

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа «Компьютерных технологий и информационных систем»

Курсовой проект
Управление перевернутым маятником
по дисциплине «Теория автоматического управления»
Вариант 11.4

Выполнил:

студент группы 5130902/20201

_____ А. И. Сафонов
подпись

Проверил:

ассистент

_____ В. В. Кравченко
подпись

«__» _____ 2024

Санкт-Петербург
2024

Оглавление

<i>Задание</i>	<i>3</i>
1. Математические модели объектов и систем управления	5
1.1. <i>Модель в пространстве состояния.....</i>	<i>5</i>
1.2. <i>Вывод передаточной функции и модели «вход-выход» из непрерывной модели в пространстве состояний</i>	<i>7</i>
1.3. <i>Вывод эквивалентной модели в пространстве состояний из модели «вход-выход»</i>	<i>9</i>
1.4. <i>Доказательство эквивалентности моделей в пространстве состояний</i>	<i>10</i>
1.5. <i>Получение дискретной модели в пространстве состояний</i>	<i>12</i>
1.6. <i>Вывод дискретных передаточной функции и модели «вход-выход» из дискретной модели в пространстве состояний</i>	<i>13</i>

Задание

Перевернутый маятник смонтирован на тележке, как показано на рисунке. Тележка должна двигаться таким образом, чтобы масса шара m на конце маятника всегда занимала вертикальное положение. В качестве выходных переменных используются: перемещение тележки $y(t)$ и угол отклонения маятника $\theta(t)$. Управляющее воздействие – сила $f(t)$, приложенная к тележке. Задача заключается в стабилизации тележки в требуемом положении $y(t) = y_{уст}$.

Дифференциальные уравнения, описывающие движение данной системы, можно получить, записав выражения для суммы сил, действующих в горизонтальном направлении, и суммы моментов относительно точки вращения. Будем считать, что масса тележки $M, M \gg m$ и угол отклонения от вертикали θ является малым. Тогда можно ограничиться линейной моделью и использовать уравнения для суммы сил $M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0$ и для суммы моментов $ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0$

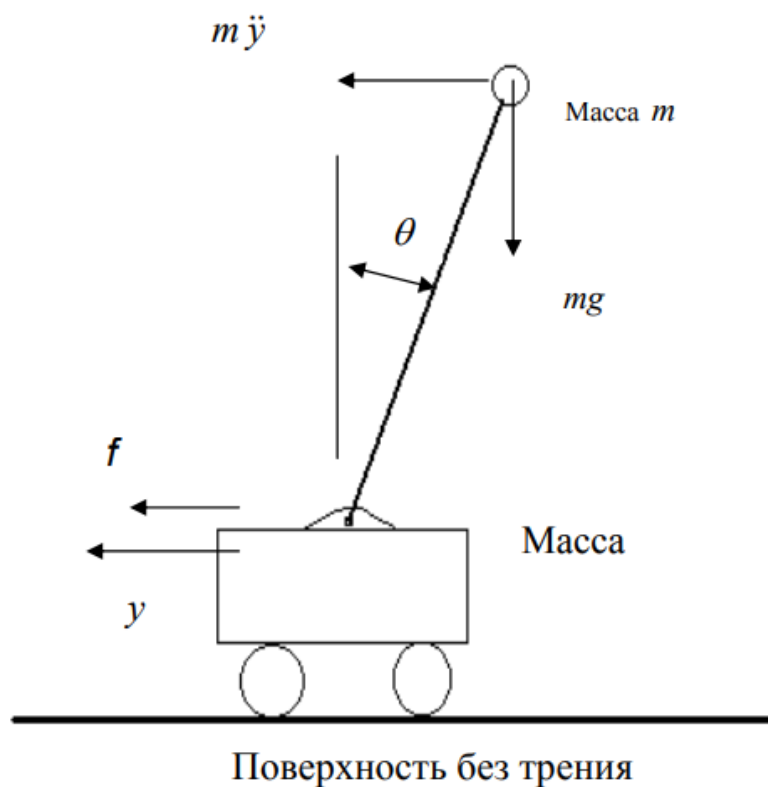


Рис. 1 Схема моделируемой системы

Таблица 1. Параметры объекта определяются следующей таблицей.

