Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

Высшая школа «Компьютерных технологий и информационных систем»

**Курсовой проект**

**Управление перевернутым маятником**

по дисциплине «Теория автоматического управления»

**Вариант 11.4**

**Выполнил:**

студент группы 5130902/20201 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А. И. Сафонов

подпись

**Проверил:**

ассистент \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В. В. Кравченко

подпись

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2024

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

[Задание 3](#_Toc178959599)

[1. Математические модели объектов и систем управления 5](#_Toc178959600)

[1.1. Модель в пространстве состояния 5](#_Toc178959601)

[1.2. Вывод передаточной функции и модели «вход-выход» из непрерывной модели в пространстве состояний 7](#_Toc178959602)

[1.3. Вывод эквивалентной модели в пространстве состояний из модели «вход-выход» 9](#_Toc178959603)

[1.4. Доказательство эквивалентности моделей в пространстве состояний 10](#_Toc178959604)

[1.5. Получение дискретной модели в пространстве состояний 12](#_Toc178959605)

[1.6. Вывод дискретных передаточной функции и модели «вход-выход» из дискретной модели в пространстве состояний 13](#_Toc178959606)

Задание

Перевернутый маятник смонтирован на тележке, как показано на рисунке. Тележка должна двигаться таким образом, чтобы масса шара m на конце маятника всегда занимала вертикальное положение. В качестве выходных переменных используются: перемещение тележки и угол отклонения маятника . Управляющее воздействие – сила ƒ, приложенная к тележке. Задача заключается в стабилизации тележки в требуемом положении .

Дифференциальные уравнения, описывающие движение данной системы, можно получить, записав выражения для суммы сил, действующих в горизонтальном направлении, и суммы моментов относительно точки вращения. Будем считать, что масса тележки и угол отклонения от вертикали θ является малым. Тогда можно ограничиться линейной моделью и использовать уравнения для суммы сил и для суммы моментов

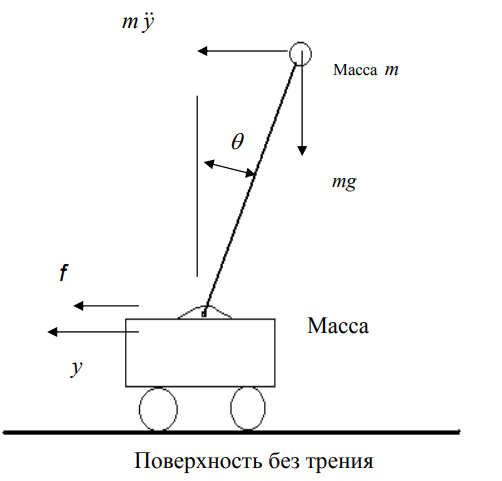


Рис. 1 Схема моделируемой системы

Таблица 1.Параметры объекта определяются следующей таблицей.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Параметр | Вариант | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| m [кг] | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| M [кг] | 200 | 150 | 300 | 350 | 500 |
| l [м] | 1.2 | 2 | 2.5 | 1.5 | 2 |

.

# Математические модели объектов и систем управления

## Модель в пространстве состояния

Из условий нам дано следующая система дифференциальных уравнений:

Модель в пространстве состояний представляется в виде системы уравнений:

где вектор входных воздействий – , a вектор выходных переменных – .

Система состоит из уравнений второго порядка, поэтому сразу составить МПС нельзя. Первым делом нужно понизить степени уравнений через замену переменных.

1. Из первого уравнения выразим :
2. Подставим выражение (1.1.4) во второе уравнение:
3. Упростим поделив выражение на:
4. Выразим :
5. Упростим:
6. Подставим (1.1.7) в (1.1.4):
7. Упростим
8. Сгруппируем по u(t), и внесем в скобки 1/M:
9. Приведем выражение перед u(t) под общий знаменатель, получим уравнение (1.1.11)

Понизим степень уравнений через замену переменных:

И включить новые зависимости в систему:

Эту систему можно записать в матричном виде и получить модель в пространстве состояний:

где

Подставив значения переменных в уравнение (1.1.15), получим:

## Вывод передаточной функции и модели «вход-выход» из непрерывной модели в пространстве состояний

Передаточная функция в операторной форме (или матричная передаточная функция) для объекта, может быть представлена в виде:

Для того чтобы получить формулу 1.2.1 выразим X через p, A, B, u:

И подставим в Y:

Для вычисления резольвенты матрицы воспользуемся леммой о вычислении резольвенты:

Коэффициенты характеристического многочлена и матрицы вычисляется по рекуррентным соотношениям:

…

Для проверки правильности вычислений воспользуемся контрольным выражением:

Описанные выше шаги для нахождения передаточной функции реализуем с помощью MATLAB.

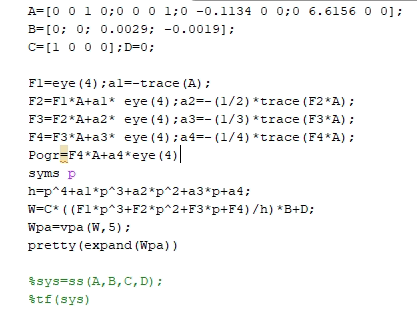


Рис. 2 Код программы в MATLAB

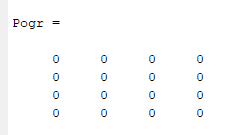


Рис. 3 – Погрешность вычисления передаточной функции непрерывной модели

Можно сделать вывод, что все вычисления выполнены верны.

После выполнения данной программы получили передаточную функцию:

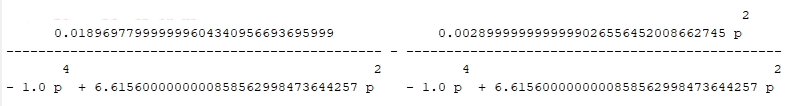


Рис. 4 Передаточная функция полученная из MATLAB.

Из ТАУ известно, что ПФ тесно связана с моделью «вход-выход»

Поэтому, сделав обратное преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, можно получить модель «вход-выход»:

Где – оператор дифференцирования по времени t

Получаем:

Итоговая модель “вход-выход”:

## Вывод эквивалентной модели в пространстве состояний из модели «вход-выход»

Перенесем все слагаемые в левую сторону из уравнения (1.1.10) и применим схему Горнера относительно p:

Для составления вектора состояния Х нужно поочередно выбрать выражения в скобках:



Выразим y, а затем подставим в значения производных

Введем вектор состояний (x), а также матрицы из (1.1.14):

## Доказательство эквивалентности моделей в пространстве состояний

Матрицы, полученные из пункта 1.3 для уравнения “вход-состояние-выход” обозначим символом ~ (.

Произведем замену , где S – неособенная квадратная матрица. В результате получим следующие соотношения

Теперь нам нужно найти такую матрицу преобразования SSS, которая сделает две системы эквивалентными, т.е. будет удовлетворять следующим условиям:

Для этого используем матрицу управляемости объекта. Поскольку управляющей является лишь первая компонента внешнего воздействия, то из элементов первого столбца матрицы B составим вектор b и построим матрицу управляемости объекта, отвечающую математической модели, определяемой соотношением:

Аналогично для модели в формуле (1.3.4):

Найдем матрицу S по формуле:

Рассчитаем погрешности вычислений:

Для расчета погрешностей выполним код в MATLAB:

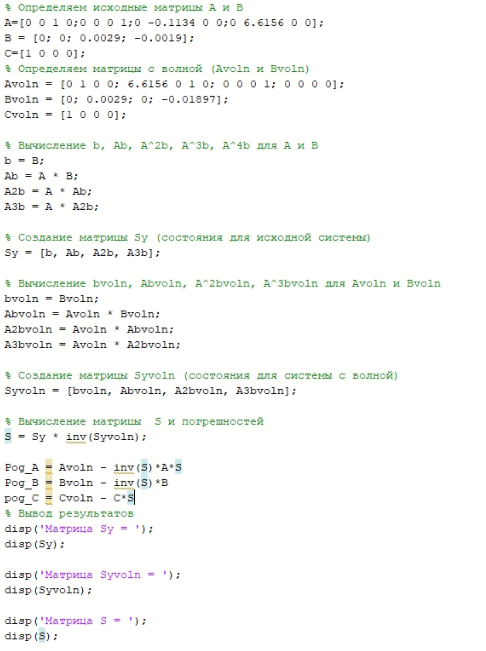
**

Рис. 5 – Код MATLAB для нахождения погрешностей вычислений

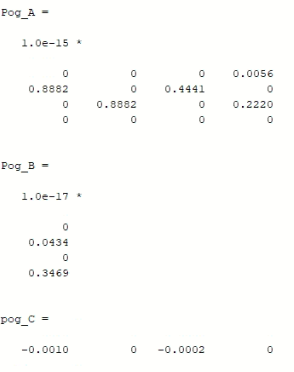


Рис. 6 – Погрешности вычислений, рассчитанные в MATLAB.

Поскольку матрицы ошибок ​ имеют незначительные значения, это говорит о том, что динамика систем в основном схожа. Однако, различие в ​ указывает на то, что при оценке выходов системы могут возникать более значительные различия.

## Получение дискретной модели в пространстве состояний

Найдем шаг дискретизации. Для этого понадобится вычислить вторую норму исходной матрицы A:

Построим модель системы в виде:

Для вычисления матриц А и В воспользуемся MATLAB.

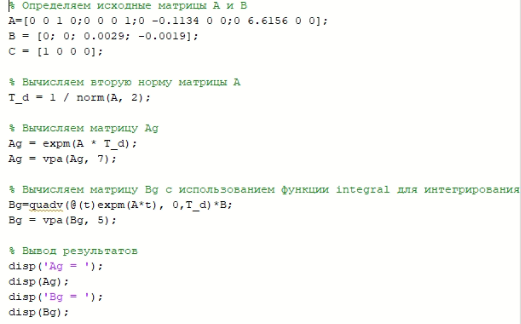


Рис. 7 – Код программы в MATLAB

Подставляем полученные матрицы в формулу (1.5.2) и получаем дискретную модель в пространстве состояний:

## Вывод дискретных передаточной функции и модели «вход-выход» из дискретной модели в пространстве состояний

Давайте теперь представим сдвиг вектора состояния в следующем виде:

Где - оператор сдвига по времени

Аналогично с непрерывной моделью:

Перепишем программу из рисунка 2 для случая с дискретной моделью пространства состояний:

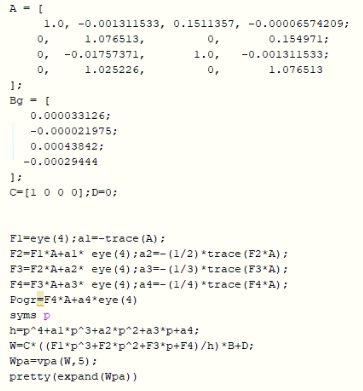


Рис. 8 – Код программы в MATLAB

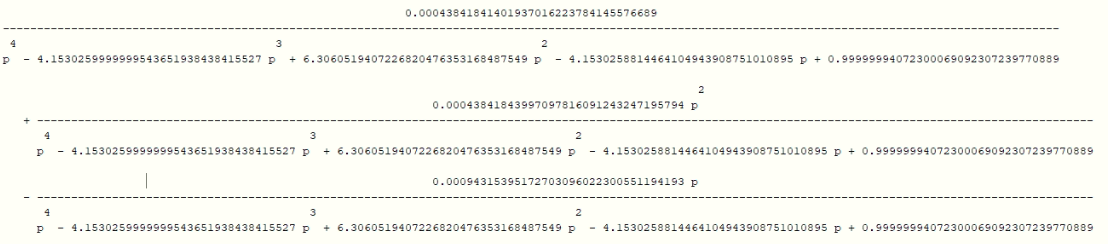


Рис. 9 – Передаточная функция дискретной модели, рассчитанная в MATLAB.

Перепишем полученную передаточную функцию:

Используя полученную передаточную функцию, получаем дискретную модель «вход-выход»:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |