Министерство высшего образования и науки РФ
Санкт–Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа компьютерных технологий и информационных систем

# Курсовой проект

## Управление перевернутым маятником

по дисциплине «Теория автоматического управления»

**Вариант 11.4**

**Выполнил:**
студент группы 5130902/20201 _____________ А. И. Сафонов
подпись

**Проверил:**
ассистент ____________ В. В. Кравченко
подпись

«___»____________ 2024

Санкт-Петербург
2024

# Оглавление

**Элементы оглавления не найдены.**

# 1. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

## 1.1. Управление и управляемость

В большинстве заданий для курсовой работы вектор управления $uu$ раскладывается на два компонента: управляющее воздействие и возмущающее воздействие:

$$u = \begin{pmatrix} u_{\text{упр}} \\ v_{\text{возм}} \end{pmatrix}. \tag{1.1.1}$$

Управляющее воздействие – это когда, например, вы поворачиваете ручку управления, и ваш генератор начинает выдавать большее или меньшее напряжение.

Основная задача: перевод САУ из одного состояния в другое. Естественно, идеального перехода достичь почти невозможно, поэтому водят целевое условие:

$$e(t) = y_{\text{зад}} - y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \tag{1.1.2}$$

где $y_{\text{зад}}$ – заданное значение выхода, а $e(t)$ называют динамической ошибкой САУ.

Возмущающим воздействием наоборот управлять нельзя, тем не менее оно способно менять состояние системы вплоть до потери устойчивости. В нашем примере это может быть нагрузка, к которой подключён генератор. Возмущающее воздействие действует всегда или периодически, но главное, что мы не можем на него повлиять, но можем компенсировать: как раз с помощью управляющего воздействия.

Давайте введём понятие управляемости и критерий Калмана с уже знакомой нам матрицей управляемости. Управляемость, вообще говоря, – существование управления, т.е. такого ограниченного воздействия, которое переводит САУ из одного состояния в другое за конечное время. Чтобы удостовериться в существовании такого управления, используют критерий Калмана: линейная система вполне управляема тогда и только тогда, когда матрица управляемости

$$S_y = (B\ AB\ A^2B\ \dots A^{n-1}B) \tag{1.1.3}$$

имеет ранг, равный $n$, т.е. равный размерности вектора состояния.

Процесс поиска управления называется синтезом управления и заключается в построении регулятора, который превращает ошибку (1.1.2) в управляющее воздействие $u_{\text{упр}}$.

Синтез управления можно вести и без выполнения критерия Калмана, но заранее гарантировать адекватность такого управления нельзя.

$$S_y = \begin{bmatrix} 0 & 0.00289017 & 0 & 0.000218516899375 \\ 0 & -0.00192678 & 0 & -0.012746819132146 \\ 0.00289017 & 0 & 0.000218516899375 & 0 \\ -0.00192678 & 0 & -0.012746819132146 & 0 \end{bmatrix}, (1.1.4)$$

$$S_{dy} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.033126 & 0.09943500823337 & 0.165925774364684 & 0.232750222949245 \\ -0.021975 & -0.069285975527 & -0.127199503541738 & -0.204577852685763 \\ 0.43842 & 0.4391924194435 & 0.440855443576679 & 0.443663558217948 \\ -0.29444 & -0.33949782907 & -0.436507610011277 & -0.600314354994152 \end{bmatrix}.$$

Посчитаем ранг этих матриц с помощью функции встроенной в Matlab rank(). Ранг $S_y$ и $S_{dy}$ матриц равен четырем.

```
rank_S_y =

     4


rank_Sd_y =

     4
```

*Рис. 1 – Ранг матриц управляемости непрерывной и дискретной систем*

Ранг матрицы управляемости непрерывной и дискретной системы равен размерности вектора состояния (равен 4). Тогда можно сделать вывод об управляемости исследуемых систем.

## 1.2. Наблюдение и наблюдаемость

Задача восстановить вектор состояния $x$ по измерениям векторов входа $u$ и выхода $y$. Это и есть наблюдение, откуда выходят понятие наблюдаемости: получение по векторам $u$ и $y$, а также их производных, такой оценки $\tilde{x}$, что

$$\lim_{t\to+\infty} \tilde{x}(t) = x(t), \Big| \lim_{t\to+\infty} \tilde{x}_k(t) = x_k(t), \qquad (1.2.1)$$

и критерий наблюдаемости: линейная система вполне наблюдаема тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости

$$S_y = (C^T \; A^T C^T \; (A^T)^2 C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T) \qquad (1.2.2)$$

имеет ранг, равный $n$, т.е. равный размерности вектора состояния.

Если система наблюдаема, то можно построить так называемый наблюдатель, который на выходе будет давать оценку $\tilde{x}$. Как и в случае с управляемостью, можно построить наблюдатель и без выполнения критерия наблюдаемости, но гарантировать его адекватность нельзя.

$$S_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1134104046 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1134104046 \end{bmatrix}$$

$$S_{dH} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -0.00131165 & -0.005447316496378 & -0.013039863610896 \\ 0 & 0.1511355 & 0.302271 & 0.4534065 \\ 0 & -0.00006574791 & -0.000538030718233 & -0.001885593725024 \end{bmatrix} \qquad (1.1.4)$$

Посчитаем ранг этих матриц с помощью функции встроенной в Matlab rank (). Ранг $S_H$ и $S_{dH}$ матриц равен четырем.

```
rank_S_H =

     4


rank_Sd_H =

     4
```

*Рис. 2 – Ранг матриц наблюдаемости непрерывной и дискретной систем*

Ранг матрицы наблюдаемости непрерывной и дискретной системы равен размерности вектора состояния (равен 4). Тогда можно сделать вывод об наблюдаемости исследуемых систем.

Код программы для расчета матриц наблюдаемости и управляемости представлен на рисунке 3.

```
kalman.m*   disk_model.m   +

format long
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
b=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];
C=[1 0 0 0];d=0;
Ad = [
  1.0, -0.00131165, 0.1511355, -0.00006574791;
   0,    1.076513,         0,       0.1549708;
   0,  -0.0175753,       1.0,     -0.00131165;
   0,    1.025226,         0,        1.076513;
];
bd = [
   0.000033126;
   -0.000021975;
   0.00043842;
  -0.00029444
];
Cd=[1 0 0 0];D=0;

S_y = [b, A*b, A^2*b, A^3*b]
Sd_y = [bd, Ad*bd, Ad^2*bd, Ad^3*bd]
rank_S_y = rank(S_y)
rank_Sd_y = rank(Sd_y)
S_H = [C', A'*C', A'^2*C', A'^3*C']
Sd_H = [Cd', Ad'*Cd', Ad'^2*Cd', Ad'^3*Cd']
rank_S_H = rank(S_H)
rank_Sd_H = rank(Sd_H)
```

*Рис. 3 – Код программы в MATLAB*

# 2. Модальное управление

## 2.1. Теория

Задача размещения полюсов передаточной матрицы линейной системы (задача размещения спектра матрицы замкнутого контура в заданной области комплексной плоскости) является классической задачей теории автоматического управления. Формирование желаемого спектра путем введения обратной связи позволяет скорректировать динамические свойства и обеспечить заданные прямые показатели качества.

Для начала необходимо разбить входной вектор $u$ на две компоненты:

$$u = \begin{pmatrix} u_y \\ v_\text{в} \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

где $u_y$ – управляющее воздействие, $v_\text{в}$ – возмущающее воздействие.

Необходимо найти стабилизирующий регулятор:

$$u(x) = -k_p x \tag{2.1.2}$$

такой, что спектр замкнутой системы (схема замкнутой системы представлена на рисунке 4):

$$\dot{x} = (A - Bk_p)x = A_\text{з} x \tag{2.1.3}$$

совпадает или является подмножеством предписываемого спектра, задаваемого последовательностью ${\lambda^\text{уст}}_i = {\lambda^\text{уст}}_1 \dots {\lambda^\text{уст}}_n$:

$$\rho(A_z) \subseteq \rho(-F) \tag{2.1.4}$$

Здесь $F = diag({\lambda^\text{уст}}_i)_1^n \in R^{n\times n}$ – матрица, на главной диагонали которой расположены числа ${\lambda^\text{уст}}_i$.

Задача нахождения регулятора $k_p$ сводится к решению матричного уравнения Сильвестра:

$$AP + PF = BG \tag{2.1.5}$$

Относительно матрицы P с произвольной матрицей G и решению матричного уравнения:

$$k_p P = G \tag{2.1.6}$$

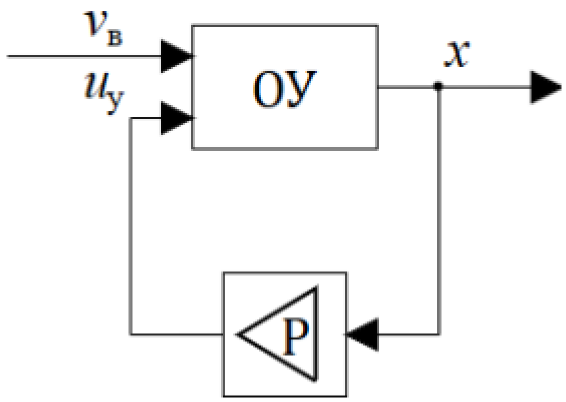


*Рис. 4. Замкнутая САУ*

Для динамической системы условия существования решения задачи размещения полюсов и методика синтеза содержатся в следующей теореме.

Теорема. Пусть для системы выполнены следующие условия:

1) Матрица $G \in R^{m\times n}$ полного ранга: $\mathrm{r}ankG = \min(m, n)$ ;

2) Матричная пара (A, B) управляема;

3) Матричная пара (G, F) наблюдаема;

4) Спектры матриц F и A не пересекаются: $\rho(A) \cap \rho(F) = \emptyset$;

5) Числа ${\lambda^{уст}}_i (i = \overline{1, n})$ попарно различны.

Тогда существует управление такое, что матрица замкнутого контура $A_z = A - Bk_p$ имеет спектр, совпадающий со спектром эталонной матрицы $(-F)$, то есть выполнено $\rho(A_z) = \rho(-F)$.

Параметры регулятора определяются из соотношения $k_p P = G$, где матрица $P$ – решение уравнения Сильвестра.

## 2.2. Выбор параметров

Пусть собственные числа $\lambda^{уст}$ будут следующими:

$$\lambda^{уст} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \lambda_d^{уст} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.8 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

Собственные числа $\lambda^{уст}$ не должны пересекаться с собственными числами матриц A, Ad исходных систем. Исходные собственные числа матриц A, Ad:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5721 \\ -2.5721 \end{pmatrix}, \lambda_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.4751 \\ 0.6779 \end{pmatrix} \quad (2.2.2)$$

Отсюда видно, что $\lambda^{уст}$ отличаются от исходных собственных чисел.

Построим матрицы F для непрерывной и дискретной моделей:

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad F_d = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad (2.2.3)$$

Зададим матрицы G следующим образом:

$$G = G_d = (1\ 1\ 1\ 1) \quad (2.2.4)$$

Матричные пары (G, F) должны быть наблюдаемы. Для проверки этого, с помощью функции rank были найдены ранги матриц наблюдаемости для этих пар. Результаты представлены на рисунке 5.

```
S_H_G =

   1.000000000000000  -1.000000000000000   1.000000000000000  -1.000000000000000
   1.000000000000000  -2.000000000000000   4.000000000000000  -8.000000000000000
   1.000000000000000  -1.500000000000000   2.250000000000000  -3.375000000000000
   1.000000000000000  -0.500000000000000   0.250000000000000  -0.125000000000000


Sd_H_G =

   1.000000000000000   0.500000000000000   0.250000000000000   0.125000000000000
   1.000000000000000   0.800000000000000   0.640000000000000   0.512000000000000
   1.000000000000000   0.300000000000000   0.090000000000000   0.027000000000000
   1.000000000000000   0.200000000000000   0.040000000000000   0.008000000000000


rank_S_H =

     4


rank_Sd_H =

     4
```

*Рис. 5 – Матрицы наблюдаемости пар (G, F) дискретной и непрерывной моделей и их ранги.*

Ранги полученных матриц равны размерности пространства состояния, а значит данные матричные пары наблюдаемы.

Рассчитаем матрицу E и Ed по формуле:

$$E = BG \quad 2.2.5$$

Получим:

$$E=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0.00289017&0.00289017&0.00289017&0.00289017\\-0.00192678&-0.00192678&-0.00192678&-0.00192678\end{pmatrix}$$

$$E_d=10^{-3}\begin{pmatrix}0.033126&0.033126&0.0331260&0.033126\\-0.021975&-0.021975&-0.021975&-0.021975\\0.43842&0.43842&0.43842&0.43842\\-0.29444&-0.29444&-0.29444&-0.29444\end{pmatrix} \quad (2.2.6)$$

## 2.3. Синтез управления

Для получения значений регуляторов необходимо решить матричное уравнение Сильвестра для дискретной и непрерывной модели:

$$AP+PF=E \quad (2.3.1)$$

Уравнение Сильвестра можно переписать в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$\mathrm{Wp}=\mathrm{e} \quad (2.3.2)$$

где:

- W — матрица коэффициентов, $\mathrm{W}=(\mathrm{I_n}\otimes \mathrm{A}-\mathrm{F^T}\otimes\mathrm{I_n})$
- p — вектор, содержащий элементы матрицы P, выписанные в столбец,
- e — вектор, содержащий элементы матрицы E, выписанные в столбец.

$$e_i=(0\quad 0\quad 0.00289017\quad -0.00192678)^T$$

$$e_d=10^{-3}(0.033126\quad -0.021975\quad 0.43842\quad -0.29444)^T$$

$$W=\begin{pmatrix}W_1&\mathbb{O}&\mathbb{O}&\mathbb{O}\\\mathbb{O}&W_2&\mathbb{O}&\mathbb{O}\\\mathbb{O}&\mathbb{O}&W_3&\mathbb{O}\\\mathbb{O}&\mathbb{O}&\mathbb{O}&W_4\end{pmatrix},\qquad W_d=\begin{pmatrix}W_{d1}&\mathbb{O}&\mathbb{O}&\mathbb{O}\\\mathbb{O}&W_{d2}&\mathbb{O}&\mathbb{O}\\\mathbb{O}&\mathbb{O}&W_{d3}&\mathbb{O}\\\mathbb{O}&\mathbb{O}&\mathbb{O}&W_{d4}\end{pmatrix},$$

$$\mathbb{O}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$W_1=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&-0.1134104046&1&0\\0&6.615606936&0&1\end{pmatrix},W_2=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&2&0&1\\0&-0.1134104046&2&0\\0&6.615606936&0&2\end{pmatrix},$$

$$W_3=\begin{pmatrix}1.5&0&1&0\\0&1.5&0&1\\0&-0.1134104046&1.5&0\\0&6.615606936&0&1.5\end{pmatrix},W_4=\begin{pmatrix}0.5&0&1&0\\0&0.5&0&1\\0&-0.1134104046&0.5&0\\0&6.615606936&0&0.5\end{pmatrix} \quad (2.3.3)$$

$$W_{d1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 0.576513 & 0 & 0.1549708 \\ 0 & -0.0175753 & 0.5 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 0.576513 \end{pmatrix},$$

$$W_{d2} = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 0.276513 & 0 & 0.1549708 \\ 0 & -0.0175753 & 0.2 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 0.276513 \end{pmatrix},$$

$$W_{d3} = \begin{pmatrix} 0.7 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 0.776513 & 0 & 0.15497080 \\ 0 & -0.0175753 & 0.7 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 0.776513 \end{pmatrix};$$

$$W_{d4} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \\ 0 & 0.876513 & 0 & 0.1549708 \\ 0 & -0.0175753 & 0.8 & -0.00131165 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 0.876513 \end{pmatrix}$$

