Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа «Компьютерных технологий и информационных систем»

Курсовой проект

Управление перевернутым маятником

по дисциплине «Теория автоматического управления»

Вариант 11.4

Выполнил:
студент группы 5130902/20201 _____________ А. И. Сафонов
подпись

Проверил:
ассистент _____________ В. В. Кравченко
подпись

«___»____________ 2024

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

Задание

Перевернутый маятник смонтирован на тележке, как показано на рисунке. Тележка должна двигаться таким образом, чтобы масса шара m на конце маятника всегда занимала вертикальное положение. В качестве выходных переменных используются: перемещение тележки $y(\mathrm{t})$ и угол отклонения маятника $\theta(\mathrm{t})$. Управляющее воздействие – сила $f(\mathrm{t})$, приложенная к тележке. Задача заключается в стабилизации тележки в требуемом положении $y(t) = y_{\text{уст}}$.

Дифференциальные уравнения, описывающие движение данной системы, можно получить, записав выражения для суммы сил, действующих в горизонтальном направлении, и суммы моментов относительно точки вращения. Будем считать, что масса тележки $M, M >> m$ и угол отклонения от вертикали θ является малым. Тогда можно ограничиться линейной моделью и использовать уравнения для суммы сил $M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0$ и для суммы моментов $ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0$

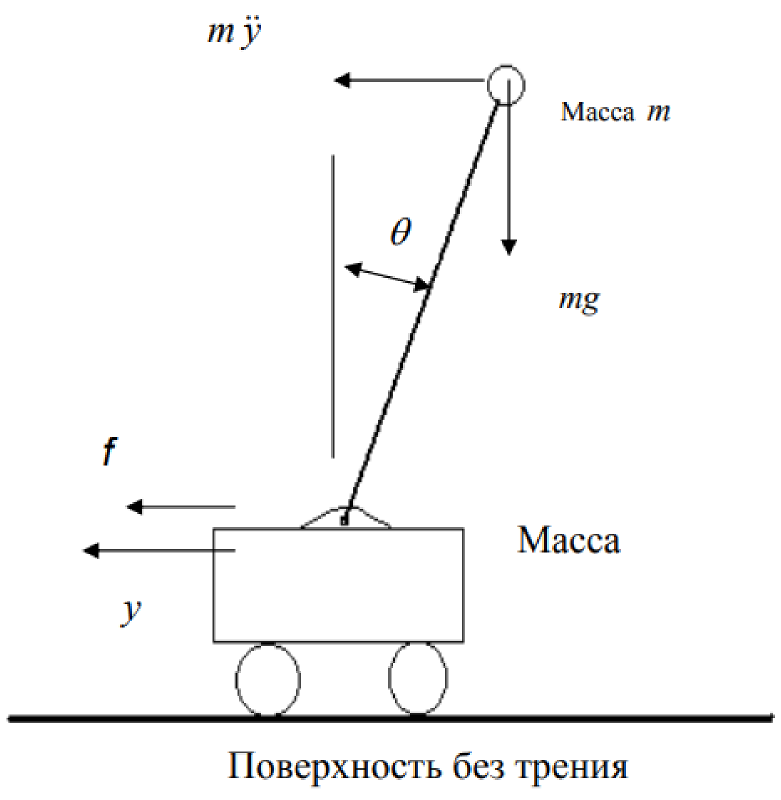

Рис. 1 Схема моделируемой системы

Таблица 1.Параметры объекта определяются следующей таблицей.

Параметр	Вариант				
	1	2	3	4	5
m [кг]	1	2	3	4	5
M [кг]	200	150	300	350	500
l [м]	1.2	2	2.5	1.5	2

$g = 9.81\frac{i}{\tilde{n}^2}$.

1. Математические модели объектов и систем управления

1.1. Модель в пространстве состояния

Из условий нам дано следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0 \\ ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Модель в пространстве состояний представляется в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,u) \doteq Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = g(x,u) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.1.2}$$

где вектор входных воздействий – u, а вектор выходных переменных – y.

$$\begin{gathered} M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0 \\ ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0 \end{gathered} \tag{1.1.3}$$

Система состоит из уравнений второго порядка, поэтому сразу составить МПС нельзя. Первым делом нужно понизить степени уравнений через замену переменных.

1. Из первого уравнения выразим $\ddot{y}$:

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}\left(u(t) - ml\ddot{\theta}\right) \tag{1.1.4}$$

2. Подставим выражение (1.1.4) во второе уравнение:

$$ml\frac{\left(u(t) - ml\ddot{\theta}\right)}{M} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0 \tag{1.1.5}$$

3. Упростим поделив выражение на ml:

$$\frac{u(t)}{M} - \frac{ml\ddot{\theta}}{M} + l\ddot{\theta} - g\theta = 0 \tag{1.1.6}$$

4. Выразим $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{\left(g\theta - \frac{u(t)}{M}\right)}{l - \frac{ml}{M}} \tag{1.1.7}$$

5. Упростим:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l - \frac{ml}{M}}\theta - \frac{1}{(Ml - ml)}u(t) \tag{1.1.8}$$

6. Подставим (1.1.8) в (1.1.4):

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}\left(u(t) - ml\left(\frac{g}{l - \frac{ml}{M}}\theta - \frac{1}{Ml - ml}u(t)\right)\right) \tag{1.1.9}$$

