Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

Высшая школа «Компьютерных технологий и информационных систем»

**Курсовой проект**

**Управление перевернутым маятником**

по дисциплине «Теория автоматического управления»

**Вариант 11.4**

**Выполнил:**

студент группы 5130902/20201 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А. И. Сафонов

подпись

**Проверил:**

ассистент \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В. В. Кравченко

подпись

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2024

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

[Задание 3](#_Toc179905838)

[1. Математические модели объектов и систем управления 5](#_Toc179905839)

[1.1. Модель в пространстве состояния 5](#_Toc179905840)

[1.2. Вывод передаточной функции и модели «вход-выход» из непрерывной модели в пространстве состояний 7](#_Toc179905841)

[1.3. Вывод эквивалентной модели в пространстве состояний из модели «вход-выход» 9](#_Toc179905842)

[1.4. Доказательство эквивалентности моделей в пространстве состояний 10](#_Toc179905843)

[1.5. Получение дискретной модели в пространстве состояний 12](#_Toc179905844)

[1.6. Вывод дискретных передаточной функции и модели «вход-выход» из дискретной модели в пространстве состояний 13](#_Toc179905845)

[2. Исследование реакций во временной области 16](#_Toc179905846)

[2.1. Переход к канонической жордановой форме 16](#_Toc179905847)

[2.2. Переходная характеристика 18](#_Toc179905848)

[2.3. Импульсная характеристик 18](#_Toc179905849)

[2.4. Ненулевые начальные условия 20](#_Toc179905850)

Задание

Перевернутый маятник смонтирован на тележке, как показано на рисунке. Тележка должна двигаться таким образом, чтобы масса шара m на конце маятника всегда занимала вертикальное положение. В качестве выходных переменных используются: перемещение тележки и угол отклонения маятника . Управляющее воздействие – сила ƒ, приложенная к тележке. Задача заключается в стабилизации тележки в требуемом положении .

Дифференциальные уравнения, описывающие движение данной системы, можно получить, записав выражения для суммы сил, действующих в горизонтальном направлении, и суммы моментов относительно точки вращения. Будем считать, что масса тележки и угол отклонения от вертикали θ является малым. Тогда можно ограничиться линейной моделью и использовать уравнения для суммы сил и для суммы моментов

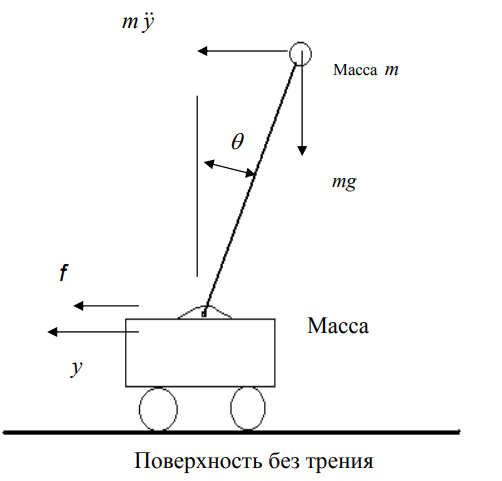


Рис. 1 Схема моделируемой системы

Таблица 1.Параметры объекта определяются следующей таблицей.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Параметр | Вариант | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| m [кг] | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| M [кг] | 200 | 150 | 300 | 350 | 500 |
| l [м] | 1.2 | 2 | 2.5 | 1.5 | 2 |

.

# Математические модели объектов и систем управления

## Модель в пространстве состояния

Из условий нам дано следующая система дифференциальных уравнений:

Модель в пространстве состояний представляется в виде системы уравнений:

где вектор входных воздействий – , a вектор выходных переменных – .

Система состоит из уравнений второго порядка, поэтому сразу составить МПС нельзя. Первым делом нужно понизить степени уравнений через замену переменных.

