Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 7 / 2 / 2

Выполнил:
студентка 101 группы
Лисицина К. А.

Преподаватель:
Кузьменкова Е. А.

Москва
2016

Содержание

Постановка задачи

- Требуется реализовать численный метод, позволяющий вычислять площадь плоской фигуры, ограниченной тремя кривыми, путём нахождения точек пересечения кривых и вычисления площади под графиками кривых на соответствующих отрезках:

- Площадь под графиком необходимо искать квадратурной формулой трапеций.

- Вершины фигуры необходимо искать методом хорд.

- Отрезок для применения метода нахождения корней должен быть вычислен аналитически.

- Требуемая точность вычисления площади $\varepsilon = 0.001$.

Математическое обоснование

Пусть искомый корень уравнения f(x) = 0 изолирован на некотором сегменте [a, b]. Предположим, что данная функция имеет на этом сегменте монотонную и непрерывную производную, сохраняющую опрееделенный знак. При этом возможны четыре случая:
1. f'(x) не убывает и положительна на [a, b],
2. f'(x) не возрастает и отрицательна на [a, b],
3. f'(x) не возрастает и положительна на [a, b],
4. f'(x) не убывает и отрицательна на [a, b].

- В 1, 2 случаях справедлива индукционная формула $x_{n+1} = x_n - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}$
- В 3, 4 случаях справедлива индукционная формула $x_{n+1} = x_n - \frac{(a-x_n)f(x_n)}{f(a)-f(x_n)}$

Причем $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, где f(c) = 0. Такая последовательность будет сходиться к корню, значит можно получить значение с какой угодно точностью.(метод хорд [1])
Заданые функции приведены ниже (рис. 1)

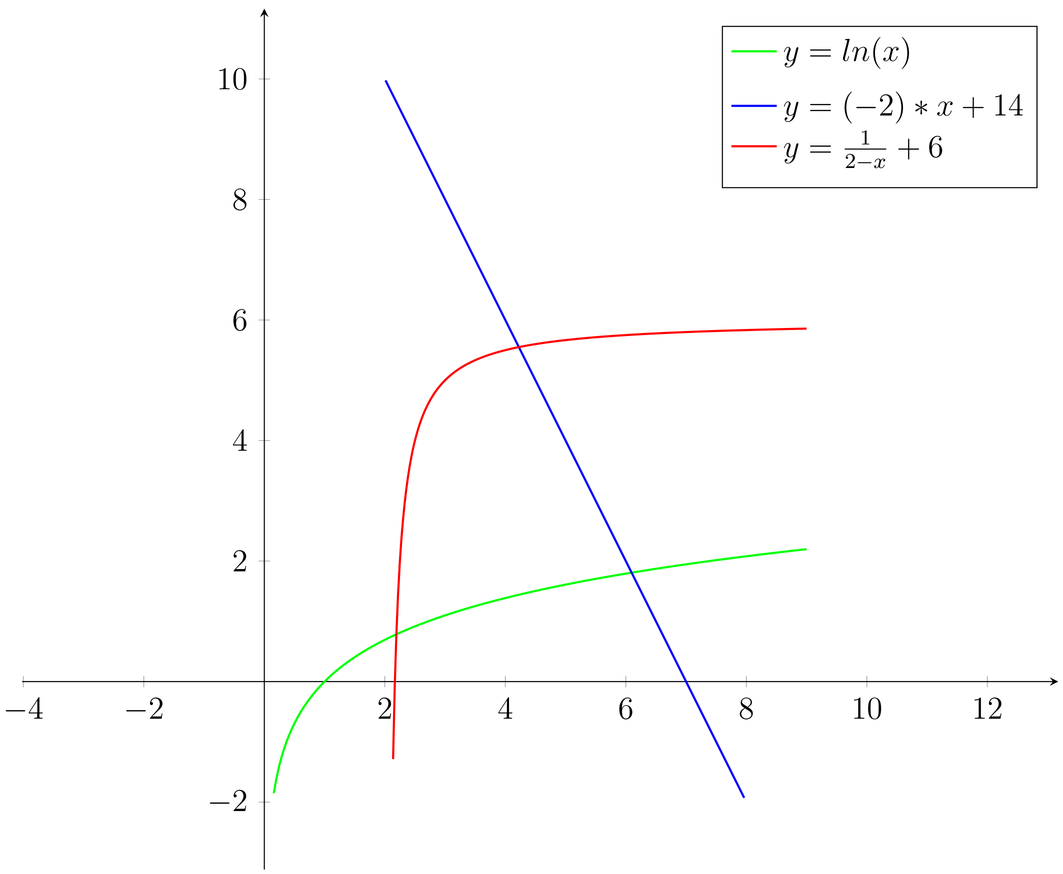

Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Выбор отрезков

- $g_{12} = f_1 - f_2$ корень ищется на отрезке [5, 8]:
  $g_{12}(5) = 1.6 - 4 < 0$, $g_{12}(8) = 2.07 - 2 < 0$
  $g'_{12}(x) = \frac{1}{x} + 2$ при $x \in [5, 8] > 0$
  $g''_{12}(x) = -\frac{1}{x^2}$ при $x \in [5, 8] < 0$
  Условия выбора отрезка выполнены.

- $g_{23} = f_2 - f_3$ корень ищется на отрезке [4, 5]:
  $g_{23}(4) = 5.5 - 6 < 0$, $g_{23}(5) = 5.7 - 4 > 0$
  $g'_{23}(x) = -2 - \frac{1}{(2-x)^2}$ при $x \in [4, 5] < 0$
  $g''_{23}(x) = \frac{4-2x}{(2-x)^4}$ при $x \in [4, 5] < 0$
  Условия выбора отрезка выполнены.

- $g_{12} = f_1 - f_3$ корень ищется на отрезке [2.1, 3]:
  $g_{13}(2.1) = 0.741 + 4 > 0$, $g_{13}(3) = 1.1 - 5 < 0$
  $g'_{13}(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{(2-x)^2}$ при $x \in [2.1, 3] < 0$
  $g''_{13}(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4-2x}{(2-x)^4}$ при $x \in [2.1, 3] < 0$
  Условия выбора отрезка выполнены.

Выбор ε_1 и ε_2.

Все значения функций на заданных отрезках не превосходят 10, значит, можно сказать, что итоговая погрешность вычисления площади под графиком $\varepsilon_{finally} \leq \varepsilon_2 + 10 * \varepsilon_1$,
значит итоговая погрешность вычисляется следующим образом
$\varepsilon = 3 * \varepsilon_{finally} = 3 * (\varepsilon_2 + 10 * \varepsilon_1) = 0.001$
ε - общая погрешность вычисления площади.
ε_1 - заданная погрешность вычисления корня.
ε_2 - заданная погрешность вычисления площади под графиком.
Отсюда, ε_1 можно взять 0.00001, а $\varepsilon_2 = 0.0001$.

Результаты экспериментов

Результаты вычислений

Все полученные значения представлеты в таблице(таблица 1)