С помощью кода, написанного на языке MATLAB, были получены значения матриц P.

$$P = \begin{pmatrix} -0.00285125757 & -0.00070165663 & -0.001262273695 & -0.01142336904 \\ -0.0003431116 & -0.00073664738 & -0.00044135444 & -0.00030268598 \\ 0.00285125757 & 0.00140331326 & 0.00189341054 & 0.00571168452 \\ 0.0003431117 & 0.00147329476 & 0.00066203166 & 0.00015134299 \end{pmatrix} \quad (2.3.4)$$

$$P_d = \begin{pmatrix} -0.00019975024 & -0.00146547588 & -0.00008798731 & -0.00006214572 \\ 0.00018998946 & -0.00047989462 & 0.00006432385 & 0.00004326952 \\ 0.00088129214 & 0.00215461421 & 0.00062705966 & 0.00054834186 \\ -0.0008485882 & 0.00071447075 & -0.00046410876 & -0.00038653282 \end{pmatrix} \quad (2.3.5)$$

Код программы для расчета матриц $P$ $Pd$ представлен на рисунке 6.

```
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
T = 0.151135504765592;
F = diag([-1,-2,-1.5, -0.5]);
Fd = diag([0.5, 0.8, 0.3, 0.2]);
Ad = [
  1.0, -0.00131165, 0.1511355, -0.00006574791;
   0,    1.076513,         0,      0.1549708;
   0,  -0.0175753,       1.0,    -0.00131165;
   0,    1.025226,         0,       1.076513;
];
G = [1,1,1,1];
Bg = [0.000033126; -0.000021975; 0.00043842; -0.00029444];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];

I = eye(4);

W = kron(I, A) - kron(F.', I);

Wd = kron(I, Ad) - kron(Fd.', I);


E = B * G;
Ed = Bg * G;

e = [E(:,1)', E(:,2)', E(:,3)', E(:,4)']';
ed = [Ed(:,1)', Ed(:,2)', Ed(:,3)', Ed(:,4)']';

p = linsolve(W,e)
P = [p(1:4), p(5:8), p(9:12), p(13:16)]
```

*Рис. 6 – Код программы в MATLAB*

Из формулы

$$k_p \mathrm{P} = \mathrm{G} \quad (2.3.6)$$

Выразим $k_p$:

$$k_p = GP^{-1} \tag{2.3.7}$$

На основе полученных матриц P был проведен расчет параметров регуляторов $k_p$ для непрерывной и дискретной моделей.

$$\begin{gathered} k_p = 10^3 * \begin{pmatrix} -0.079357891812304 \\ -8.093796247718581 \\ -0.330657882551267 \\ -3.090989885930520 \end{pmatrix} \\ k_{dp} = 10^3 * \begin{pmatrix} -0.558721546935325 \\ -3.975524390249701 \\ -0.6906198557968677 \\ -1.593636118280469 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{2.3.8}$$

Код программы для расчета матриц $k_p$ и $k_{dp}$ представлен на рисунке 7.

```
Fd = diag([0.5, 0.8, 0.3, 0.2]);
Ad = [
  1.0, -0.00131165, 0.1511355, -0.00006574791;
   0,    1.076513,         0,       0.1549708;
   0,  -0.0175753,       1.0,    -0.00131165;
   0,    1.025226,         0,        1.076513;
];
G = [1,1,1,1];
Bg = [0.000033126; -0.000021975; 0.00043842; -0.00029444];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];

I = eye(4);

W = kron(I, A) - kron(F.', I);

Wd = kron(I, Ad) - kron(Fd.', I);


E = B * G;
Ed = Bg * G;

e = [E(:,1)', E(:,2)', E(:,3)', E(:,4)']';
ed = [Ed(:,1)', Ed(:,2)', Ed(:,3)', Ed(:,4)']';

p = linsolve(W,e)
P = [p(1:4), p(5:8), p(9:12), p(13:16)]


pd = linsolve(W_d,ed)
Pd = [pd(1:4), pd(5:8), pd(9:12), pd(13:16)]

kp=G/P
kdp=G/Pd
```

*Рис. 7 – Код программы в MATLAB*

Получение матриц $А_з$ замкнутых непрерывной и дискретной моделей:

$$\begin{gathered} A_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.229357798 & 23.279036697 & 0.955657492 & 8.93348624 \\ -0.152905199 & -8.9793577982 & -0.637104995 & -5.9556575 \end{pmatrix} \\ A_{dz} = \begin{pmatrix} 1.1850820996 & 1.3156205595 & 0.3799102334 & 0.52784215263 \\ -0.12277905993 & 0.2028915152 & -0.1517637133 & -0.19523073699 \\ 2.449547006 & 17.4119187317 & 4.0278155718 & 6.98550781977 \\ -1.6450997228 & -10.6803080147 & -2.0334611034 & -3.61578918667 \end{pmatrix} \end{gathered} \tag{2.3.9}$$

Код программы для расчета матриц $А_z$ и$A_{dz}$ представлен на рисунке 8.

```
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
T = 0.151135504765592;
F = diag([-1,-2,-1.5, -0.5]);
Fd = diag([0.5, 0.8, 0.3, 0.2]);
Ad = [
  1.0, -0.00131165, 0.1511355, -0.00006574791;
   0,    1.076513,         0,      0.1549708;
   0,  -0.0175753,       1.0,    -0.00131165;
   0,    1.025226,         0,       1.076513;
];
C = [1, -1,0,0];
G = [1,1,1,1];
Bg = [0.000033126; -0.000021975; 0.00043842; -0.00029444];
B=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];

I = eye(4);

W = kron(I, A) - kron(F.', I);

Wd = kron(I, Ad) - kron(Fd.', I);


E = B * G;
Ed = Bg * G;

e = [E(:,1)', E(:,2)', E(:,3)', E(:,4)']';
ed = [Ed(:,1)', Ed(:,2)', Ed(:,3)', Ed(:,4)']';
p = linsolve(W,e)
P = [p(1:4), p(5:8), p(9:12), p(13:16)]

pd = linsolve(W_d,ed)
Pd = [pd(1:4), pd(5:8), pd(9:12), pd(13:16)]

kp=G/P
kdp=G/Pd

Az = A-b*kp
Adz = Ad-bd*kdp
eigAz = eig(Az)
eigAdz = eig(Adz)
sysZ =ss(Az,b,C,0);
sysZd=ss(Adz,bd,C,0, T);
```

*Рис. 8 – Код программы в MATLAB*

Сравним собственные числа матриц замкнутых систем и $\lambda^{уст}$. Для непрерывной системы числа совпали с точностью до погрешности:

$$\lambda^{уст} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \mathrm{eig}(A_z) = \begin{pmatrix} -2.000000000000000 \\ -1.500000000000018 \\ -0.999999999999991 \\ -0.499999999999999 \end{pmatrix} \tag{2.3.10}$$

Для дискретной собственные числа тоже совпали:

$$\lambda_d^{уст} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.8 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \mathrm{eig}(A_{dz}) = \begin{pmatrix} 0.800000000000001 \\ 0.199999999999919 \\ 0.300000000000150 \\ 0.499999999999967 \end{pmatrix} \tag{2.3.11}$$

Собственные числа полученных матриц совпали с заданными собственными числами.

## 2.4. Исследование непрерывной САУ

Построим в программе SimInTech САУ без регулятора и с регулятором и сравним их.

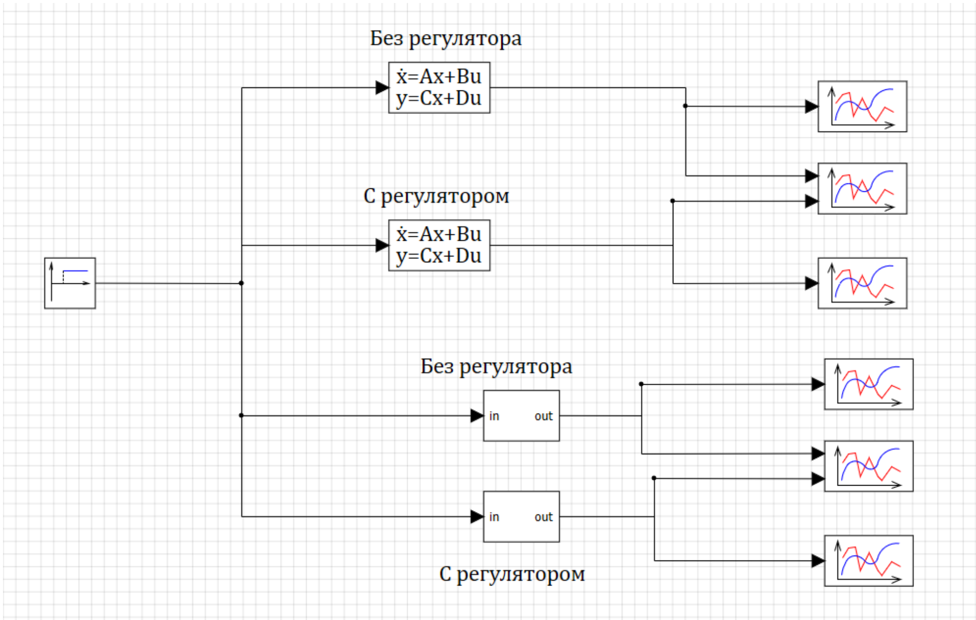


*Рис. 9 – САУ с и без регулятора*

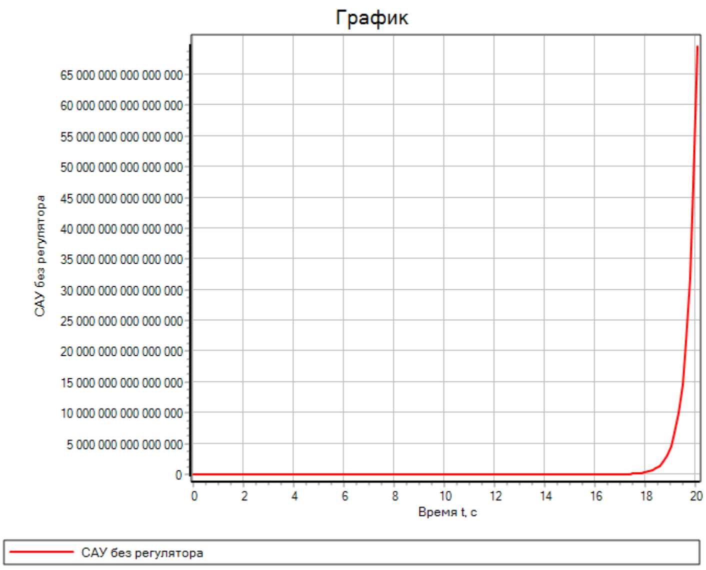


*Рис. 10 – ПХС САУ без регулятора*

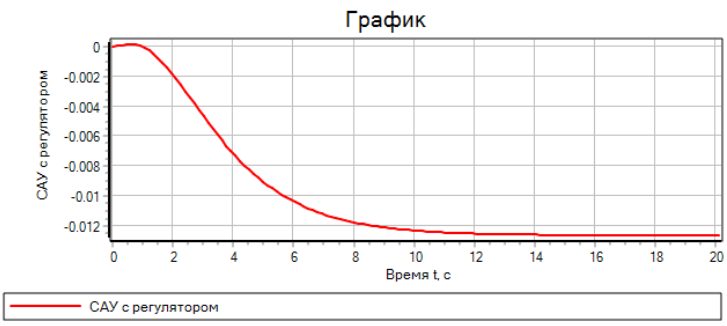


*Рис. 11 – ПХС САУ с регулятором*

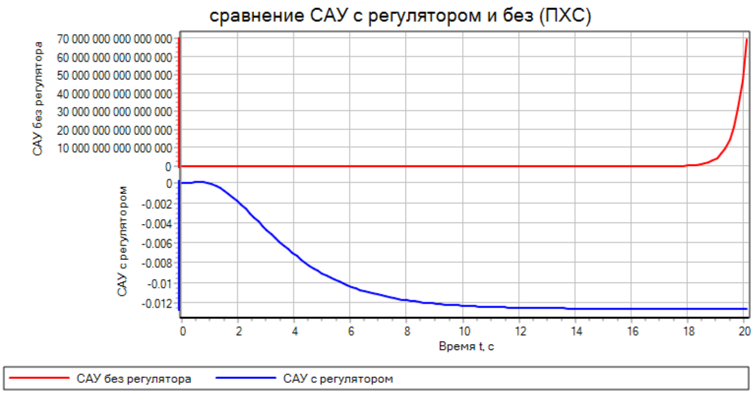


*Рис. 12 – ПХС САУ с и без регулятора*

Характеристика переходного процесса для ПХС САУ с регулятором:

1) Установившиеся значение сигнала: $y(+\infty) = -0.012599$

2) Время переходного процесса:

e=0.05*(0.0001313295-0.012599) $= -0.00062338352$c

$t_{пп} = 7.1017$

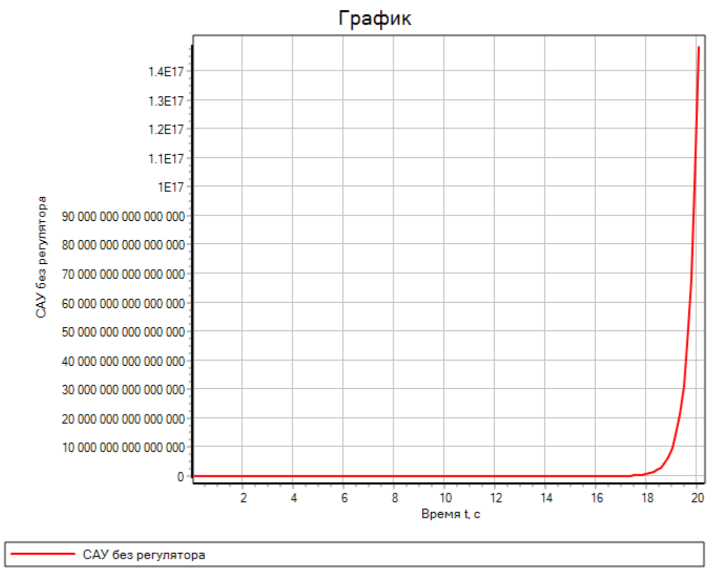


*Рис. 13 – ИХС САУ без регулятора*

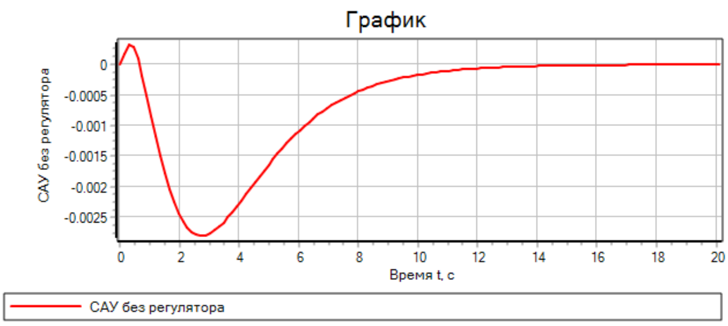


*Рис. 14 – ИХС САУ с регулятором*

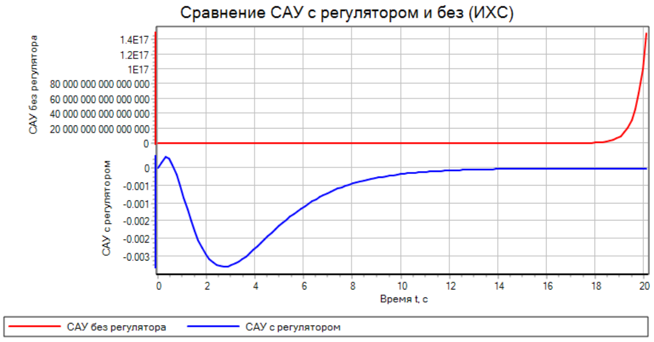


*Рис. 15 – ИХС САУ с и без регулятора*

Характеристика переходного процесса для ИХС САУ с регулятором:

1) Установившиеся значение сигнала: $y(+\infty) = -1.08921836748539\text{E} - 6$

2) Время переходного процесса:

e=0.05*(0.000326504687781387+0.00279934510334674) = 0.00015629248

$$t_{\text{пп}} = 10.1237\text{с}$$

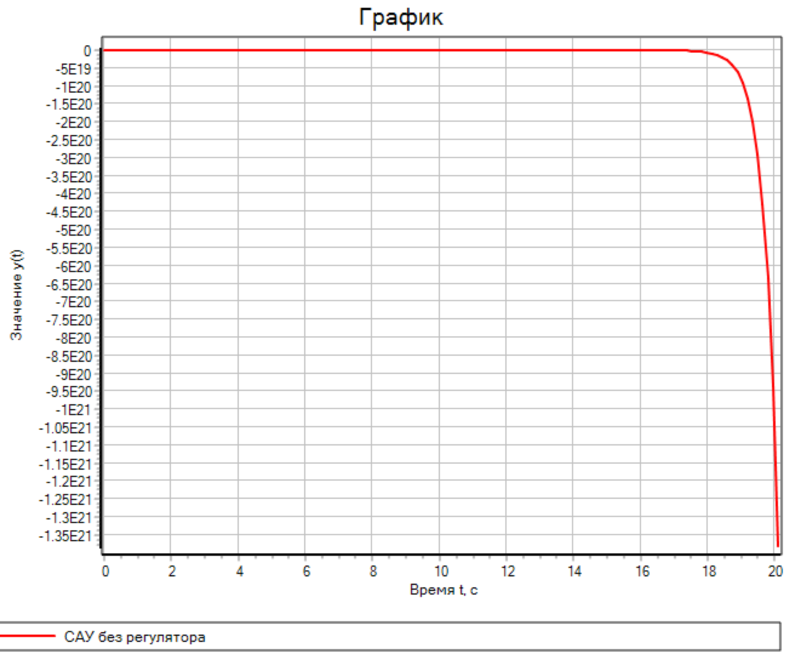


*Рис. 16 – ННУ САУ без регулятора*

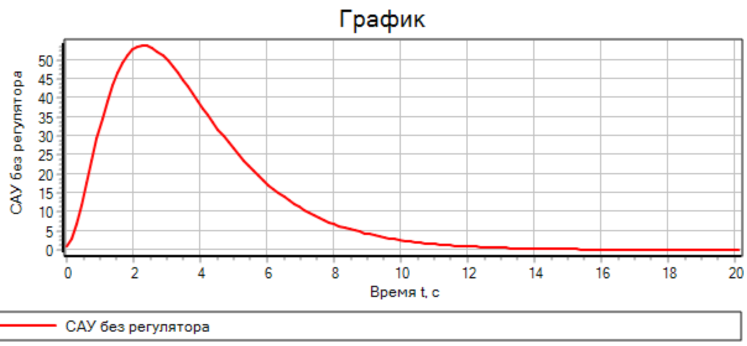


*Рис. 17 – ННУ САУ с регулятором*

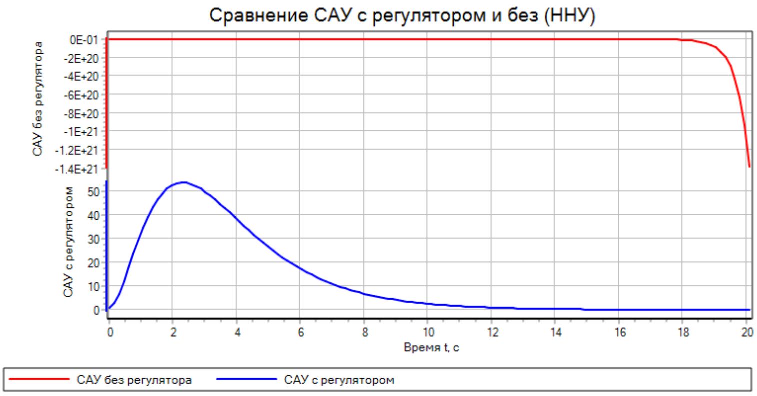


*Рис. 18 – ННУ САУ с и без регулятора*

Характеристика переходного процесса для ПХС САУ с регулятором:

1) Установившиеся значение сигнала: $y(+\infty) = 0.0169119622550408$

2) Время переходного процесса:

e=0.05*(53.8494692970931-0.0169119622550408) = 2.69162786674

$$t_{\text{пп}} = 9.8215\text{с}$$

## 2.5. Исследование дискретной САУ

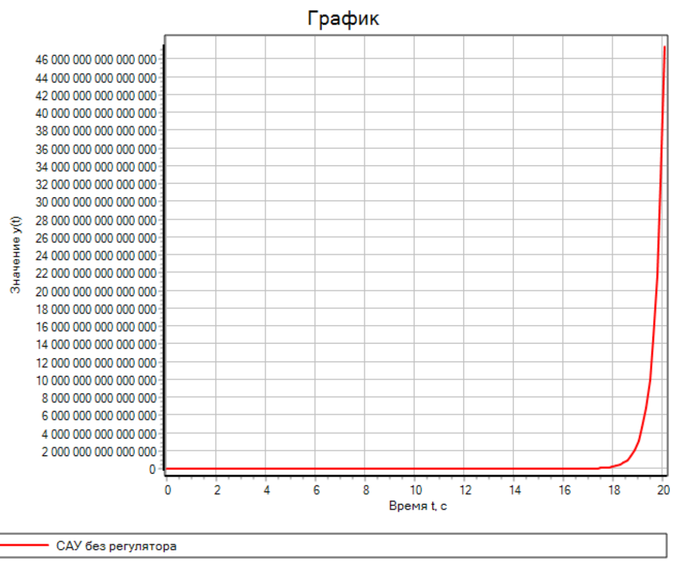


*Рис. 19 – ПХС САУ без регулятора*

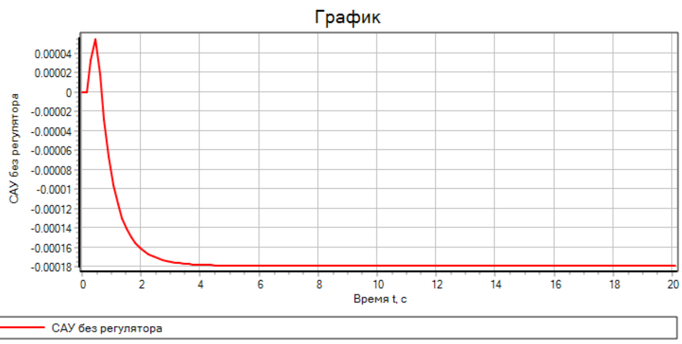


*Рис. 20 – ПХС САУ без регулятора*

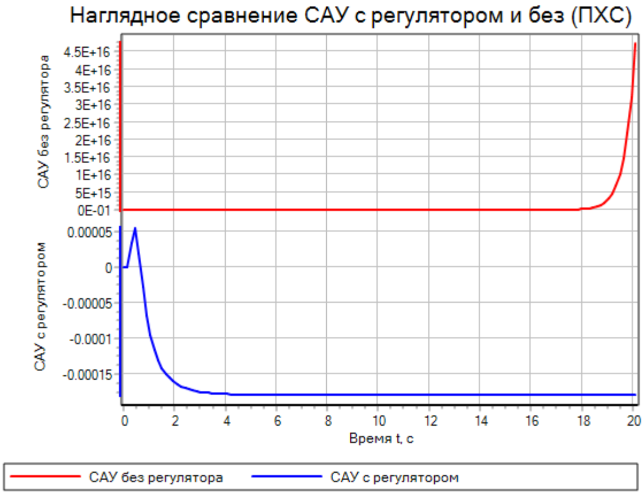


*Рис. 21 – ПХС САУ с и без регулятора*

Характеристика переходного процесса для ПХС САУ с регулятором:

1) Установившиеся значение сигнала: $y(+\infty) = -0.000178980031374289$

2) Время переходного процесса:

e=0.05*(5.46146689573716E-5-0.00017898003137428931) $= -0{,}00000621826$

$$t_{\text{пп}} = 3.6264\text{с}$$

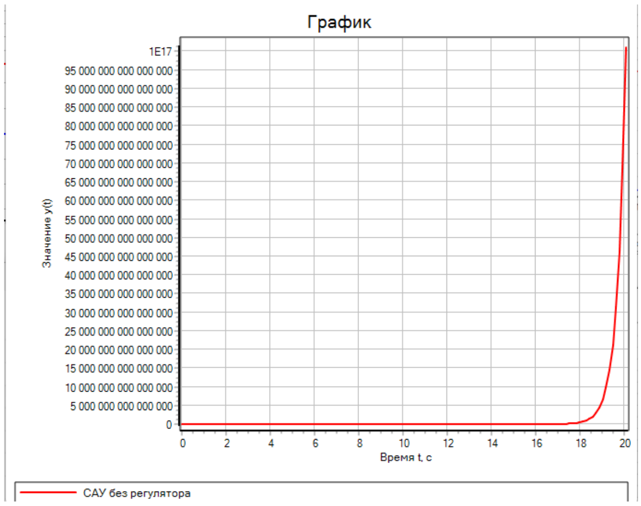


*Рис. 22 – ИХС САУ без регулятора*

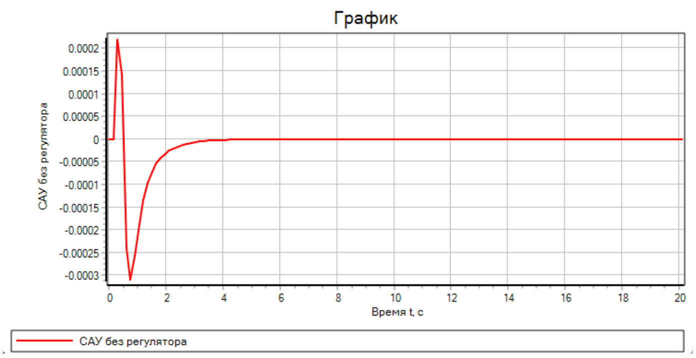


*Рис. 23 – ИХС САУ с регулятором*

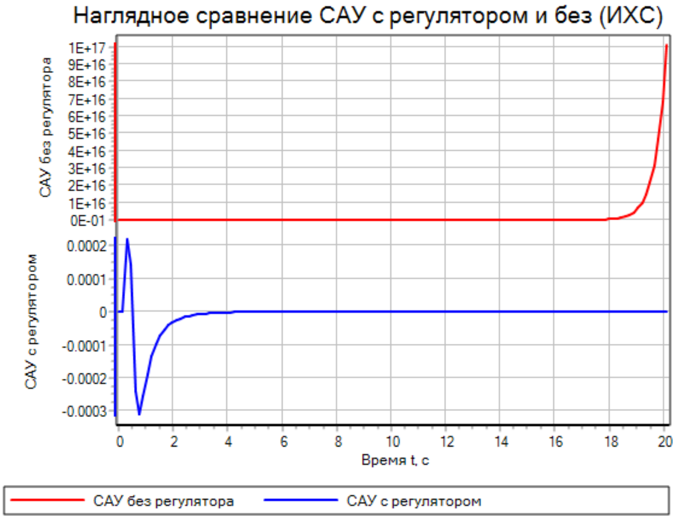


*Рис. 24 – ИХС САУ с и без регулятора*

Характеристика переходного процесса для ПХС САУ с регулятором:

1) Установившиеся значение сигнала: $y(+\infty) = -0.000178980031374289$

2) Время переходного процесса:

e=0.05*(0.000219232296492389+0.000309235600539601) $= -0{,}00000621826$

$$t_{\text{пп}} = 1.0577\text{с}$$

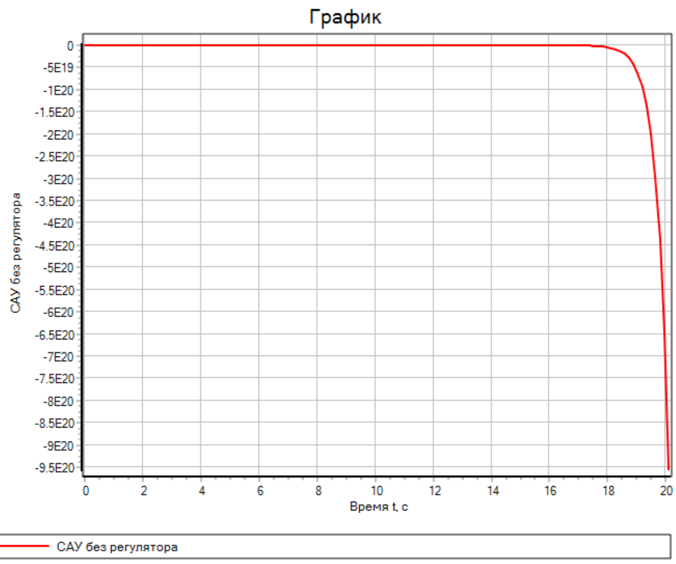


*Рис. 25 – ННУ САУ без регулятора*

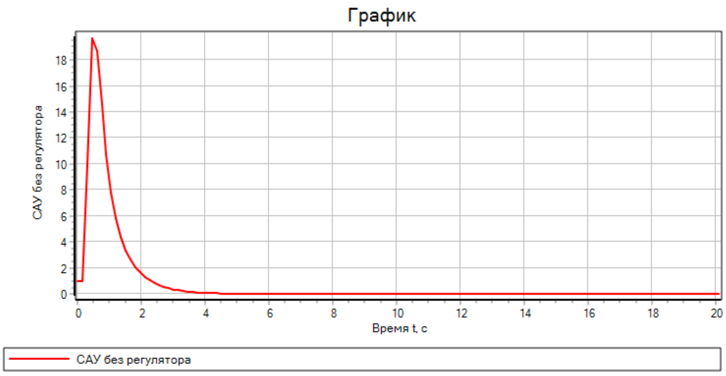


*Рис. 26 – ННУ САУ с регулятором*

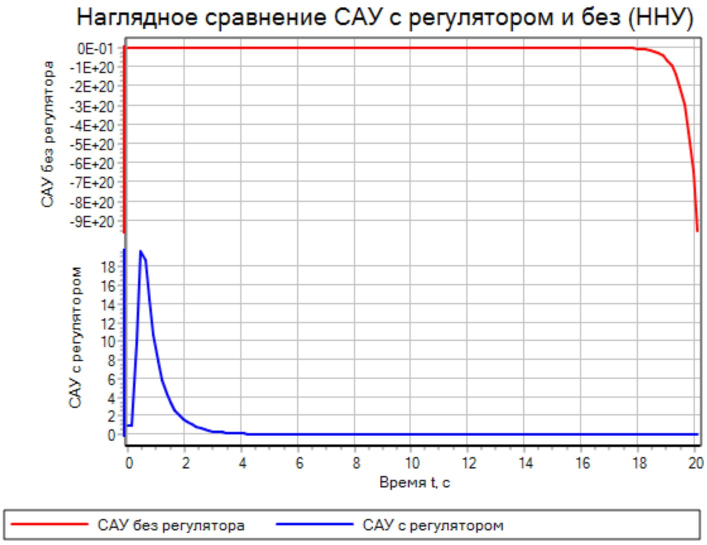


*Рис. 27 – ННУ САУ с и без регулятора*

Характеристика переходного процесса для ПХС САУ с регулятором:

3) Установившиеся значение сигнала: $y(+\infty) = 3.74782048775371\text{E} - 12$

4) Время переходного процесса:

e=0.05*(19.6728667439851-3.74782048775371E-12) =0.98364333719

$$t_{\text{пп}} = 2.4176\text{с}$$

Графики системы автоматического управления (САУ) с регулятором демонстрируют сходимость к нулю (или к установившемуся значению в случае переходной характеристики), что подтверждает эффективность разработанного регулятора.

# 3. Оптимальный регулятор

## 3.1. Теория

Задана система автоматического управления (САУ), представленная на рис. 1, динамику которой можно описать моделью в пространстве состояний (1).

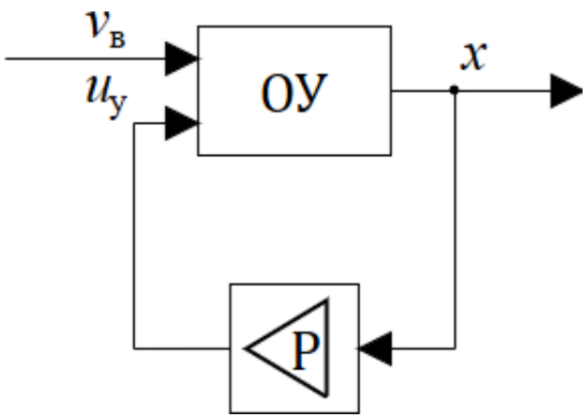


*Рис. 28 – Замкнутая система автоматического управления в схематичном виде*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_з x(t) + b_в v_з(t) \\ y(t) = E_n x(t) \end{cases} \Bigg| \begin{cases} x_{k+1} = A_{зд} x_k + b_{вд} v_{вк} \\ y_k = E_n x_k \end{cases} \qquad (3.1.1)$$

где $b_в$ и $b_{вд}$ – части матриц $B$ и $B_д$, относящихся к соответствующим возмущающим воздействиям $v_в$ и $v_{вk}$, $x(0) = x_0 = x^0$.

Как и в случае модального регулятора, мы будем синтезировать линейное управление

$$u_y = k_p x \qquad (3.1.2)$$

где $k_p$ – коэффициенты регулятора. Тогда матрица замкнутой системы будет иметь вид:

$$\mathrm{A_з} = \mathrm{A} + b_у k_p \qquad (3.1.3)$$

Прежде, чем перейти к синтезу, рассмотрим особенности оптимального управления. В модальном управлении ядром синтеза был выбор собственных чисел замкнутой модели. Это позволяло определить характер переходных процессов (апериодический, колебательный и т.п.), но не позволяло ставить на них различные ограничения, загоняя их в необходимые для работы или исследования рамки. Оптимальное управление позволяет эти ограничения задать. Конечно, таким образом нельзя будет утверждать, каким характером будут обладать переходные процессы, но здесь уже важно выполнение условий – оптимальность, – а не то, как именно это будет достигаться.

Ограничения задаются с помощью функционала качества. В общем виде это некоторая интегральная функция от времени и векторов состояния и управления, которую можно выбирать согласно поставленным задачам. Для линейных систем обычно выбирают квадратичный функционал качества:

$$J = \int_0^{+\infty} \left( x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right) dt \;\; | \;\; J = \sum_{k=0}^{+\infty} (x_k{}^T Q x_k + u_k{}^T R u_k) \tag{3.1.5}$$

где $Q = Q^T > 0$ и $R = R^T > 0$ – это квадратные матрицы, которые и будут задавать ограничения для замкнутой САУ.

Поставим задачу найти такое управление $u_{\text{у}}$, чтобы $J \to \min_{u_y}$ .

То есть будем говорить, что отклонения $x$ и управления $u$ с течением времени должны будут стремиться к нулю, что и будет обуславливать ограниченность интеграла или суммы, а значит и существование минимума.

## 3.2. Выбор ограничений

Перед началом синтеза управления нужно задать ограничения, т.е. сформировать матрицы $Q$ и $R$:

1) выбираем желаемые максимальную статическую ошибку $y_{\text{ош}}$, т е. величину. отличия от установившегося значения $y(+\infty)$, если исследуемая система устойчива, и время переходного процесса $t_{\text{пп}}$;

Пусть $y_{\text{ош}}$ = 0,0001313295 и $t_{\text{пп}} = 6.5$ с.

2) формируем матрицу $\tilde{Q}$:

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 1/{y_{\text{ош}}}^2 & 0 \\ 0 & {t_{\text{пп}}}^2/9{y_{\text{ош}}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,614{,}43 & 0 \\ 0 & 272\,182\,138{,}435 \end{pmatrix} \tag{3.2.1}$$

3) находим матрицу $H$:

$$H = \begin{pmatrix} e_p \\ e_p A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.2}$$

$$H_d = \begin{pmatrix} e_p \\ e_p A_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 & \\ 1 \quad -0.00131165 & 0.1511355 & -0.00006574791 \end{pmatrix} \tag{3.2.3}$$

где $e_p$ – вектор-строка размерности $n$ с единицей в $p$-ой позиции, которая указывает, оптимальности какого компонента вектора состояния $x$ мы будем добиваться;

4) используем следующее преобразование, чтобы получить требуемую матрицу $Q$:

$$Q = H^T \tilde{Q} H = 10^8 \begin{pmatrix} 0.0000761443 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.72182138435 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.4}$$

$$Q_d = {H_d}^T \tilde{Q} H_d = 10^4 \begin{pmatrix} 2721.897528 & -0.3570077 & 411.3638358 & 0.0178954 \\ -0.3570077 & 0.000468269 & -0.0539565 & 0.0000234725 \\ 411.36384 & -0.0539565 & 6.2171679 & 0.0027046 \\ -0.0178954 & 0.00002347 & -0.00027046 & 0.0000001176 \end{pmatrix} \quad (3.2.5)$$

5) матрицу $R$ выбираем единичной, т.к. нет необходимости следить за качеством управления: нас интересует только качество замкнутой системы; тем не менее, чтобы ресурсозатратность была минимальной, нужно уменьшить суммарную величину управляющего воздействия.

## 3.3. Синтез управления

Для поиска минимальной траектории используют необходимое условие оптимальности, или уравнение Беллмана:

$$min_{u_y}\left(\dot{V}(t) + x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right) = 0 \quad (3.3.1)$$

$$min_k(\Delta V_k + {x_k}^T Q x_k + {u_k}^T R u_k) = 0 \quad (3.3.2)$$

где $V$ – функция Ляпунова.

Формула расчёта коэффициентов регулятора:

$$k_p = -R^{-1} b_y^T P, \ \mid \ k_{pd} = -\overline{R}^{-1} b_{yd}^T P A_d \quad (3.3.3)$$

где $\overline{R} = R + B_d^T P B_d$. Тем не менее сейчас мы их посчитать не можем, т.к. нем не известна матрица $P$. Её находят из уравнения Риккати:

$$A^T P + PA - P b_y R^{-1} b_y^T P = -Q \ \mid \ {A_d}^T P A_d - P - {A_d}^T P b_{yd} \overline{R}^{-1} b_{yd}^T P A_d = -Q \quad (3.3.4)$$

Решения матричных нелинейных алгебраических уравнений не единственны. Необходимо с помощью численных методов найти такое решение, чтобы $P$>0.

Его существование определяется теоремой со следующими условиями:

1) объект управления должен быть вполне управляемый;

2) $R$>0;

3) выполняется одно из условий:

3.1) $Q$>0,

3.2) $Q=\overline{Q}^T\overline{Q}\geq 0$, причём пара ($A^T$, $\overline{Q}^T$) – наблюдаемая.

Собственные числа матрицы Q:

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_2 = 0$
- $\lambda_3 = 7614.43$
- $\lambda_4 = 272182138.435$

Матрица не является положительно определённой, так как у неё есть нулевые собственные значения.

Собственные числа матрицы Qd:

- $\lambda_1 = 0$
- $\lambda_2 = 10^{-15}$
- $\lambda_3 = 170.0522145$
- $\lambda_4 = 278407220.1595985$

Матрица не является положительно определённой, так как у неё есть нулевые собственные значения.

Так как не выполняется условие $Q>0$, необходимо проверить условие 3.2. Для этого были вычислены матрицы $\overline{\mathrm{Q}}$, $\overline{\mathrm{Q}}_d$:

$$\overline{\mathrm{Q}} = SJS^{-1} \rightarrow J^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \pm\sqrt{\lambda_4} \end{pmatrix} \tag{3.3.5}$$

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} 87.260701349462 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16497.9434607772 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.6}$$

$$\overline{Q_d} = \begin{pmatrix} 1631 & -21.38 + 6.57 * 10^{-16}i & 2463 + 5.508 * 10^{-18}i & -1.0717 - 4.47 * 10^{-16}i \\ -21.38 & 0.0291 + 1.47e * 10^{-5}i & -3.344 + 1.239 * 10^{-7}i & 0.001602 - 10^{-5}i \\ 2463 & -3.344 + 1.24 * 10^{-7}i & 385.346408303368 + 1.039 * 10^{-9}i & -0.1676 - 8.44 * 10^{-8}i \\ 1.071 & 0.001602 - 10^{-5}i & -0.167634426574975 - 8.438 * 10^{-8}i & 0.0002904 + 6.85 * 10^{-6}i \end{pmatrix}. \tag{3.3.7}$$

Далее были найдены матрицы наблюдаемости пар $(A^T, \overline{\mathrm{Q}}^T)$ и их ранги:

```
rank_S_Q_H =

     4


rank_S_Qd_H =

     4
```

*Рис. 29 – Ранги матриц наблюдаемости матричных пар $(A^T, \bar{Q}^T)$ непрерывной и дискретной систем.*

В связи с тем, что ранги полученных матриц равны размерности систем, можно сделать вывод о наблюдаемости матричных пар $(A^T, \overline{\mathrm{Q}}^T)$.

Так как ОУ является вполне управляемым, матрица R> 0, $Q$>=0 и пары $(A^T, \overline{\mathrm{Q}}^T)$ – наблюдаемые, достаточное условие по теореме выполняется.

Для получения матрицы $P$ в Matlab можно воспользоваться функций icare, причём вторым параметром подаётся произведение:

$$b_{у}R^{-1}b_{у}^{T} \mid b_{уд}R^{-1}b_{уд}^{T} \tag{3.3.8}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1445736 & 4559981 & 1158537 & 1783094 \\ 4559981 & 3491838903 & 864011685 & 1365396630 \\ 1158537 & 864011685 & 219504338 & 337855319 \\ 1783094 & 1365396630 & 337855319 & 533904389 \end{pmatrix} \tag{3.3.9}$$

$$P_d = \begin{pmatrix} 0.004465936 & 5.38732 & 0.57163182 & 2.1009442 \\ 5.38732 & 2108501 & 1375.55 & 819786 \\ 0.57163 & 1375.56 & 145.979 & 537.2997 \\ 2.10094 & 819786.66 & 537.2996 & 318734.53 \end{pmatrix} \tag{3.3.10}$$

Теперь подставляем $P$ в уравнение $k$р, находим его и собираем матрицу замкнутой САУ.

$$k_p = (\,87.26 \;\; 133678 \;\; 16568 \;\; 52256) \tag{3.3.11}$$

$$\mathrm{k}_{dp} = (\,0.0004679 \;\; 407.5725 \;\; 0.1197978 \;\; 158.4622) \tag{3.3.12}$$

Подстановка $k$р в $u_y = k_p x$ и подача синтезированного управления на вход ОУ.

Получение матриц $А_з$ замкнутых непрерывной и дискретной моделей:

$$А_з = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.2521982 & 386.239 & 47.884387 & 151.03159 \\ -0.1681321 & -250.953 & -31.9229 & -100.6877 \end{pmatrix} \tag{3.3.13}$$

$$А_{dз} = \begin{pmatrix} 0.9459668 & 0.0491909 & 0.000662676 & 0.0052572 \\ -0.974599 & 0.973057 & 0.03635233 & -0.002815 \\ -0.009873 & 0.178643 & 1.00005 & 0.106048196 \\ -0.002435 & -0.12005 & -3.58235 * 10^{-5} & 0.953342 \end{pmatrix} \tag{3.3.14}$$

Их собственные числа:

Для матрицы $А_з$

$\lambda_1 = -47.6834511337453$

$\lambda_2 = -0.00528918662540467$

$\lambda_3 = -2.55809494121656$

$\lambda_4 = -2.55650476255877$

Для матрицы $А_{dз}$

$\lambda_1 = 0.954852445094709 + 0.201977306681321i$

$\lambda_2 = 0.954852445094709 - 0.201977306681321i$

$\lambda_3 = 0.967657178303805$

$$\lambda_4 = 0.9950544503022245$$

Код для расчета матриц $A_3$ и $A_{d3}$ предоставлен на рисунке 30

```
lambda = eig(Q);
eighd = eig(Qd);
disp(lambda);
disp(eighd);

[S,J] = eig(Q)
Q_j = S*sqrtm(J)/S



[Sd,Jd] = eig(Qd)
Qd_j = Sd*sqrtm(Jd)/Sd


AQ = [Q_j', A'*Q_j', A'^2*Q_j', A'^3*Q_j']

AQd = [Qd_j', Ad'*Qd_j', Ad'^2*Qd_j', Ad'^3*Qd_j']

rank_AQ = rank(AQ)
rank_AQd = rank(AQd)

R = eye(1);

P = icare(A, b, Q, R)
P_d = dare(Ad, b, Q_d, R)

k_p = -R^-1 * b' * P
R_line = R + bd' * P_d * bd
k_p_d = -R_line^-1 * bd' * P_d * Ad

A_z = A + b * k_p
A_z_d = A_d + bd * k_p_d

lamda_A_z = eig(A_z)
lamda_A_z_d = eig(A_z_d)
```

*Рис. 30 – Код программы в MATLAB*

## 3.4. Построение и исследование регулятора для непрерывной модели

Для построения были использованы те же схемы, что и в предыдущем разделе, но с другими матрицами $A_3$.

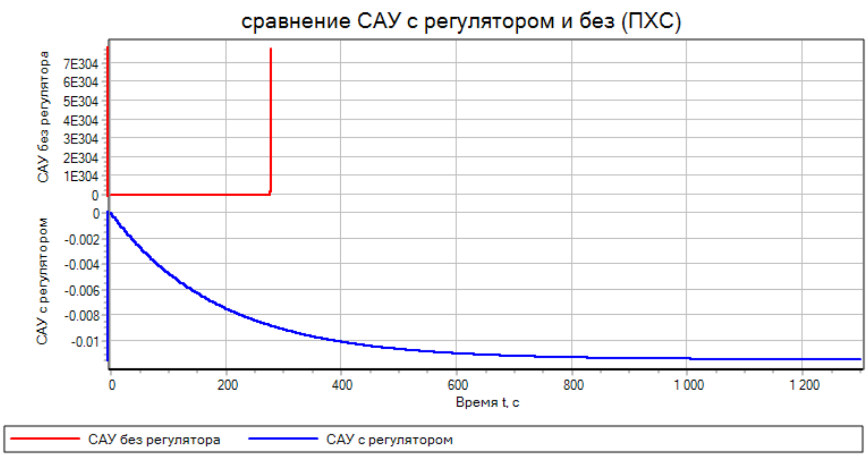


*Рис. 31 – ПХС САУ с регулятором и без*

Снимем характеристики переходного процесса для ПХС:

- установившееся значение: $y(+\infty) = -0{,}01144803177319$;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 563{,}51$;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = 0{,}000572401588595$;

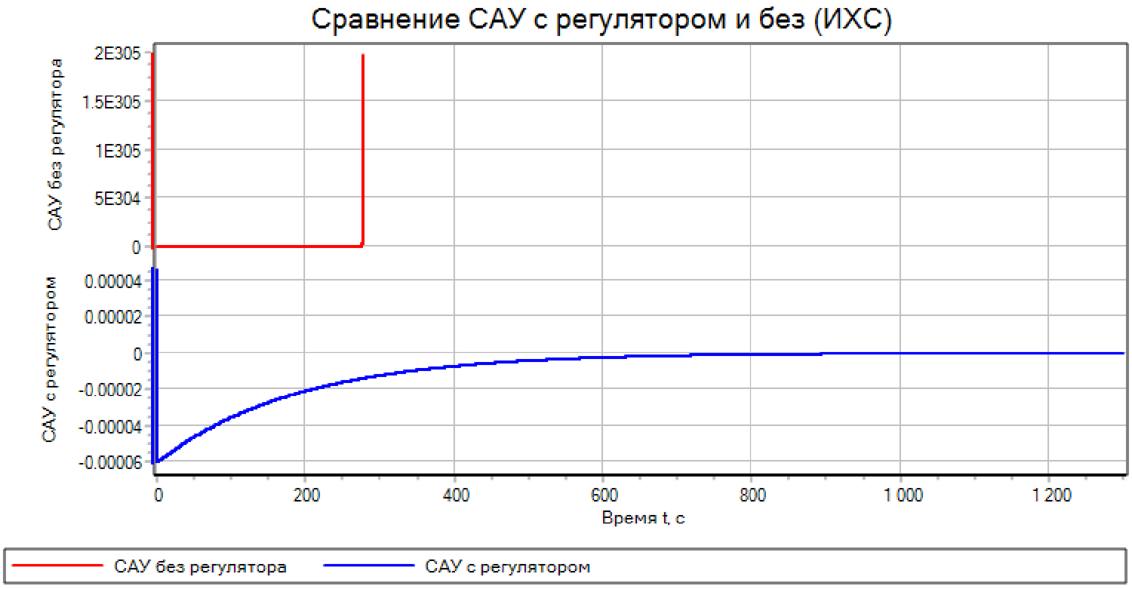


*Рис. 32 – ИХС САУ с регулятором и без*

Снимем характеристики переходного процесса для ИХС:

- установившееся значение: $y(+\infty) = -0{,}0000000628409002$;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 460{,}02$;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = 0{,}0000052797689807$;

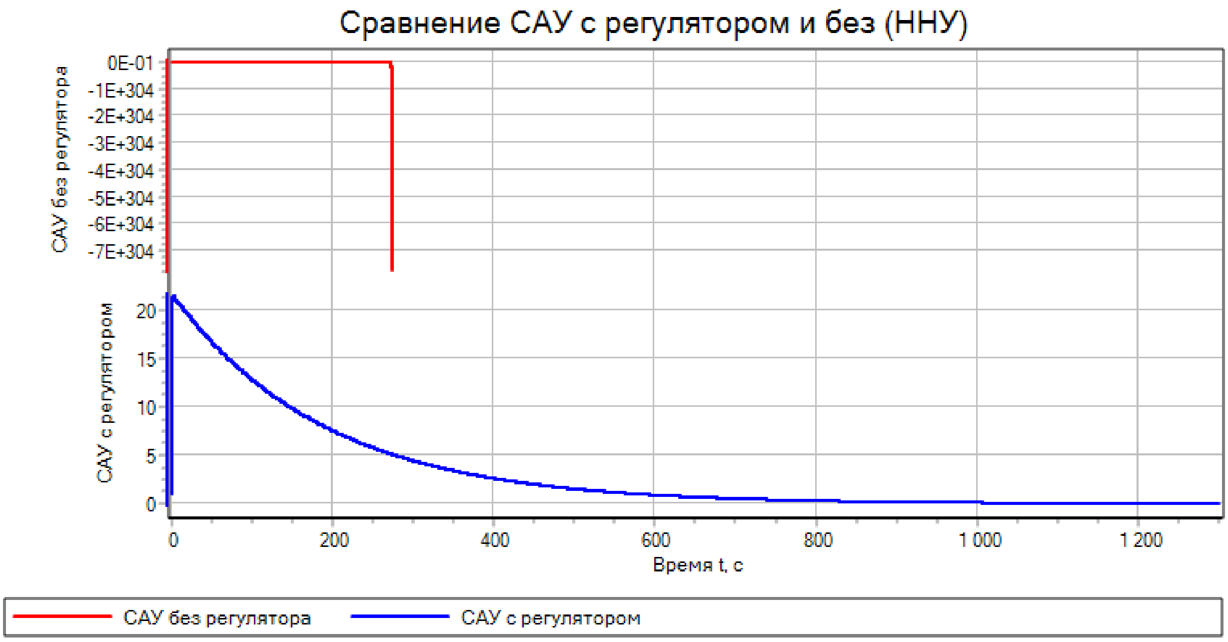


*Рис. 33 – Реакция на ненулевые начальные условия*

*САУ с регулятором и без ($x_0 = [1\ 5\ 3\ 2]$)*

Снимем характеристики переходного процесса для ННУ:

- установившееся значение: $y(+\infty) = 0{,}022482203387$;
- время переходного процесса: $t_{\text{пп}} = 565{,}48$;
- статическая ошибка: $y_{\text{со}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = 1{,}071692462075605635$;

## 3.5. Построение и исследование регулятора для дискретной модели

Для исследования дискретной САУ были также использованы схемы из предыдущего раздела, но с другими матрицами А.

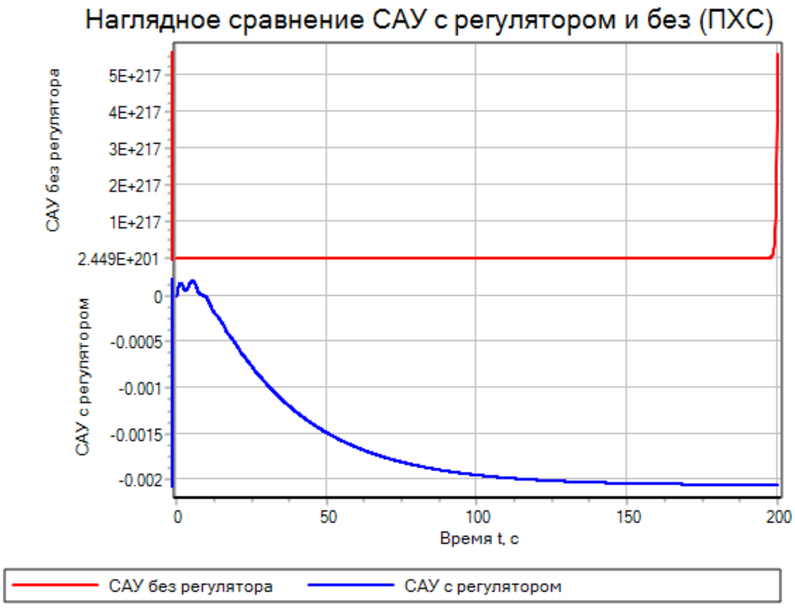


*Рис. 34 – ПХС САУ с регулятором и без*

Снимем характеристики переходного процесса для ПХС:

- установившееся значение: $y(+\infty) = -0{,}0020536418$;
- время переходного процесса: $t_{\text{пп}} = 146{,}2648$;
- статическая ошибка: $y_{\text{со}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = -0{,}0000200275$;

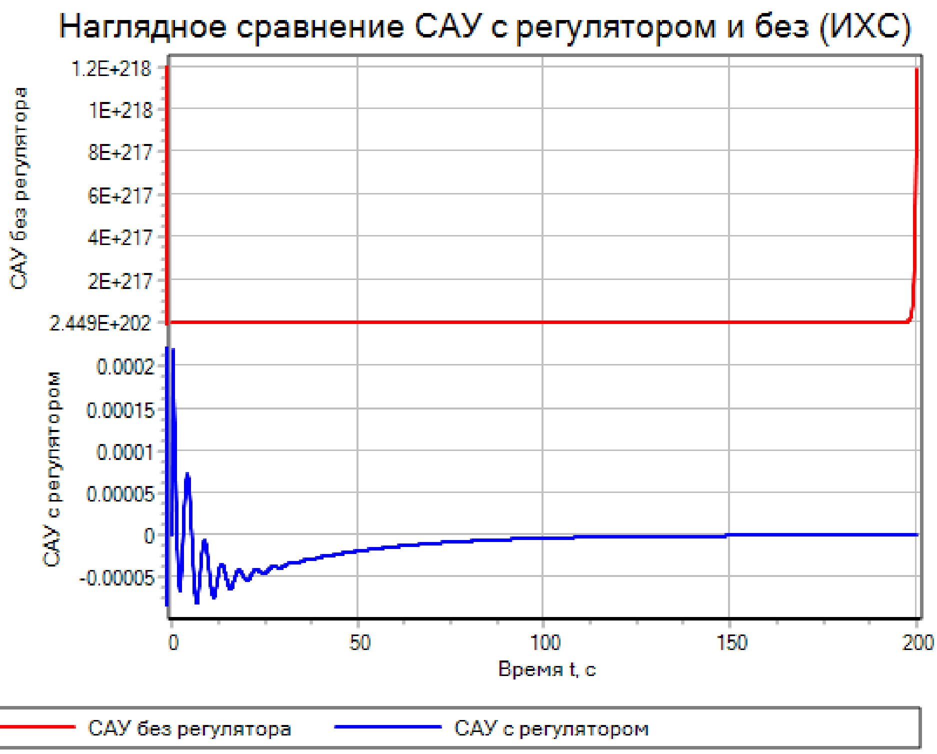


*Рис. 35 – ИХС САУ с регулятором и без*

Снимем характеристики переходного процесса для ПХС:

- установившееся значение: $y(+\infty) = -0{,}00000013683027$;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 56.8136$;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = 0{,}0000149744935$;

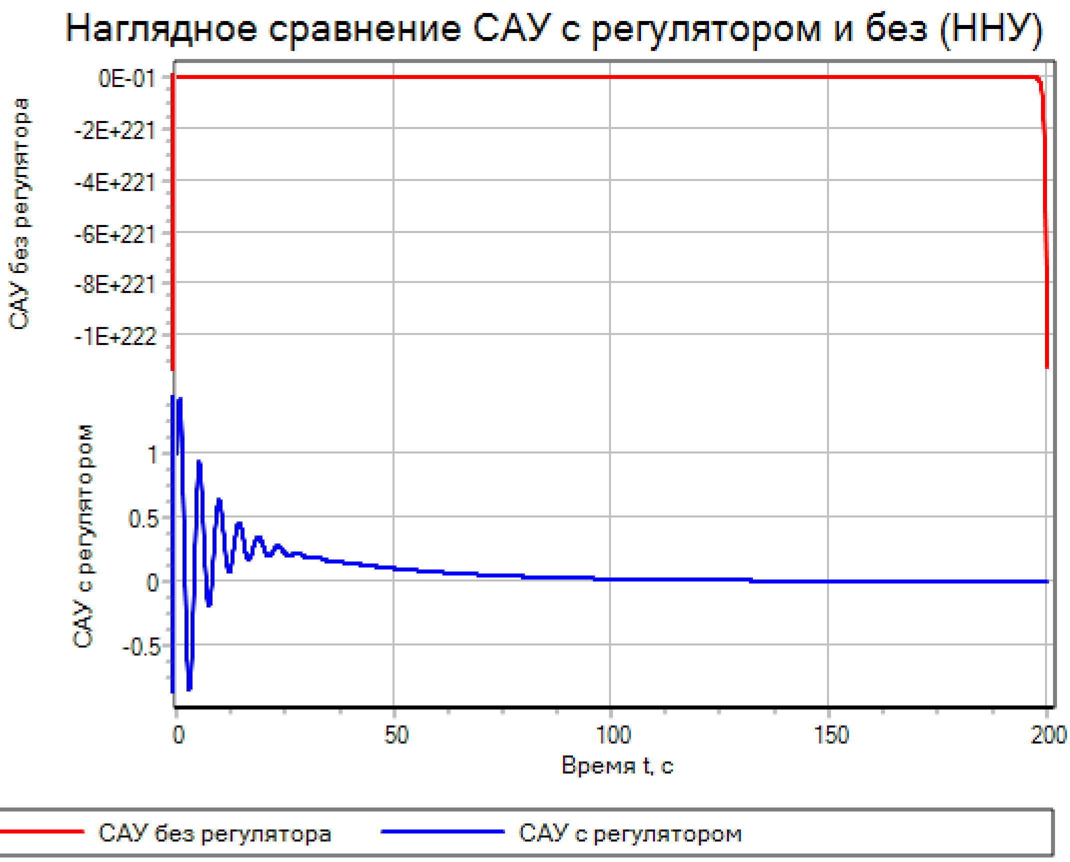

*Рис. 36 – Реакция на ненулевые начальные условия САУ с регулятором и без ($x_0 = [1\ \ 5\ \ 3\ \ 2]$)*

Снимем характеристики переходного процесса для ПХС:

- установившееся значение: $y(+\infty) = 0{,}000739784569042085$;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 46.5288$;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = -0{,}114044486251986$;

Графики САУ с регулятором в дискретном случае и в непрерывном случае сходятся к нулю, что показывает успешность сформированного регулятора, за исключением того, что время переходного процесса значительно выше, чем ожидалось. Статическая ошибка же в свою очередь в среднем удовлетворяет нашим требованиям.

# 4. Наблюдатель

## 4.1. Теория

В общем случае вектор состояния $x$ недоступен для считывания. Тем не менее в модальном и оптимальном регуляторах использовалось линейное управление вида

$$u_{у} = k_p^T x, \tag{4.1.1}$$

которое явно требует этот вектор. Поэтому возникает новая задача восстановления вектора состояния $\tilde{x}$, который должен выполнять следующее условие:

$$\begin{gathered} e(t) = x(t) - \tilde{x}(t) \to 0 \text{ при } t \to +\infty, \\ e_k = x_k - \tilde{x}_k \to 0 \text{ при } k \to +\infty, \end{gathered} \tag{4.1.2}$$

где $e$ – ошибка наблюдателя.

Пусть изначально доступны ОУ в виде чёрного ящика и все матрицы из модели. МПС в полном виде нам дана, но таким образом мы можем получить только общее решение, ведь не заданы начальные условия. Тем не менее нам даны входные воздействия в виде входного вектора $u$, и реакция ОУ в виде выходного вектора $y$. Эти данные позволяют собрать новое устройство – наблюдатель, – задача которого будет по векторам $u$ и $y$ восстанавливать $\tilde{x}$, используя доступные параметры ОУ:

$$\begin{gathered} \dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + Bu(t) + LCe(t), \\ \tilde{x}_{k+1} = A_{д}\tilde{x}_k + B_{д}u_k + L_{д}Ce_k. \end{gathered} \tag{4.1.3}$$

Данный наблюдатель предложен Люенбергером, поэтому носит его имя. При выполнении условия (4.1.2), уравнение (4.1.3) будет стремиться к первому уравнению МПС, т.е. восстановленный вектор $\tilde{x}$ можно считать адекватным, чтобы описать модель.

Ранее мы уже проходили понятие наблюдаемости, к которому привязан ранговый критерий наблюдаемости. Если он выполняется, то для восстановления вектора состояния наблюдателю понадобиться конечное время.

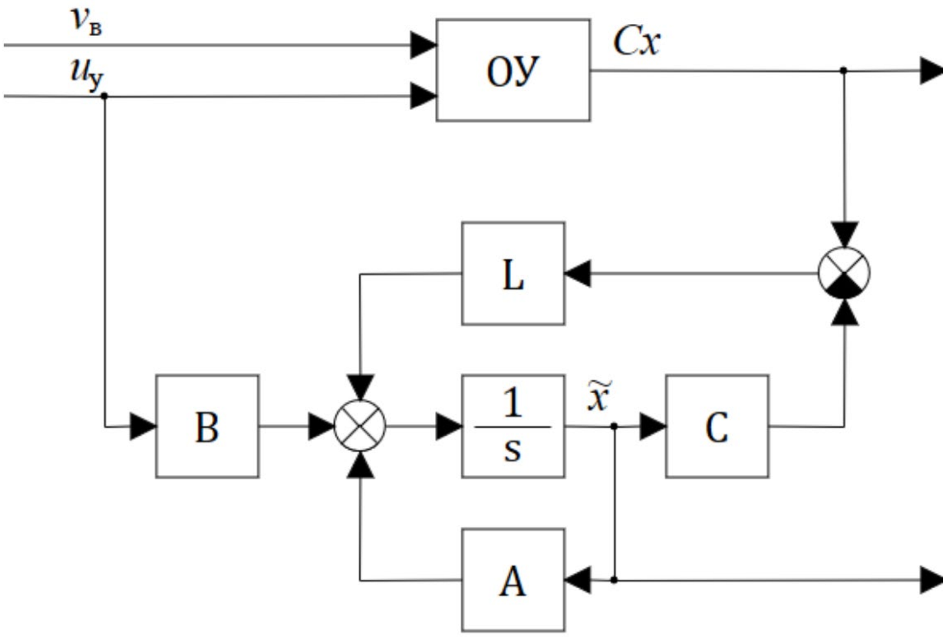


*Рис. 36 – Структура наблюдателя Люенбергера (на данной схеме опущена матрица D, т.к. при расчёте выходного сигнала на правом сумматоре они бы и так сокращались).*

## 4.2. Переход к каноническая форме

МПС называется моделью в канонической форме Фробениуса, если матрица $A$ и вектор при управляющем воздействии $b$ имеют следующий вид:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0_{n-1} & | & E_{n-1} \\ -a_n & \dots & -a_1 \end{pmatrix} = I_n^{(1)} - e_n a^T, \hat{b} = e_n, \quad (4.2.1)$$

где $I_n^{(1)}$ – матрица с единицами над главной диагональю, $e_n = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)^T$, $a$ – коэффициенты характеристического многочлена ОУ.

Переход к канонической форме Фробениуса делается через замену переменных:

$$x = Q\hat{x}, \quad (4.2.2)$$

где матрицу $Q$ ищут из выражения

$$Q = S_у T, \quad (4.2.3)$$

где $S_у$ – матрица управляемости, $T$ – матрица, составленная из коэффициентов характеристического многочлена ОУ:

$$T = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2.4)$$

Теперь можно преобразовать модель к новой системе координат:

$$
\begin{array}{c|c}
Q\dot{\hat{x}}(t) = AQ\hat{x}(t) + Bu(t) & Q_д\hat{x}_{k+1} = A_д Q_д \hat{x}_k + B_д u_k \\
\dot{\hat{x}}(t) = Q^{-1}AQ\hat{x}(t) + Q^{-1}Bu(t) & \hat{x}_{k+1} = Q_д^{-1} A_д Q_д \hat{x}_k + Q_д^{-1} B_д u_k \\
\dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}(t) + \hat{B}u(t) & \hat{x}_{k+1} = \hat{A}_д \hat{x}_k + \hat{B}_д u_k
\end{array}
\tag{4.2.5}
$$

Коэффициенты характеристического уравнения ОУ были вычислены ранее:

$$
\begin{gathered}
a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = -6.615606936, a_3 = 0, a_4 = 1, \\
a_0^д = 1, a_1^д = -4.153026, a_2^д = 6.30605, a_3^д = -4.15302, a_4^д = 1.
\end{gathered}
\tag{4.2.6}
$$

Вычислим матрицы $T$ для непрерывной и дискретной моделей:

$$
\begin{gathered}
T = \begin{pmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6.6156 & 0 & 1 \\ -6.6156 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
T_д = \begin{pmatrix} a_3^д & a_2^д & a_1^д & 1 \\ a_2^д & a_1^д & 1 & 0 \\ a_1^д & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.15302 & 6.30605 & -4.153026 & 1 \\ 6.30605 & -4.153026 & 1 & 0 \\ -4.153026 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{gathered}
\tag{4.2.7}
$$

Вычислим матрицы $Q$ для непрерывной и дискретной моделей:

$$
\begin{gathered}
Q = S_у T = \begin{pmatrix} -0.018901 & 0 & 0.00289017 & 0 \\ 0 & 0 & -0.00192678 & 0 \\ 0 & -0.0189 & 0 & 0.00289017 \\ 0 & 0 & 0 & -0.00192678 \end{pmatrix}, \\
Q_д = S_{у_д} T_д = \begin{pmatrix} 3.312e-05 & -3.814e-05 & -3.814e-05 & 3.313e-05 \\ -2.197e-05 & 2.197e-05 & 2.198e-05 & -2.198e-05 \\ -0.000438 & 0.001382 & -0.00138 & 0.0004384 \\ 0.0002944 & -0.0008833 & 0.000883 & -0.0002944 \end{pmatrix}.
\end{gathered}
\tag{4.2.8}
$$

Вычислим матрицы $\hat{A}$ для непрерывной и дискретной моделей:

$$
\begin{gathered}
\hat{A} = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6.616 & 0 \end{pmatrix}, \\
\hat{A}_д = Q_д^{-1} A_д Q_д = \begin{pmatrix} 7.5495e-15 & 0.999 & 0 & -2.22e-15 \\ -2.145e-06 & -1.066e-14 & 0.9999 & 1.776e-15 \\ -2.619e-06 & -1.776e-14 & 0 & 1 \\ -0.999 & 4.153 & -6.306 & 4.15302 \end{pmatrix}
\end{gathered}
\tag{4.2.9}
$$

Вычислим матрицы $\hat{B}$ для непрерывной и дискретной моделей:

$$
\begin{gathered}
\hat{B} = Q^{-1}B = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T \\
\hat{B}_д = Q_д^{-1} B_д = (-8.65e-06 \quad 0.000171 \quad 0.0114 \quad 0.1528)^T
\end{gathered}
\tag{4.2.10}
$$

### 4.3. Построение модального регулятора и наблюдателя

Выберем желаемые собственные числа для модальных регуляторов, как в п. 2.1:

$$\lambda^{\text{уст}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \lambda_d^{\text{уст}} = \begin{pmatrix} 0.859761 \\ 0.73919 \\ 0.7971 \\ 0.9272 \end{pmatrix} \qquad (4.3.1)$$

Вычислим коэффициенты их характеристических многочленов:

$$a^{\text{уст}} = (1 \quad 5 \quad 8.75 \quad 6.25 \quad 1.5),$$
$$a_{\text{д}}^{\text{уст}} = (1 \quad -3.33385 \quad 4.132 \quad -2.2778 \quad 0.469776). \qquad (4.3.2)$$

Выберем желаемые собственные числа для наблюдателей:

$$\lambda^{\text{н}} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -2.5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda_d^{\text{н}} = \begin{pmatrix} 0.79719 \\ 0.6854 \\ 0.73919 \\ 0.85976 \end{pmatrix} \qquad (4.3.3)$$

Вычислим коэффициенты их характеристических многочленов:

$$a^{\text{н}} = (1 \quad 7 \quad 17.75 \quad 19.25 \quad 7.5),$$
$$a_{\text{д}}^{\text{н}} = (1 \quad -3.0815 \quad 3.552 \quad -1.816 \quad 0.34725). \qquad (4.3.4)$$

Вычислим матрицы $Q_{\text{н}}$ для непрерывной и дискретной моделей:

$$Q_{\text{н}} = S_{\text{н}}T = \begin{pmatrix} 0 & -6.6156 & 0 & 1 \\ 0 & -0.1134 & 0 & 0 \\ -6.6156 & 0 & 1 & 0 \\ -0.1134 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$Q_{\text{н}_{\text{д}}} = S_{\text{н}_{\text{д}}}T_{\text{д}} = \begin{pmatrix} -0.999 & 3.153 & -3.153 & 1 \\ 0.00131 & 5.652e-11 & -0.00131 & 0 \\ 0.1511 & -0.3254 & 0.15113 & 0 \\ -6.5747e-05 & -0.000265 & -6.575e-05 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4.3.5)$$

Вычислим параметры модальных регуляторов $k_p$ для непрерывной и дискретной моделей:

$$k_p = (Q^T)^{-1}(a - a^{\text{уст}}) = (79.358 \quad 8093.79 \quad 330.66 \quad 3090.98)^T,$$
$$k_{p\text{д}} = \left(Q_{\text{д}}^T\right)^{-1}\left(a_{\text{д}} - a_{\text{д}}^{\text{уст}}\right) = (53.78 \quad 6893.9 \quad 229.059 \quad 2650.3)^T. \qquad (4.3.6)$$

Вычислим параметры наблюдателей $L$ для непрерывной и дискретной моделей:

$$L = -(Q_{\text{н}}^T)^{-1}(a - a^{\text{н}}) = (7 \quad -578.07 \quad 24.3656 \quad -1487.458)^T,$$
$$L_{\text{д}} = -\left(Q_{\text{н}_{\text{д}}}^T\right)^{-1}\left(a_{\text{д}} - a_{\text{д}}^{\text{н}}\right) = (1.071472 \quad -78.582 \quad 3.36456 \quad -202.15)^T. \qquad (4.3.7)$$

Вычислим матрицы $A_z$ непрерывной и дискретной САУ с регуляторами и наблюдателями:

$$A_z = \begin{pmatrix} A + b_у k^T & -b_у k^T \\ 0_{n\times n} & A - LC \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.229 & 23.28 & 0.956 & 8.93 & -0.23 & -23.4 & -0.95 & -8.93 \\ -0.153 & -8.98 & -0.64 & -5.96 & 0.15 & 15.6 & 0.64 & 5.96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 578 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24.4 & -0.11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1487 & 6.616 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{zд} = \begin{pmatrix} A_д + b_{у_д} k_{рд}^T & -b_у k_{рд}^T \\ 0_{n\times n} & A_д - L_д C \end{pmatrix} = \tag{4.3.8}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.001 & 0.23 & 0.15 & 0.088 & -0.002 & -0.23 & -0.0076 & -0.088 \\ -0.001 & 0.93 & -0.005 & 0.097 & 0.001 & 0.15 & 0.005 & 0.058 \\ 0.023 & 3 & 1.1 & 1.16 & -0.023 & -3 & -0.1 & -1.16 \\ -0.015 & -1 & -0.067 & 0.29 & 0.016 & 2.03 & 0.067 & 0.78 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.071 & -0.001 & 0.151 & -6 * 10^{-5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 78.58 & 1.077 & 0 & 0.155 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.36 & -0.0175 & 1 & -0.0013 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 202.1 & 1.025 & 0 & 1.08 \end{pmatrix}.$$

Вычислим собственные числа матриц $A_z$:

$$\lambda(A_z) = \begin{matrix} -1.99 \\ -1.5 \\ -0.5 \\ -0.999 \\ -1 \\ -1.49 \\ -2 \\ -2.5 \end{matrix}, \tag{4.3.9}$$

$$\lambda(A_{zд}) = (0.927 \quad 0.8578 \quad 0.7995 \quad 0.7383 \quad 0.86 \quad 0.79 \quad 0.74 \quad 0.68)^T.$$

Полученные собственные числа совпадают с желаемыми.

Поскольку в нашем случае в исходной модели нет внешнего возмущения, введем фиктивное возмущение $b_в = b_y = B$.

Вычислим матрицы $b_z$ непрерывной и дискретной САУ с регуляторами и наблюдателями:

$$b_z = \begin{pmatrix} b_в \\ 0_{n\times m_в} \end{pmatrix} = (0 \quad 0 \quad 0.00289 \quad -0.0019 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T,$$

$$b_{zд} = \begin{pmatrix} b_{вд} \\ 0_{n\times m_в} \end{pmatrix} = (3.3e-05 \quad -2.2e-05 \quad 0.00043 \quad -0.00029 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T. \tag{4.3.10}$$

где $m_в$ – количество возмущающих воздействий.

Таким образом, мы получили модель САУ с регулятором и наблюдателем:

$$\begin{cases} \dot{z} = A_z z + b_z \nu_в, \\ y = C_z z + d_в \nu_в; \end{cases} \tag{4.3.11}$$

$$
\begin{cases} z_{k+1} = A_{z\text{д}} z_k + b_{z\text{д}} v_{\text{в}}, \\ y_k = C_z z_k + d_{\text{в}} v_{\text{в}}; \end{cases}
$$

$$
\mathrm{C}_z = (C \quad 0_{1\times n}).
$$

Код в програме matlab для данной главы:

```
clc
n=4
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134104046 0 0;0 6.615606936 0 0];
b=[0; 0; 0.00289017; -0.00192678];
Ad = [
  1.0, -0.00131165, 0.1511355, -0.00006574791;
   0,    1.076513,         0,      0.1549708;
   0,  -0.0175753,       1.0,    -0.00131165;
   0,    1.025226,         0,       1.076513;
];
bd = [
   0.000033126;
   -0.000021975;
   0.00043842;
  -0.00029444
];

C=[1 0 0 0];
Cd=[1 0 0 0];
h = 0.1511;
lambda_ust = [-1, -2, -1.5, -0.5];
lambda_ust_d = exp(lambda_ust * h);

T = [0        -6.615606936       0        1;
    -6.615606936 0               1        0;
     0          1               0         0;
     1          0               0         0];

Td = [-4.15302     6.30605    -4.153026    1;
   6.30605   -4.153026    1          0;
  -4.153026   1           0         0;
   1          0           0         0];

S_y = [b, A*b, A^2*b, A^3*b];
Sd_y = [bd, Ad*bd, Ad^2*bd, Ad^3*bd];

S_n = [C', A'*C', A'^2*C', A'^3*C'];
S_n_d = [Cd', Ad'*Cd', Ad'^2*Cd', Ad'^3*Cd'];

lambda_n = lambda_ust - 0.5;
lambda_n_d = exp(lambda_n * h);

a = poly(A);
ad = poly(Ad);
a_ust = poly(lambda_ust);
a_ust_d = poly(lambda_ust_d);
```

*Рис. 37 – Код в програме matlab*

```
a_n = poly(lambda_n);
a_n_d = poly(lambda_n_d);

Q = S_y * T

Qd = Sd_y * Td

Q_n = S_n * T
Q_n_d = S_n_d * Td

A_kanon = Q^-1 * A * Q
Ad_kanon = Qd^-1 * Ad * Qd

b_kanon = Q^-1 * b
bd_kanon = Q^-1 * bd

k_p = Q'^-1 * (a(end:-1:2) - a_ust(end:-1:2))'
k_p_d = Qd'^-1 * (ad(end:-1:2) - a_ust_d(end:-1:2))'

L = -Q_n'^-1 * (a(end:-1:2) - a_n(end:-1:2))'
L_d = -Q_n_d'^-1 * (ad(end:-1:2) - a_n_d(end:-1:2))'

A_z = [A + b * k_p', -b * k_p'
       zeros(n), A - L * C]
b_z = [b; zeros(n, 1)]
C_z = [C, zeros(1, n)]
A_z_d = [Ad + bd * k_p_d', -bd * k_p_d'
         zeros(n), Ad - L_d * C]
b_z_d = [bd; zeros(n, 1)]

eig_A_z = eig(A_z)
eig_A_z_d = eig(A_z_d)
```

*Рис. 38 – Код в программе matlab продолжение*

## 4.4. Исследование непрерывной САУ

Построим модель непрерывной САУ с регулятором и с регулятором и наблюдателем в SimInTech:

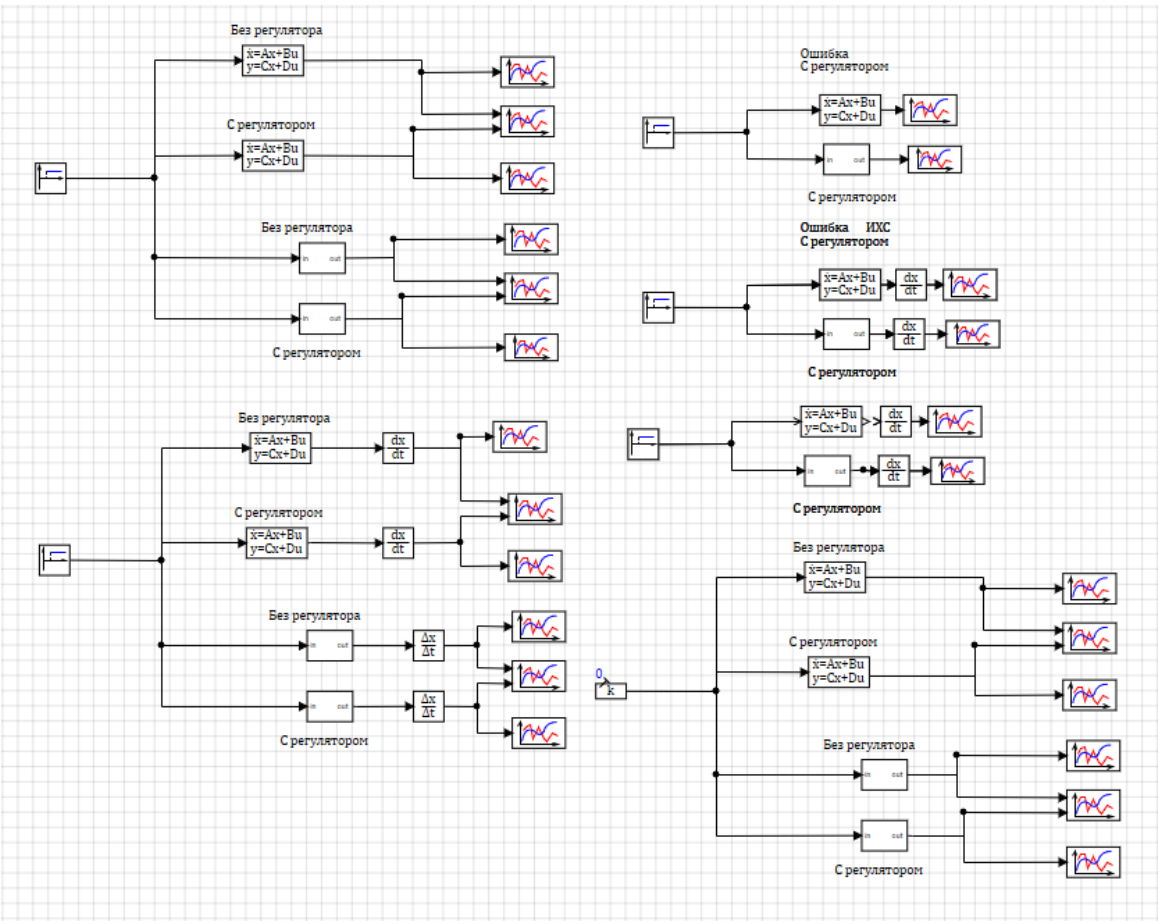


*Рисунок 39 – Схема модели непрерывной САУ с регулятором и с регулятором и наблюдателем*

В результате моделирования получим графики переходной характеристики системы (ПХС), импульсной характеристики системы (ИХС), реакции системы на ненулевые начальные условия (ННУ) и точки равновесия системы (ТРС).

Для ПХС и ИХС был выбран следующий вектор начальных ошибок наблюдателя: $e^0 = (0.000001 \quad 0.000001 \quad 0.000001 \quad 0.000001)^T$.

Рассмотрим графики ПХС:

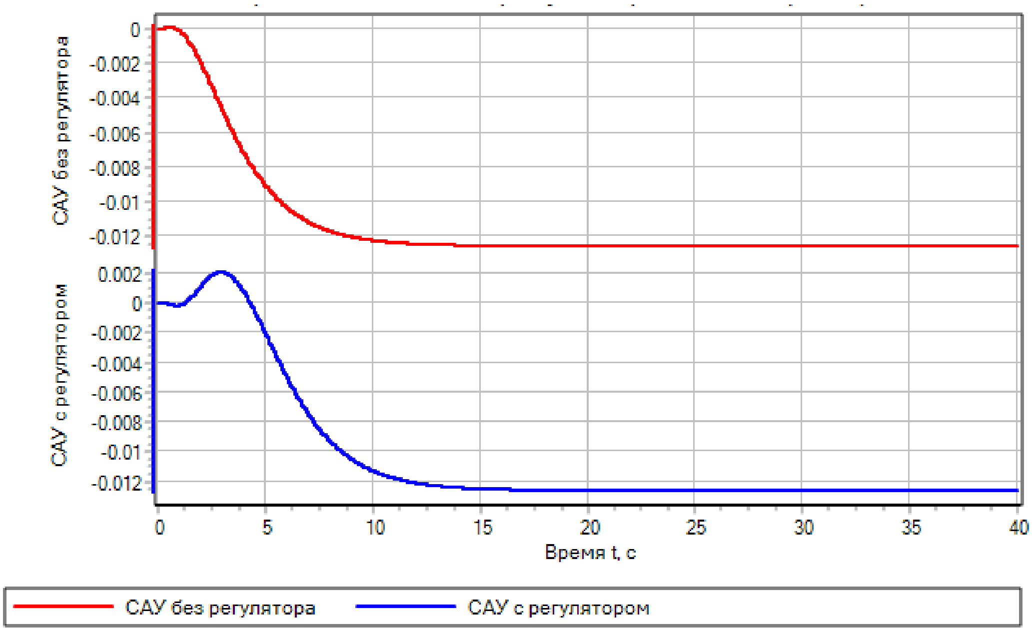


*Рисунок 40 – Графики ПХС непрерывной САУ с наблюдателем и без наблюдателя*

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение: $y(+\infty) = -0{,}01260114077$;
- время переходного процесса: $t_{\text{пп}} = 8{,}63$ с;
- статическая ошибка: $y_{\text{со}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = 0{,}0126011407739362$;
- максимальное значение амплитуды: $A_{\max} = 0{,}002$.


*Рисунок 41 – График ПХС для ошибки наблюдателя выходной компоненте вектора состояний непрерывной САУ с наблюдателем*

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение: $y(+\infty) = 0$;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 1.574$ с;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = -0{,}00016162452079$;
- максимальное значение амплитуды: $A_{\max} = 0{,}00032324904158$.

Рассмотрим графики ИХС:

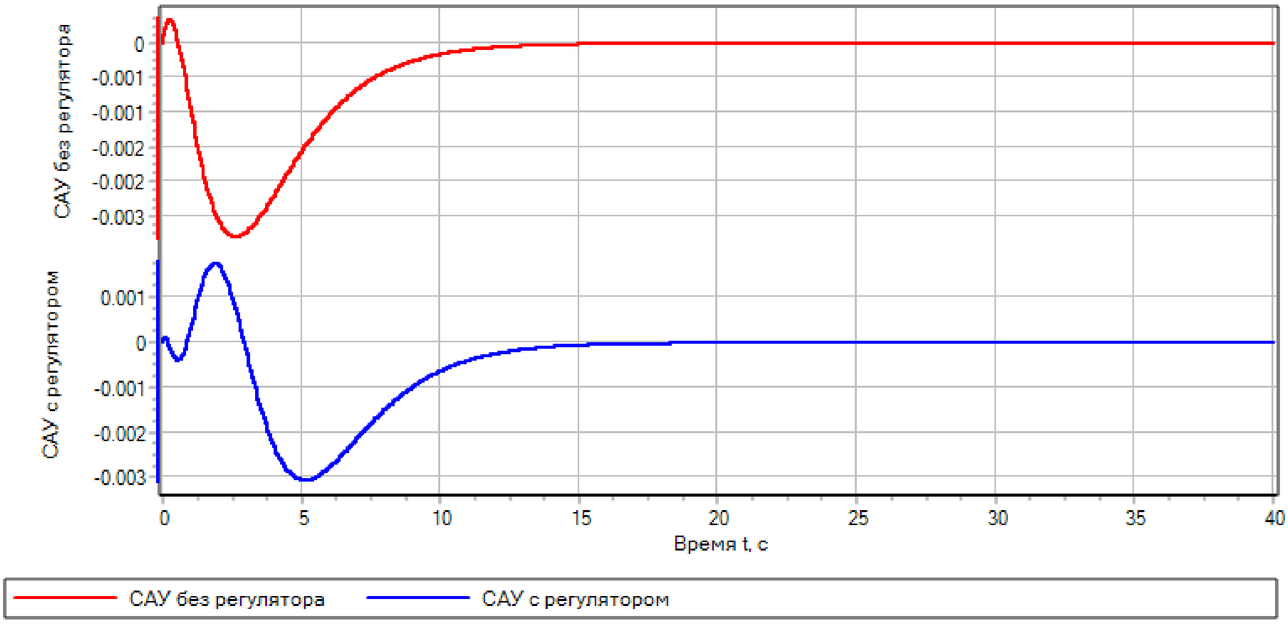


*Рисунок 42 – Графики ИХС непрерывной САУ с наблюдателем и без наблюдателя*

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение: $y(+\infty) = 0$;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 6{,}622$ с;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = 0{,}000241272125$;
- максимальное значение амплитуды: $A_{max} = -0{,}003059$.


*Рисунок 43 – График ИХС для ошибки наблюдателя по выходной компоненте вектора состояний непрерывной САУ с наблюдателем*

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение: $y(+\infty) = 0$;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 2{,}385$ с;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = 0{,}0000787583152295$;
- максимальное значение амплитуды: $A_{max} = 0{,}001491529$.

Рассмотрим графики ННУ:

Для ННУ был выбран следующий вектор начальных ошибок наблюдателя: $e^0 = (0.000001 \quad 0.000001 \quad 0.000001 \quad 0.000001)^T$.

Были выбраны следующие ненулевые начальные условия: $x^0 = (5 \quad 5 \quad 5 \quad 5)^T$.

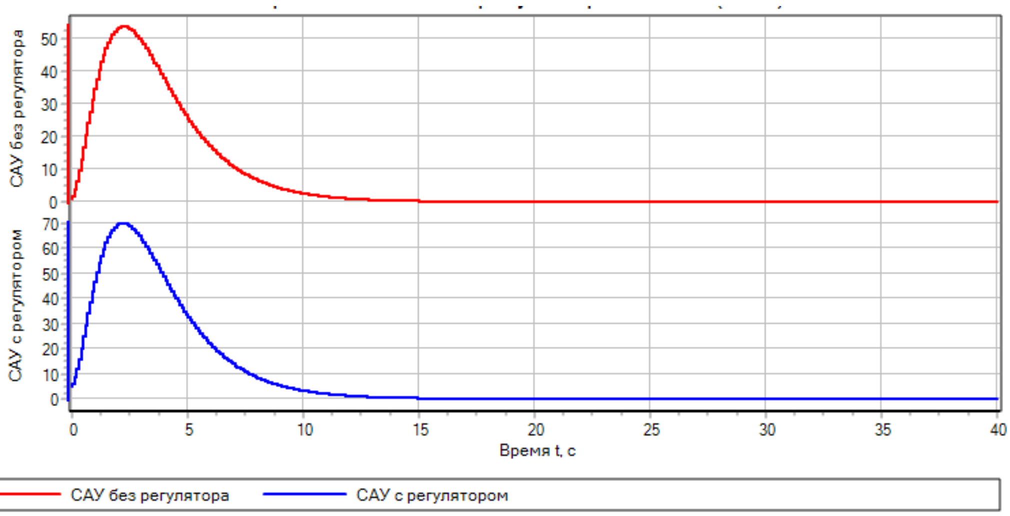


*Рисунок 44 – Графики ННУ непрерывной САУ с наблюдателем и без наблюдателя*

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение: $y(+\infty) = 1{,}030184 * 10^{-6}$,;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 2.555с$;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = -69{,}79249701$;
- максимальное значение амплитуды: $A_{\max} = 69{,}79249802$.

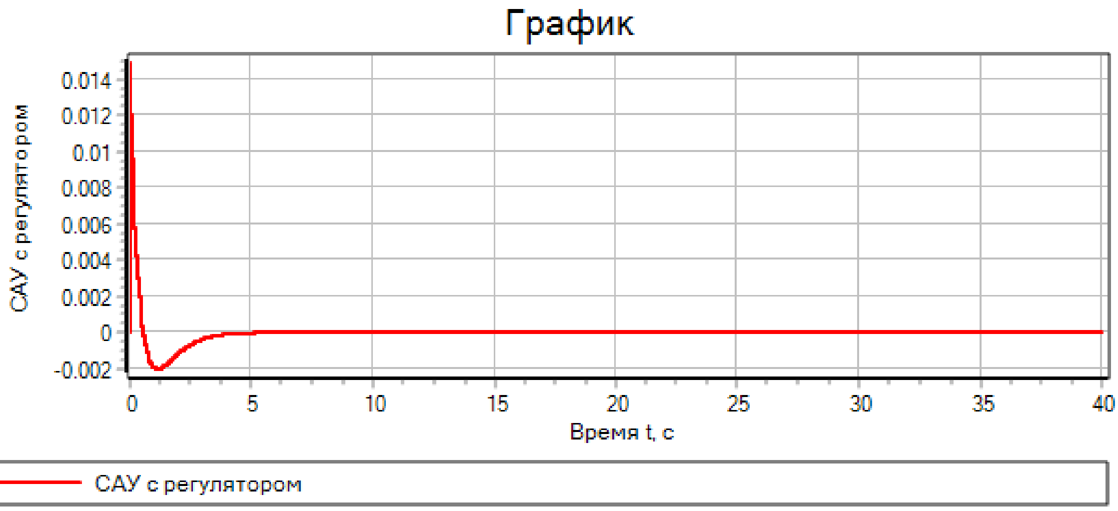


*Рисунок 45 – График ННУ для ошибки наблюдателя по выходной компоненте вектора состояний непрерывной САУ с наблюдателем*

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение: $y(+\infty) = 0$;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 2{,}321$ с;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = 0{,}000846794795$;
- максимальное значение амплитуды: $A_{\max} = -0{,}002020601957$.

## 4.5. Исследование дискретной САУ

Построим модель дискретной САУ с регулятором и с регулятором и наблюдателем в SimInTech. В результате моделирования получим графики переходной характеристики системы (ПХС), импульсной характеристики системы (ИХС), реакции системы на ненулевые начальные условия (ННУ) и точки равновесия системы (ТРС).

Рассмотрим графики ПХС:

Для ПХС и ИХС был выбран тот же вектор начальных ошибок наблюдателя, что и в непрерывном случае: $e^0 = (0.00001 \quad 0.00001 \quad 0.00001 \quad 0.00001)^T$.

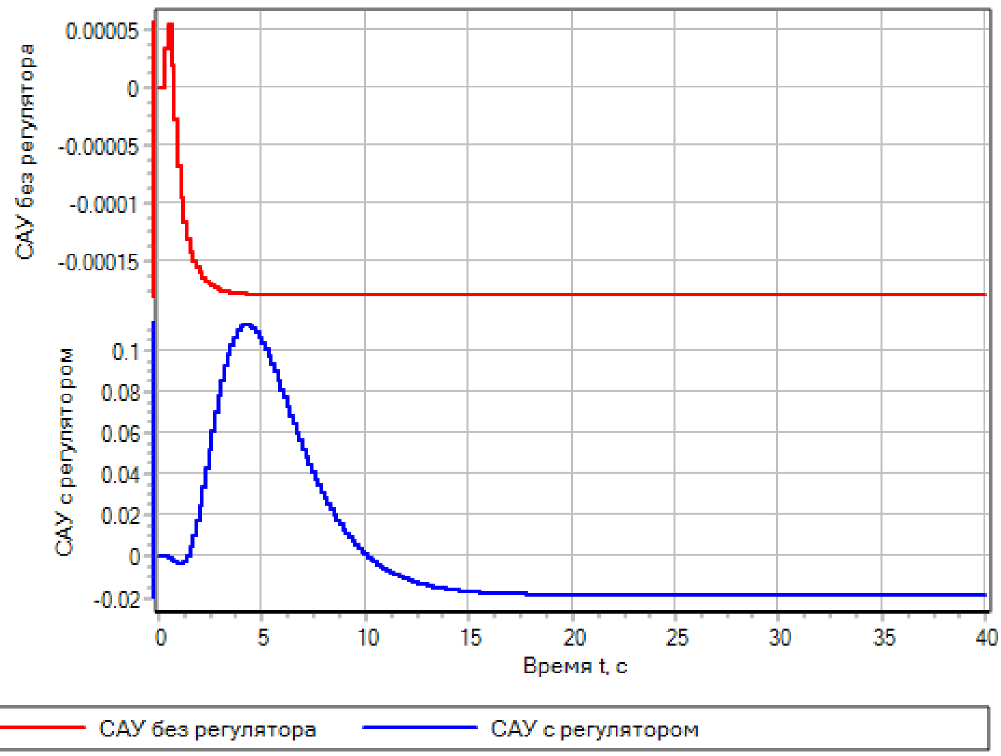


*Рисунок 46 – Графики ПХС дискретной САУ с наблюдателем и без наблюдателя*

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение: $y(+\infty) = -0{,}01859404368$;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 12{,}391$ с;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = -0{,}0065600172907926$;
- максимальное значение амплитуды: $A_{max} = 0{,}1126063021$.

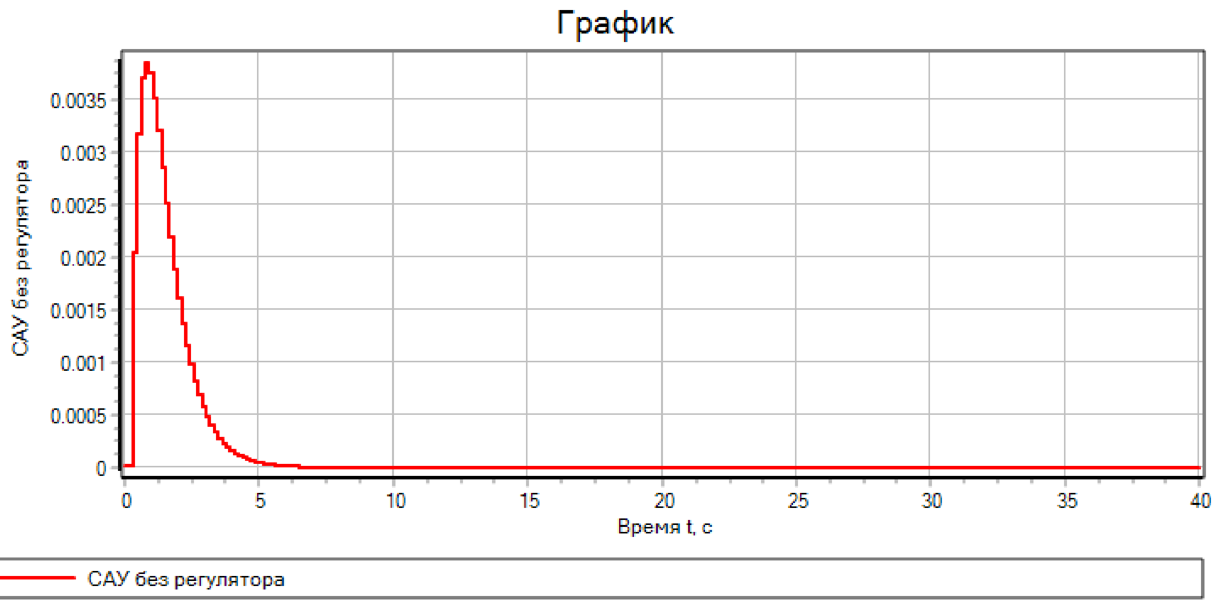


*Рисунок 47 – График ПХС для ошибки наблюдателя выходной компоненте вектора состояний дискретной САУ с наблюдателем*

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение: $y(+\infty) = 0$;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 3{,}929$ с;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = -0{,}0001926456$;
- максимальное значение амплитуды: $A_{\max} = 0{,}003852912$.

Рассмотрим графики ИХС:

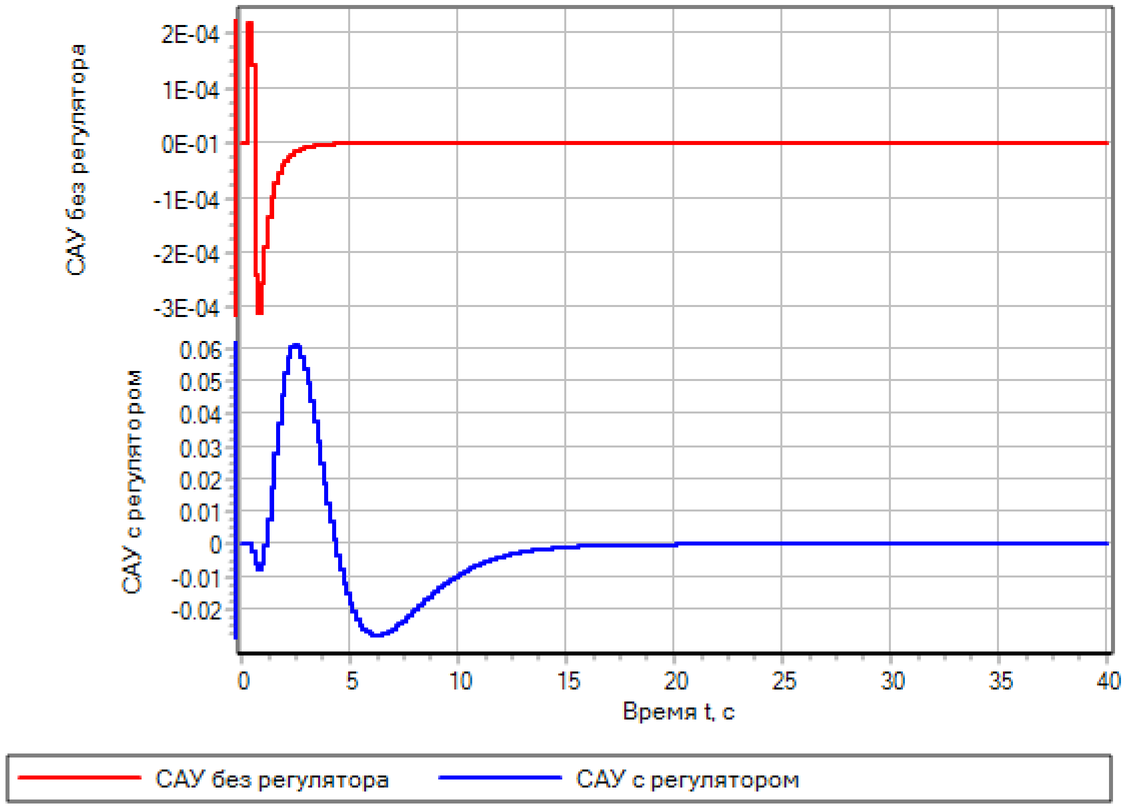


*Рисунок 45 – Графики ИХС дискретной САУ с наблюдателем и без наблюдателя*

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение: $y(+\infty) = -3.88 * 10^{-9}$;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 11{,}635$ с;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = 0{,}0044699671474$;
- максимальное значение амплитуды: $A_{\max} = 0{,}061269997$.

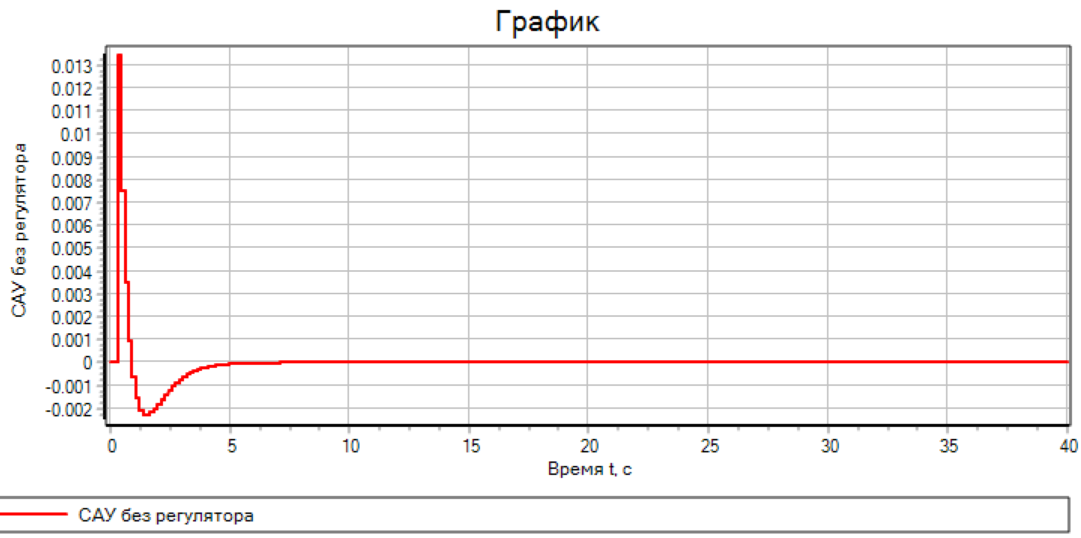


*Рисунок 46 – График ИХС для ошибки наблюдателя по выходной компоненте вектора состояний дискретной САУ с наблюдателем*

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение: $y(+\infty) = -0{,}00180288326862$;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 3{,}778$ с;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = 0{,}00078631902659$;
- максимальное значение амплитуды: $A_{\max} = 0{,}01345144294$.

Рассмотрим графики ННУ:

Для ННУ был выбран тот же вектор начальных ошибок наблюдателя, что и в непрерывном случае: $e^0 = (0.00001 \quad 0.00001 \quad 0.00001 \quad 0.00001)^T$.

Были выбраны те же ненулевые начальные условия: $x^0 = (5 \quad 5 \quad 5 \quad 5)^T$.

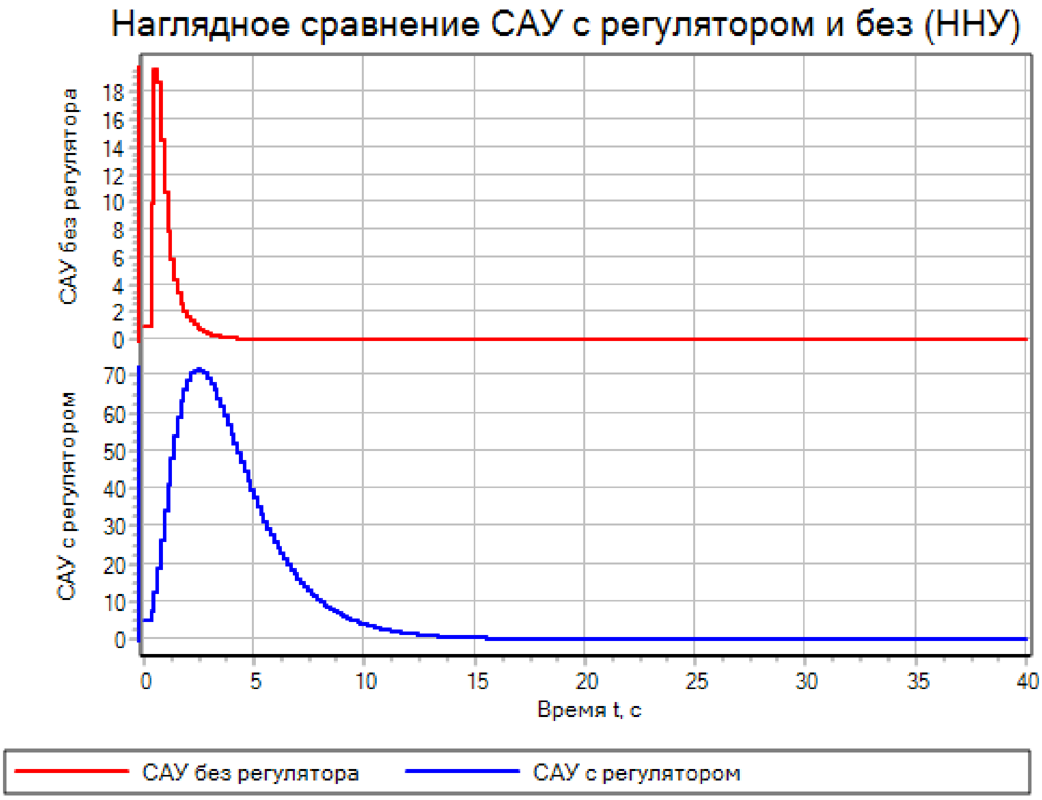


*Рисунок 47 – Графики ННУ дискретной САУ с наблюдателем и без наблюдателя*

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение: $y(+\infty) = 1{,}3606163132 * 10^{-6}$;
- время переходного процесса: $t_{пп} = 10{,}124$ с;
- статическая ошибка: $y_{со} = y(+\infty) - y(t_{пп}) = -3{,}5827393020335$;
- максимальное значение амплитуды: $A_{\max} = 71{,}65478864$.

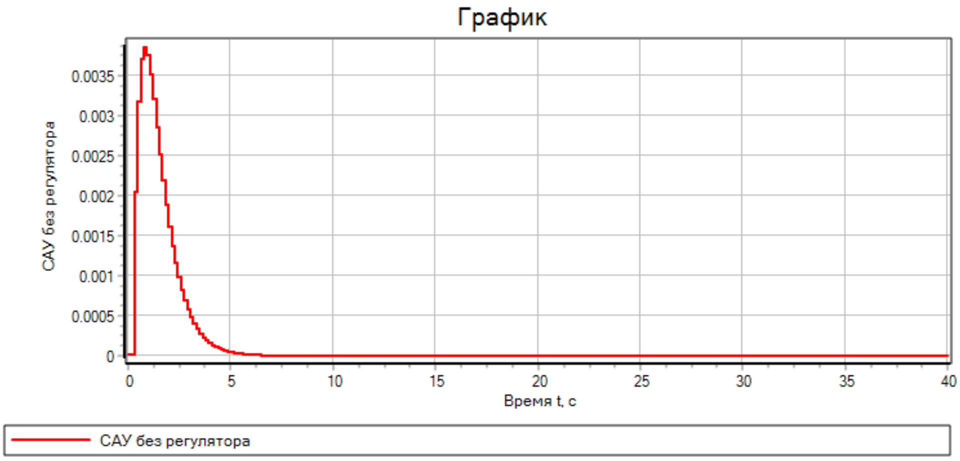


*Рисунок 48 – График ННУ для ошибки наблюдателя по выходной компоненте вектора состояний дискретной САУ с наблюдателем*

Снимем характеристики переходного процесса:

- установившееся значение: $y(+\infty) = 2{,}229 * 10^{-20}$;
- время переходного процесса: $t_{\text{пп}} = 4{,}231$ с;
- статическая ошибка: $y_{\text{со}} = y(+\infty) - y(t_{\text{пп}}) = -0{,}00019264499999999999988855$;
- максимальное значение амплитуды: $A_{\max} = 0{,}0038529$.