1. Из первого уравнения выразим :
2. Подставим выражение (1.1.4) во второе уравнение:
3. Упростим поделив выражение на:
4. Выразим :
5. Упростим:
6. Подставим (1.1.8) в (1.1.4):
7. Упростим
8. Сгруппируем по u(t), и внесем в скобки 1/M:
9. Приведем выражение перед u(t) под общий знаменатель, получим уравнение (1.1.12)

Понизим степень уравнений через замену переменных:

И включить новые зависимости в систему:

Эту систему можно записать в матричном виде и получить модель в пространстве состояний:

где

Подставив значения переменных в уравнение (1.1.16), получим:

## Вывод передаточной функции и модели «вход-выход» из непрерывной модели в пространстве состояний

Передаточная функция в операторной форме (или матричная передаточная функция) для объекта, может быть представлена в виде:

Для того чтобы получить формулу 1.2.1 выразим X через p, A, B, u:

И подставим в Y:

Для вычисления резольвенты матрицы воспользуемся леммой о вычислении резольвенты:

Коэффициенты характеристического многочлена и матрицы вычисляется по рекуррентным соотношениям:

…

Для проверки правильности вычислений воспользуемся контрольным выражением:

Описанные выше шаги для нахождения передаточной функции реализуем с помощью MATLAB.

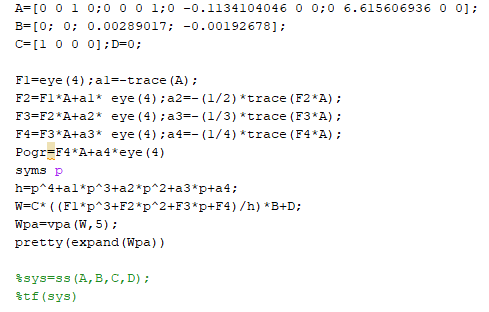


Рис. 2 Код программы в MATLAB

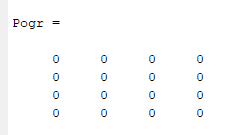


Рис. 3 – Погрешность вычисления передаточной функции непрерывной модели

Можно сделать вывод, что все вычисления выполнены верны.

После выполнения данной программы получили передаточную функцию:

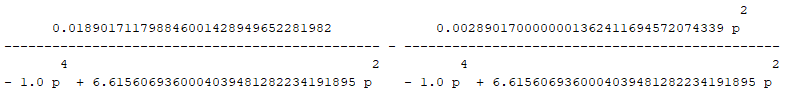


Рис. 4 Передаточная функция полученная из MATLAB.

Из ТАУ известно, что ПФ тесно связана с моделью «вход-выход»

Поэтому, сделав обратное преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, можно получить модель «вход-выход»:

Где – оператор дифференцирования по времени t

Получаем:

Итоговая модель “вход-выход”:

## Вывод эквивалентной модели в пространстве состояний из модели «вход-выход»

Перенесем все слагаемые в левую сторону из уравнения (1.2.10) и применим схему Горнера относительно p:

Для составления вектора состояния Х нужно поочередно выбрать выражения в скобках:



Выразим y, а затем подставим в значения производных

Введем вектор состояний (x), а также матрицы из (1.1.14):

## Доказательство эквивалентности моделей в пространстве состояний

Матрицы, полученные из пункта 1.3 для уравнения “вход-состояние-выход” обозначим символом ~ (.

Произведем замену , где S – неособенная квадратная матрица. В результате получим следующие соотношения

Теперь нам нужно найти такую матрицу преобразования SSS, которая сделает две системы эквивалентными, т.е. будет удовлетворять следующим условиям:

Для этого используем матрицу управляемости объекта. Поскольку управляющей является лишь первая компонента внешнего воздействия, то из элементов первого столбца матрицы B составим вектор b и построим матрицу управляемости объекта, отвечающую математической модели, определяемой соотношением:

Аналогично для модели в формуле (1.3.4):

Найдем матрицу S по формуле:

Рассчитаем погрешности вычислений:

Для расчета погрешностей выполним код в MATLAB:

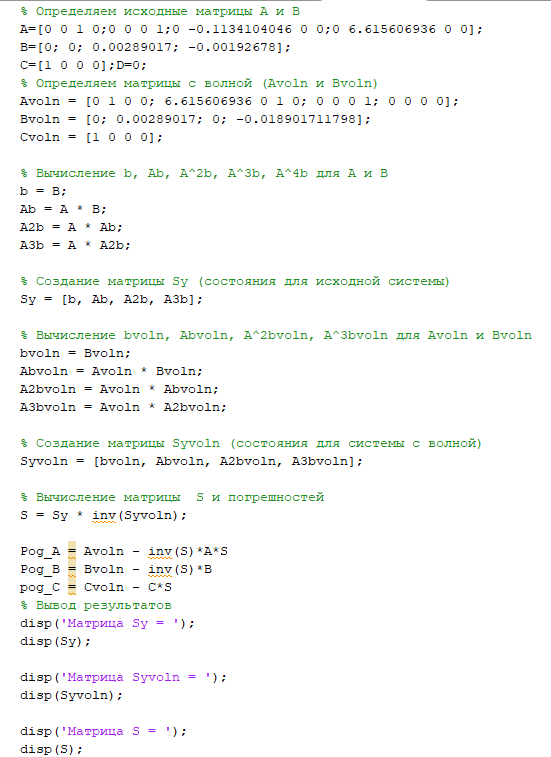
**

Рис. 5 – Код MATLAB для нахождения погрешностей вычислений

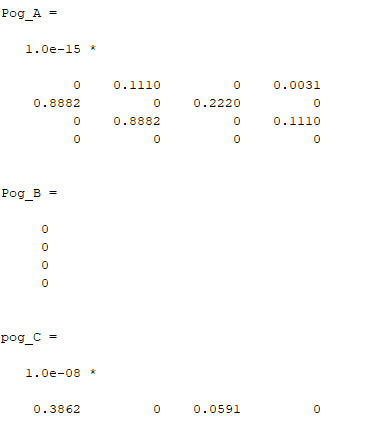


Рис. 6 – Погрешности вычислений, рассчитанные в MATLAB.

Поскольку матрицы ошибок ​ имеют незначительные значения, это говорит о том, что динамика систем в основном схожа. Однако, различие в ​ указывает на то, что при оценке выходов системы могут возникать более значительные различия.

## Получение дискретной модели в пространстве состояний

Найдем шаг дискретизации. Для этого понадобится вычислить вторую норму исходной матрицы A:

Построим модель системы в виде:

Для вычисления матриц А и В воспользуемся MATLAB.

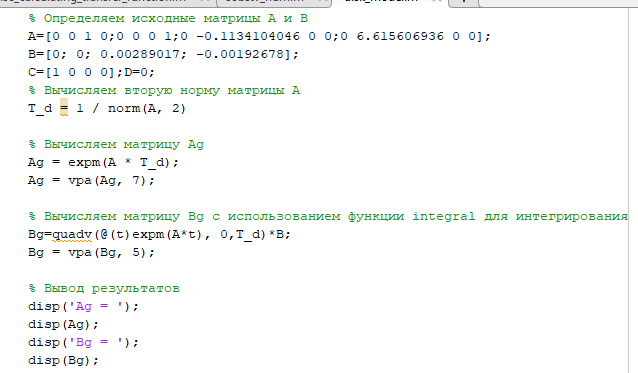


Рис. 7 – Код программы в MATLAB

Подставляем полученные матрицы в формулу (1.5.2) и получаем дискретную модель в пространстве состояний:

## Вывод дискретных передаточной функции и модели «вход-выход» из дискретной модели в пространстве состояний

Давайте теперь представим сдвиг вектора состояния в следующем виде:

Где - оператор сдвига по времени

Аналогично с непрерывной моделью:

Перепишем программу из рисунка 2 для случая с дискретной моделью пространства состояний:

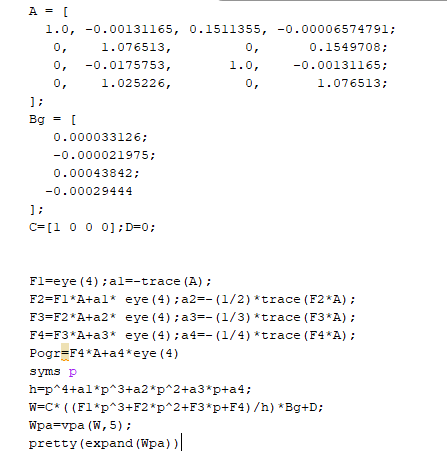


Рис. 8 – Код программы в MATLAB

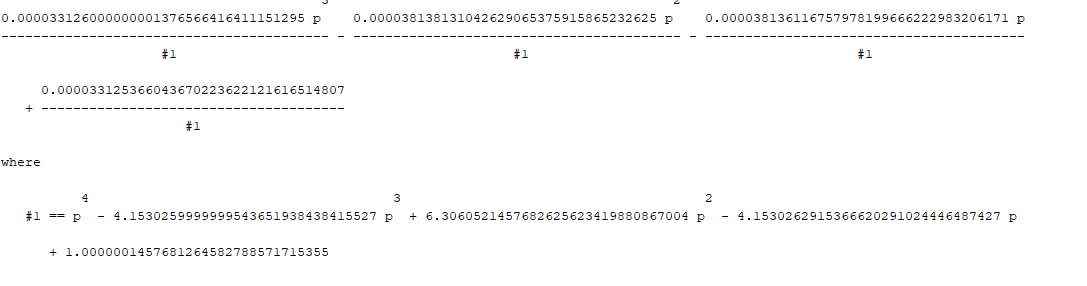
A

Рис. 9 – Передаточная функция дискретной модели, рассчитанная в MATLAB.

Перепишем полученную передаточную функцию:

Используя полученную передаточную функцию, получаем дискретную модель «вход-выход»:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |

# Исследование реакций во временной области

Второй раздел РГЗ будет посвящён исследованию реакций во временной области.

Задан ОУ (см. рис. 1), динамику которого можно описать моделью в пространстве состояний (1).

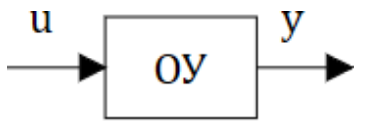


Рис. 10 – Объект управления в схематичном виде

где . Первое уравнение из (2.0.1) представляет собой ДУ первого порядка для непрерывной модели и разностное для дискретной, решение которых определяется интегральной и разностной формулами Коши соответственно:

Подставив (2) во второе уравнение системы (1), мы получим зависимость вида

Изменяя начальные условия 𝑥 0 ОУ или подавая различные воздействия на вход 𝑢, мы будем получать на выходе реакцию системы во времени в виде переходных процессов. Их анализ является одним из методов исследования свойств ОУ, которые проявляются в реакции на типовые воздействия. Всего их три, и далее мы их рассмотрим.

## Переход к канонической жордановой форме

Для исследования реакций во временной области необходимо выделить жорданову форму матрицы , сделав преобразование подобия:

Где – неособенная матрица. Сделаем замену в МПС и в первом уравнении домножим слева на обратную матрицу 𝑆:

где

Преобразование вида 𝑆 −1𝐴𝑆 и даст жорданову матрицу 𝐽. Матрица 𝐽 имеет блочнодиагональный вид: на главной диагонали находятся собственные числа матрицы 𝐴, а на первой наддиагонали могут располагаться единицы. Наличие единиц обуславливается кратностью выбранного собственного числа и следующей формулой

где 𝑘𝑙 – число клеток порядка 𝑙. Клетки порядка 𝑙 > 1 характеризуются наличием единиц в первой наддиагонали. Матрица 𝑆 в данном случае является собственной матрицей матрицы 𝐴 и составляется из её собственных векторов.

Код для вычисления полученных собственных векторов и собственных чисел:

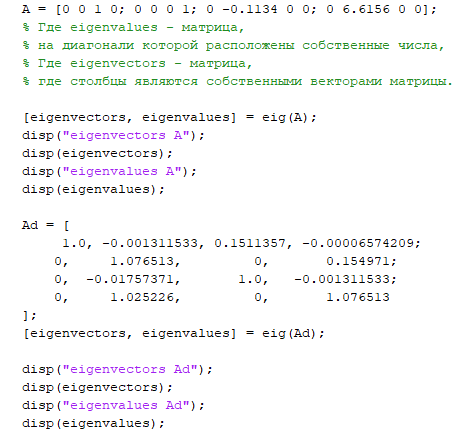


Рис. 11 – Программа для вычислений собственных чисел и векторов

Результат выполнения программы:

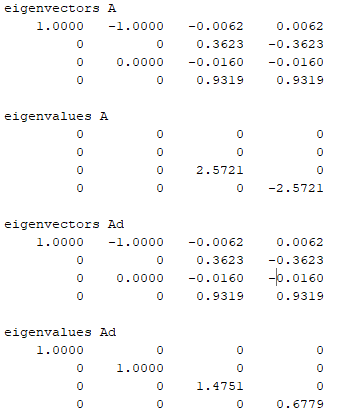


Рис. 12 – Полученные собственные вектора и числа для матриц A и Ad

Как видно, кратными числами являются «0» и «1». Найдём для непрерывной и дискретной моделей количество «клеток» Жордана соответственно:

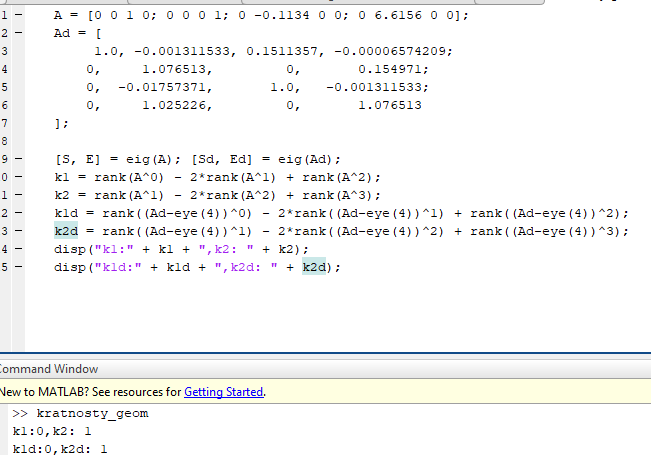


Рис. 13 – Программа для вычислений геометрических кратностей собственных чисел

У матрицы есть кратное собственное значение (. Ее жорданова форма может быть записана как:

У матрицы есть кратное собственное значение (.. Ее жорданова форма может быть записана как:

## Переходная характеристика

Переходная характеристика системы (ПХС) строится при нулевых начальных условиях и при входном воздействии единичной ступенчатой функции, или функции Хэвисайда:

Учтём новые условия:

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из системы после замены переменных, приняв во внимание действие единичной функции:

и получим функцию переходной характеристики системы.\

Построение и исследование графиков непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech. Построенный график представлен на рис. 13.

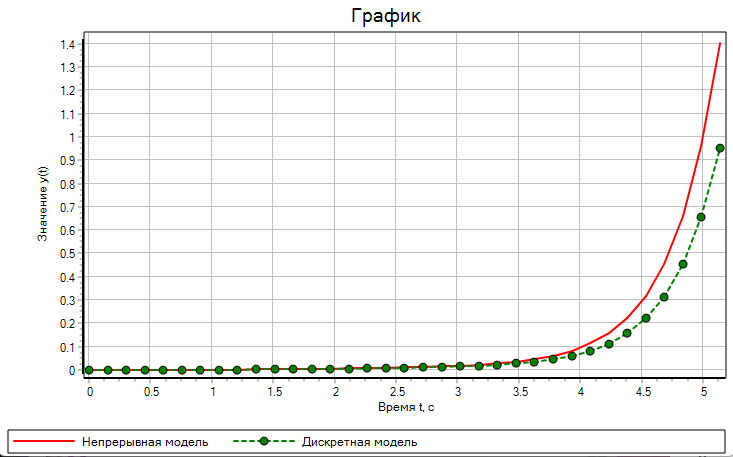


Рис. 14 – Переходная характеристика непрерывной и дискретной моделей

Из графика видно, что непрерывная модель и дискретная расходятся, поэтому снятие характеристик переходных процессов не требуется.

## Импульсная характеристик

Импульсная характеристика системы (ИХС) строится при нулевых начальных условиях и при входном воздействии дельта-функции, или функции Дирака:

Главной особенностью этой функции является её фильтрующее свойство:

Учтём новые условия в:

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из (3):

и получим функцию импульсной характеристики системы.

Построение и исследование графиков импульсной характеристики непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech. Построенный график представлен на рис. 14.