7. Упростим

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}\left(u(t) - \frac{gm}{1 - \frac{m}{M}}\theta + \frac{m}{M - m}u(t)\right) \tag{1.1.10}$$

8. Сгруппируем по u(t), и внесем в скобки 1/M:

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}\left(1 + \frac{m}{M - m}\right)u(t) - \frac{gm}{M - m}\theta \tag{1.1.11}$$

9. Приведем выражение перед u(t) под общий знаменатель, получим уравнение (1.1.12)

$$\ddot{y} = \frac{1}{M - m}u(t) - \frac{gm}{M - m}\theta \tag{1.1.12}$$

Понизим степень уравнений через замену переменных:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \tag{1.1.13}$$

И включить новые зависимости в систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{\mathrm{M - m}}\mathrm{u(t)} - \frac{\mathrm{gm}}{\mathrm{M - m}}\theta \\ \dot{x}_4 = \frac{g}{l - \frac{ml}{M}}\theta - \frac{1}{M\left(l - \frac{ml}{M}\right)}u(t) \end{cases} \tag{1.1.14}$$

Эту систему можно записать в матричном виде и получить модель в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.1.15}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-gm}{M - m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g}{l - \frac{ml}{M}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M - m} \\ \frac{-1}{(Ml - ml)} \end{pmatrix}, \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = 0 \tag{1.1.16}$$

Подставив значения переменных в уравнение (1.1.16), получим:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1134104046 & 0 & 0 \\ 0 & 6.615606936 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.00289017 \\ -0.00192678 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.17)$$

1.2. Вывод передаточной функции и модели «вход-выход» из непрерывной модели в пространстве состояний

Передаточная функция в операторной форме (или матричная передаточная функция) для объекта, может быть представлена в виде:

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B + D \quad (1.2.1)$$

Для того чтобы получить формулу 1.2.1 выразим X через p, A, B, u:

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$pEX = AX + Bu$$

$$(pE - A)X = Bu$$

$$X = (pE - A)^{-1}Bu \quad (1.2.2)$$

И подставим в Y:

$$Y = CX$$

$$Y = C(pE - A)^{-1}Bu \quad (1.2.3)$$

Для вычисления резольвенты матрицы $(pE - A)^{-1}$ воспользуемся леммой о вычислении резольвенты:

$$(pE - A)^{-1} = \frac{F(p)}{X_{n(p)}}$$

$$F(p) = F_1 p^{n-1} + F_2 p^{n-2} + \cdots + F_{(n-1)} p + F_n \quad (1.2.4)$$

$$\chi_n(p) = det(pE - A) = p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \cdots + a_{n-1} p + a_n$$

Коэффициенты характеристического многочлена a_i и матрицы F_i вычисляется по рекуррентным соотношениям:

$$F_1 = E_n \, a_1 = -trace(F_1 A)$$

$$F_2 = F_1 A + a_1 E_n, a_2 = -\frac{1}{2} trace(F_2 A)$$

$$\ldots$$

$$F_k = F_{k-1} A + a_{k-1} E_n, a_k = -\frac{1}{2} trace(F_k A)$$

$$\ldots.$$

$$F_n = F_{n-1} A + a_{n-1} E_n, a_n = -\frac{1}{2} trace(F_n A)$$

Для проверки правильности вычислений воспользуемся контрольным выражением:

$$F_n A + a_n E_n = 0 \tag{1.2.5}$$

Описанные выше шаги для нахождения передаточной функции реализуем с помощью MATLAB.

```
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];
C=[1 0 0 0];D=0;

F1=eye(4);a1=-trace(A);
F2=F1*A+a1* eye(4);a2=-(1/2)*trace(F2*A);
F3=F2*A+a2* eye(4);a3=-(1/3)*trace(F3*A);
F4=F3*A+a3* eye(4);a4=-(1/4)*trace(F4*A);
Pogr=F4*A+a4*eye(4)
syms p
h=p^4+a1*p^3+a2*p^2+a3*p+a4;
W=C*((F1*p^3+F2*p^2+F3*p+F4)/h)*B+D;
Wpa=vpa(W,5);
pretty(expand(Wpa))

%sys=ss(A,B,C,D);
%tf(sys)
```

Рис. 2 Код программы в MATLAB

```
Pogr =

     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
```

Рис. 3 – Погрешность вычисления передаточной функции непрерывной модели

Можно сделать вывод, что все вычисления выполнены верны.

После выполнения данной программы получили передаточную функцию:

```
                                                                                  2
     0.018901711798846001428949652281982              0.0028901700000001362411694572074339 p
----------------------------------------------- - -----------------------------------------------
        4                                     2           4                                     2
- 1.0 p  + 6.6156069360004039481282234191895 p    - 1.0 p  + 6.6156069360004039481282234191895 p
```

Рис. 4 Передаточная функция полученная из MATLAB.

$$W = \frac{-0.00289017p^2 + 0.0189017117988}{-p^4 + 6.615606936p^2} \tag{1.2.6}$$

Из ТАУ известно, что ПФ тесно связана с моделью «вход-выход»

$$A(p)y(p) = B(p)u(p) \rightarrow y(p) = [A(p)]^{-1}B(p)u(p) \tag{1.2.7}$$

Поэтому, сделав обратное преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, можно получить модель «вход-выход»:

$$y(p) = W(p)u(p) = \frac{B(p)}{A(p)}u(p) \xrightarrow{\mathcal{L}-1} y(t) = \frac{B(p)}{A(p)}u(t) \rightarrow A(p)y(t) = B(p)u(t) \qquad (1.2.8)$$

Где p – оператор дифференцирования по времени t

$$\begin{gathered} A(p) = a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = -p^4 + 6.6156p^2 \\ \text{B}(p) = b_0p^2 + b_1p + b_2 = -0.0029p^2 + 0.01897 \end{gathered} \qquad (1.2.9)$$

Получаем:

$$(-p^4 + 6.615606936p^2)y(t) = (-0.00289017p^2 + 0.018901711798)u(t) \qquad (1.2.10)$$

Итоговая модель “вход-выход”:

$$-y(t)^{(4)} + 6.615606936y(t)^{(2)} = -0.00289017u^{(2)}(t) + 0.018901711798u(t) \qquad (1.2.11)$$

1.3. Вывод эквивалентной модели в пространстве состояний из модели «вход-выход»

Перенесем все слагаемые в левую сторону из уравнения (1.2.10) и применим схему Горнера относительно p:

$$0.018901711798u(t) + p^2(-0.00289017u - 6.615606936y + p^2y) = 0 \qquad (1.3.1)$$

Для составления вектора состояния X нужно поочередно выбрать выражения в скобках:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = px_1 \\ x_3 = -0.00289017u - 6.615606936x_1 + px_2 \\ x_4 = px_3 \\ 0.018901711798u(t) + px_4 = 0 \end{cases} \qquad (1.3.2)$$

Выразим y, а затем подставим в значения производных

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_3 + 0.00289017u + 6.615606936x_1 \\ \dot{x_3} = x_4 \\ \dot{x_4} = -0.018901711798u(t) \end{cases} \qquad (1.3.3)$$

Введем вектор состояний (x), а также матрицы из (1.1.14):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.615606936 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.00289017 \\ 0 \\ -0.018901711798 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; D = 0 \qquad (1.3.4)$$

1.4. Доказательство эквивалентности моделей в пространстве состояний

Матрицы, полученные из пункта 1.3 для уравнения “вход-состояние-выход” обозначим символом ~ $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{x})$.

Произведем замену $x(t) = S\tilde{x}(t)$, где S – неособенная квадратная матрица. В результате получим следующие соотношения

$$\begin{gathered} \dot{\tilde{x}} = S^{-1}AS\tilde{x} + S^{-1}Bu \\ y = CS\tilde{x} + Du \end{gathered} \qquad (1.4.1)$$

Теперь нам нужно найти такую матрицу преобразования SSS, которая сделает две системы эквивалентными, т.е. будет удовлетворять следующим условиям:

$$\tilde{A} = S^{-1}AS, \tilde{B} = S^{-1}B, \tilde{C} = CS \qquad (1.4.2)$$

Для этого используем матрицу управляемости объекта. Поскольку управляющей является лишь первая компонента внешнего воздействия, то из элементов первого столбца матрицы B составим вектор b и построим матрицу управляемости объекта, отвечающую математической модели, определяемой соотношением:

$$S_y = [b, Ab, A^2b, A^3b] = \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}0029 & 0 & 0.0002 \\ 0 & -0.0019 & 0 & -0.0127 \\ 0.00289017 & 0 & 0.0002 & 0 \\ -0.018901711798 & 0 & -0.0127 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.4.3)$$

Аналогично для модели в формуле (1.3.4):

$$\tilde{S}_y = [\tilde{b}, \tilde{A}\tilde{b}, \tilde{A}^2\tilde{b}, \tilde{A}^3\tilde{b}] = \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0.0029 & 0 & 0.0002 \\ 0.0029 & 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & -0.0189 & 0 & 0 \\ -0.0189 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (1.4.4)$$

Найдем матрицу S по формуле:

$$S = S_y\tilde{S}_y^{\ -1} = \begin{pmatrix} 1.0010 & 0 & 0.0002 & 0 \\ -58.3333 & 0 & -8.8175 & 0 \\ 0 & 1.0010 & 0 & 0.0002 \\ 0 & -58.3333 & 0 & -8.8175 \end{pmatrix} \qquad (1.4.5)$$

Рассчитаем погрешности вычислений:

$$\begin{gathered} Pog_{\tilde{A}} = \tilde{A} - S^{-1}AS \\ Pog_{\tilde{B}} = \tilde{B} - S^{-1}B \\ Pog_{\tilde{C}} = \tilde{C} - CS \end{gathered} \qquad (1.4.6)$$

Для расчета погрешностей выполним код в MATLAB:

```
% Определяем исходные матрицы A и B
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];
C=[1 0 0 0];D=0;
% Определяем матрицы с волной (Avoln и Bvoln)
Avoln = [0 1 0 0; 6.615606936 0 1 0; 0 0 0 1; 0 0 0 0];
Bvoln = [0; 0.00289017; 0; -0.018901711798];
Cvoln = [1 0 0 0];

% Вычисление b, Ab, A^2b, A^3b, A^4b для A и B
b = B;
Ab = A * B;
A2b = A * Ab;
A3b = A * A2b;

% Создание матрицы Sy (состояния для исходной системы)
Sy = [b, Ab, A2b, A3b];

% Вычисление bvoln, Abvoln, A^2bvoln, A^3bvoln для Avoln и Bvoln
bvoln = Bvoln;
Abvoln = Avoln * Bvoln;
A2bvoln = Avoln * Abvoln;
A3bvoln = Avoln * A2bvoln;

% Создание матрицы Syvoln (состояния для системы с волной)
Syvoln = [bvoln, Abvoln, A2bvoln, A3bvoln];

% Вычисление матрицы  S и погрешностей
S = Sy * inv(Syvoln);

Pog_A = Avoln - inv(S)*A*S
Pog_B = Bvoln - inv(S)*B
pog_C = Cvoln - C*S
% Вывод результатов
disp('Матрица Sy = ');
disp(Sy);

disp('Матрица Syvoln = ');
disp(Syvoln);

disp('Матрица S = ');
disp(S);
```

Рис. 5 – Код MATLAB для нахождения погрешностей вычислений

```
Pog_A =

   1.0e-15 *

         0    0.1110         0    0.0031
    0.8882         0    0.2220         0
         0    0.8882         0    0.1110
         0         0         0         0


Pog_B =

     0
     0
     0
     0


pog_C =

   1.0e-08 *

    0.3862         0    0.0591         0
```

Рис. 6 – Погрешности вычислений, рассчитанные в MATLAB.

Поскольку матрицы ошибок $Pog_{\tilde{A}}$ *и* $Pog_{\tilde{B}}$ имеют незначительные значения, это говорит о том, что динамика систем в основном схожа. Однако, различие в $Pog_{\tilde{C}}$ указывает на то, что при оценке выходов системы могут возникать более значительные различия.

1.5. Получение дискретной модели в пространстве состояний

Найдем шаг дискретизации. Для этого понадобится вычислить вторую норму исходной матрицы А:

$$T \approx \frac{1}{||A||_2} = 0.1511 \tag{1.5.1}$$

Построим модель системы в виде:

$$\begin{gathered} \begin{cases} \lambda_{k+1} = A_g x_k + B_g u_k \\ y_k = C_g x_k + D_g u_k \end{cases} \\ A_g = e^{AT} \\ B_g = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B \\ C_g = C \\ D_g = D \end{gathered} \tag{1.5.2}$$

Для вычисления матриц А и В воспользуемся MATLAB.

```
% Определяем исходные матрицы A и B
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];
C=[1 0 0 0];D=0;
% Вычисляем вторую норму матрицы A
T_d = 1 / norm(A, 2)

% Вычисляем матрицу Ag
Ag = expm(A * T_d);
Ag = vpa(Ag, 7);

% Вычисляем матрицу Bg с использованием функции integral для интегрирования
Bg=quadv(@(t)expm(A*t), 0,T_d)*B;
Bg = vpa(Bg, 5);

% Вывод результатов
disp('Ag = ');
disp(Ag);
disp('Bg = ');
disp(Bg);
```

Рис. 7 – Код программы в MATLAB

Подставляем полученные матрицы в формулу (1.5.2) и получаем дискретную модель в пространстве состояний:

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 1.076513 & 0 & 0.1549708 \\ 0 & -0.0175753 & 1 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 1.076513 \end{pmatrix}, B_g = \begin{pmatrix} 0.000033013 \\ -0.000022284 \\ 0.00043693 \\ -0.00029859 \end{pmatrix} \quad (1.5.3)$$

$$C_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D_g = (0)$$

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = A_g x_k + B_g u_k \\ y_k = C_g x_k + D_g u_k \end{cases}$$

1.6. Вывод дискретных передаточной функции и модели «вход-выход» из дискретной модели в пространстве состояний

Давайте теперь представим сдвиг вектора состояния в следующем виде:

$$x_k + 1 = \xi x_k \quad (1.6.1)$$

Где ξ - оператор сдвига по времени

Аналогично с непрерывной моделью:

$$\begin{gathered}\xi x_k = A_д x_k + B_д u_k => \\ \xi x_k - A_д x_k = B_д u_k => \\ \left(\xi E - A_д\right) x_k = B_д u_k => \\ x_k = (\xi E - A_д)^{-1} B_д u_k, \\ W_д(\xi) = \frac{b_д(\xi)}{a_д(\xi)}, \\ (\xi E - A_д)^{-1} = \frac{\tilde{B}_д(\xi)}{\chi^д{}_n(\xi)}\end{gathered} \tag{1.6.2}$$

Перепишем программу из рисунка 2 для случая с дискретной моделью пространства состояний:

```
A = [
  1.0, -0.00131165, 0.1511355, -0.00006574791;
   0,    1.076513,          0,      0.1549708;
   0,  -0.0175753,        1.0,    -0.00131165;
   0,    1.025226,          0,       1.076513;
];
Bg = [
   0.000033126;
   -0.000021975;
   0.00043842;
  -0.00029444
];
C=[1 0 0 0];D=0;


F1=eye(4);a1=-trace(A);
F2=F1*A+a1* eye(4);a2=-(1/2)*trace(F2*A);
F3=F2*A+a2* eye(4);a3=-(1/3)*trace(F3*A);
F4=F3*A+a3* eye(4);a4=-(1/4)*trace(F4*A);
Pogr=F4*A+a4*eye(4)
syms p
h=p^4+a1*p^3+a2*p^2+a3*p+a4;
W=C*((F1*p^3+F2*p^2+F3*p+F4)/h)*Bg+D;
Wpa=vpa(W,5);
pretty(expand(Wpa))
```

Рис. 8 – Код программы в MATLAB

```
                                       3                                         2
0.0000331260000000013765664164111151295 p    0.000038138131042629065375915865232625 p    0.000038136116757978199666222983206171 p
----------------------------------------- - ----------------------------------------- - -----------------------------------------
                  #1                                            #1                                          #1

    0.000033125366043670223622121616514807
  + --------------------------------------
                      #1

where

          4                                     3                                     2
  #1 == p  - 4.1530259999999543651938438415527 p  + 6.3060521457682625623419880867004 p  - 4.1530262915366620291024446487427 p

     + 1.0000001457681264582788571715355
```

A

Рис. 9 – Передаточная функция дискретной модели, рассчитанная в MATLAB.