Кривые	x	y
1 и 2	6.096	1.808
2 и 3	4.225	5.551
1 и 3	2.192	0.786

Таблица 1: Координаты точек пересечения

Графическое представление

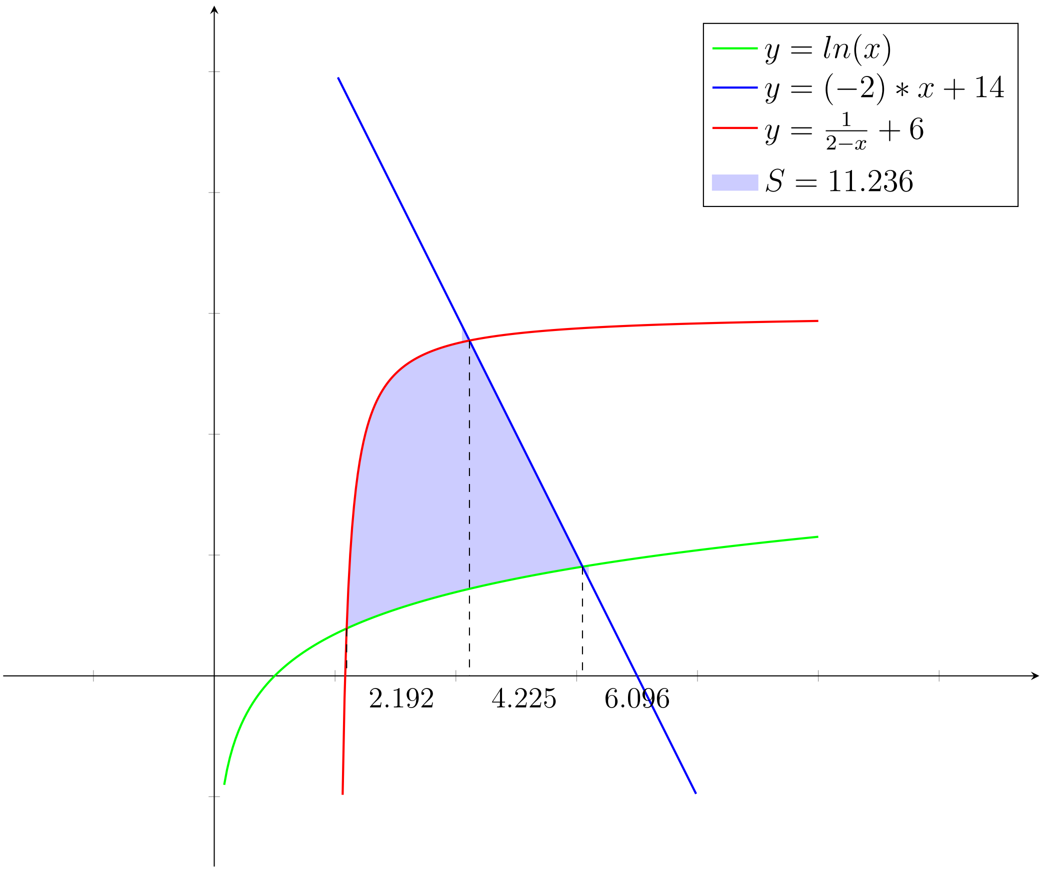

Рис. 2: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Структура программы и спецификация функций

Модуль asmintegral.asm:

- float f1(float x); возвращает значение ln(x)
- float f2(float x); возвращает значение -2*x + 14
- float f3(float x); возвращает значение 1/(2 − x)+6
- float f4(float x); возвращает значение 3/(x-4) + 4
- float f5(float x); возвращает значение 3/x

Модуль integral.c:

- float root(float(*f)(float), float(*g)(float), float a, float b, float eps1); вычисляет точку пересечения функций f и g на отрезке[a,b]с точностью eps1, используя метод хорд и производные функций f и g.
- float integral(float(*f)(float), float a, float b, float eps2); вычисляет площадь под графиком функции f на отрезке [a, b] с точностью eps2, используя метод трапеций.
- int main(int argc, char ** argv); функция main

Сборка программы (Make-файл)

Makefile

- all: integral
- asmintegral.o: asmintegral.asm
  nasm -f elf32 -o asmintegral.o asmintegral.asm
- integral: integral.o asmintegral.o
  gcc -m32 -o integral integral.o asmintegral.o
- integral.o: integral.c
  gcc -m32 -std=c11 -c -o integral.o integral.c
- clean:
  rm *.o

$$
\begin{tikzcd}
asmintegral.asm \arrow[r] & asmintegral.o \arrow[dr] & \\
integral.c \arrow[r] & integral.o \arrow[r] & integral
\end{tikzcd}
$$

Отладка программы, тестирование функций

Тестирование численных методов провидилось на тестовых функциях $f_4 = \frac{3}{x-4} + 4$ и $f_5 = \frac{3}{x}$ с использованием их производных
$f_4'(x) = -\frac{3}{(x-4)^2}$, $f_5'(x) = -\frac{3}{x^2}$,
$f_4''(x) = \frac{6}{(x-4)^3}$, $f_5''(x) = \frac{6}{x^3}$

Тесты функции root

1. float $x_4 = \mathrm{root}(f_4, f_5, 0.5, 1.02, 0.0001) = 1$; функции f_4 и f_5 пересекаются в точке с x = 1.
   $(f_4 - f_5)(0.5) = 3.14 - 6 < 0$, $(f_4 - f_5)(1.02) = 2.492 - 1.492 > 0$ $(f_4 - f_5)'(x)$ всегда < 0
   $(f_4 - f_5)''(0.5) > 0$ и $(f_4 - f_5)''(1.02) > 0$
   Условия выполнены.

2. float $x_5 = \mathrm{root}(f_4, f_5,$ 2.5, 3.5, 0.0001$) = 3$; функции f_4 и f_5 пересекаются в точке с x = 3.
   $(f_4 - f_5)(2.5) = 2 - 1.2 > 0$, $(f_4 - f_5)(3.5) = -2 - 0.8 < 0$ $(f_4 - f_5)'(x)$ всегда < 0
   $(f_4 - f_5)''(2.5) < 0$ и $(f_4 - f_5)''(3.5) < 0$
   Условия выполнены.

Тесты функции integral

1. integral(f4, x4, x5, 0.0001) = 4.704; $\int_1^3 (\frac{3}{x-4} + 4)dx = 4x + 3 * log(x-4)|_1^3 = 8 - 3 * log(3) = 4.702$

2. integral(f5, x4, x5, 0.0001) = 3.296 $\int_1^3 \frac{3}{x} dx = 3 * log(x)|_1^3 = log(27) = 3.296$

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программ на си и ассемблере имеются в сданном архиве.

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.