Параметр	Вариант				
	1	2	3	4	5
m [кг]	1	2	3	4	5
M [кг]	200	150	300	350	500
l [м]	1.2	2	2.5	1.5	2

$$g = 9.81 \frac{i}{\tilde{n}^2}.$$

1. Математические модели объектов и систем управления

1.1. Модель в пространстве состояния

Из условий нам дано следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0 \\ ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Модель в пространстве состояний представляется в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = g(x, u) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1.2)$$

где вектор входных воздействий – u , а вектор выходных переменных – y .

$$\begin{aligned} M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) &= 0 \\ ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Система состоит из уравнений второго порядка, поэтому сразу составить МПС нельзя.

Первым делом нужно понизить степени уравнений через замену переменных.

1. Из первого уравнения выразим \ddot{y} :

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}(u(t) - ml\ddot{\theta}) \quad (1.1.4)$$

2. Подставим выражение (1.1.4) во второе уравнение:

$$ml \frac{(u(t) - ml\ddot{\theta})}{M} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0 \quad (1.1.4)$$

3. Упростим поделив выражение на ml :

$$\frac{u(t)}{M} - \frac{ml\ddot{\theta}}{M} + l\ddot{\theta} - g\theta = 0 \quad (1.1.5)$$

4. Выразим $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{\left(g\theta - \frac{u(t)}{M}\right)}{l - \frac{ml}{M}} \quad (1.1.6)$$

5. Упростим:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l - \frac{ml}{M}} \theta - \frac{1}{(Ml - ml)} u(t) \quad (1.1.7)$$

6. Подставим (1.1.7) в (1.1.4):

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} \left(u(t) - ml \left(\frac{g}{l - \frac{ml}{M}} \theta - \frac{1}{Ml - ml} u(t) \right) \right) \quad (1.1.8)$$

7. Упростим

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} \left(u(t) - \frac{gm}{1 - \frac{m}{M}} \theta + \frac{m}{M - m} u(t) \right) \quad (1.1.9)$$

8. Сгруппируем по $u(t)$, и внесем в скобки $1/M$:

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} \left(1 + \frac{m}{M - m} \right) u(t) - \frac{gm}{M - m} \theta \quad (1.1.10)$$

9. Приведем выражение перед $u(t)$ под общий знаменатель, получим уравнение (1.1.11)

$$\ddot{y} = \frac{1}{M - m} u(t) - \frac{gm}{M - m} \theta \quad (1.1.11)$$

Понизим степень уравнений через замену переменных:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (1.1.12)$$

И включить новые зависимости в систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{M - m} u(t) - \frac{gm}{M - m} \theta \\ \dot{x}_4 = \frac{g}{l - \frac{ml}{M}} \theta - \frac{1}{M(l - \frac{ml}{M})} u(t) \end{cases} \quad (1.1.13)$$

Эту систему можно записать в матричном виде и получить модель в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1.14)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-gm}{M - m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g}{l - \frac{ml}{M}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{M - m}{(Ml - ml)} \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0), D = 0 \quad (1.1.15)$$

Подставив значения переменных в уравнение (1.1.15), получим:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,1134 & 0 & 0 \\ 0 & 6,6156 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0029 \\ -0,0019 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (1.1.16)$$

1.2. Вывод передаточной функции и модели «вход-выход» из непрерывной модели в пространстве состояний

Передаточная функция в операторной форме (или матричная передаточная функция) для объекта, может быть представлена в виде:

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B + D \quad (1.2.1)$$

Для того чтобы получить формулу 1.2.1 выразим X через p , A , B , и:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ pEX &= AX + Bu \\ (pE - A)X &= Bu \\ X &= (pE - A)^{-1}Bu \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

