Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и кибербезопасности
Высшая школа «Компьютерных технологий и информационных систем»

# Курсовой проект

## Управление перевернутым маятником

по дисциплине «Теория автоматического управления»

**Вариант 11.4**

**Выполнил:**
студент группы 5130902/20201 _____________ А. И. Сафонов
подпись

**Проверил:**
ассистент _____________ В. В. Кравченко
подпись

«___»____________ 2024

Санкт-Петербург

2024

# Оглавление

## Задание

Перевернутый маятник смонтирован на тележке, как показано на рисунке. Тележка должна двигаться таким образом, чтобы масса шара m на конце маятника всегда занимала вертикальное положение. В качестве выходных переменных используются: перемещение тележки $y(\mathrm{t})$ и угол отклонения маятника $\theta(\mathrm{t})$. Управляющее воздействие – сила $f(\mathrm{t})$, приложенная к тележке. Задача заключается в стабилизации тележки в требуемом положении $y(t) = y_{\text{уст}}$.

Дифференциальные уравнения, описывающие движение данной системы, можно получить, записав выражения для суммы сил, действующих в горизонтальном направлении, и суммы моментов относительно точки вращения. Будем считать, что масса тележки $M, M >> m$ и угол отклонения от вертикали $\theta$ является малым. Тогда можно ограничиться линейной моделью и использовать уравнения для суммы сил $M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0$ и для суммы моментов $ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0$

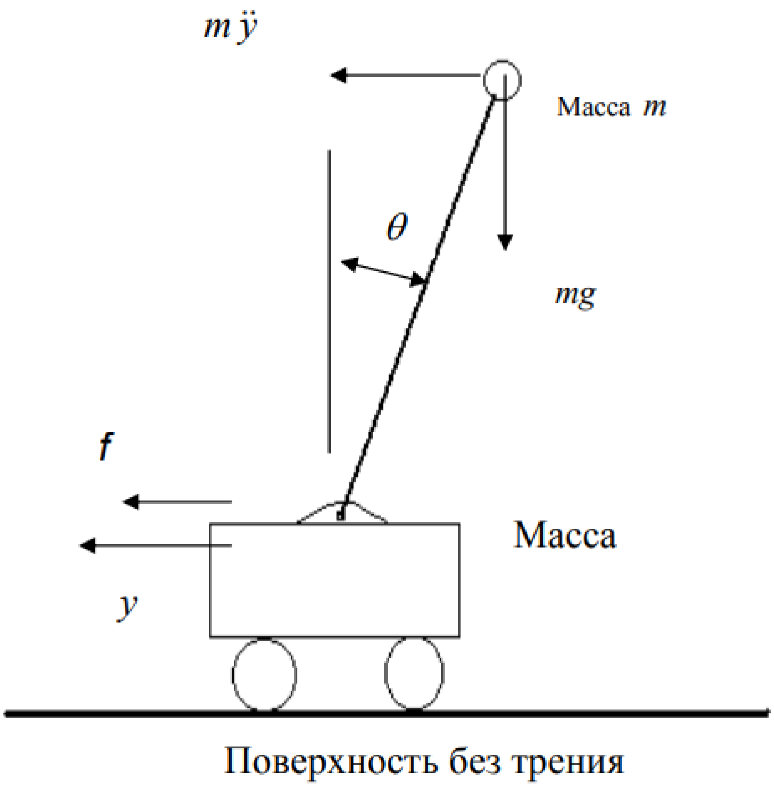


Рис. 1 Схема моделируемой системы

*Таблица 1.Параметры объекта определяются следующей таблицей.*

| Параметр | Вариант | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| m [кг] | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| M [кг] | 200 | 150 | 300 | 350 | 500 |
| l [м] | 1.2 | 2 | 2.5 | 1.5 | 2 |

$g = 9.81\frac{i}{\tilde{n}^2}$.

# 1. Математические модели объектов и систем управления

## 1.1. Модель в пространстве состояния

Из условий нам дано следующая система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0 \\ ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Модель в пространстве состояний представляется в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,u) \doteq Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = g(x,u) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.1.2}$$

где вектор входных воздействий – $u$, а вектор выходных переменных – $y$.

$$\begin{gathered} M\ddot{y} + ml\ddot{\theta} - u(t) = 0 \\ ml\ddot{y} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0 \end{gathered} \tag{1.1.3}$$

Система состоит из уравнений второго порядка, поэтому сразу составить МПС нельзя. Первым делом нужно понизить степени уравнений через замену переменных.

1. Из первого уравнения выразим $\ddot{y}$:

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}\left(u(t) - ml\ddot{\theta}\right) \tag{1.1.4}$$

2. Подставим выражение (1.1.4) во второе уравнение:

$$ml\frac{\left(u(t) - ml\ddot{\theta}\right)}{M} + ml^2\ddot{\theta} - mgl\theta = 0 \tag{1.1.5}$$

3. Упростим поделив выражение на $ml$:

$$\frac{u(t)}{M} - \frac{ml\ddot{\theta}}{M} + l\ddot{\theta} - g\theta = 0 \tag{1.1.6}$$

4. Выразим $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{\left(g\theta - \frac{u(t)}{M}\right)}{l - \frac{ml}{M}} \tag{1.1.7}$$

5. Упростим:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{l - \frac{ml}{M}}\theta - \frac{1}{(Ml - ml)}u(t) \tag{1.1.8}$$

6. Подставим (1.1.8) в (1.1.4):

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}\left(u(t) - ml\left(\frac{g}{l - \frac{ml}{M}}\theta - \frac{1}{Ml - ml}u(t)\right)\right) \quad (1.1.9)$$

7. Упростим

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}\left(u(t) - \frac{gm}{1 - \frac{m}{M}}\theta + \frac{m}{M - m}u(t)\right) \quad (1.1.10)$$

8. Сгруппируем по u(t), и внесем в скобки 1/M:

$$\ddot{y} = \frac{1}{M}\left(1 + \frac{m}{M - m}\right)u(t) - \frac{gm}{M - m}\theta \quad (1.1.11)$$

9. Приведем выражение перед u(t) под общий знаменатель, получим уравнение (1.1.12)

$$\ddot{y} = \frac{1}{M - m}u(t) - \frac{gm}{M - m}\theta \quad (1.1.12)$$

Понизим степень уравнений через замену переменных:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (1.1.13)$$

И включить новые зависимости в систему:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_3 \\ \dot{x_2} = x_4 \\ \dot{x_3} = \frac{1}{\mathrm{M} - \mathrm{m}}\mathrm{u(t)} - \frac{\mathrm{gm}}{\mathrm{M} - \mathrm{m}}\theta \\ \dot{x_4} = \frac{g}{l - \frac{ml}{M}}\theta - \frac{1}{M\left(l - \frac{ml}{M}\right)}u(t) \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Эту систему можно записать в матричном виде и получить модель в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1.15)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-gm}{M - m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g}{l - \frac{ml}{M}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M - m} \\ \frac{-1}{(Ml - ml)} \end{pmatrix}, \mathrm{C} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0), D = 0 \quad (1.1.16)$$

Подставив значения переменных в уравнение (1.1.16), получим:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0{,}1134 & 0 & 0 \\ 0 & 6{,}6156 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}0029 \\ -0{,}0019 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \qquad (1.1.17)$$

## 1.2. Вывод передаточной функции и модели «вход-выход» из непрерывной модели в пространстве состояний

Передаточная функция в операторной форме (или матричная передаточная функция) для объекта, может быть представлена в виде:

$$W(p) = C(pE - A)^{-1}B + D \qquad (1.2.1)$$

Для того чтобы получить формулу 1.2.1 выразим X через p, A, B, u:

$$\dot{X} = AX + Bu$$

$$pEX = AX + Bu$$

$$(pE - A)X = Bu$$

$$X = (pE - A)^{-1}Bu \qquad (1.2.2)$$

И подставим в Y:

$$Y = CX$$

$$Y = C(pE - A)^{-1}Bu \qquad (1.2.3)$$

Для вычисления резольвенты матрицы $(pE - A)^{-1}$ воспользуемся леммой о вычислении резольвенты:

$$(pE - A)^{-1} = \frac{F(p)}{X_{n(p)}}$$

$$F(p) = F_1p^{n-1} + F_2p^{n-2} + \cdots + F_{(n-1)}p + F_n \qquad (1.2.4)$$

$$\chi_n(p) = det(pE - A) = p^n + a_1p^{n-1} + a_2p^{n-2} + \cdots + a_{n-1}p + a_n$$

Коэффициенты характеристического многочлена а$_i$ и матрицы $F_i$ вычисляется по рекуррентным соотношениям:

$$F_1 = E_n\, a_1 = -trace(F_1A)$$

$$F_2 = F_1A + a_1E_n, a_2 = -\frac{1}{2}trace(F_2A)$$

$$\dots$$

$$F_k = F_{k-1}A + a_{k-1}E_n, a_k = -\frac{1}{2}trace(F_kA)$$

$$\dots.$$

$$F_n = F_{n-1}A + a_{n-1}E_n, a_n = -\frac{1}{2}trace(F_nA)$$

Для проверки правильности вычислений воспользуемся контрольным выражением:

$$F_n A + a_n E_n = 0 \tag{1.2.5}$$

Описанные выше шаги для нахождения передаточной функции реализуем с помощью MATLAB.

```
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134 0 0;0 6.6156 0 0];
B=[0; 0; 0.0029; -0.0019];
C=[1 0 0 0];D=0;

F1=eye(4);a1=-trace(A);
F2=F1*A+a1* eye(4);a2=-(1/2)*trace(F2*A);
F3=F2*A+a2* eye(4);a3=-(1/3)*trace(F3*A);
F4=F3*A+a3* eye(4);a4=-(1/4)*trace(F4*A);
Pogr=F4*A+a4*eye(4)
syms p
h=p^4+a1*p^3+a2*p^2+a3*p+a4;
W=C*((F1*p^3+F2*p^2+F3*p+F4)/h)*B+D;
Wpa=vpa(W,5);
pretty(expand(Wpa))

%sys=ss(A,B,C,D);
%tf(sys)
```

*Рис. 2 Код программы в MATLAB*

```
Pogr =

     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
     0     0     0     0
```

*Рис. 3 – Погрешность вычисления передаточной функции непрерывной модели*

Можно сделать вывод, что все вычисления выполнены верны.

После выполнения данной программы получили передаточную функцию:

```
                                                                                2
   0.018969779999999960434095669369599             0.0028999999999999902655645200866274 5 p
---------------------------------------------- - ----------------------------------------------
     4                                      2         4                                      2
- 1.0 p  + 6.6156000000000858562998473644257 p    - 1.0 p  + 6.6156000000000858562998473644257 p
```

*Рис. 4 Передаточная функция полученная из MATLAB.*

$$W = \frac{-0.0029p^2 + 0.01897}{-p^4 + 6.6156p^2} \tag{1.2.6}$$

Из ТАУ известно, что ПФ тесно связана с моделью «вход-выход»

$$A(p)y(p) = B(p)u(p) \to \ y(p) = [A(p)]^{-1}B(p)u(p) \tag{1.2.7}$$

Поэтому, сделав обратное преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, можно получить модель «вход-выход»:

$$y(p) = W(p)u(p) = \frac{B(p)}{A(p)}u(p) \xrightarrow{\mathcal{L}-1} y(t) = \frac{B(p)}{A(p)}u(t) \to A(p)y(t) = B(p)u(t) \tag{1.2.8}$$

Где $p$ – оператор дифференцирования по времени t

$$\begin{gathered} A(p) = a_0p^4 + a_1p^3 + a_2p^2 + a_3p + a_4 = -p^4 + 6.6156p^2 \\ \mathrm{B}(p) = b_0p^2 + b_1p + b_2 = -0.0029p^2 + 0.01897 \end{gathered} \tag{1.2.9}$$

Получаем:

$$(-p^4 + 6.6156p^2)y(t) = (-0.0029p^2 + 0.01897)u(t) \tag{1.2.10}$$

Итоговая модель “вход-выход”:

$$-y(t)^{(4)} + 6.6156y(t)^{(2)} = -0.0029u^{(2)}(t) + 0.01897u(t) \tag{1.2.11}$$

## 1.3. Вывод эквивалентной модели в пространстве состояний из модели «вход-выход»

Перенесем все слагаемые в левую сторону из уравнения (1.2.10) и применим схему Горнера относительно p:

$$0.01897u(t) + p^2(-0.0029u - 6.6156y + p^2y) = 0 \tag{1.3.1}$$

Для составления вектора состояния X нужно поочередно выбрать выражения в скобках:

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = px_1 \\ x_3 = -0.0029u - 6.6156x_1 + px_2 \\ x_4 = px_3 \\ 0.01897u(t) + px_4 = 0 \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Выразим y, а затем подставим в значения производных

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = x_3 + 0.0029u + 6.6156x_1 \\ \dot{x_3} = x_4 \\ \dot{x_4} = -0.01897u(t) \end{cases} \tag{1.3.3}$$

Введем вектор состояний (x), а также матрицы из (1.1.14):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6.6156 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0029 \\ 0 \\ -0.01897 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; D = 0 \tag{1.3.4}$$

## 1.4. Доказательство эквивалентности моделей в пространстве состояний

Матрицы, полученные из пункта 1.3 для уравнения “вход-состояние-выход” обозначим символом ~ $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}, \tilde{x})$.

Произведем замену $x(t) = S\tilde{x}(t)$, где S – неособенная квадратная матрица. В результате получим следующие соотношения

$$\begin{gathered} \dot{\tilde{x}} = S^{-1}AS\tilde{x} + S^{-1}Bu \\ y = CS\tilde{x} + Du \end{gathered} \tag{1.4.1}$$

Теперь нам нужно найти такую матрицу преобразования SSS, которая сделает две системы эквивалентными, т.е. будет удовлетворять следующим условиям:

$$\tilde{A} = S^{-1}AS, \tilde{B} = S^{-1}B, \tilde{C} = CS \tag{1.4.2}$$

Для этого используем матрицу управляемости объекта. Поскольку управляющей является лишь первая компонента внешнего воздействия, то из элементов первого столбца матрицы B составим вектор b и построим матрицу управляемости объекта, отвечающую математической модели, определяемой соотношением:

$$\begin{gathered} S_y = [b, Ab, A^2b, A^3b] = \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}0029 & 0 & 0.0002 \\ 0 & -0.0019 & 0 & -0.0126 \\ 0{,}0029 & 0 & 0.0002 & 0 \\ -0{,}0019 & 0 & -0.0126 & 0 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{1.4.3}$$

Аналогично для модели в формуле (1.3.4):

$$\begin{gathered} \tilde{S}_y = [\tilde{b}, \tilde{A}\tilde{b}, \tilde{A}^2\tilde{b}, \tilde{A}^3\tilde{b}] = \\ = \begin{bmatrix} 0 & 0.0029 & 0 & 0.0002 \\ 0.0029 & 0 & 0.0002 & 0 \\ 0 & -0.0190 & 0 & 0 \\ -0.0190 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{1.4.4}$$

Найдем матрицу S по формуле:

$$S = S_y\tilde{S}_y^{\ -1} = \begin{pmatrix} 1.0010 & 0 & 0.0002 & 0 \\ -58.3983 & 0 & -8.8274 & 0 \\ 0 & 1.0010 & 0 & 0.0002 \\ 0 & -58.3983 & 0 & -8.8274 \end{pmatrix} \tag{1.4.5}$$

Рассчитаем погрешности вычислений:

$$Pog_{\tilde{A}} = \tilde{A} - S^{-1}AS$$
$$Pog_{\tilde{B}} = \tilde{B} - S^{-1}B \quad (1.4.6)$$
$$Pog_{\tilde{C}} = \tilde{C} - CS$$

Для расчета погрешностей выполним код в MATLAB:

```
% Определяем исходные матрицы A и B
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134 0 0;0 6.6156 0 0];
B = [0; 0; 0.0029; -0.0019];
C=[1 0 0 0];
% Определяем матрицы с волной (Avoln и Bvoln)
Avoln = [0 1 0 0; 6.6156 0 1 0; 0 0 0 1; 0 0 0 0];
Bvoln = [0; 0.0029; 0; -0.01897];
Cvoln = [1 0 0 0];

% Вычисление b, Ab, A^2b, A^3b, A^4b для A и B
b = B;
Ab = A * B;
A2b = A * Ab;
A3b = A * A2b;

% Создание матрицы Sy (состояния для исходной системы)
Sy = [b, Ab, A2b, A3b];

% Вычисление bvoln, Abvoln, A^2bvoln, A^3bvoln для Avoln и Bvoln
bvoln = Bvoln;
Abvoln = Avoln * Bvoln;
A2bvoln = Avoln * Abvoln;
A3bvoln = Avoln * A2bvoln;

% Создание матрицы Syvoln (состояния для системы с волной)
Syvoln = [bvoln, Abvoln, A2bvoln, A3bvoln];

% Вычисление матрицы  S и погрешностей
S = Sy * inv(Syvoln);

Pog_A = Avoln - inv(S)*A*S
Pog_B = Bvoln - inv(S)*B
pog_C = Cvoln - C*S
% Вывод результатов
disp('Матрица Sy = ');
disp(Sy);

disp('Матрица Syvoln = ');
disp(Syvoln);

disp('Матрица S = ');
disp(S);
```

*Рис. 5 – Код MATLAB для нахождения погрешностей вычислений*

```
Pog_A =

   1.0e-15 *

         0         0         0    0.0056
    0.8882         0    0.4441         0
         0    0.8882         0    0.2220
         0         0         0         0


Pog_B =

   1.0e-17 *

         0
    0.0434
         0
    0.3469


pog_C =

   -0.0010         0   -0.0002         0
```

*Рис. 6 – Погрешности вычислений, рассчитанные в MATLAB.*

Поскольку матрицы ошибок $Pog_{\tilde{A}}$ *и* $Pog_{\tilde{B}}$ имеют незначительные значения, это говорит о том, что динамика систем в основном схожа. Однако, различие в $Pog_{\tilde{C}}$ указывает на то, что при оценке выходов системы могут возникать более значительные различия.

## 1.5. Получение дискретной модели в пространстве состояний

Найдем шаг дискретизации. Для этого понадобится вычислить вторую норму исходной матрицы A:

$$T \approx \frac{1}{||A||_2} = \tag{1.5.1}$$

Построим модель системы в виде:

$$\begin{gathered} \begin{cases} \lambda_{k+1} = A_g x_k + B_g u_k \\ y_k = C_g x_k + D_g u_k \end{cases} \\ A_g = e^{AT} \\ B_g = \int_0^T e^{A\tau} d\tau B \\ C_g = C \\ D_g = D \end{gathered} \tag{1.5.2}$$

Для вычисления матриц A и B воспользуемся MATLAB.

```
% Определяем исходные матрицы A и B
A=[0 0 1 0;0 0 0 1;0 -0.1134 0 0;0 6.6156 0 0];
B = [0; 0; 0.0029; -0.0019];
C = [1 0 0 0];

% Вычисляем вторую норму матрицы A
T_d = 1 / norm(A, 2);

% Вычисляем матрицу Ag
Ag = expm(A * T_d);
Ag = vpa(Ag, 7);

% Вычисляем матрицу Bg с использованием функции integral для интегрирования
Bg=quadv(@(t)expm(A*t), 0,T_d)*B;
Bg = vpa(Bg, 5);

% Вывод результатов
disp('Ag = ');
disp(Ag);
disp('Bg = ');
disp(Bg);
```

*Рис. 7 – Код программы в MATLAB*

Подставляем полученные матрицы в формулу (1.5.2) и получаем дискретную модель в пространстве состояний:

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & -0.001311533 & 0.1511357 & -0.00006574209 \\ 0 & 1.076513 & 0 & 0.154971 \\ 0 & -0.01757371 & 1 & -0.001311533 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 1.076513 \end{pmatrix}, B_g = \begin{pmatrix} 0.000033126 \\ -0.000021975 \\ 0.00043842 \\ -0.00029444 \end{pmatrix} \quad (1.5.3)$$

$$C_g = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0), D_g = (0)$$

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = A_g x_k + B_g u_k \\ y_k = C_g x_k + D_g u_k \end{cases}$$

## 1.6. Вывод дискретных передаточной функции и модели «вход-выход» из дискретной модели в пространстве состояний

Давайте теперь представим сдвиг вектора состояния в следующем виде:

$$x_k + 1 = \xi x_k \quad (1.6.1)$$

Где ξ - оператор сдвига по времени

Аналогично с непрерывной моделью:

$$
\begin{gathered}
\xi x_k = A_д x_k + B_д u_k => \\
\xi x_k - A_д x_k = B_д u_k => \\
(\xi E - A_д) x_k = B_д u_k => \\
x_k = (\xi E - A_д)^{-1} B_д u_k, \\
W_д(\xi) = \frac{b_д(\xi)}{a_д(\xi)}, \\
(\xi E - A_д)^{-1} = \frac{\tilde{B}_д(\xi)}{\chi^д{}_n(\xi)}
\end{gathered}
\tag{1.6.2}
$$

Перепишем программу из рисунка 2 для случая с дискретной моделью пространства состояний:

```
A = [
     1.0, -0.001311533, 0.1511357, -0.00006574209;
    0,     1.076513,         0,       0.154971;
    0,  -0.01757371,       1.0,   -0.001311533;
    0,     1.025226,         0,       1.076513
];
Bg = [
   0.000033126;
   -0.000021975;
   0.00043842;
  -0.00029444
];
C=[1 0 0 0];D=0;


F1=eye(4);a1=-trace(A);
F2=F1*A+a1* eye(4);a2=-(1/2)*trace(F2*A);
F3=F2*A+a2* eye(4);a3=-(1/3)*trace(F3*A);
F4=F3*A+a3* eye(4);a4=-(1/4)*trace(F4*A);
Pogr=F4*A+a4*eye(4)
syms p
h=p^4+a1*p^3+a2*p^2+a3*p+a4;
W=C*((F1*p^3+F2*p^2+F3*p+F4)/h)*Bg+D;
Wpa=vpa(W,5);
pretty(expand(Wpa))
```

*Рис. 8 – Код программы в MATLAB*

```
                                                                              2                                          3
0.000033125447796165064312031114920874   0.000038138047643350072703505649305835 p    0.000033126000000001376566416411151295 p
-------------------------------------- - ---------------------------------------- + ----------------------------------------
                 #1                                         #1                                         #1

     0.000038136319164304208525136504179998 p
   - ----------------------------------------
                       #1

where

          4                                     3                                     2
   #1 == p  - 4.1530259999999543651938438415527 p  + 6.3060519407226820476353168487549 p  - 4.1530258814464104943908751010895 p

      + 0.99999994072300069092307239770889
```

А

*Рис. 9 – Передаточная функция дискретной модели, рассчитанная в MATLAB.*

Перепишем полученную передаточную функцию:

$$
Wg(\xi) = \frac{0.000033126\xi^3 - 0.000038138\xi^2 - 0.00003813\xi + 0.000033125}{\xi^4 - 4.153\xi^3 + 6.306\xi^2 - 4.153\xi + 1} \tag{1.6.3}
$$

Используя полученную передаточную функцию, получаем дискретную модель «вход-выход»:

$$y_{k+4} - 4.153y_{k+3} + 6.306y_{k+2} - 4.153y_{k+1} + y_k =$$
$$= 0.0004384u_{k+2} - 0.0009432u_{k+1} - 0.0004384u_k$$

# 2. Исследование реакций во временной области

Второй раздел РГЗ будет посвящён исследованию реакций во временной области.

Задан ОУ (см. рис. 1), динамику которого можно описать моделью в пространстве состояний (1).

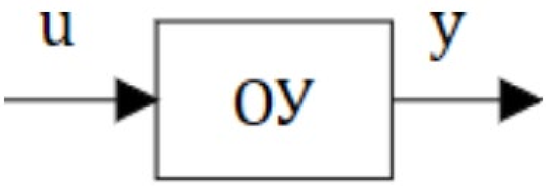


*Рис. 10 – Объект управления в схематичном виде*

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t)\\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t)\end{aligned}\right|\begin{aligned}x_{k+1} &= A_д x_k + B_д u_k\\ y_k &= C x_k + D u_k\end{aligned} \qquad (2.0.1)$$

где $x(0) = x_0 = x^0$. Первое уравнение из (2.0.1) представляет собой ДУ первого порядка для непрерывной модели и разностное для дискретной, решение которых определяется интегральной и разностной формулами Коши соответственно:

$$x(t) = e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \left| x_k = A_д^k x^0 + \sum_{i=0}^{k-1} A_д^{k-1-i} B_д u_i \right. \qquad (2.0.2)$$

Подставив (2) во второе уравнение системы (1), мы получим зависимость вида

$$y = f(x^0, u)$$

Изменяя начальные условия $x$ 0 ОУ или подавая различные воздействия на вход $u$, мы будем получать на выходе реакцию системы во времени в виде переходных процессов. Их анализ является одним из методов исследования свойств ОУ, которые проявляются в реакции на типовые воздействия. Всего их три, и далее мы их рассмотрим.

## 2.1. Переход к канонической жордановой форме

Для исследования реакций во временной области необходимо выделить жорданову форму матрицы , сделав преобразование подобия:

$$x = Sz,$$

Где $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – неособенная матрица. Сделаем замену в МПС и в первом уравнении домножим слева на обратную матрицу $S$:

$$\left.\begin{aligned}\dot{z}(t) &= S^{-1}ASz(t) + S^{-1}\,B\,u(t)\\ y(t) &= CSz(t) + Du(t)\end{aligned}\right|\begin{aligned}z_{k+1} &= S_д^{-1}A_д x_k + S_д^{-1}B_д u_k\\ y_k &= CSx_k + Du_k\end{aligned} \qquad (2.1.1)$$

где $z(0) = z^0 = S^{-1}x^0, z_0 = z_д^0 = S_д^{-1}x^0$.

Преобразование вида $S\ -1AS$ и даст жорданову матрицу $J$. Матрица $J$ имеет блочнодиагональный вид: на главной диагонали находятся собственные числа матрицы $A$, а на первой наддиагонали могут располагаться единицы. Наличие единиц обуславливается кратностью выбранного собственного числа и следующей формулой

$$k_l = rank\left(A - \lambda_{p+i}E_n\right)^{l-1} - 2rank\left(A - \lambda_{p+i}E_n\right)^{l} + rank\left(A - \lambda_{p+i}E_n\right)^{l+1}, \tag{2.1.4}$$

где $kl$ – число клеток порядка $l$. Клетки порядка $l > 1$ характеризуются наличием единиц в первой наддиагонали. Матрица $S$ в данном случае является собственной матрицей матрицы $A$ и составляется из её собственных векторов.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0{,}1134 & 0 & 0 \\ 0 & 6{,}6156 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.5721 \\ -2.5721 \end{pmatrix} \tag{2.1.5}$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & -0.001311533 & 0.1511357 & -0.00006574209 \\ 0 & 1.076513 & 0 & 0.154971 \\ 0 & -0.01757371 & 1 & -0.001311533 \\ 0 & 1.025226 & 0 & 1.076513 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.4751 \\ 0.6779 \end{pmatrix} \tag{2.1.6}$$

$$\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & 0.3623 & -0.3623 \\ 0 & 0 & -0.0160 & -0.0160 \\ 0 & 0 & 0.9319 & 0.9319 \end{pmatrix} \tag{2.1.7}$$

$$\mathrm{S_д} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0.0062 & 0.0062 \\ 0 & 0 & 0.3623 & -0.3623 \\ 0 & 0 & -0.0160 & -0.0160 \\ 0 & 0 & 0.9319 & 0.9319 \end{pmatrix} \tag{2.1.8}$$

У матрицы $A_d$ есть кратное собственное значение ($\lambda_0 = 0 -$ кратность равная 2) . Ее жорданова форма может быть записана как:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5721 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5721 \end{pmatrix} \tag{2.1.9}$$

У матрицы $A_d$ есть кратное собственное значение ($\lambda_0 = 1 -$ кратность равная 2) .. Ее жорданова форма может быть записана как:

$$J_д = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4751 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6779 \end{pmatrix} \tag{2.1.10}$$

## 2.2. Переходная характеристика

*Переходная* характеристика системы (ПХС) строится при нулевых начальных условиях и при входном воздействии единичной ступенчатой функции, или функции Хэвисайда:

$$1(t-t_0)=\begin{cases}0, t<t_0\\1, t>t_0\end{cases} \tag{2.2.1}$$

Учтём новые условия:

$$z(t)=\int_0^t e^{J(t-\tau)}S^{-1}B1(\tau)d\tau = (e^{Jt}-E_n)J^{-1}S^{-1}B. \quad \Bigg| \quad z_k=\sum_{i=0}^{k-1}J_д^{k-1-i}S_д^{-1}B_д 1_i = \sum_{i=0}^{k-1}J_д^{k-1-i}S_д^{-1}B_д = \tag{2.2.2}$$

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из системы после замены переменных, приняв во внимание действие единичной функции:

$$y(t)=CS(e^{Jt}-E_n)J^{-1}S^{-1}B+D \,|\, y_k=C_д\sum_{i=0}^{k-1}J_д^{k-1-i}S_д^{-1}B_д+D \tag{2.2.3}$$

и получим функцию переходной характеристики системы.\

Построение и исследование графиков непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech. Построенный график представлен на рис. 10.

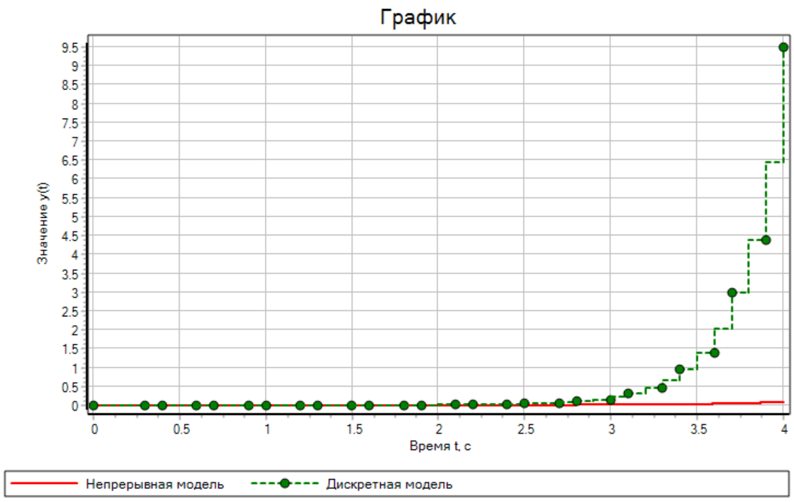


*Рис. 11 – Переходная характеристика непрерывной и дискретной моделей*

Из графика видно, что непрерывная модель и дискретная расходятся, поэтому снятие характеристик переходных процессов не требуется.

## 2.3. Импульсная характеристик

Импульсная характеристика системы (ИХС) строится при нулевых начальных условиях и при входном воздействии дельта-функции, или функции Дирака:

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0, t\neq t_0\\ 1, t=t_0\end{cases} \tag{2.3.1}$$

Главной особенностью этой функции является её фильтрующее свойство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\left|\sum_{i=-\infty}^{+\infty} f(t_i)\delta(t_i-t_0) = f(t_0).\right. \tag{2.3.2}$$

Учтём новые условия в:

$$z(t) = \int_0^t e^{J(t-\tau)}S^{-1}B\delta(\tau)d\tau = (e^{Jt})S^{-1}B. \left| z_k = \sum_{i=0}^{k-1} J_д^{k-1-i}S_д^{-1}B_д\delta(t_i) = \sum_{i=0}^{k-1} J_д^{k-1}S_д^{-1}B_д = \right. \tag{2.3.3}$$

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из (3):

$$y(t) = CSe^{Jt}S^{-1}B + D\delta(t)\,\left|y_k = CS_д J_д^{k-1}S^{-1}B_д + D\delta(t_k)\right. \tag{2.3.4}$$

и получим функцию импульсной характеристики системы.

Построение и исследование графиков импульсной характеристики непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech. Построенный график представлен на рис. 12.

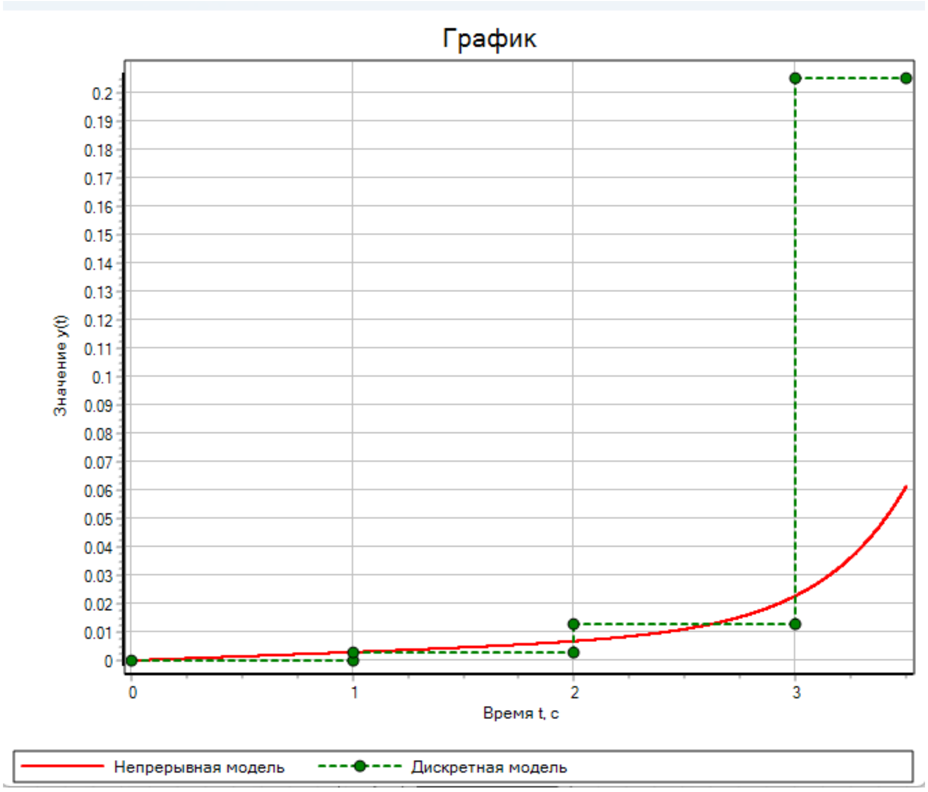


*Рис. 12 – Импульсная характеристика непрерывной и дискретной моделей*

Из графика ИХС видно, что непрерывная модель и дискретная расходятся, поэтому снятие характеристик переходных процессов не требуется.

## 2.4. Ненулевые начальные условия

Реакция на ненулевые начальные условия (ННУ) строится при отсутствии каких-либо внешних управлений и возмущений, но, чтобы хотя бы один элемент вектора $x^0$ был отличен от нуля. Учтём новые условия в:

$$z(t) = e^{Jt}S^{-1}x^0 \mid z_k = J_д^k S_д^{-1}x^0. \tag{2.4.1}$$

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из (2.1.1)

$$y(t) = CSe^{Jt}S^{-1}x^0 \big| y_k = CSJ_д^k S_д^{-1}x^0 \tag{2.4.2}$$

и получим функцию реакции системы (2.0.1) на ненулевые начальные условия.

Построение и исследование графиков переходной характеристики с ненулевыми начальными условиями непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech. Построенный график представлен на рис. 13.

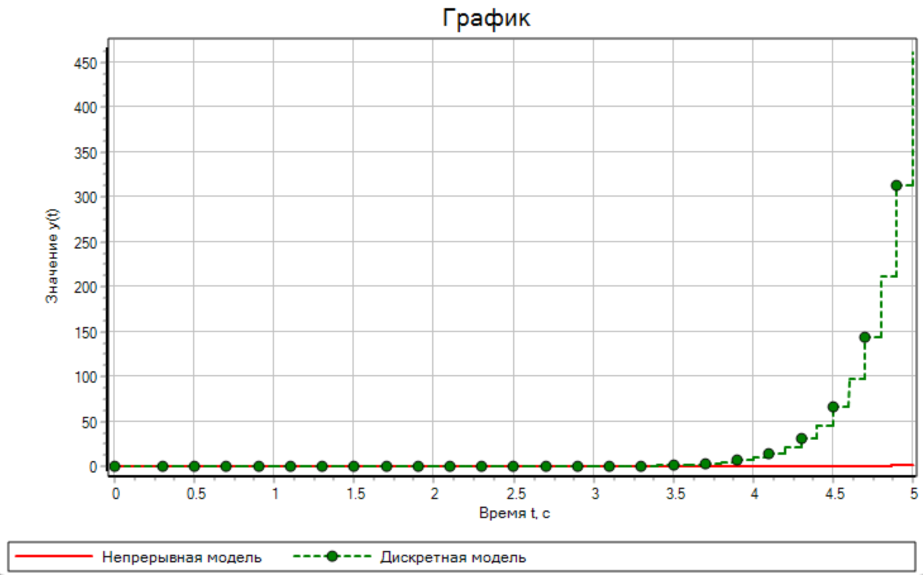


*Рис. 13 – Реакция на ненулевые начальные условия непрерывной и дискретной моделей*

Схема объекта в программе SimInTech представлена на рис. 14.

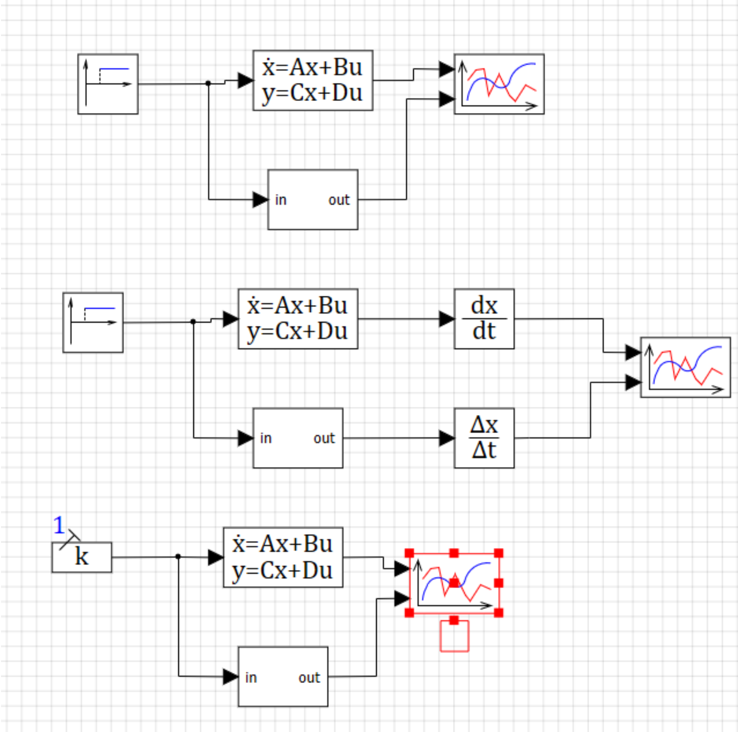


*Рис. 13 – Схема объекта для исследования реакций во временной области*

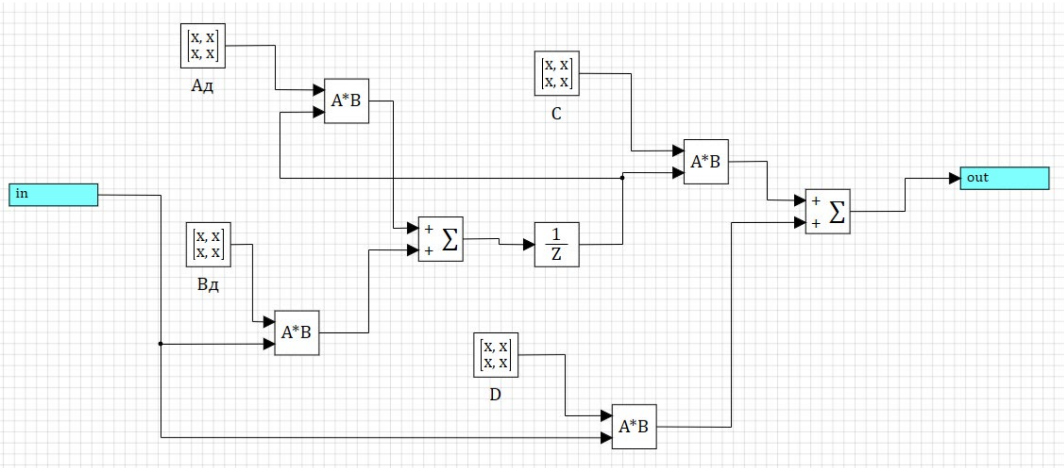


*Рис. 14 – Субмодель дискретной модели.*