

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа «Компьютерных технологий и информационных систем»

Курсовой проект
Управление перевернутым маятником
по дисциплине «Теория автоматического управления»
Вариант 11.4

Выполнил:

студент группы 5130902/20201

_____ А. И. Сафонов
подпись

Проверил:

ассистент

_____ В. В. Кравченко
подпись

«__» _____ 2024

Санкт-Петербург
2024

Оглавление

<i>Задание</i>	<i>3</i>
1. Математические модели объектов и систем управления	5
1.1. <i>Модель в пространстве состояния.....</i>	<i>5</i>
1.2. <i>Вывод передаточной функции и модели «вход-выход» из непрерывной модели в пространстве состояний</i>	<i>7</i>
1.3. <i>Вывод эквивалентной модели в пространстве состояний из модели «вход-выход»</i>	<i>9</i>
1.4. <i>Доказательство эквивалентности моделей в пространстве состояний</i>	<i>10</i>
1.5. <i>Получение дискретной модели в пространстве состояний</i>	<i>12</i>
1.6. <i>Вывод дискретных передаточной функции и модели «вход-выход» из дискретной модели в пространстве состояний</i>	<i>13</i>
2. Исследование реакций во временной области	16
2.1. <i>Переход к канонической жордановой форме.....</i>	<i>16</i>
2.2. <i>Переходная характеристика</i>	<i>19</i>
2.3. <i>Импульсная характеристик.....</i>	<i>20</i>
2.4. <i>Ненулевые начальные условия</i>	<i>21</i>

Задание

Перевернутый маятник смонтирован на тележке, как показано на рисунке. Тележка должна двигаться таким образом, чтобы масса шара m на конце маятника всегда занимала вертикальное положение. В качестве выходных переменных используются: перемещение тележки $y(t)$ и угол отклонения маятника $\theta(t)$. Управляющее воздействие – сила $f(t)$, приложенная к тележке. Задача заключается в стабилизации тележки в требуемом положении $y(t) = y_{уст}$.

Дифференциальные уравнения, описывающие движение данной системы, можно получить, записав выражения для суммы сил, действующих в горизонтальном направлении, и суммы моментов относительно точки вращения. Будем считать, что масса тележки $M, M \gg m$ и угол отклонения от вертикали θ является малым. Тогда можно ограничиться линейной моделью и использовать уравнения для суммы сил $M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0$ и для суммы моментов $ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0$

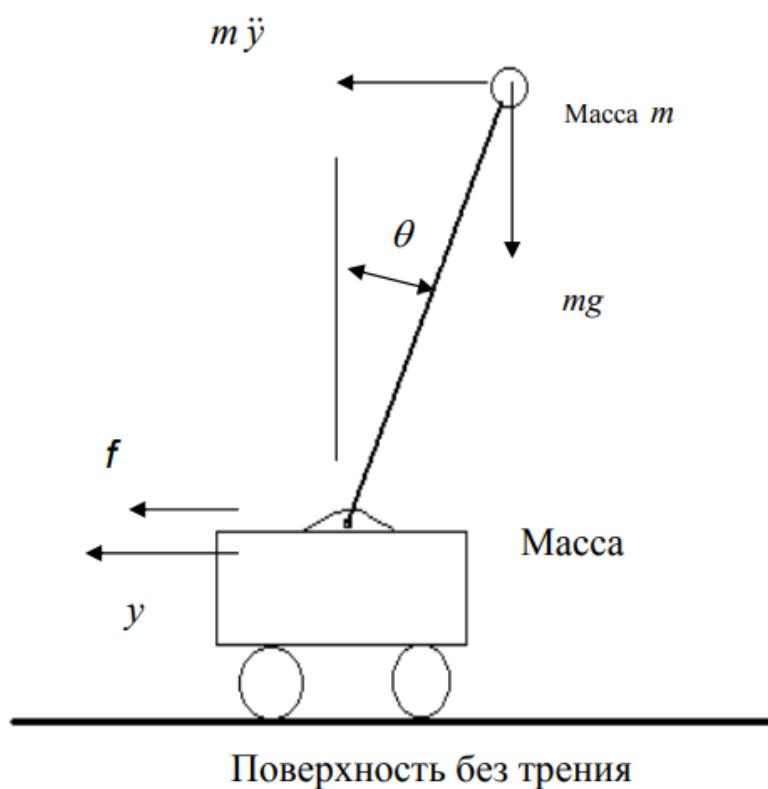


Рис. 1 Схема моделируемой системы

Таблица 1. Параметры объекта определяются следующей таблицей.

Параметр	Вариант				
	1	2	3	4	5
m [кг]	1	2	3	4	5
M [кг]	200	150	300	350	500
l [м]	1.2	2	2.5	1.5	2

$$g = 9.81 \frac{i}{\tilde{n}^2}.$$

1. Математические модели объектов и систем управления

1.1. Модель в пространстве состояния

Из условий нам дано следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0 \\ ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0 \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Модель в пространстве состояний представляется в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = g(x, u) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1.2)$$

где вектор входных воздействий – u , а вектор выходных переменных – y .

$$\begin{aligned} M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) &= 0 \\ ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Система состоит из уравнений второго порядка, поэтому сразу составить МПС нельзя. Первым делом нужно понизить степени уравнений через замену переменных.

1. Из первого уравнения выразим \ddot{y} :

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}(u(t) - ml\ddot{\theta}) \quad (1.1.4)$$

2. Подставим выражение (1.1.4) во второе уравнение:

$$ml \frac{(u(t) - ml\ddot{\theta})}{M} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0 \quad (1.1.5)$$

3. Упростим поделив выражение на ml :

$$\frac{u(t)}{M} - \frac{ml\ddot{\theta}}{M} + l\ddot{\theta} - g\theta = 0 \quad (1.1.6)$$

4. Выразим $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{\left(g\theta - \frac{u(t)}{M}\right)}{l - \frac{ml}{M}} \quad (1.1.7)$$

5. Упростим:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l - \frac{ml}{M}} \theta - \frac{1}{(Ml - ml)} u(t) \quad (1.1.8)$$

6. Подставим (1.1.8) в (1.1.4):

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} \left(u(t) - ml \left(\frac{g}{l - \frac{ml}{M}} \theta - \frac{1}{Ml - ml} u(t) \right) \right) \quad (1.1.9)$$

7. Упростим

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} \left(u(t) - \frac{gm}{1 - \frac{m}{M}} \theta + \frac{m}{M - m} u(t) \right) \quad (1.1.10)$$

8. Сгруппируем по $u(t)$, и внесем в скобки $1/M$:

$$\ddot{y} = \frac{1}{M} \left(1 + \frac{m}{M - m} \right) u(t) - \frac{gm}{M - m} \theta \quad (1.1.11)$$

9. Приведем выражение перед $u(t)$ под общий знаменатель, получим уравнение (1.1.12)

$$\ddot{y} = \frac{1}{M - m} u(t) - \frac{gm}{M - m} \theta \quad (1.1.12)$$

Понизим степень уравнений через замену переменных:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (1.1.13)$$