И подставим в Y :

$$\begin{aligned} Y &= CX \\ Y &= C(pE - A)^{-1}Bu \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Для вычисления резольвенты матрицы $(pE - A)^{-1}$ воспользуемся леммой о вычислении резольвенты:

$$\begin{aligned} (pE - A)^{-1} &= \frac{F(p)}{X_n(p)} \\ F(p) &= F_1 p^{n-1} + F_2 p^{n-2} + \dots + F_{(n-1)} p + F_n \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

$$\chi_n(p) = \det(pE - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

Коэффициенты характеристического многочлена a_i и матрицы F_i вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} F_1 &= E_n, a_1 = -\text{trace}(F_1 A) \\ F_2 &= F_1 A + a_1 E_n, a_2 = -\frac{1}{2} \text{trace}(F_2 A) \\ &\dots \\ F_k &= F_{k-1} A + a_{k-1} E_n, a_k = -\frac{1}{2} \text{trace}(F_k A) \\ &\dots \\ F_n &= F_{n-1} A + a_{n-1} E_n, a_n = -\frac{1}{2} \text{trace}(F_n A) \end{aligned}$$

Для проверки правильности вычислений воспользуемся контрольным выражением:

$$F_n A + a_n E_n = 0 \quad (1.2.5)$$

Описанные выше шаги для нахождения передаточной функции реализуем с помощью MATLAB.

```
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134 0 0;0 6.6156 0 0];
B=[0; 0; 0.0029; -0.0019];
C=[1 0 0 0];D=0;

F1=eye(4);a1=-trace(A);
F2=F1*A+a1* eye(4);a2=-(1/2)*trace(F2*A);
F3=F2*A+a2* eye(4);a3=-(1/3)*trace(F3*A);
F4=F3*A+a3* eye(4);a4=-(1/4)*trace(F4*A);
Pogr=F4*A+a4*eye(4)
syms p
h=p^4+a1*p^3+a2*p^2+a3*p+a4;
W=C*(F1*p^3+F2*p^2+F3*p+F4)/h)*B+D;
Wpa=vpa(W,5);
pretty(expand(Wpa))

%sys=ss(A,B,C,D);
%tf(sys)
```

Рис. 2 Код программы в MATLAB

```
Pogr =

      0      0      0      0
      0      0      0      0
      0      0      0      0
      0      0      0      0
```

Рис. 3 – Погрешность вычисления передаточной функции непрерывной модели

Можно сделать вывод, что все вычисления выполнены верны.

После выполнения данной программы получили передаточную функцию:

$$W = \frac{0.0189697799999999604340956693695999 p^2 + 0.00289999999999999026556452008662745 p}{-1.0 p^4 + 6.61560000000000858562998473644257 p^2 - 1.0 p^4 + 6.61560000000000858562998473644257 p^2}$$

Рис. 4 Передаточная функция полученная из MATLAB.

$$W = \frac{-0.0029p^2 + 0,01897}{-p^4 + 6.6156p^2} \quad (1.2.6)$$

Из ТАУ известно, что ПФ тесно связана с моделью «вход-выход»

$$A(p)y(p) = B(p)u(p) \rightarrow y(p) = [A(p)]^{-1}B(p)u(p) \quad (1.2.7)$$

Поэтому, сделав обратное преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, можно получить модель «вход-выход»:

$$y(p) = W(p)u(p) = \frac{B(p)}{A(p)}u(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{B(p)}{A(p)}u(t) \rightarrow A(p)y(t) = B(p)u(t) \quad (1.2.8)$$

Где p – оператор дифференцирования по времени t

$$\begin{aligned} A(p) &= a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = -p^4 + 6.6156p^2 \\ B(p) &= b_0p^2 + b_1p + b_2 = -0.0029p^2 + 0,01897 \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Получаем:

$$(-p^4 + 6.6156p^2)y(t) = (-0.0029p^2 + 0,01897)u(t) \quad (1.1.10)$$

Итоговая модель “вход-выход”:

$$-y(t)^{(4)} + 6.6156y(t)^{(2)} = -0.0029u^{(2)}(t) + 0,01897u(t) \quad (1.2.11)$$