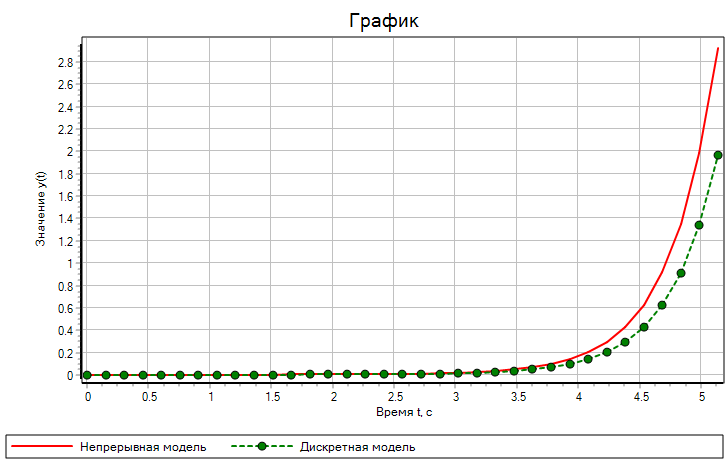


Рис. 15 – Импульсная характеристика непрерывной и дискретной моделей

Из графика ИХС видно, что непрерывная модель и дискретная расходятся, поэтому снятие характеристик переходных процессов не требуется.

## Ненулевые начальные условия

Реакция на ненулевые начальные условия (ННУ) строится при отсутствии каких-либо внешних управлений и возмущений, но, чтобы хотя бы один элемент вектора был отличен от нуля. Учтём новые условия в:

Теперь подставим полученный результат во второе уравнение из (2.1.1)

и получим функцию реакции системы (2.0.1) на ненулевые начальные условия.

Построение и исследование графиков переходной характеристики с ненулевыми начальными условиями непрерывной и дискретной модели с помощью программы SimInTech.

В качестве не нулевых условий примем матрицу

Построенный график представлен на рис. 15.

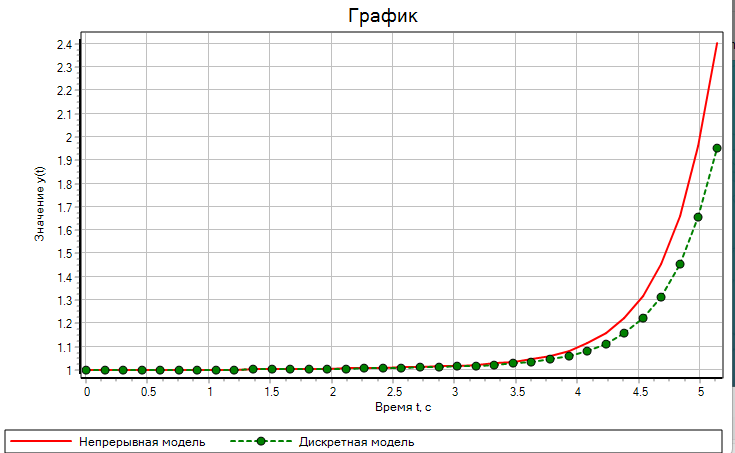


Рис. 16 – Реакция на ненулевые начальные условия непрерывной и дискретной моделей

Схема объекта в программе SimInTech представлена на рис. 14.

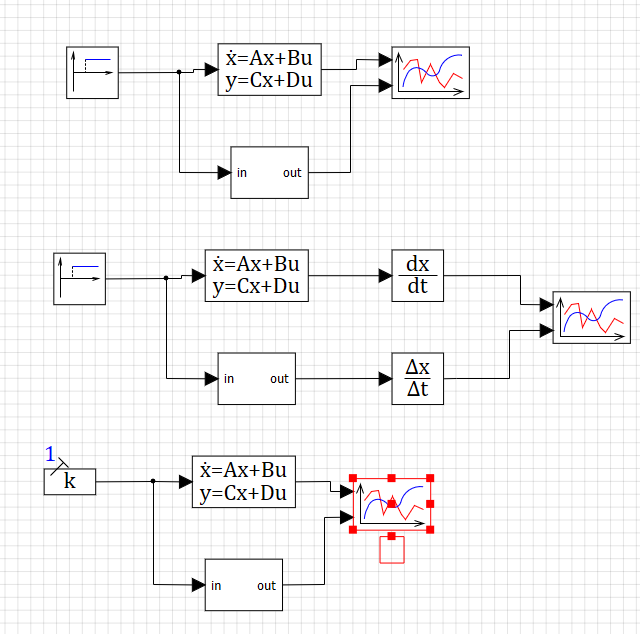


Рис. 17 – Схема объекта для исследования реакций во временной области

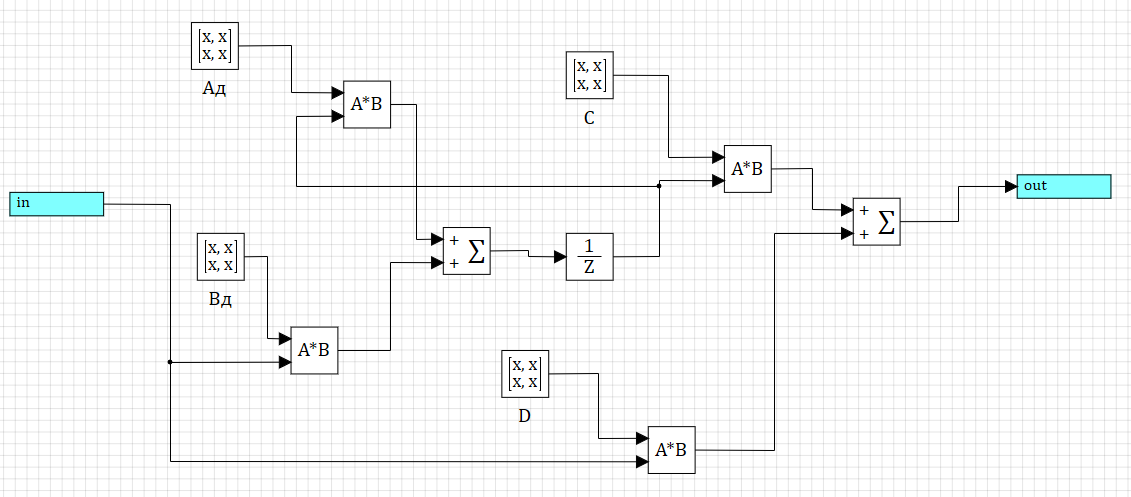


Рис. 18– Субмодель дискретной модели.

# Частотные характеристики

Если мы на вход 𝑢 модели будем подавать гармонический сигнал, то на выходе 𝑦 в установившемся режиме мы будем получать реакцию ОУ также в гармоническом виде. Зная входной и выходной сигналы, можно провести анализ передаточного звена, характеризующегося функцией 𝑊. Классическим типовым воздействием выступает единичная синусоидальная функция sin(𝜔𝑡).

Чтобы выходной сигнал 𝑦 не был похож на экспоненту, ОУ должен быть устойчивым. Отсюда следует замечание: частотные характеристики имеют смысл только для устойчивых систем, т. к. у неустойчивых на выходе не будет гармонического сигнала, а значит нельзя будет провести частотный анализ.

Так как мы будем рассматривать гармонические сигналы, то удобно перейти к другой системе координат на основе частоты с помощью преобразования Фурье, которое является частным случаем преобразования Лапласа:

𝑠 = 𝑗𝜔,

где *j* – мнимая единица, но с дополнительными условиями: нужно, чтобы исследуемая функция была задана на 𝑡 ∈ (−∞, +∞) и была полностью интегрируема.

Пусть на вход бесконечно долго поступает гармонический сигнал, а ОУ удовлетворяет необходимым условиям. Тогда сделаем преобразование Фурье:

где 𝑊 – комплексная частотная характеристика ОУ, которую по свойству комплексных чисел можно записать следующим образом:

То есть отношение Фурье-изображений входного сигнала 𝑢 и выходного сигнала 𝑦 определяет изменение модуля и фазы выходного сигнала (как функцию частоты) относительно входного сигнала:

Как можно заметить из последней формулы амплитуда и фаза выходного сигнала 𝑦 зависят от частоты 𝜔: =(𝜔), 𝛹=𝛹(𝜔). На основе этих зависимостей и проводят частотный анализ систем.

## Амплитудно-частотная характеристика

Амплитудно-частотная характеристика системы (АЧХ) находится как отношение амплитуды выходного сигнала 𝑦, который зависит от частоты, к амплитуде входного 𝑢 на определённом частотном диапазоне:

Для исследования воспользуемся программой SimInTech. В SimInTech для построения АЧХ используется блок Построение частотных характеристик (вкладка Анализ и оптимизация). Он подключается ко входу и выходу исследуемого ОУ. В свойствах данного блока выставим следующие значения:

* типы характеристик: «ЛАХ»
* начальная круговая частота: 0,0005
* конечная круговая частота: 500 для непрерывной системы и для дискретной

Полученные графики см в пункте 3.2 (рисунок 19, рисунок 20).

## Фазочастотная характеристика

Фазочастотная характеристика системы (ФЧХ) представляется аргументом частотной характеристики ОУ 𝑊 на определённом частотном диапазоне:

В SimInTech для построения ФЧХ также используется блок Построение частотных характеристик. В свойствах данного блока выставим следующие основные значения:

− тип характеристик: «ФЧХ»

− начальная и конечная круговые частоты: такие же, как и для АЧХ.

Получим графики (см. рисунок 19 и рисунок 20):



Рисунок 19 – Графики ЛАЧХ и ФЧХ исследуемой непрерывной системы,

где частота представлена в логарифмическом масштабе.



Рисунок 20 – Графики ЛАЧХ и ФЧХ исследуемой дискретной системы, где частота представлена в логарифмическом масштабе.

Полученные графики не имеют никакого смысла, так как для снятия частотных характеристик системы должна быть устойчива.

## Определение по графикам запасов устойчивости моделей

Выделяют два основных критерия, по которым оценивают систему в рамках её частотных характеристик:

− запас устойчивости по амплитуде,

− запас устойчивости по фазе.

Как следует из их названия, они показывают возможность системы сохранять устойчивость при изменении характеристик (таких как амплитуда и частота) входного воздействия 𝑢.

Чтобы определить запас устойчивости по амплитуде нужно выделить частоту, на которой график ФЧХ пересекает −180°. Расстояние от АЧХ (ЛАЧХ) до нуля на этой частоте и будет искомой величиной.

В этом случае график ФЧХ непрерывной модели не пересекает -180°, следовательно запас устойчивости непрерывной модели по амплитуде не определить.

Аналогичная ситуация для запаса по фазе, но обратная: выделяем частоту, на которой АЧХ (ЛАЧХ) непрерывной модели обращается в ноль и смотрим расстояние от ФЧХ до −180°.

## Амплитудно-фазочастотная характеристика

Амплитудно-фазочастотная характеристика (АФЧХ) представляется зависимостью частотной характеристики 𝑊 от частоты:

SimInTech для построения АФЧХ также используется блок *Построение частотных характеристик* (см. рисунок 15). В свойствах данного блока нужно выставить следующие основные значения:

− *типы характеристик*: «Годограф Найквиста»,

− начальная и конечная круговые частоты: такие же, как и для АЧХ.

Получим графики (см. рисунок 21 и рисунок 22):



Рисунок 21 – Графики АФЧХ исследуемой непрерывной системы.



Рисунок 22 – Графики АФЧХ исследуемой непрерывной системы.

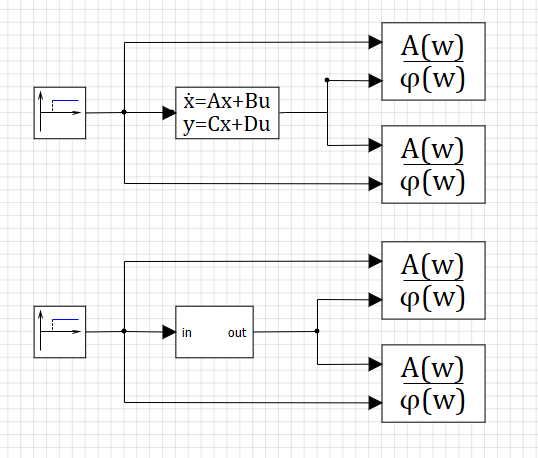


Рисунок 23 – Схема объекта для исследования частотных характеристик