Перепишем полученную передаточную функцию:

$$Wg(\xi) = \frac{0.000033126\xi^3 - 00003813813\xi^2 - 0.0000381361\xi + 0.000033125366}{\xi^4 - 4.153025999999995\xi^3 + 6.306052145768\xi^2 - 4.15302629153666\xi + 1} \tag{1.6.3}$$

Используя полученную передаточную функцию, получаем дискретную модель «вход-выход»:

$$
\begin{gathered}
y_{k+4} - 4.15302599999995 y_{k+3} + 6.306052145768 \xi^2 y_{k+2} - 4.153026291537 y_{k+1} + y_k = \\
= 0.000033126 u_{k+2} + 00003813813 u_{k+2} - 0.0000381361 u_{k+1} - 0.000033125366 u_k
\end{gathered}
\tag{1.6.4}
$$

2. Исследование реакций во временной области

Второй раздел РГЗ будет посвящён исследованию реакций во временной области.

Задан ОУ (см. рис. 1), динамику которого можно описать моделью в пространстве состояний (1).

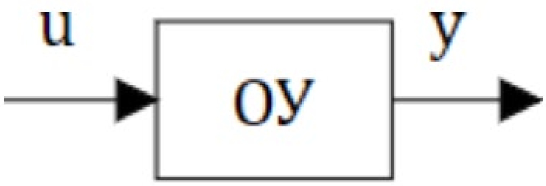

Рис. 10 – Объект управления в схематичном виде

$$\begin{array}{c|c} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) & x_{k+1} = A_д x_k + B_д u_k \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) & y_k = Cx_k + Du_k \end{array} \qquad (2.0.1)$$

где $x(0) = \mathrm{x}_0 = \mathrm{x}^0$. Первое уравнение из (2.0.1) представляет собой ДУ первого порядка для непрерывной модели и разностное для дискретной, решение которых определяется интегральной и разностной формулами Коши соответственно:

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \,\Big|\, x_k = A_д^k x^0 + \sum_{i=0}^{k-1} A_д^{k-1-i} B_д u_i \qquad (2.0.2)$$

Подставив (2) во второе уравнение системы (1), мы получим зависимость вида

$$y = f(x^0, u)$$

Изменяя начальные условия x 0 ОУ или подавая различные воздействия на вход u, мы будем получать на выходе реакцию системы во времени в виде переходных процессов. Их анализ является одним из методов исследования свойств ОУ, которые проявляются в реакции на типовые воздействия. Всего их три, и далее мы их рассмотрим.

2.1. Переход к канонической жордановой форме

Для исследования реакций во временной области необходимо выделить жорданову форму матрицы , сделав преобразование подобия:

$$x = Sz,$$

Где $\mathrm{S} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ – неособенная матрица. Сделаем замену в МПС и в первом уравнении домножим слева на обратную матрицу S:

$$\begin{array}{c|c} \dot{z}(t) = S^{-1}ASz(t) + S^{-1}\,B\,u(t) & z_{k+1} = S_д^{-1}A_д x_k + S_д^{-1}B_д u_k \\ y(t) = CSz(t) + Du(t) & y_k = CSx_k + Du_k \end{array} \qquad (2.1.1)$$

где $z(0) = z^0 = S^{-1}x^0, z_0 = z_д^0 = S_д^{-1}x^0$.

Преобразование вида $S\ -1AS$ и даст жорданову матрицу J. Матрица J имеет блочнодиагональный вид: на главной диагонали находятся собственные числа матрицы A, а на первой наддиагонали могут располагаться единицы. Наличие единиц обуславливается кратностью выбранного собственного числа и следующей формулой

$$k_l = rank\left(A - \lambda_{p+i}E_n\right)^{l-1} - 2rank\left(A - \lambda_{p+i}E_n\right)^{l} + rank\left(A - \lambda_{p+i}E_n\right)^{l+1}, \tag{2.1.4}$$

где kl – число клеток порядка l. Клетки порядка $l > 1$ характеризуются наличием единиц в первой наддиагонали. Матрица S в данном случае является собственной матрицей матрицы A и составляется из её собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1134104046 & 0 & 0 \\ 0 & 6.615606936 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5721 \\ -2.5721 \end{pmatrix} \tag{2.1.5}$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 1.076513 & 0 & 0.1549708 \\ 0 & -0.0175753 & 1 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 1.076513 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.4751 \\ 0.6779 \end{pmatrix} \tag{2.1.6}$$

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & 0.3623 & -0.3623 \\ 0 & 0 & -0.0160 & -0.0160 \\ 0 & 0 & 0.9319 & 0.9319 \end{pmatrix} \tag{2.1.7}$$

$$\mathrm{S}_{д} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & 0.3623 & -0.3623 \\ 0 & 0 & -0.0160 & -0.0160 \\ 0 & 0 & 0.9319 & 0.9319 \end{pmatrix} \tag{2.1.8}$$

Код для вычисления полученных собственных векторов и собственных чисел:

```
A = [0 0 1 0; 0 0 0 1; 0 -0.1134 0 0; 0 6.6156 0 0];
% Где eigenvalues - матрица,
% на диагонали которой расположены собственные числа,
% Где eigenvectors - матрица,
% где столбцы являются собственными векторами матрицы.

[eigenvectors, eigenvalues] = eig(A);
disp("eigenvectors A");
disp(eigenvectors);
disp("eigenvalues A");
disp(eigenvalues);

Ad = [
     1.0, -0.001311533, 0.1511357, -0.00006574209;
    0,     1.076513,         0,        0.154971;
    0,  -0.01757371,       1.0,   -0.001311533;
    0,     1.025226,         0,        1.076513
];
[eigenvectors, eigenvalues] = eig(Ad);

disp("eigenvectors Ad");
disp(eigenvectors);
disp("eigenvalues Ad");
disp(eigenvalues);
```

Рис. 11 – Программа для вычислений собственных чисел и векторов

Результат выполнения программы:

```
eigenvectors A
    1.0000   -1.0000   -0.0062    0.0062
         0         0    0.3623   -0.3623
         0    0.0000   -0.0160   -0.0160
         0         0    0.9319    0.9319

eigenvalues A
         0         0         0         0
         0         0         0         0
         0         0    2.5721         0
         0         0         0   -2.5721

eigenvectors Ad
    1.0000   -1.0000   -0.0062    0.0062
         0         0    0.3623   -0.3623
         0    0.0000   -0.0160   -0.0160
         0         0    0.9319    0.9319

eigenvalues Ad
    1.0000         0         0         0
         0    1.0000         0         0
         0         0    1.4751         0
         0         0         0    0.6779
```

Рис. 12 – Полученные собственные вектора и числа для матриц A и A_d

У матрицы A_d есть кратное собственное значение $(\lambda_0 = 0 - \text{кратность равная } 2)$. Ее жорданова форма может быть записана как:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5721 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5721 \end{pmatrix} \tag{2.1.9}$$

У матрицы A_d есть кратное собственное значение $(\lambda_0 = 1 - \text{кратность равная } 2)$.. Ее жорданова форма может быть записана как:

$$J_д = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6779 \end{pmatrix} \tag{2.1.10}$$

2.2. Переходная характеристика

Переходная характеристика системы (ПХС) строится при нулевых начальных условиях и при входном воздействии единичной ступенчатой функции, или функции Хэвисайда:

$$1(t - t_0) = \begin{cases} 0, t < t_0 \\ 1, t > t_0 \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Учтём новые условия:

$$\left. \begin{array}{l} z(t) = \int_0^t e^{J(t-\tau)} S^{-1} B 1(\tau) d\tau = \\ = (e^{Jt} - E_n) J^{-1} S^{-1} B. \end{array} \right| \begin{array}{l} z_k = \sum_{i=0}^{k-1} J_д^{k-1-i} S_д^{-1} B_д 1_i = \\ \sum_{i=0}^{k-1} J_д^{k-1-i} S_д^{-1} B_д = \end{array} \tag{2.2.2}$$

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из системы после замены переменных, приняв во внимание действие единичной функции:

$$y(t) = CS(e^{Jt} - E_n)J^{-1}S^{-1}B + D|\, y_k = C_д \sum_{i=0}^{k-1} J_д^{k-1-i} S_д^{-1} B_д + D \quad (2.2.3)$$

и получим функцию переходной характеристики системы.\

Построение и исследование графиков непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech. Построенный график представлен на рис. 13.

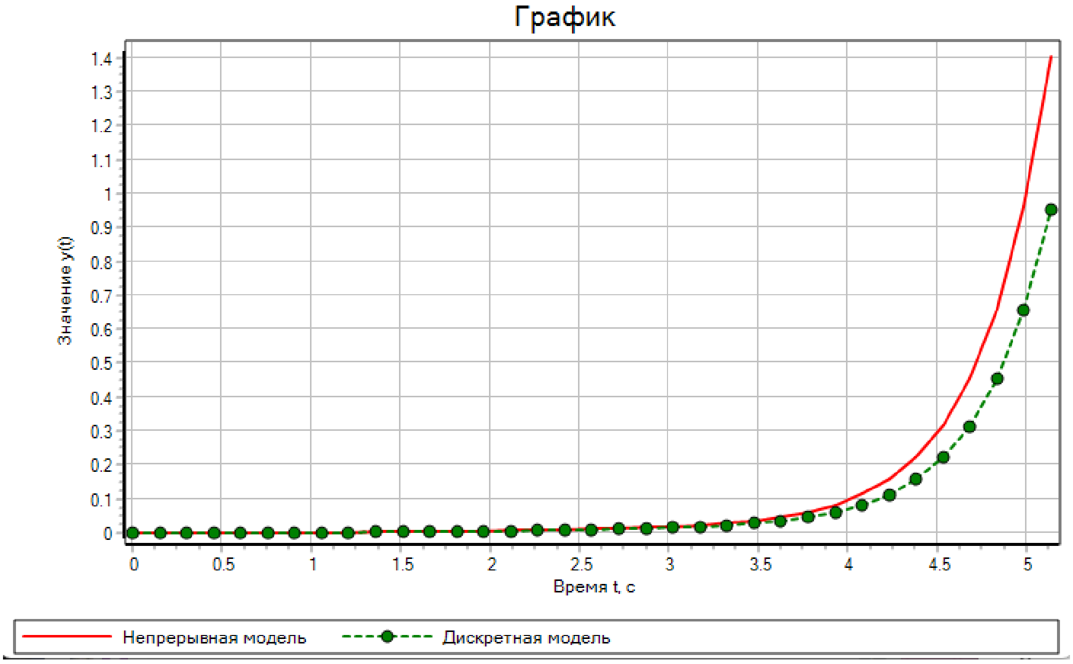

Рис. 13 – Переходная характеристика непрерывной и дискретной моделей

Из графика видно, что непрерывная модель и дискретная расходятся, поэтому снятие характеристик переходных процессов не требуется.

2.3. Импульсная характеристик

Импульсная характеристика системы (ИХС) строится при нулевых начальных условиях и при входном воздействии дельта-функции, или функции Дирака:

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, t \neq t_0 \\ 1, t = t_0 \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Главной особенностью этой функции является её фильтрующее свойство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(t_i)\delta(t_i - t_0) = f(t_0). \right. \quad (2.3.2)$$

Учтём новые условия в:

$$z(t) = \int_0^t e^{J(t-\tau)} S^{-1} B \delta(\tau) d\tau = (e^{Jt}) S^{-1} B. \quad \Bigg| \quad z_k = \sum_{i=0}^{k-1} J_Д^{k-1-i} S_Д^{-1} B_Д \delta(t_i) = \sum_{i=0}^{k-1} J_Д^{k-1} S_Д^{-1} B_Д = \tag{2.3.3}$$

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из (3):

$$y(t) = CSe^{Jt}S^{-1}B + D\delta(t) \, | y_k = CS_Д J_Д^{k-1} S^{-1} B_Д + D\delta(t_k) \tag{2.3.4}$$

и получим функцию импульсной характеристики системы.

Построение и исследование графиков импульсной характеристики непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech. Построенный график представлен на рис. 14.

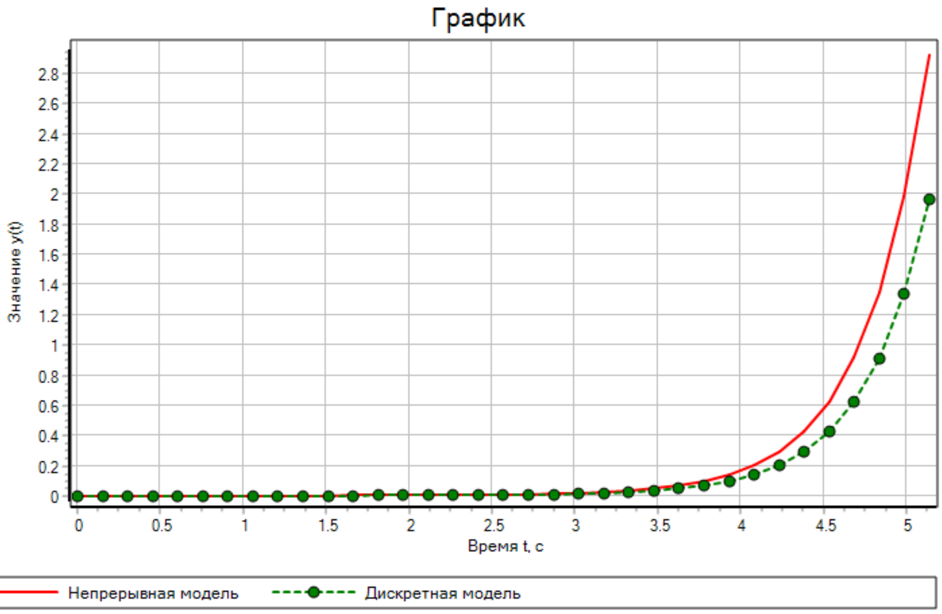

Рис. 14 – Импульсная характеристика непрерывной и дискретной моделей

Из графика ИХС видно, что непрерывная модель и дискретная расходятся, поэтому снятие характеристик переходных процессов не требуется.

2.4. Ненулевые начальные условия

Реакция на ненулевые начальные условия (ННУ) строится при отсутствии каких-либо внешних управлений и возмущений, но, чтобы хотя бы один элемент вектора x^0 был отличен от нуля. Учтём новые условия в:

$$z(t) = e^{Jt} S^{-1} x^0 \; | \; z_k = J_Д^k S_Д^{-1} x^0. \tag{2.4.1}$$

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из (2.1.1)

$$y(t) = CSe^{Jt} S^{-1} x^0 | y_k = CSJ_Д^k S_Д^{-1} x^0 \tag{2.4.2}$$

и получим функцию реакции системы (2.0.1) на ненулевые начальные условия.

Построение и исследование графиков переходной характеристики с ненулевыми начальными условиями непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech.

В качестве не нулевых условий примем матрицу

$$xN0 = \begin{matrix} 1 \\ 0; \\ 0, \\ 0 \end{matrix} \qquad (2.4.3)$$

Построенный график представлен на рис. 15.

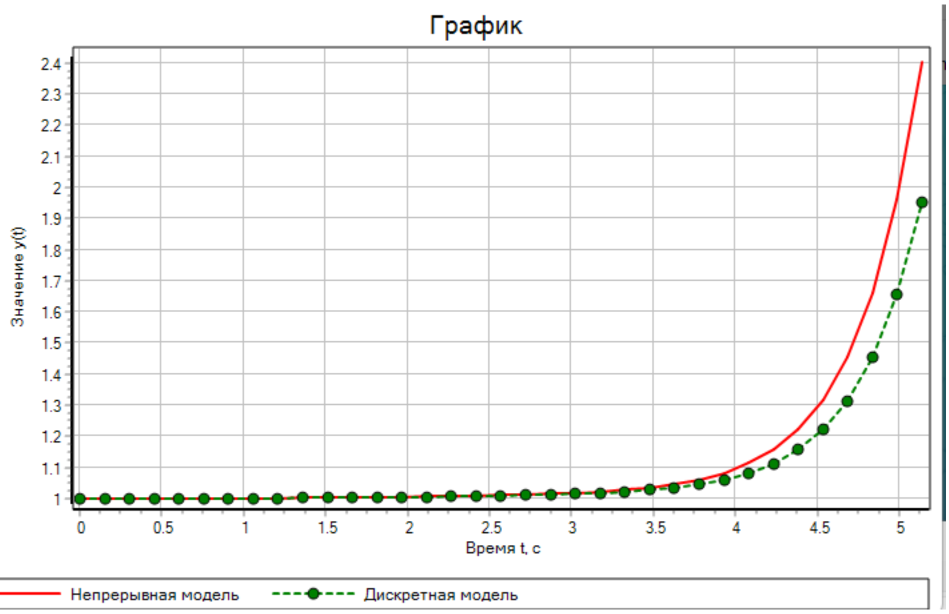

Рис. 15 – Реакция на ненулевые начальные условия непрерывной и дискретной моделей

Схема объекта в программе SimInTech представлена на рис. 14.

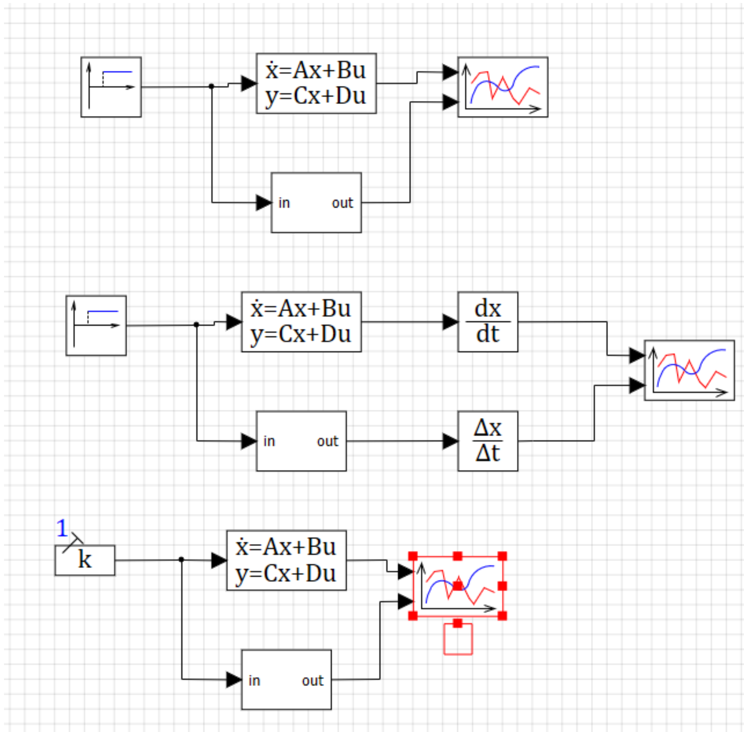

Рис. 16 – Схема объекта для исследования реакций во временной области

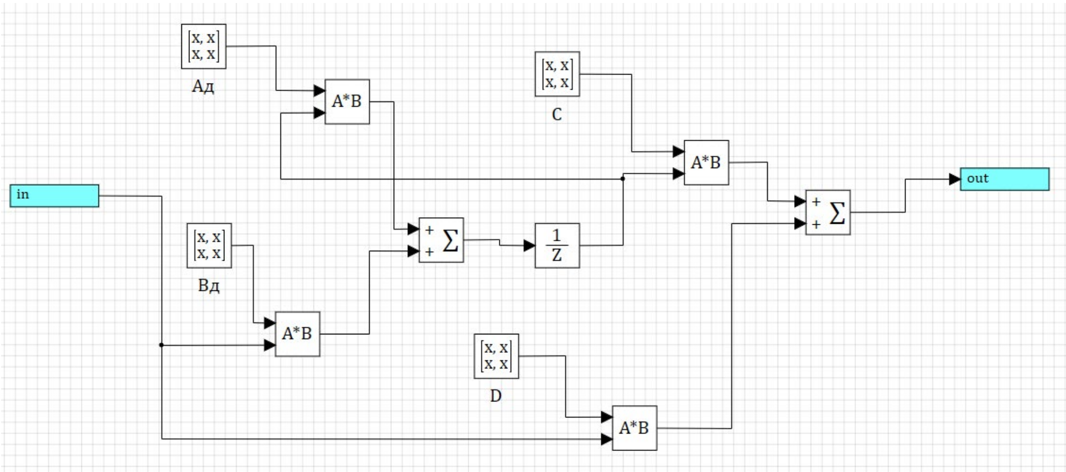

Рис. 17 – Субмодель дискретной модели.