1.3. Вывод эквивалентной модели в пространстве состояний из модели «вход-выход»

Перенесем все слагаемые в левую сторону из уравнения (1.1.10) и применим схему Горнера относительно p :

$$0.01897u(t) + p^2(-0.0029u - 6.6156y + p^2y) = 0 \quad (1.3.1)$$

Для составления вектора состояния X нужно поочередно выбрать выражения в скобках:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = px_1 \\ x_3 = -0.0029u - 6.6156x_1 + px_2 \\ x_4 = px_3 \\ 0.01897u(t) + px_4 = 0 \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Выразим u , а затем подставим в значения производных

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + 0.0029u + 6.6156x_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -0.01897u(t) \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Введем вектор состояний (x) , а также матрицы из (1.1.14):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.6156 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0029 \\ 0 \\ -0.01897 \end{pmatrix}; C = (1 \ 0 \ 0 \ 0); D = 0 \quad (1.3.4)$$

1.4. Доказательство эквивалентности моделей в пространстве состояний

Матрицы, полученные из пункта 1.3 для уравнения “вход-состояние-выход” обозначим символом $\sim (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{x})$.

Произведем замену $x(t) = S\tilde{x}(t)$, где S – неособенная квадратная матрица. В результате получим следующие соотношения

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= S^{-1}AS\tilde{x} + S^{-1}Bu \\ y &= CS\tilde{x} + Du\end{aligned}\quad (1.4.1)$$

Теперь нам нужно найти такую матрицу преобразования SSS , которая сделает две системы эквивалентными, т.е. будет удовлетворять следующим условиям:

$$\tilde{A} = S^{-1}AS, \tilde{B} = S^{-1}B, \tilde{C} = CS \quad (1.4.2)$$

Для этого используем матрицу управляемости объекта. Поскольку управляющей является лишь первая компонента внешнего воздействия, то из элементов первого столбца матрицы B составим вектор b и построим матрицу управляемости объекта, отвечающую математической модели, определяемой соотношением:

$$\begin{aligned}S_y &= [b, Ab, A^2b, A^3b] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0,0029 & 0 & 0,0002 \\ 0 & -0,0019 & 0 & -0,0126 \\ 0,0029 & 0 & 0,0002 & 0 \\ -0,0019 & 0 & -0,0126 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.4.3)$$

Аналогично для модели в формуле (1.3.4):

$$\begin{aligned}\tilde{S}_y &= [\tilde{b}, \tilde{A}\tilde{b}, \tilde{A}^2\tilde{b}, \tilde{A}^3\tilde{b}, \tilde{A}^4\tilde{b}] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0,0029 & 0 & 0,0002 \\ 0,0029 & 0 & 0,0002 & 0 \\ 0 & -0,0190 & 0 & 0 \\ -0,0190 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.4.4)$$

Найдем матрицу S по формуле:

$$S = S_y \tilde{S}_y^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0010 & 0 & 0,0002 & 0 \\ -58,3983 & 0 & -8,8274 & 0 \\ 0 & 1,0010 & 0 & 0,0002 \\ 0 & -58,3983 & 0 & -8,8274 \end{pmatrix}\quad (1.4.5)$$

Рассчитаем погрешности вычислений:

$$\begin{aligned}
Pog_{\tilde{A}} &= \tilde{A} - S^{-1}AS \\
Pog_{\tilde{B}} &= \tilde{B} - S^{-1}B \\
Pog_{\tilde{C}} &= \tilde{C} - CS
\end{aligned}
\tag{1.4.6}$$

