляторами и наблюдателями:

$$\begin{aligned}
b_z &= \begin{pmatrix} b_b \\ 0_{n \times m_b} \end{pmatrix} = (0 \quad 0 \quad 0.00289 \quad -0.0019 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T, \\
b_{zd} &= \begin{pmatrix} b_{bd} \\ 0_{n \times m_b} \end{pmatrix} = (3.3e - 05 \quad -2.2e - 05 \quad 0.00043 \quad -0.00029 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T.
\end{aligned} \tag{8.3.10}$$

где  $m_b$  – количество возмущающих воздействий.

Таким образом, мы получили модель САУ с регулятором и наблюдателем:

$$\begin{cases} \dot{z} = A_z z + b_z v_b, \\ y = C_z z + d_b v_b; \end{cases} \tag{8.3.11}$$

$$\begin{cases} z_{k+1} = A_{zД} z_k + b_{zД} v_B, \\ y_k = C_z z_k + d_B v_B; \end{cases}$$

$$C_z = (C \quad 0_{1 \times n}).$$

Код в программе matlab для данной главы:

```

1 - clc
2 - n=4
3 - A=[0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 -0.1134104046 0 0; 0 6.615606936 0 0];
4 - b=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];
5 - Ad = [
6 -     1.0, -0.00131165, 0.1511355, -0.00006574791;
7 -     0, 1.076513, 0, 0.1549708;
8 -     0, -0.0175753, 1.0, -0.00131165;
9 -     0, 1.025226, 0, 1.076513;
10 - ];
11 - bd = [
12 -     0.000033126;
13 -     -0.000021975;
14 -     0.00043842;
15 -     -0.00029444
16 - ];
17 -
18 - C=[1 0 0 0];
19 - Cd=[1 0 0 0];
20 - h = 0.1511;
21 - lambda_ust = [-1, -2, -1.5, -0.5];
22 - lambda_ust_d = exp(lambda_ust * h);
23 -
24 - T = [0 -6.615606936 0 1;
25 -     -6.615606936 0 1 0;
26 -     0 1 0 0;
27 -     1 0 0 0];
28 -
29 - Td = [-4.15302 6.30605 -4.153026 1;
30 -     6.30605 -4.153026 1 0;
31 -     -4.153026 1 0 0;
32 -     1 0 0 0];
33 -
34 - S_y = [b, A*b, A^2*b, A^3*b];
35 - Sd_y = [bd, Ad*bd, Ad^2*bd, Ad^3*bd];
36 -
37 - S_n = [C', A'*C', A'^2*C', A'^3*C'];
38 - S_n_d = [Cd', Ad'*Cd', Ad'^2*Cd', Ad'^3*Cd'];
39 -
40 - lambda_n = lambda_ust - 0.5;
41 - lambda_n_d = exp(lambda_n * h);
42 -
43 - a = poly(A);
44 - ad = poly(Ad);
45 - a_ust = poly(lambda_ust);
46 - a_ust_d = poly(lambda_ust_d);

```

Рис. 75 – Код в программе matlab

```

48 - a_n = poly(lambda_n);
49 - a_n_d = poly(lambda_n_d);
50
51 - Q = S_y * T
52
53 - Qd = Sd_y * Td
54
55 - Q_n = S_n * T
56 - Q_n_d = S_n_d * Td
57
58 - A_kanon = Q^-1 * A * Q
59 - Ad_kanon = Qd^-1 * Ad * Qd
60
61 - b_kanon = Q^-1 * b
62 - bd_kanon = Qd^-1 * bd
63
64 - k_p = Q'^-1 * (a(end:-1:2) - a_ust(end:-1:2))'
65 - k_p_d = Qd'^-1 * (ad(end:-1:2) - a_ust_d(end:-1:2))'
66
67 - L = -Q_n'^-1 * (a(end:-1:2) - a_n(end:-1:2))'
68 - L_d = -Q_n_d'^-1 * (ad(end:-1:2) - a_n_d(end:-1:2))'
69
70 - A_z = [A + b * k_p', -b * k_p';
71         zeros(n), A - L * C]
72 - b_z = [b; zeros(n, 1)]
73 - C_z = [C, zeros(1, n)]
74 - A_z_d = [Ad + bd * k_p_d', -bd * k_p_d';
75           zeros(n), Ad - L_d * C]
76 - b_z_d = [bd; zeros(n, 1)]
77
78 - eig_A_z = eig(A_z)
79 - eig_A_z_d = eig(A_z_d)

```

Рис. 76 – Код в программе matlab продолжение

## 8.4. Исследование непрерывной САУ

Построим модель непрерывной САУ с регулятором и с регулятором и наблюдателем в SimInTech:

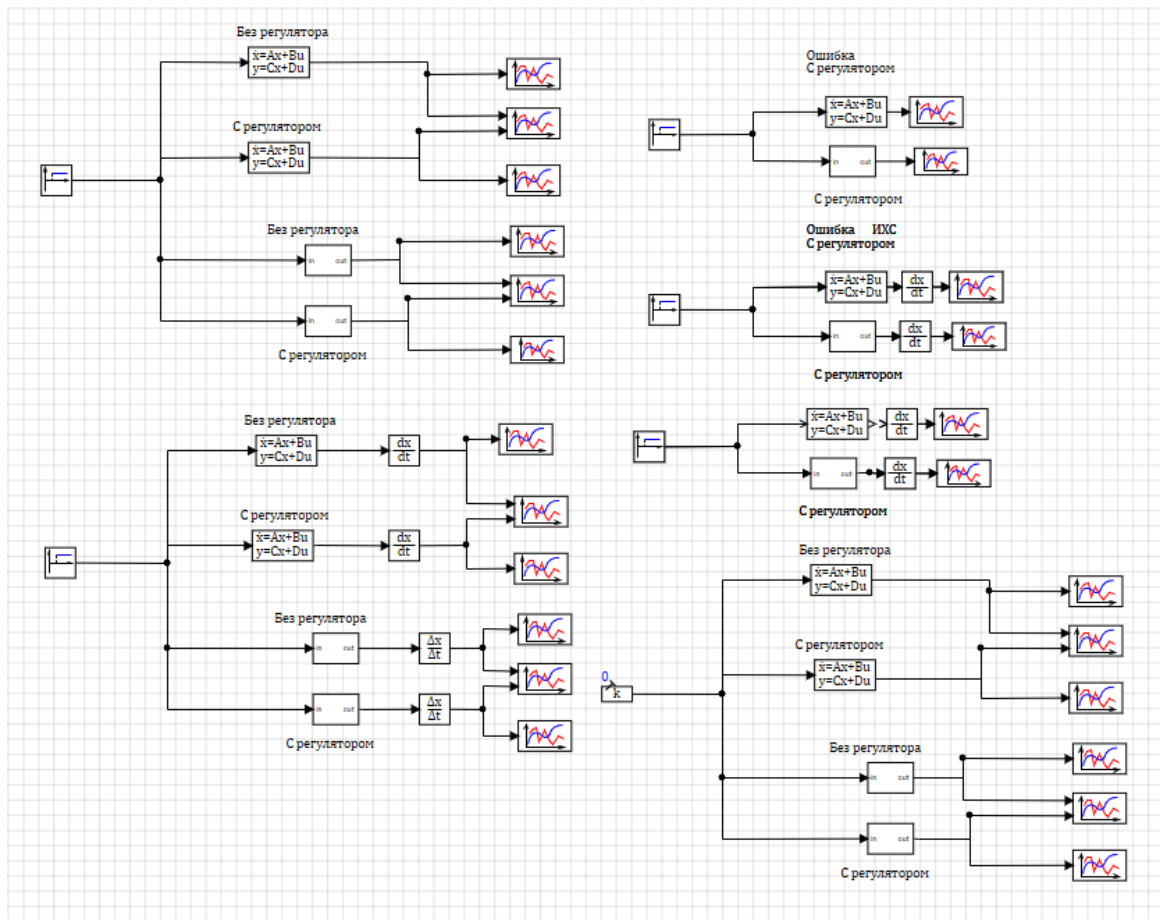


Рисунок 77 – Схема модели непрерывной САУ с регулятором и с регулятором и наблюдателем

В результате моделирования получим графики переходной характеристики системы (ПХС), импульсной характеристики системы (ИХС), реакции системы на ненулевые начальные условия (ННУ) и точки равновесия системы (ТРС).

Для ПХС и ИХС был выбран следующий вектор начальных ошибок наблюдателя:  $e^0 = (0.000001 \ 0.000001 \ 0.000001 \ 0.000001)^T$ .

Рассмотрим графики ПХС:

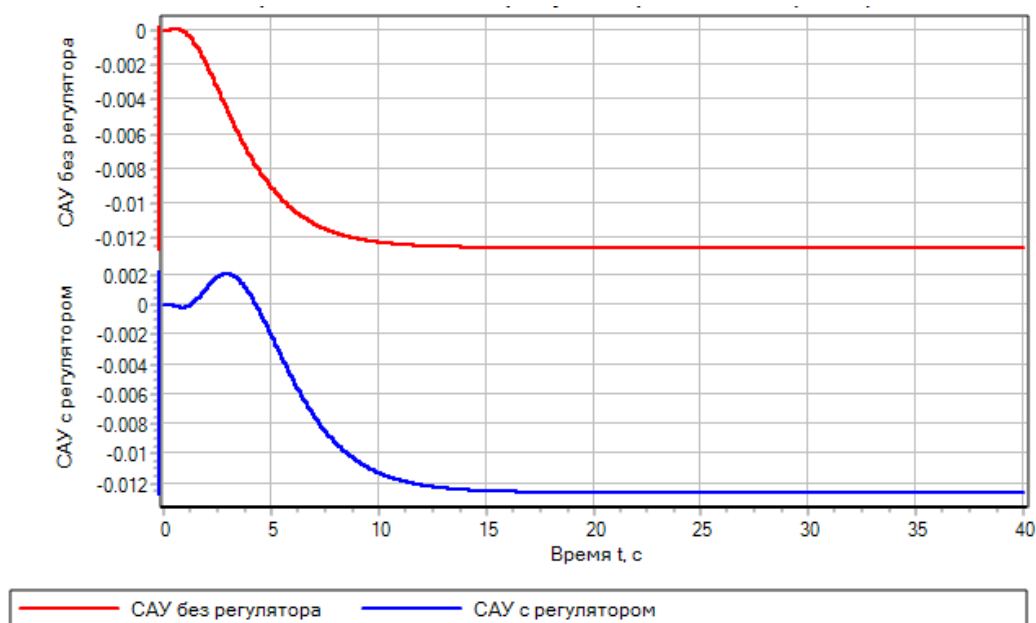


Рисунок 78 – Графики ПХС непрерывной САУ с наблюдателем и без наблюдателя

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = -0,01260114077$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 8,63$  с;
- статическая ошибка:  $y_{\text{co}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = 0,0126011407739362$ ;
- максимальное значение амплитуды:  $A_{\text{max}} = 0,002$ .

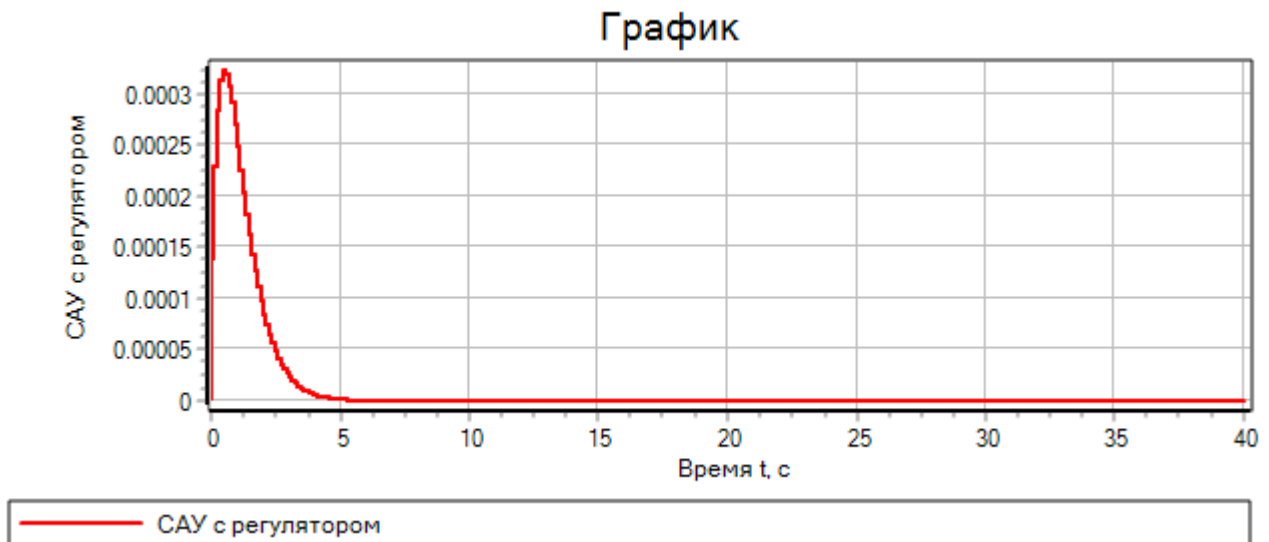


Рисунок 79 – График ПХС для ошибки наблюдателя выходной компоненте вектора состояний  
непрерывной САУ с наблюдателем

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = 0$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 1.574$  с;
- статическая ошибка:  $y_{\text{co}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = -0,00016162452079$ ;
- максимальное значение амплитуды:  $A_{\text{max}} = 0,00032324904158$ .

Рассмотрим графики ИХС:

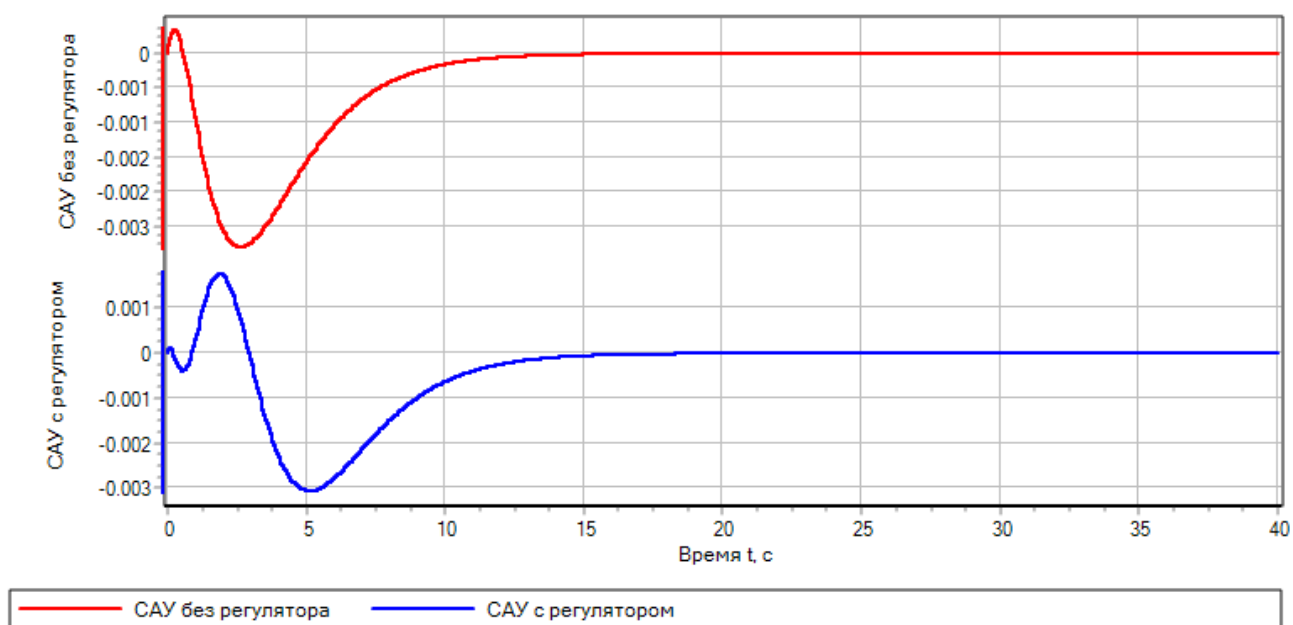


Рисунок 80 – Графики ИХС непрерывной САУ с наблюдателем и без наблюдателя

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = 0$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 6,622 \text{ с}$ ;
- статическая ошибка:  $y_{\text{со}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = 0,000241272125$ ;
- максимальное значение амплитуды:  $A_{\text{max}} = -0,003059$ .

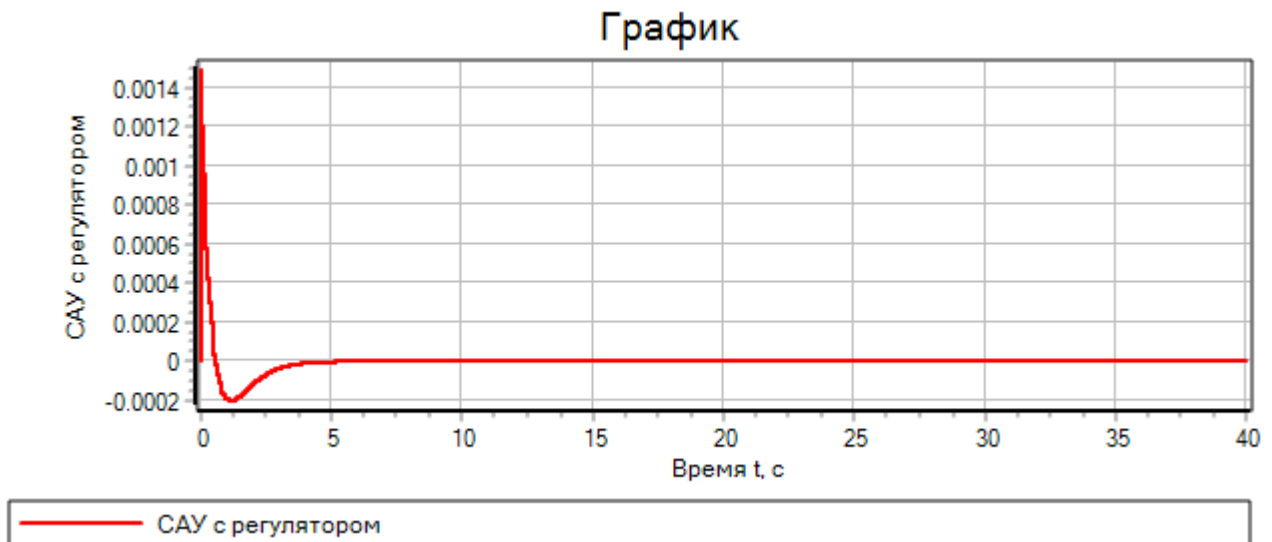


Рис. 81 – График ИХС для ошибки наблюдателя по выходной компоненте вектора состояний непрерывной САУ с наблюдателем

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = 0$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 2,385$  с;
- статическая ошибка:  $y_{\text{co}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = 0,0000787583152295$ ;
- максимальное значение амплитуды:  $A_{\text{max}} = 0,001491529$ .

Рассмотрим графики ННУ:

Для ННУ был выбран следующий вектор начальных ошибок наблюдателя:  $e^0 = (0.000001 \ 0.000001 \ 0.000001 \ 0.000001)^T$ .

Были выбраны следующие ненулевые начальные условия:  $x^0 = (5 \ 5 \ 5 \ 5)^T$ .

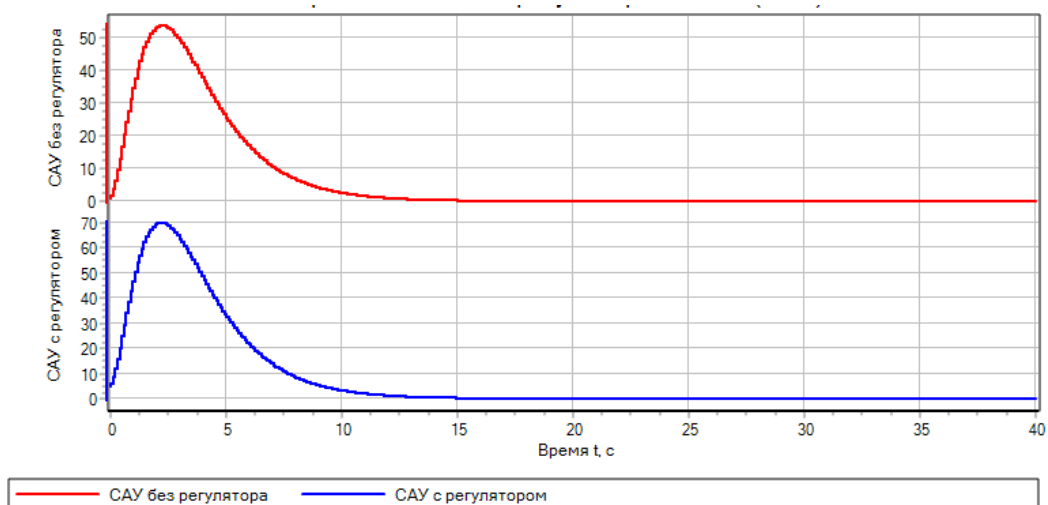


Рисунок 82 – Графики ННУ непрерывной САУ с наблюдателем и без наблюдателя



Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = 1,030184 \cdot 10^{-6}$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 2.555\text{с}$ ;
- статическая ошибка:  $y_{\text{со}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = -69,79249701$ ;
- максимальное значение амплитуды:  $A_{\text{max}} = 69,79249802$ .

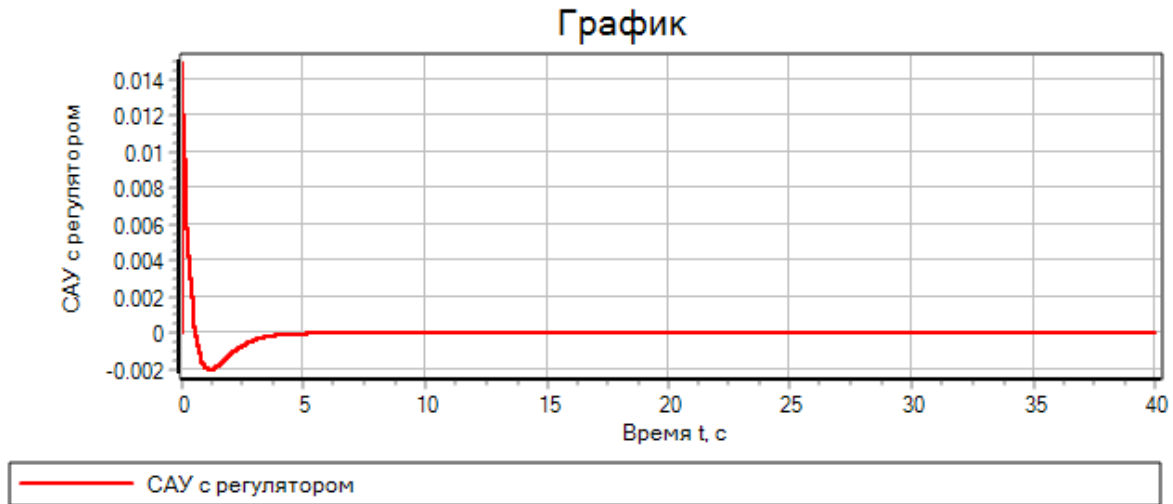


Рисунок 83 – График ННУ для ошибки наблюдателя по выходной компоненте вектора состояний непрерывной САУ с наблюдателем

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = 0$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 2,321\text{ с}$ ;
- статическая ошибка:  $y_{\text{со}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = 0,000846794795$ ;
- максимальное значение амплитуды:  $A_{\text{max}} = -0,002020601957$ .

## 8.5. Исследование дискретной САУ

Построим модель дискретной САУ с регулятором и с регулятором и наблюдателем в SimInTech. В результате моделирования получим графики переходной характеристики системы (ПХС), импульсной характеристики системы (ИХС), реакции системы на ненулевые начальные условия (ННУ) и точки равновесия системы (ТРС).

Рассмотрим графики ПХС:

Для ПХС и ИХС был выбран тот же вектор начальных ошибок наблюдателя, что и в непрерывном случае:  $e^0 = (0.00001 \ 0.00001 \ 0.00001 \ 0.00001)^T$ .

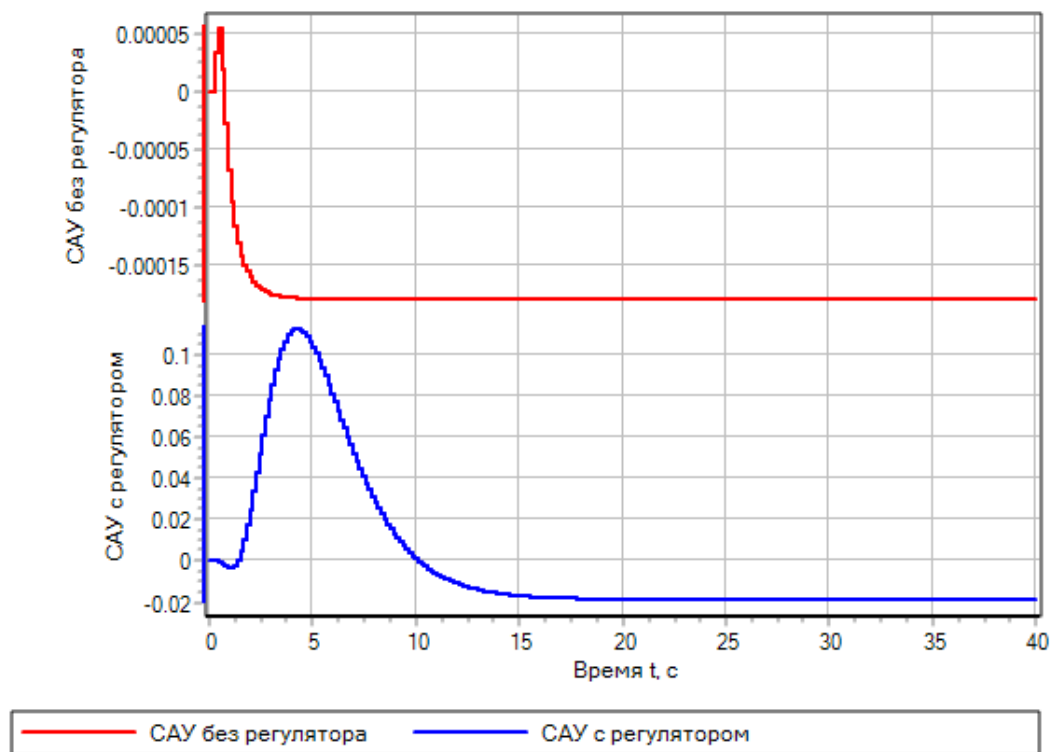


Рис. 84 – Графики ПХС дискретной САУ с наблюдателем и без наблюдателя

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = -0,01859404368$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 12,391$  с;
- статическая ошибка:  $y_{\text{co}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = -0,0065600172907926$ ;
- максимальное значение амплитуды:  $A_{\text{max}} = 0,1126063021$ .

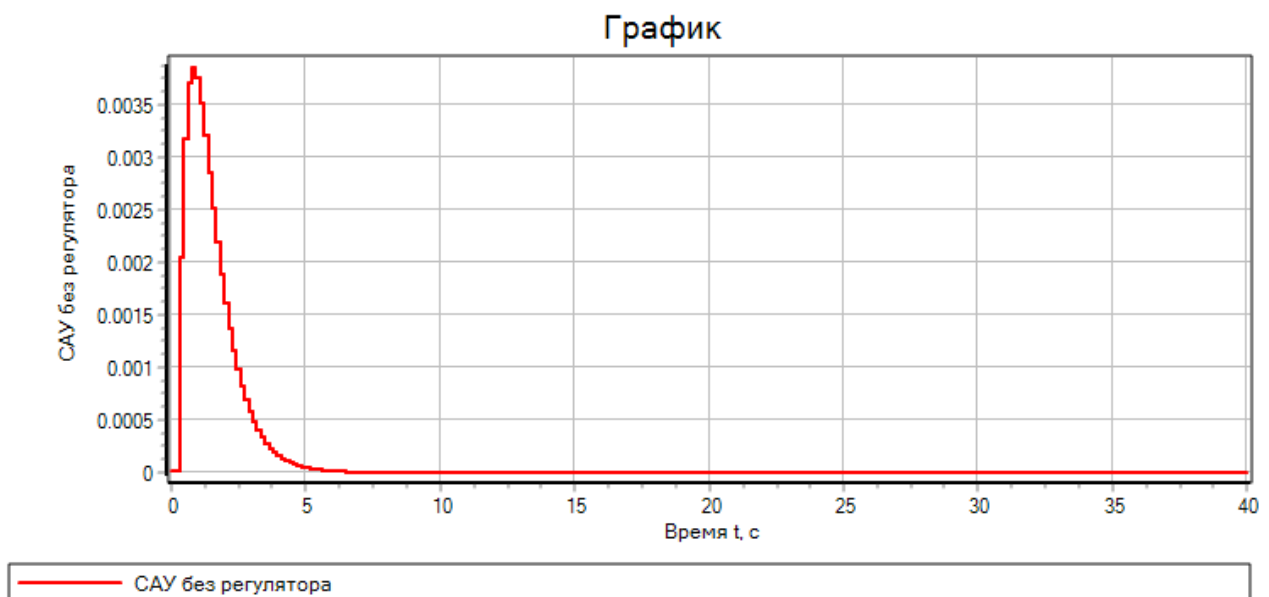


Рис. 85 – График ПХС для ошибки наблюдателя выходной компоненте вектора состояний дискретной САУ с наблюдателем

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = 0$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 3,929 \text{ с}$ ;
- статическая ошибка:  $y_{\text{co}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = -0,0001926456$ ;
- максимальное значение амплитуды:  $A_{\text{max}} = 0,003852912$ .

Рассмотрим графики ИХС:

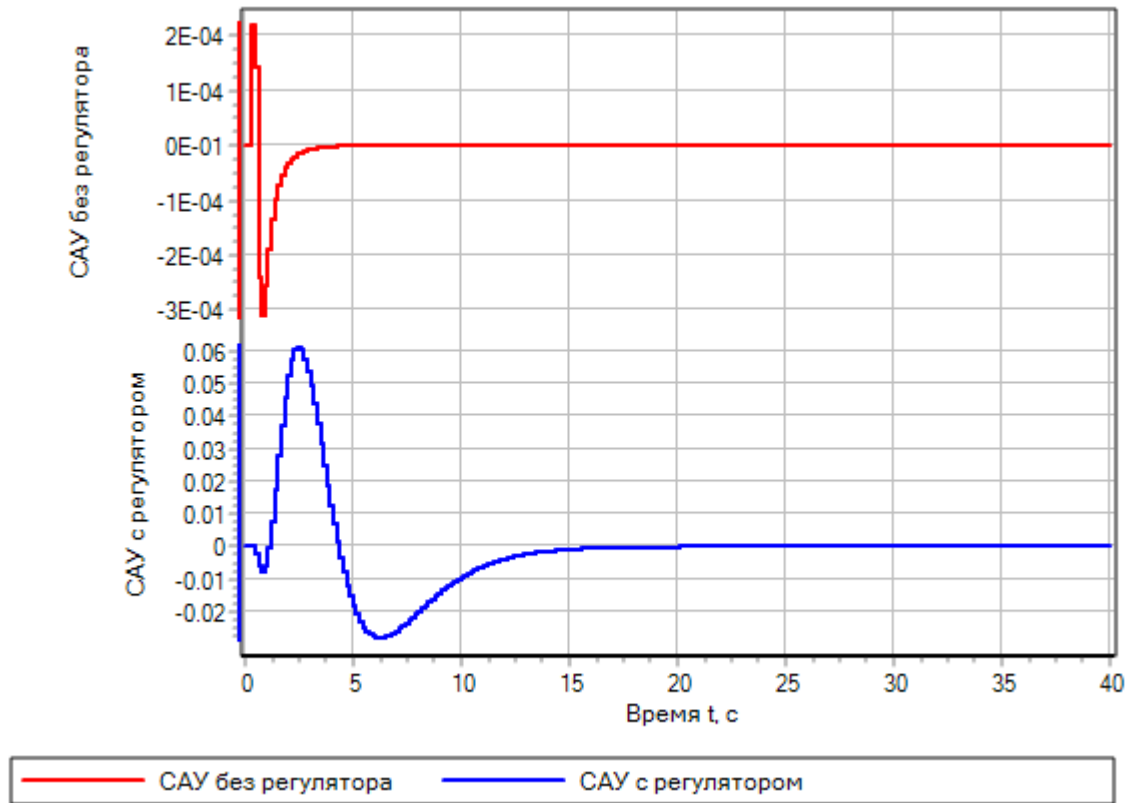


Рис. 86 – Графики ИХС дискретной САУ с наблюдателем и без наблюдателя

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = -3.88 * 10^{-9}$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 11,635 \text{ с}$ ;
- статическая ошибка:  $y_{\text{co}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = 0,0044699671474$ ;
- максимальное значение амплитуды:  $A_{\text{max}} = 0,061269997$ .

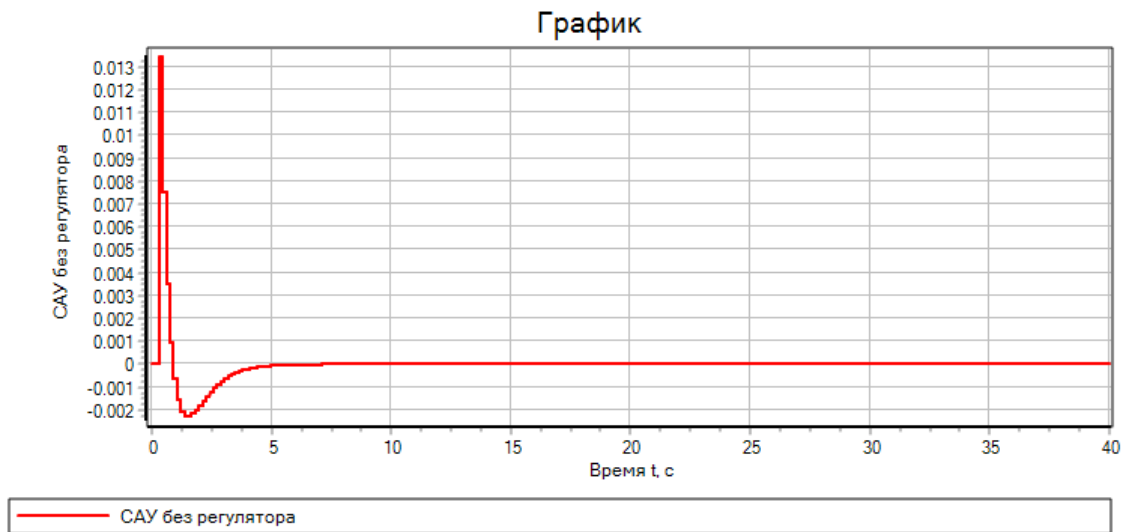


Рис. 87 – График ИХС для ошибки наблюдателя по выходной компоненте вектора состояний дискретной САУ с наблюдателем

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = -0,00180288326862$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 3,778$  с;
- статическая ошибка:  $y_{\text{co}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = 0,00078631902659$ ;
- максимальное значение амплитуды:  $A_{\text{max}} = 0,01345144294$ .

Рассмотрим графики ННУ:

Для ННУ был выбран тот же вектор начальных ошибок наблюдателя, что и в непрерывном случае:  $e^0 = (0.00001 \ 0.00001 \ 0.00001 \ 0.00001)^T$ .