И включить новые зависимости в систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{M - m} u(t) - \frac{gm}{M - m} \theta \\ \dot{x}_4 = \frac{g}{l - \frac{ml}{M}} \theta - \frac{1}{M(l - \frac{ml}{M})} u(t) \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Эту систему можно записать в матричном виде и получить модель в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1.15)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-gm}{M - m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g}{l - \frac{ml}{M}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{M - m}{(Ml - ml)} \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0), D = 0 \quad (1.1.16)$$

Подставив значения переменных в уравнение (1.1.16), получим:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1134104046 & 0 & 0 \\ 0 & 6.615606936 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00289017 \\ -0.00192678 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \quad (1.1.17)$$

1.2. Вывод передаточной функции и модели «вход-выход» из непрерывной модели в пространстве состояний

Передаточная функция в операторной форме (или матричная передаточная функция) для объекта, может быть представлена в виде:

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B + D \quad (1.2.1)$$

Для того чтобы получить формулу 1.2.1 выразим X через p , A , B , и:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ pEX &= AX + Bu \\ (pE - A)X &= Bu \\ X &= (pE - A)^{-1}Bu \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

И подставим в Y :

$$\begin{aligned} Y &= CX \\ Y &= C(pE - A)^{-1}Bu \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Для вычисления резольвенты матрицы $(pE - A)^{-1}$ воспользуемся леммой о вычислении резольвенты:

$$\begin{aligned} (pE - A)^{-1} &= \frac{F(p)}{X_n(p)} \\ F(p) &= F_1 p^{n-1} + F_2 p^{n-2} + \dots + F_{(n-1)} p + F_n \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

$$\chi_n(p) = \det(pE - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_{n-1} p + a_n$$

Коэффициенты характеристического многочлена a_i и матрицы F_i вычисляются по рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} F_1 &= E_n, a_1 = -\text{trace}(F_1 A) \\ F_2 &= F_1 A + a_1 E_n, a_2 = -\frac{1}{2} \text{trace}(F_2 A) \\ &\dots \\ F_k &= F_{k-1} A + a_{k-1} E_n, a_k = -\frac{1}{2} \text{trace}(F_k A) \\ &\dots \\ F_n &= F_{n-1} A + a_{n-1} E_n, a_n = -\frac{1}{2} \text{trace}(F_n A) \end{aligned}$$

Для проверки правильности вычислений воспользуемся контрольным выражением:

$$F_n A + a_n E_n = 0 \quad (1.2.5)$$

Описанные выше шаги для нахождения передаточной функции реализуем с помощью MATLAB.

```
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];
C=[1 0 0 0];D=0;

F1=eye(4);a1=-trace(A);
F2=F1*A+a1* eye(4);a2=-(1/2)*trace(F2*A);
F3=F2*A+a2* eye(4);a3=-(1/3)*trace(F3*A);
F4=F3*A+a3* eye(4);a4=-(1/4)*trace(F4*A);
Pogr=F4*A+a4*eye(4)
syms p
h=p^4+a1*p^3+a2*p^2+a3*p+a4;
W=C*( (F1*p^3+F2*p^2+F3*p+F4)/h)*B+D;
Wpa=vpa(W,5);
pretty(expand(Wpa))

%sys=ss(A,B,C,D);
%tf(sys)
```

Рис. 2 Код программы в MATLAB

```
Pogr =

      0      0      0      0
      0      0      0      0
      0      0      0      0
      0      0      0      0
```

Рис. 3 – Погрешность вычисления передаточной функции непрерывной модели

Можно сделать вывод, что все вычисления выполнены верны.

После выполнения данной программы получили передаточную функцию:

$$\frac{0.018901711798846001428949652281982 \quad 0.00289017000000001362411694572074339 \, p^2}{-1.0 \, p^4 + 6.6156069360004039481282234191895 \, p^2 - 1.0 \, p^4 + 6.6156069360004039481282234191895 \, p^2}$$

Рис. 4 Передаточная функция полученная из MATLAB.

$$W = \frac{-0.00289017p^2 + 0.0189017117988}{-p^4 + 6.615606936p^2} \quad (1.2.6)$$

Из ТАУ известно, что ПФ тесно связана с моделью «вход-выход»

$$A(p)y(p) = B(p)u(p) \rightarrow y(p) = [A(p)]^{-1}B(p)u(p) \quad (1.2.7)$$

Поэтому, сделав обратное преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, можно получить модель «вход-выход»:

$$y(p) = W(p)u(p) = \frac{B(p)}{A(p)} u(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{B(p)}{A(p)} u(t) \rightarrow A(p)y(t) = B(p)u(t) \quad (1.2.8)$$

Где p – оператор дифференцирования по времени t

$$\begin{aligned} A(p) &= a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = -p^4 + 6.6156 p^2 \\ B(p) &= b_0 p^2 + b_1 p + b_2 = -0.0029 p^2 + 0.01897 \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Получаем:

$$(-p^4 + 6.615606936 p^2)y(t) = (-0.00289017 p^2 + 0.018901711798)u(t) \quad (1.2.10)$$

Итоговая модель “вход-выход”:

$$-y(t)^{(4)} + 6.615606936 y(t)^{(2)} = -0.00289017 u^{(2)}(t) + 0.018901711798 u(t) \quad (1.2.11)$$

1.3. Вывод эквивалентной модели в пространстве состояний из

МОДЕЛИ «ВХОД-ВЫХОД»

Перенесем все слагаемые в левую сторону из уравнения (1.2.10) и применим схему Горнера относительно p :

$$0.018901711798 u(t) + p^2(-0.00289017 u - 6.615606936 y + p^2 y) = 0 \quad (1.3.1)$$

Для составления вектора состояния X нужно поочередно выбрать выражения в скобках:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = p x_1 \\ x_3 = -0.00289017 u - 6.615606936 x_1 + p x_2 \\ x_4 = p x_3 \\ 0.018901711798 u(t) + p x_4 = 0 \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Выразим u , а затем подставим в значения производных

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + 0.00289017 u + 6.615606936 x_1 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -0.018901711798 u(t) \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Введем вектор состояний (x) , а также матрицы из (1.1.14):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.615606936 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.00289017 \\ 0 \\ -0.018901711798 \end{pmatrix}; C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0); D = 0 \quad (1.3.4)$$

1.4. Доказательство эквивалентности моделей в пространстве состояний

Матрицы, полученные из пункта 1.3 для уравнения “вход-состояние-выход” обозначим символом $\sim (\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{x})$.

Произведем замену $x(t) = S\tilde{x}(t)$, где S – неособенная квадратная матрица. В результате получим следующие соотношения

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= S^{-1}AS\tilde{x} + S^{-1}Bu \\ y &= CS\tilde{x} + Du\end{aligned}\quad (1.4.1)$$

Теперь нам нужно найти такую матрицу преобразования SSS, которая сделает две системы эквивалентными, т.е. будет удовлетворять следующим условиям:

$$\tilde{A} = S^{-1}AS, \tilde{B} = S^{-1}B, \tilde{C} = CS \quad (1.4.2)$$

Для этого используем матрицу управляемости объекта. Поскольку управляющей является лишь первая компонента внешнего воздействия, то из элементов первого столбца матрицы B составим вектор b и построим матрицу управляемости объекта, отвечающую математической модели, определяемой соотношением:

$$\begin{aligned}S_y &= [b, Ab, A^2b, A^3b] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0,0029 & 0 & 0,0002 \\ 0 & -0,0019 & 0 & -0,0127 \\ 0,00289017 & 0 & 0,0002 & 0 \\ -0,018901711798 & 0 & -0,0127 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.4.3)$$

Аналогично для модели в формуле (1.3.4):

$$\begin{aligned}\tilde{S}_y &= [\tilde{b}, \tilde{A}\tilde{b}, \tilde{A}^2\tilde{b}, \tilde{A}^3\tilde{b}] = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0,0029 & 0 & 0,0002 \\ 0,0029 & 0 & 0,0002 & 0 \\ 0 & -0,0189 & 0 & 0 \\ -0,0189 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.4.4)$$

Найдем матрицу S по формуле:

$$S = S_y \tilde{S}_y^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0010 & 0 & 0,0002 & 0 \\ -58,3333 & 0 & -8,8175 & 0 \\ 0 & 1,0010 & 0 & 0,0002 \\ 0 & -58,3333 & 0 & -8,8175 \end{pmatrix}\quad (1.4.5)$$

Рассчитаем погрешности вычислений:

$$\begin{aligned}Pog_{\tilde{A}} &= \tilde{A} - S^{-1}AS \\ Pog_{\tilde{B}} &= \tilde{B} - S^{-1}B \\ Pog_{\tilde{C}} &= \tilde{C} - CS\end{aligned}\quad (1.4.6)$$

Для расчета погрешностей выполним код в MATLAB:

```
% Определяем исходные матрицы A и B
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];
C=[1 0 0 0];D=0;
% Определяем матрицы с волной (Avoln и Bvoln)
Avoln = [0 1 0 0; 6.615606936 0 1 0; 0 0 0 1; 0 0 0 0];
Bvoln = [0; 0.00289017; 0; -0.018901711798];
Cvoln = [1 0 0 0];

% Вычисление b, Ab, A^2b, A^3b, A^4b для A и B
b = B;
Ab = A * B;
A2b = A * Ab;
A3b = A * A2b;

% Создание матрицы Sy (состояния для исходной системы)
Sy = [b, Ab, A2b, A3b];

% Вычисление bvoln, Abvoln, A^2bvoln, A^3bvoln для Avoln и Bvoln
bvoln = Bvoln;
Abvoln = Avoln * Bvoln;
A2bvoln = Avoln * Abvoln;
A3bvoln = Avoln * A2bvoln;

% Создание матрицы Syvoln (состояния для системы с волной)
Syvoln = [bvoln, Abvoln, A2bvoln, A3bvoln];

% Вычисление матрицы S и погрешностей
S = Sy * inv(Syvoln);

Pog_A = Avoln - inv(S)*A*S
Pog_B = Bvoln - inv(S)*B
Pog_C = Cvoln - C*S
% Вывод результатов
disp('Матрица Sy = ');
disp(Sy);

disp('Матрица Syvoln = ');
disp(Syvoln);

disp('Матрица S = ');
disp(S);
```

Рис. 5 – Код MATLAB для нахождения погрешностей вычислений

```

Pog_A =

    1.0e-15 *
         0    0.1110         0    0.0031
    0.8882         0    0.2220         0
         0    0.8882         0    0.1110
         0         0         0         0

Pog_B =

         0
         0
         0
         0

pog_C =

    1.0e-08 *
    0.3862         0    0.0591         0

```

Рис. 6 – Погрешности вычислений, рассчитанные в MATLAB.

Поскольку матрицы ошибок $Pog_{\tilde{A}}$ и $Pog_{\tilde{B}}$ имеют незначительные значения, это говорит о том, что динамика систем в основном схожа. Однако, различие в $Pog_{\tilde{C}}$ указывает на то, что при оценке выходов системы могут возникать более значительные различия.

1.5. Получение дискретной модели в пространстве состояний

Найдем шаг дискретизации. Для этого понадобится вычислить вторую норму исходной матрицы A:

$$T \approx \frac{1}{||A||_2} = 0.1511 \quad (1.5.1)$$

Построим модель системы в виде:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} \lambda_{k+1} = A_g x_k + B_g u_k \\ y_k = C_g x_k + D_g u_k \end{cases} \\
 A_g = e^{AT} \\
 B_g = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B \\
 C_g = C \\
 D_g = D
 \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Для вычисления матриц A и B воспользуемся MATLAB.

```

% Определяем исходные матрицы A и B
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];
C=[1 0 0 0];D=0;
% Вычисляем вторую норму матрицы A
T_d = 1 / norm(A, 2)

% Вычисляем матрицу Ag
Ag = expm(A * T_d);
Ag = vpa(Ag, 7);

% Вычисляем матрицу Bg с использованием функции integral для интегрирования
Bg=quadv(@(t)expm(A*t), 0,T_d)*B;
Bg = vpa(Bg, 5);

% Вывод результатов
disp('Ag = ');
disp(Ag);
disp('Bg = ');
disp(Bg);

```

Рис. 7 – Код программы в MATLAB

Подставляем полученные матрицы в формулу (1.5.2) и получаем дискретную модель в пространстве состояний:

$$\begin{aligned}
 A_g = \begin{pmatrix} 1 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 1.076513 & 0 & 0.1549708 \\ 0 & -0.0175753 & 1 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 1.076513 \end{pmatrix}, B_g = \begin{pmatrix} 0.000033013 \\ -0.000022284 \\ 0.00043693 \\ -0.00029859 \end{pmatrix} \\
 C_g = (1 \ 0 \ 0 \ 0), D_g = (0) \\
 \begin{cases} \lambda_{k+1} = A_g x_k + B_g u_k \\ y_k = C_g x_k + D_g u_k \end{cases}
 \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

1.6. Вывод дискретных передаточной функции и модели «вход-выход» из дискретной модели в пространстве состояний

Давайте теперь представим сдвиг вектора состояния в следующем виде:

$$x_k + 1 = \xi x_k \quad (1.6.1)$$

Где ξ - оператор сдвига по времени

Аналогично с непрерывной моделью:

$$\begin{aligned}
\xi x_k &= A_d x_k + B_d u_k \Rightarrow \\
\xi x_k - A_d x_k &= B_d u_k \Rightarrow \\
(\xi E - A_d) x_k &= B_d u_k \Rightarrow \\
x_k &= (\xi E - A_d)^{-1} B_d u_k, \\
W_d(\xi) &= \frac{b_d(\xi)}{a_d(\xi)}, \\
(\xi E - A_d)^{-1} &= \frac{\tilde{B}_d(\xi)}{\chi_n^A(\xi)}
\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Перепишем программу из рисунка 2 для случая с дискретной моделью пространства состояний:

```

A = [
    1.0, -0.00131165, 0.1511355, -0.00006574791;
    0, 1.076513, 0, 0.1549708;
    0, -0.0175753, 1.0, -0.00131165;
    0, 1.025226, 0, 1.076513;
];
Bg = [
    0.000033126;
    -0.000021975;
    0.00043842;
    -0.00029444
];
C=[1 0 0 0];D=0;

F1=eye(4);a1=-trace(A);
F2=F1*A+a1* eye(4);a2=-(1/2)*trace(F2*A);
F3=F2*A+a2* eye(4);a3=-(1/3)*trace(F3*A);
F4=F3*A+a3* eye(4);a4=-(1/4)*trace(F4*A);
Pogr=F4*A+a4*eye(4)
syms p
h=p^4+a1*p^3+a2*p^2+a3*p+a4;
W=C*(F1*p^3+F2*p^2+F3*p+F4)/h)*Bg+D;
Wpa=vpa(W,5);
pretty(expand(Wpa))

```

Рис. 8 – Код программы в MATLAB

```

0.000033126000000001376566416411151295 p^4 - 0.000038138131042629065375915865232625 p^3 - 0.000038136116757978199666222983206171 p^2 +
-----
0.000033125366043670223622121616514807
+ -----
#1
where
#1 == p^4 - 4.1530259999999543651938438415527 p^3 + 6.3060521457682625623419880867004 p^2 - 4.1530262915366620291024446487427 p +
+ 1.0000001457681264582788571715355

```

A

Рис. 9 – Передаточная функция дискретной модели, рассчитанная в MATLAB.

Перепишем полученную передаточную функцию:

$$Wg(\xi) = \frac{0.000033126\xi^3 - 0.0003813813\xi^2 - 0.0000381361\xi + 0.000033125366}{\xi^4 - 4.15302599999995\xi^3 + 6.306052145768\xi^2 - 4.15302629153666\xi + 1} \tag{1.6.3}$$

Используя полученную передаточную функцию, получаем дискретную модель «ВХОД-ВЫХОД»:

$$\begin{aligned} y_{k+4} - 4.15302599999995y_{k+3} + 6.306052145768\xi^2 y_{k+2} - 4.153026291537y_{k+1} + y_k = \\ = 0.000033126u_{k+2} + 00003813813u_{k+2} - 0.0000381361u_{k+1} - 0.000033125366u_k \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

2. Исследование реакций во временной области

Второй раздел РГЗ будет посвящён исследованию реакций во временной области.

Задан ОУ (см. рис. 1), динамику которого можно описать моделью в пространстве состояний (1).

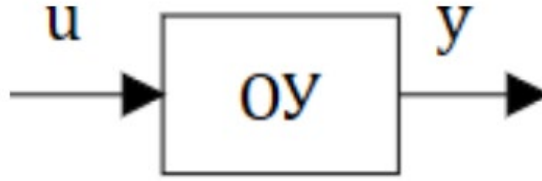


Рис. 10 – Объект управления в схематичном виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) + D u(t) \end{aligned} \right| \begin{aligned} x_{k+1} &= A_d x_k + B_d u_k \\ y_k &= C x_k + D u_k \end{aligned} \quad (2.0.1)$$

где $x(0) = x_0 = x^0$. Первое уравнение из (2.0.1) представляет собой ДУ первого порядка для непрерывной модели и разностное для дискретной, решение которых определяется интегральной и разностной формулами Коши соответственно:

$$x(t) = e^{At} x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad \left| \quad x_k = A_d^k x^0 + \sum_{i=0}^{k-1} A_d^{k-1-i} B_d u_i \quad (2.0.2)$$

Подставив (2) во второе уравнение системы (1), мы получим зависимость вида

$$y = f(x^0, u)$$

Изменяя начальные условия x^0 ОУ или подавая различные воздействия на вход u , мы будем получать на выходе реакцию системы во времени в виде переходных процессов. Их анализ является одним из методов исследования свойств ОУ, которые проявляются в реакции на типовые воздействия. Всего их три, и далее мы их рассмотрим.

2.1. Переход к канонической жордановой форме

Для исследования реакций во временной области необходимо выделить жорданову форму матрицы, сделав преобразование подобия:

$$x = Sz,$$

Где $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – неособенная матрица. Сделаем замену в МПС и в первом уравнении домножим слева на обратную матрицу S :

$$\left. \begin{aligned} \dot{z}(t) &= S^{-1} A S z(t) + S^{-1} B u(t) \\ y(t) &= C S z(t) + D u(t) \end{aligned} \right| \begin{aligned} z_{k+1} &= S_d^{-1} A_d x_k + S_d^{-1} B_d u_k \\ y_k &= C S x_k + D u_k \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

где $z(0) = z^0 = S^{-1} x^0, z_0 = z^0 = S_d^{-1} x^0$.

Преобразование вида $S^{-1}AS$ и даст жорданову матрицу J . Матрица J имеет блочнодиагональный вид: на главной диагонали находятся собственные числа матрицы A , а на первой наддиагонали могут располагаться единицы. Наличие единиц обуславливается кратностью выбранного собственного числа и следующей формулой

$$k_l = \text{rank}(A - \lambda_{p+i}E_n)^{l-1} - 2\text{rank}(A - \lambda_{p+i}E_n)^l + \text{rank}(A - \lambda_{p+i}E_n)^{l+1}, \quad (2.1.4)$$

где kl – число клеток порядка l . Клетки порядка $l > 1$ характеризуются наличием единиц в первой наддиагонали. Матрица S в данном случае является собственной матрицей матрицы A и составляется из её собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1134104046 & 0 & 0 \\ 0 & 6.615606936 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5721 \\ -2.5721 \end{pmatrix} \quad (2.1.5)$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 1.076513 & 0 & 0.1549708 \\ 0 & -0.0175753 & 1 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 1.076513 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.4751 \\ 0.6779 \end{pmatrix} \quad (2.1.6)$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & 0.3623 & -0.3623 \\ 0 & 0 & -0.0160 & -0.0160 \\ 0 & 0 & 0.9319 & 0.9319 \end{pmatrix} \quad (2.1.7)$$

$$S_d = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & 0.3623 & -0.3623 \\ 0 & 0 & -0.0160 & -0.0160 \\ 0 & 0 & 0.9319 & 0.9319 \end{pmatrix} \quad (2.1.8)$$

Код для вычисления полученных собственных векторов и собственных чисел:

```
A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 -0.1134 0 0; 0 6.6156 0 0];
% Где eigenvalues - матрица,
% на диагонали которой расположены собственные числа,
% Где eigenvectors - матрица,
% где столбцы являются собственными векторами матрицы.

[eigenvectors, eigenvalues] = eig(A);
disp('eigenvectors A');
disp(eigenvectors);
disp('eigenvalues A');
disp(eigenvalues);

Ad = [
    1.0, -0.001311533, 0.1511357, -0.00006574209;
    0,    1.076513,    0,    0.154971;
    0,   -0.01757371,    1.0,   -0.001311533;
    0,    1.025226,    0,    1.076513
];
[eigenvectors, eigenvalues] = eig(Ad);

disp('eigenvectors Ad');
disp(eigenvectors);
disp('eigenvalues Ad');
disp(eigenvalues);
```

Рис. 11 – Программа для вычислений собственных чисел и векторов

Результат выполнения программы:

```

eigenvectors A
    1.0000    -1.0000   -0.0062    0.0062
         0         0     0.3623   -0.3623
         0     0.0000   -0.0160   -0.0160
         0         0     0.9319    0.9319

eigenvalues A
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0     2.5721         0
         0         0         0    -2.5721

eigenvectors Ad
    1.0000    -1.0000   -0.0062    0.0062
         0         0     0.3623   -0.3623
         0     0.0000   -0.0160   -0.0160
         0         0     0.9319    0.9319

eigenvalues Ad
    1.0000         0         0         0
         0     1.0000         0         0
         0         0     1.4751         0
         0         0         0     0.6779

```

Рис. 12 – Полученные собственные вектора и числа для матриц A и A_d

Как видно, кратными числами являются «0» и «1». Найдём для непрерывной и дискретной моделей количество «клеток» Жордана соответственно:

$$k_1 = \text{rank}(A - 0E_n)^{1-1} - 2\text{rank}(A - 0E_n)^1 + \text{rank}(A - 0E_n)^{1+1} = 0$$

$$k_2 = \text{rank}(A - 0E_n)^{2-1} - 2\text{rank}(A - 0E_n)^2 + \text{rank}(A - 0E_n)^{2+1} = 1$$

$$k_1 = \text{rank}(A_d - 1E_n)^{1-1} - 2\text{rank}(A_d - 1E_n)^1 + \text{rank}(A_d - 1E_n)^{1+1} = 0$$

$$k_2 = \text{rank}(A_d - 1E_n)^{2-1} - 2\text{rank}(A_d - 1E_n)^2 + \text{rank}(A_d - 1E_n)^{2+1} = 1$$

```

1 - A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 -0.1134 0 0; 0 6.6156 0 0];
2 - Ad = [
3 -     1.0, -0.001311533, 0.1511357, -0.00006574209;
4 -     0,     1.076513,         0,     0.154971;
5 -     0, -0.01757371,         1.0, -0.001311533;
6 -     0,     1.025226,         0,     1.076513
7 - ];
8
9 - [S, E] = eig(A); [Sd, Ed] = eig(Ad);
0 - k1 = rank(A^0) - 2*rank(A^1) + rank(A^2);
1 - k2 = rank(A^1) - 2*rank(A^2) + rank(A^3);
2 - k1d = rank((Ad-eye(4))^0) - 2*rank((Ad-eye(4))^1) + rank((Ad-eye(4))^2);
3 - k2d = rank((Ad-eye(4))^1) - 2*rank((Ad-eye(4))^2) + rank((Ad-eye(4))^3);
4 - disp('k1: " + k1 + ", k2: " + k2);
5 - disp('k1d: " + k1d + ", k2d: " + k2d);

```

Command Window

New to MATLAB? See resources for [Getting Started](#).

```

>> kratnosty_geom
k1:0,k2: 1
k1d:0,k2d: 1

```

Рис. 13 – Программа для вычислений геометрических кратностей собственных чисел

У матрицы A_d есть кратное собственное значение ($\lambda_0 = 0$ – кратность равная 2) . Ее жорданова форма может быть записана как:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5721 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5721 \end{pmatrix} \quad (2.1.9)$$

У матрицы A_d есть кратное собственное значение ($\lambda_0 = 1$ – кратность равная 2) .. Ее жорданова форма может быть записана как:

$$J_d = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6779 \end{pmatrix} \quad (2.1.10)$$

2.2. Переходная характеристика

Переходная характеристика системы (ПХС) строится при нулевых начальных условиях и при входном воздействии единичной ступенчатой функции, или функции Хэвисайда:

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Учтём новые условия:

$$\begin{aligned} z(t) = \int_0^t e^{J(t-\tau)} S^{-1} B 1(\tau) d\tau &= \left| \begin{aligned} z_k &= \sum_{i=0}^{k-1} J_d^{k-1-i} S_d^{-1} B_d 1_i = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} J_d^{k-1-i} S_d^{-1} B_d = \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из системы после замены переменных, приняв во внимание действие единичной функции:

$$y(t) = CS(e^{Jt} - E_n)J^{-1}S^{-1}B + D \mid y_k = C_d \sum_{i=0}^{k-1} J_d^{k-1-i} S_d^{-1} B_d + D \quad (2.2.3)$$

и получим функцию переходной характеристики системы.\

Построение и исследование графиков непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech. Построенный график представлен на рис. 13.

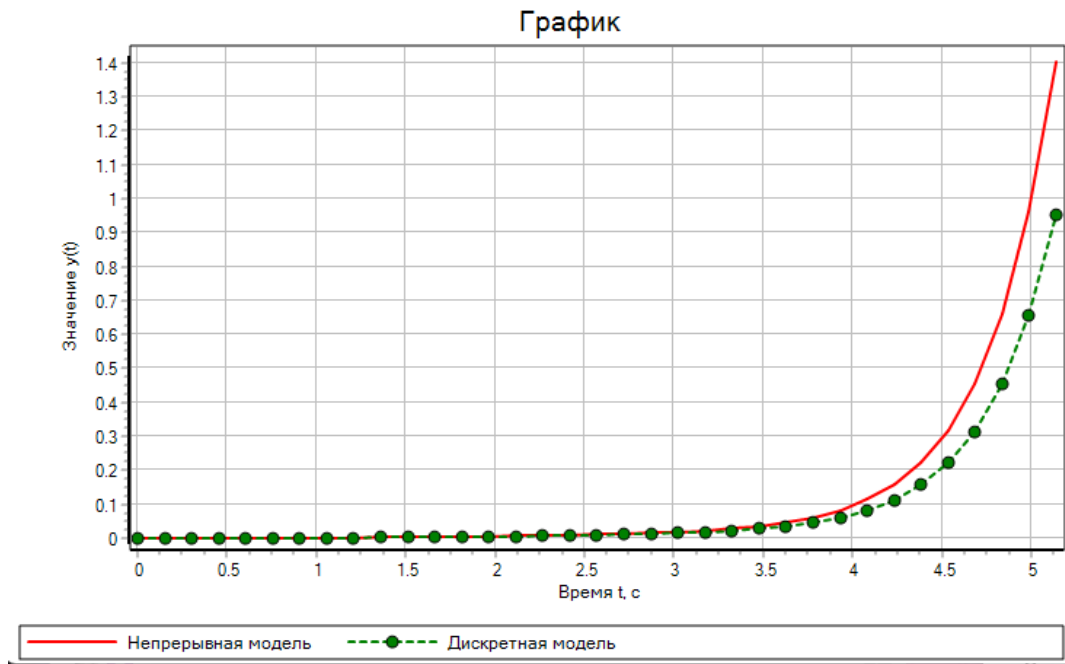


Рис. 14 – Переходная характеристика непрерывной и дискретной моделей

Из графика видно, что непрерывная модель и дискретная расходятся, поэтому снятие характеристик переходных процессов не требуется.

2.3. Импульсная характеристик

Импульсная характеристика системы (ИХС) строится при нулевых начальных условиях и при входном воздействии дельта-функции, или функции Дирака:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ 1, & t = t_0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Главной особенностью этой функции является её фильтрующее свойство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad \left| \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(t_i) \delta(t_i - t_0) = f(t_0). \right. \quad (2.3.2)$$

Учтём новые условия в:

$$z(t) = \int_0^t e^{J(t-\tau)} S^{-1} B \delta(\tau) d\tau = \left| \begin{aligned} z_k &= \sum_{i=0}^{k-1} J_{\text{д}}^{k-1-i} S_{\text{д}}^{-1} B_{\text{д}} \delta(t_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} J_{\text{д}}^{k-1} S_{\text{д}}^{-1} B_{\text{д}} = \end{aligned} \right. \quad (2.3.3)$$

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из (3):

$$y(t) = C S e^{Jt} S^{-1} B + D \delta(t) \quad | \quad y_k = C S_{\text{д}} J_{\text{д}}^{k-1} S_{\text{д}}^{-1} B_{\text{д}} + D \delta(t_k) \quad (2.3.4)$$

и получим функцию импульсной характеристики системы.

Построение и исследование графиков импульсной характеристики непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech. Построенный график представлен на рис. 14.

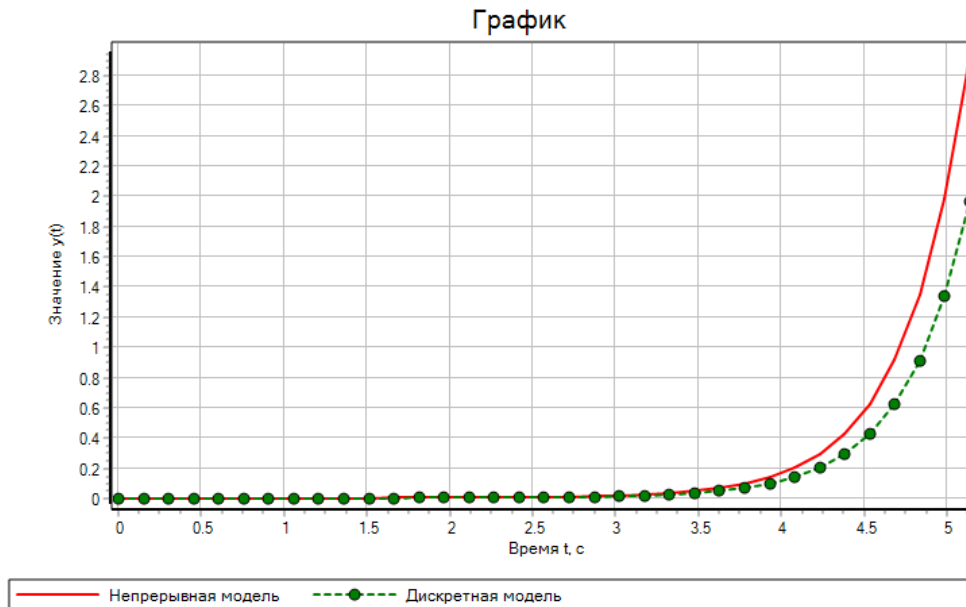


Рис. 15 – Импульсная характеристика непрерывной и дискретной моделей

Из графика ИХС видно, что непрерывная модель и дискретная расходятся, поэтому снятие характеристик переходных процессов не требуется.

2.4. Ненулевые начальные условия

Реакция на ненулевые начальные условия (ННУ) строится при отсутствии каких-либо внешних управлений и возмущений, но, чтобы хотя бы один элемент вектора x^0 был отличен от нуля. Учтём новые условия в:

$$z(t) = e^{Jt} S^{-1} x^0 \mid z_k = J_{\text{д}}^k S_{\text{д}}^{-1} x^0. \quad (2.4.1)$$

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из (2.1.1)

$$y(t) = C S e^{Jt} S^{-1} x^0 \mid y_k = C S J_{\text{д}}^k S_{\text{д}}^{-1} x^0 \quad (2.4.2)$$

и получим функцию реакции системы (2.0.1) на ненулевые начальные условия.

Построение и исследование графиков переходной характеристики с ненулевыми начальными условиями непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech.

В качестве не нулевых условий примем матрицу

$$xN0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (2.4.3)$$

Построенный график представлен на рис. 15.

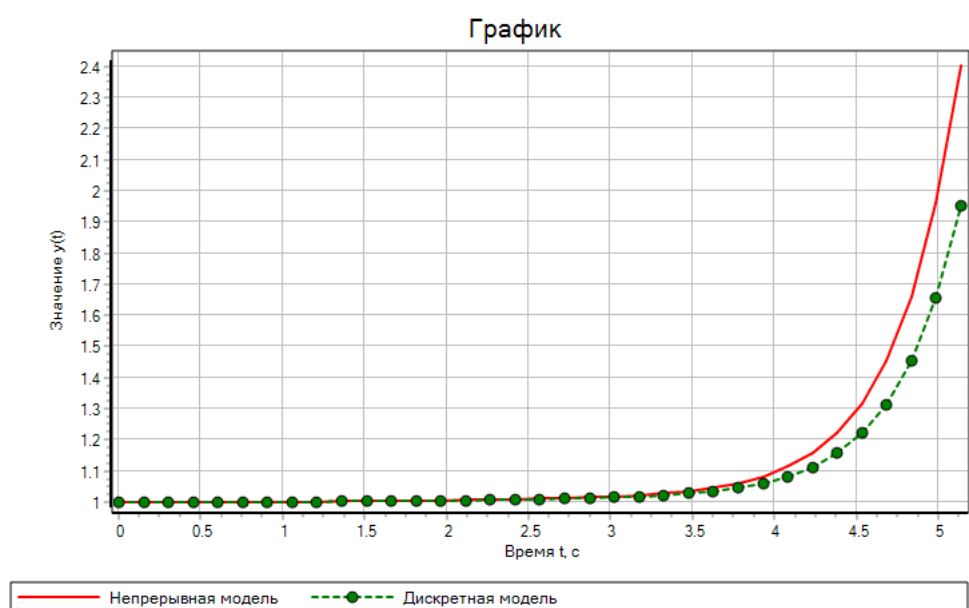


Рис. 16 – Реакция на ненулевые начальные условия непрерывной и дискретной моделей
 Схема объекта в программе SimInTech представлена на рис. 14.

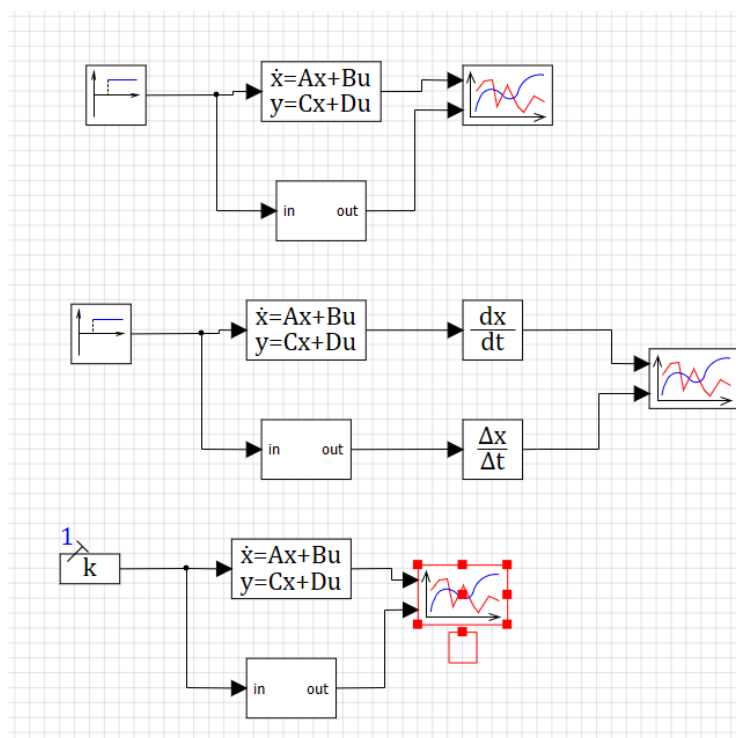


Рис. 17 – Схема объекта для исследования реакций во временной области

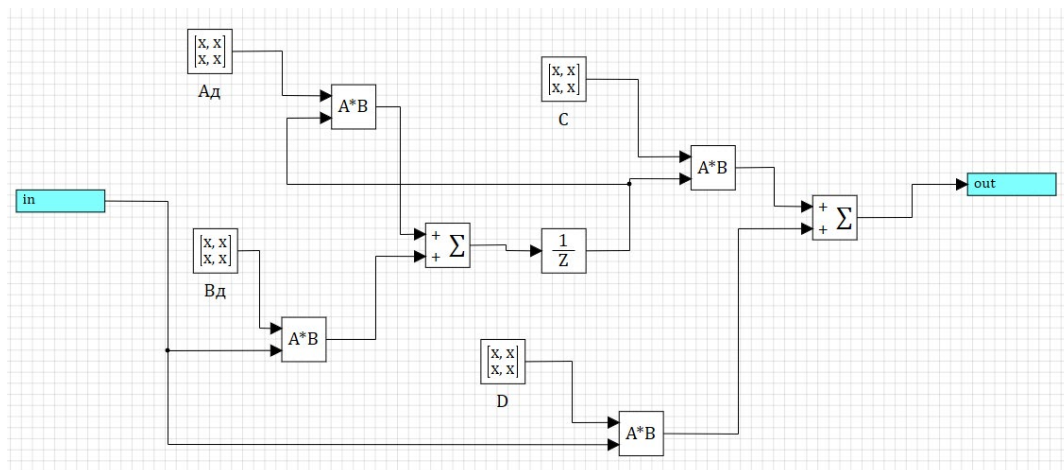


Рис. 18– Субмодель дискретной модели.

3. Частотные характеристики

Если мы на вход u модели будем подавать гармонический сигнал, то на выходе y в установившемся режиме мы будем получать реакцию ОУ также в гармоническом виде. Зная входной и выходной сигналы, можно провести анализ передаточного звена, характеризующегося функцией W . Классическим типовым воздействием выступает единичная синусоидальная функция $\sin(\omega t)$.

Чтобы выходной сигнал y не был похож на экспоненту, ОУ должен быть устойчивым. Отсюда следует замечание: частотные характеристики имеют смысл только для устойчивых систем, т. к. у неустойчивых на выходе не будет гармонического сигнала, а значит нельзя будет провести частотный анализ.

Так как мы будем рассматривать гармонические сигналы, то удобно перейти к другой системе координат на основе частоты с помощью преобразования Фурье, которое является частным случаем преобразования Лапласа:

$$s = j\omega,$$

где j – мнимая единица, но с дополнительными условиями: нужно, чтобы исследуемая функция была задана на $t \in (-\infty, +\infty)$ и была полностью интегрируема.

Пусть на вход бесконечно долго поступает гармонический сигнал, а ОУ удовлетворяет необходимым условиям. Тогда сделаем преобразование Фурье:

$$y(t) = W(p)u(t) \rightarrow y(j\omega) = W(j\omega)u(i\omega), \quad (3.0.1)$$

где W – комплексная частотная характеристика ОУ, которую по свойству комплексных чисел можно записать следующим образом:

$$W(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{u(i\omega)} = \frac{b(j\omega)}{a(i\omega)} = |W(j\omega)|e^{j \arg W(j\omega)} \quad (3.0.2)$$

То есть отношение Фурье-изображений входного сигнала u и выходного сигнала y определяет изменение модуля и фазы выходного сигнала (как функцию частоты) относительно входного сигнала:

$$\begin{aligned} u(t) &= A_{\text{вх}} \sin(\omega t) \\ &\quad \downarrow \\ u(t) &= A_{\text{вх}} |W(j\omega)| \sin(\omega t + \arg W(j\omega)) = A_{\text{вых}} \sin(\omega t + \Psi) \end{aligned} \quad (3.0.3)$$

Как можно заметить из последней формулы амплитуда и фаза выходного сигнала y зависят от частоты ω : $A_{\text{вых}} = A_{\text{вых}}(\omega)$, $\Psi = \Psi(\omega)$. На основе этих зависимостей и проводят частотный анализ систем.

3.1. Амплитудно-частотная характеристика

Амплитудно-частотная характеристика системы (АЧХ) находится как отношение амплитуды выходного сигнала y , который зависит от частоты, к амплитуде входного u на определённом частотном диапазоне:

$$A(\omega) = \frac{A_{\text{вых}}}{A_{\text{вх}}} = |W(j\omega)|, \omega \in [0, +\infty]; \quad (3.1.1)$$

$$A^d(\tilde{\omega}) = \frac{A_{\text{вых}}^d}{A_{\text{вх}}} = |W_d(j\tilde{\omega})|, \tilde{\omega} \in [0, 2\pi]. \quad (3.1.1)$$

Для исследования воспользуемся программой SimInTech. В SimInTech для построения АЧХ используется блок Построение частотных характеристик (вкладка Анализ и оптимизация). Он подключается ко входу и выходу исследуемого ОУ. В свойствах данного блока выставим следующие значения:

- типы характеристик: «ЛАХ»
- начальная круговая частота: 0,0005
- конечная круговая частота: 500 для непрерывной системы и 2π для дискретной

Полученные графики см в пункте 3.2 (рисунок 19, рисунок 20).

3.2. Фазочастотная характеристика

Фазочастотная характеристика системы (ФЧХ) представляется аргументом частотной характеристики ОУ W на определённом частотном диапазоне:

$$\Psi(\omega) = \arg W(j\omega), \omega \in [0, +\infty]; \quad (44)$$

$$\Psi_d(\tilde{\omega}) = \arg W_d(j\tilde{\omega}), \tilde{\omega} \in [0, 2\pi]. \quad (45)$$

В SimInTech для построения ФЧХ также используется блок Построение частотных характеристик. В свойствах данного блока выставим следующие основные значения:

- тип характеристик: «ФЧХ»
- начальная и конечная круговые частоты: такие же, как и для АЧХ.

Получим графики (см. рисунок 19 и рисунок 20):



Рисунок 19 – Графики ЛАЧХ и ФЧХ исследуемой непрерывной системы, где частота представлена в логарифмическом масштабе.

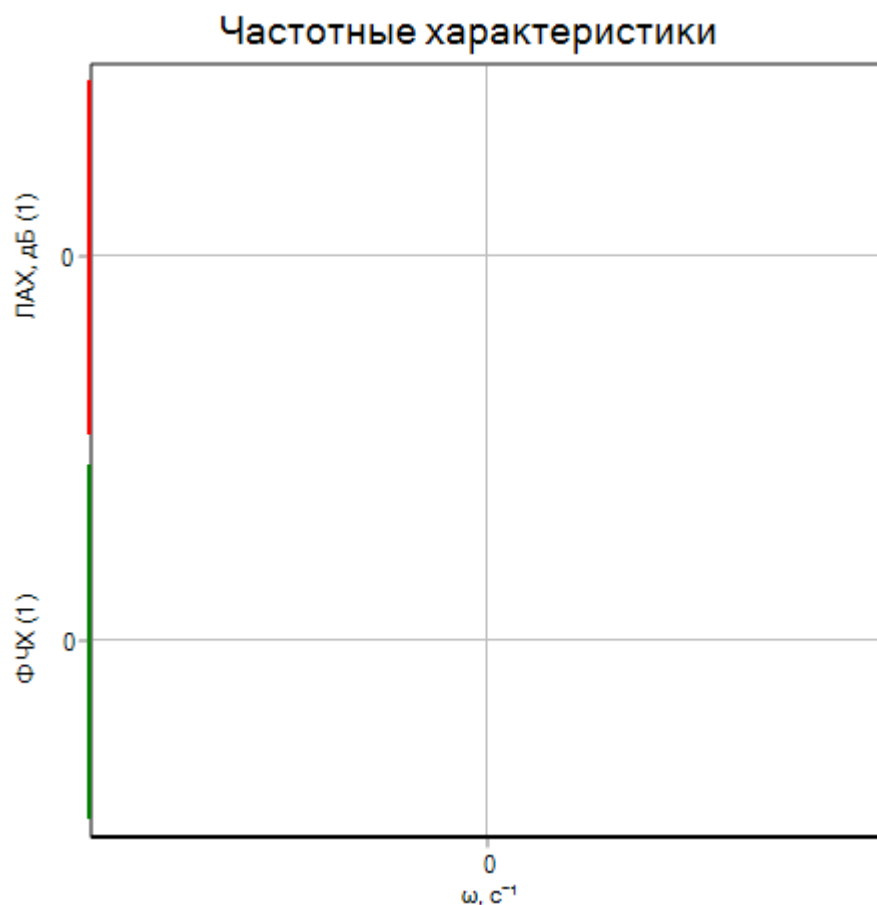


Рисунок 20 – Графики ЛАЧХ и ФЧХ исследуемой дискретной системы, где частота представлена в логарифмическом масштабе.

Полученные графики не имеют никакого смысла, так как для снятия частотных характеристик системы должна быть устойчива.

3.3. Определение по графикам запасов устойчивости моделей

Выделяют два основных критерия, по которым оценивают систему в рамках её частотных характеристик:

- запас устойчивости по амплитуде,
- запас устойчивости по фазе.

Как следует из их названия, они показывают возможность системы сохранять устойчивость при изменении характеристик (таких как амплитуда и частота) входного воздействия u .

Чтобы определить запас устойчивости по амплитуде нужно выделить частоту, на которой график ФЧХ пересекает -180° . Расстояние от АЧХ (ЛАЧХ) до нуля на этой частоте и будет искомой величиной.

В этом случае график ФЧХ непрерывной модели не пересекает -180° , следовательно запас устойчивости непрерывной модели по амплитуде не определить.

Аналогичная ситуация для запаса по фазе, но обратная: выделяем частоту, на которой АЧХ (ЛАЧХ) непрерывной модели обращается в ноль и смотрим расстояние от ФЧХ до -180° .

3.4. 3.4 Амплитудно-фазочастотная характеристика

Амплитудно-фазочастотная характеристика (АФЧХ) представляется зависимостью частотной характеристики W от частоты:

$$W(\omega), \omega \in [0, +\infty];$$

$$W_d(\tilde{\omega}), \tilde{\omega} \in [0, 2\pi].$$

SimInTech для построения АФЧХ также используется блок *Построение частотных характеристик* (см. рисунок 15). В свойствах данного блока нужно выставить следующие основные значения:

- *типы характеристик*: «Годограф Найквиста»,
- начальная и конечная круговые частоты: такие же, как и для АЧХ.

Получим графики (см. рисунок 21 и рисунок 22):



Рисунок 21 – Графики АФЧХ исследуемой непрерывной системы.



Рисунок 22 – Графики АФЧХ исследуемой непрерывной системы.

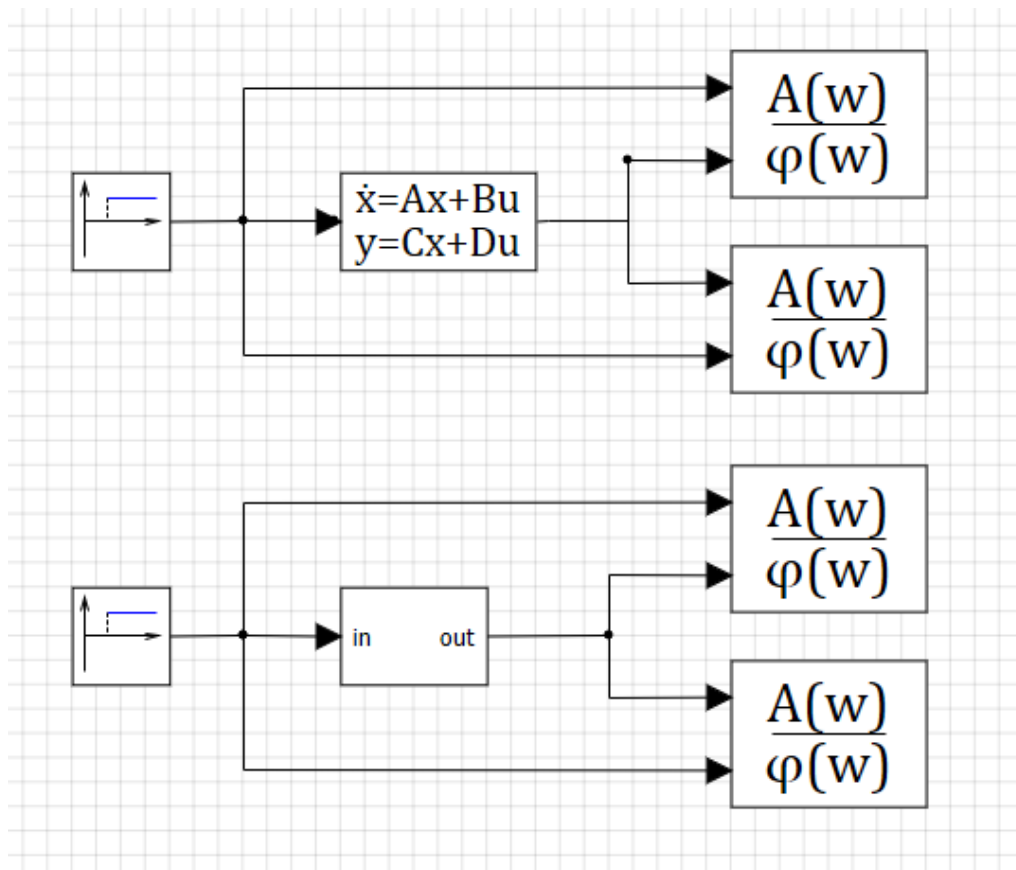


Рисунок 23 – Схема объекта для исследования частотных характеристик