Для расчета погрешностей выполним код в MATLAB:

```

% Определяем исходные матрицы A и B
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134 0 0;0 6.6156 0 0];
B = [0; 0; 0.0029; -0.0019];
C=[1 0 0 0];

% Определяем матрицы с волной (Avoln и Bvoln)
Avoln = [0 1 0 0; 6.6156 0 1 0; 0 0 0 1; 0 0 0 0];
Bvoln = [0; 0.0029; 0; -0.01897];
Cvoln = [1 0 0 0];

% Вычисление b, Ab, A^2b, A^3b, A^4b для A и B
b = B;
Ab = A * B;
A2b = A * Ab;
A3b = A * A2b;

% Создание матрицы Sy (состояния для исходной системы)
Sy = [b, Ab, A2b, A3b];

% Вычисление bvoln, Abvoln, A^2bvoln, A^3bvoln для Avoln и Bvoln
bvoln = Bvoln;
Abvoln = Avoln * Bvoln;
A2bvoln = Avoln * Abvoln;
A3bvoln = Avoln * A2bvoln;

% Создание матрицы Syvoln (состояния для системы с волной)
Syvoln = [bvoln, Abvoln, A2bvoln, A3bvoln];

% Вычисление матрицы S и погрешностей
S = Sy * inv(Syvoln);

Pog_A = Avoln - inv(S)*A*S
Pog_B = Bvoln - inv(S)*B
Pog_C = Cvoln - C*S

% Вывод результатов
disp('Матрица Sy = ');
disp(Sy);

disp('Матрица Syvoln = ');
disp(Syvoln);

disp('Матрица S = ');
disp(S);

```

Рис. 5 – Код MATLAB для нахождения погрешностей вычислений

```

Pog_A =

    1.0e-15 *
         0         0         0    0.0056
    0.8882         0    0.4441         0
         0    0.8882         0    0.2220
         0         0         0         0

Pog_B =

    1.0e-17 *
         0
    0.0434
         0
    0.3469

pog_C =

   -0.0010         0   -0.0002         0

```

Рис. 6 – Погрешности вычислений, рассчитанные в MATLAB.

Поскольку матрицы ошибок $Pog_{\tilde{A}}$ и $Pog_{\tilde{B}}$ имеют незначительные значения, это говорит о том, что динамика систем в основном схожа. Однако, различие в $Pog_{\tilde{C}}$ указывает на то, что при оценке выходов системы могут возникать более значительные различия.

1.5. Получение дискретной модели в пространстве состояний

Найдем шаг дискретизации. Для этого понадобится вычислить вторую норму исходной матрицы A:

$$T \approx \frac{1}{\|A\|_2} = \quad (1.5.1)$$

Построим модель системы в виде:

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = A_g x_k + B_g u_k \\ y_k = C_g x_k + D_g u_k \end{cases} \quad (1.5.2)$$

$$\begin{aligned} A_g &= e^{AT} \\ B_g &= \int_0^T e^{A\tau} d\tau B \\ C_g &= C \\ D_g &= D \end{aligned}$$

Для вычисления матриц A и B воспользуемся MATLAB.

```

% Определяем исходные матрицы A и B
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134 0 0;0 6.6156 0 0];
B = [0; 0; 0.0029; -0.0019];
C = [1 0 0 0];

% Вычисляем вторую норму матрицы A
T_d = 1 / norm(A, 2);

% Вычисляем матрицу Ag
Ag = expm(A * T_d);
Ag = vpa(Ag, 7);

% Вычисляем матрицу Bg с использованием функции integral для интегрирования
Bg=quadv(@(t) expm(A*t), 0,T_d)*B;
Bg = vpa(Bg, 5);

% Вывод результатов
disp('Ag = ');
disp(Ag);
disp('Bg = ');
disp(Bg);

```

Рис. 7 – Код программы в MATLAB

Подставляем полученные матрицы в формулу (1.5.2) и получаем дискретную модель в пространстве состояний:

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & -0.001311533 & 0.1511357 & -0.00006574209 \\ 0 & 1.076513 & 0 & 0.154971 \\ 0 & -0.01757371 & 1 & -0.001311533 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 1.076513 \end{pmatrix}, B_g = \begin{pmatrix} 0.000033126 \\ -0.000021975 \\ 0.00043842 \\ -0.00029444 \end{pmatrix} \quad (1.5.3)$$

$$C_g = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0), D_g = (0)$$

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = A_g x_k + B_g u_k \\ y_k = C_g x_k + D_g u_k \end{cases}$$

1.6. Вывод дискретных передаточной функции и модели «вход-выход» из дискретной модели в пространстве состояний

Давайте теперь представим сдвиг вектора состояния в следующем виде:

$$x_k + 1 = \xi x_k \quad (1.6.1)$$

Где ξ - оператор сдвига по времени

Аналогично с непрерывной моделью:

$$\begin{aligned}
\xi x_k &= A_d x_k + B_d u_k \Rightarrow \\
\xi x_k - A_d x_k &= B_d u_k \Rightarrow \\
(\xi E - A_d) x_k &= B_d u_k \Rightarrow \\
x_k &= (\xi E - A_d)^{-1} B_d u_k, \\
W_d(\xi) &= \frac{b_d(\xi)}{a_d(\xi)}, \\
(\xi E - A_d)^{-1} &= \frac{\tilde{B}_d(\xi)}{\chi_n^A(\xi)}
\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Перепишем программу из рисунка 2 для случая с дискретной моделью пространства состояний:

```

A = [
    1.0, -0.001311533, 0.1511357, -0.00006574209;
    0,    1.076513,    0,    0.154971;
    0, -0.01757371,    1.0, -0.001311533;
    0,    1.025226,    0,    1.076513
];
Bg = [
    0.000033126;
    -0.000021975;
    0.00043842;
    -0.00029444
];
C=[1 0 0 0];D=0;

F1=eye(4);a1=-trace(A);
F2=F1*A+a1* eye(4);a2=-(1/2)*trace(F2*A);
F3=F2*A+a2* eye(4);a3=-(1/3)*trace(F3*A);
F4=F3*A+a3* eye(4);a4=-(1/4)*trace(F4*A);
Pogr=F4*A+a4*eye(4)
syms p
h=p^4+a1*p^3+a2*p^2+a3*p+a4;
W=C*(F1*p^3+F2*p^2+F3*p+F4)/h)*B+D;
Wpa=vpa(W,5);
pretty(expand(Wpa))

```

Рис. 8 – Код программы в MATLAB

```

0.00043841841401937016223784145576689
-----
4      3      2
p - 4.1530259999999543651938438415527 p + 6.3060519407226820476353168487549 p - 4.1530258814464104943908751010895 p + 0.99999994072300069092307239770889
+
2
0.00043841843997097816091243247195794 p
-----
4      3      2
p - 4.1530259999999543651938438415527 p + 6.3060519407226820476353168487549 p - 4.1530258814464104943908751010895 p + 0.99999994072300069092307239770889
|
0.00094315395172703096022300551194193 p
-----
4      3      2
p - 4.1530259999999543651938438415527 p + 6.3060519407226820476353168487549 p - 4.1530258814464104943908751010895 p + 0.99999994072300069092307239770889

```

Рис. 9 – Передаточная функция дискретной модели, рассчитанная в MATLAB.

Перепишем полученную передаточную функцию:

$$Wg(\xi) = \frac{0.0004384\xi^2 - 0.0009432\xi + 0.0004384}{\xi^4 - 4.153\xi^3 + 6.306\xi^2 - 4.153\xi + 1} \tag{1.6.3}$$

Используя полученную передаточную функцию, получаем дискретную модель «вход-выход»:

$$\begin{aligned} y_{k+4} - 4.153y_{k+3} + 6.306y_{k+2} - 4.153y_{k+1} + y_k = \\ = 0.0004384u_{k+2} - 0.0009432u_{k+1} - 0.0004384u_k \end{aligned}$$