Были выбраны те же ненулевые начальные условия:  $x^0 = (5 \ 5 \ 5 \ 5)^T$ .

Наглядное сравнение САУ с регулятором и без (ННУ)

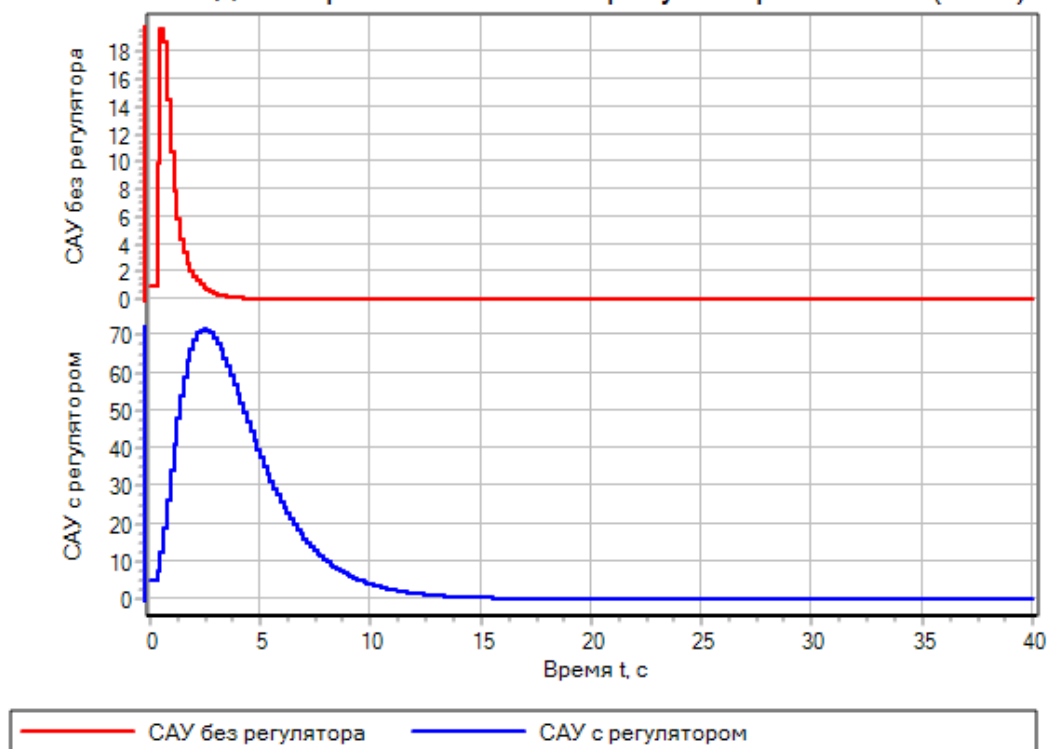


Рис. 88 – Графики ННУ дискретной САУ с наблюдателем и без наблюдателя

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = 1,3606163132 \cdot 10^{-6}$ ;
- время переходного процесса:  $t_{пп} = 10,124 c$ ;
- статическая ошибка:  $y_{co} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = -3,5827393020335$ ;
- максимальное значение амплитуды:  $A_{max} = 71,65478864$ .

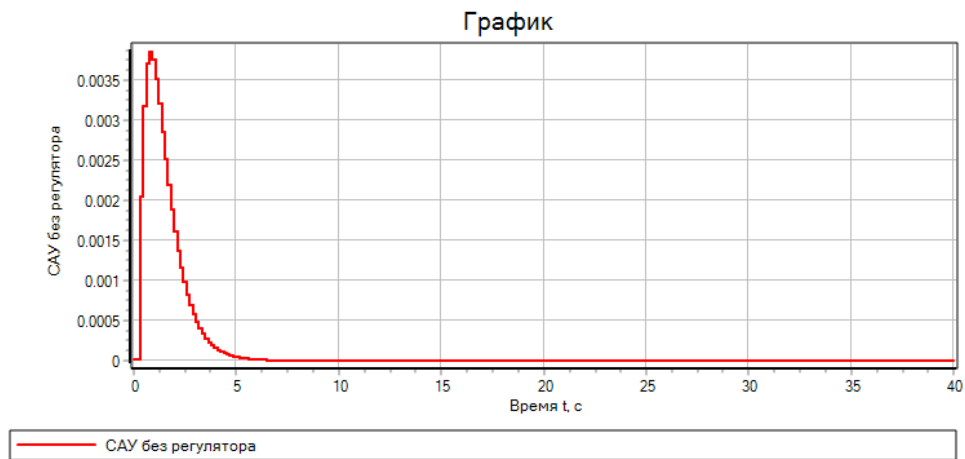


Рис. 89 – График ННУ для ошибки наблюдателя по выходной компоненте вектора состояний дискретной САУ с наблюдателем

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение:  $y(+\infty) = 2,229 \cdot 10^{-20}$ ;
- время переходного процесса:  $t_{\text{пп}} = 4,231$  с;
- статическая ошибка:  $y_{\text{co}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = -0,0001926449999999999988855$ ;
- максимальное значение амплитуды:  $A_{\text{max}} = 0,0038529$ .