Задача 1

1. $A'_{ij} = \sum_{lm} \alpha_{il} \alpha_{jm} A_{lm}$

$A_{lm} = -A_{ml}$

Поменяем мнимые индексы

$A'_{ji} = \sum_{ml} (-1) \alpha_{jl} \alpha_{im} A_{lm} = \sum_{lm}$

$A'_{ij} = A'_{ji}$ в силу мнимости индексов

$n_1 = 3^2 = 9 \quad n_2 = 2^2 = 4.$

2. $T_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

$T'_{ij} = \sum_{kp} \alpha_{ik} \alpha_{jp} A_{kp} + \sum_{lm} \alpha_{il} \alpha_{jm} B_{lm}.$

(в силу мнимости индексов, по линейным свойствам суммы) $= \sum_{lm} \alpha_{il} \alpha_{jm} (A_{lm} + B$

$= \sum_{lm} \alpha_{il} \alpha_{jm} T_{lm}.$

3. $T_{ijk} = \sum_i a_i \sum_j b_j \sum_k c_k = \left| \begin{array}{l} \text{по с-вам} \\ \text{суммы} \end{array} \right| =$

$= \sum_i \sum_j \sum_k a_i b_j c_k$

4. $S_{ij} = S_{ji} \quad A_{ij} = -A_{ji}$

$\sum S_{ij} A_{ji} = -\sum S_{ji} A_{ij}$ символы мнимые

Выполняется только при 0

5. $T'_{ijj} = \sum_{lpm} \alpha_{il} \underbrace{\alpha_{jp} \alpha_{jm}}_{= \delta_{pm}} T_{lpm} =$

$= \sum_{lpm} \alpha_{il} \delta_{pm} T_{lpm} = \sum_{lp} \alpha_{il} T_{lpp} = \sum_l \alpha_{il} \sum_p T_{lpp} = a'_i$

$b_j = \sum_i T_{iji}$

$$T'_{iji} = \sum_{lpm} \overbrace{\alpha_{il}\alpha_{im}}^{=\delta_{lm}} \alpha_{jp} T_{lpm} =$$

$$= \sum_{lp} \alpha_{ip} T_{lpl} = \sum_p \alpha_{ip} \sum_l T_{lpl} = b'_j$$

$c_k = \sum_j T_{jjk}$

$$T'_{jjk} = \sum_{lpm} \overbrace{\alpha_{jl}\alpha_{jp}}^{=\delta_{lp}} \alpha_{km} T_{lpm} =$$

$$= \sum_{lm} \alpha_{km} T_{llm} = \sum_m \alpha_{km} \sum_l T_{llm} =$$

$$= c'_k$$

6. $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)$$

$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$, при $i = j$ $\varepsilon_{ij} = 0$

7. Пусть размерность пространства n.
Т.к. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, то в тензоре второго ранга происходит суммирование диагональных элементов $(i=j)$, которые равны 1

$$c = \sum_i \delta_{ii} = n.$$

$S'_{ij} = \sum_{lp} \alpha_{il}\alpha_{jp} \sum_k Q_{lk} D_{kp} = \sum_{lpk} \alpha_{il}\alpha_{jp} Q_{lp}$.

$\cdot Q_{pk}$ При переходе в другую СК Q'_{ij}

тензор Q_{ik} изменяется по законам тензоров

Задача 2.

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$T_{ji} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$ По с-вам дифферен-цирования гладкой функции

$T_{ij} = T_{ji}$

Задача 3.

$\varepsilon_{12} = 1 \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$

$\varepsilon_{21} = -1$ $\Rightarrow \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\varepsilon'_{lm} = \sum_{ij} \alpha_{li}\alpha_{mj}\varepsilon_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} \\ \varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \\ -\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \end{pmatrix}$$

Докажем, что площадь параллелограмма

1 $i = j = 1$ 2 $i = 1\ j = 2$ 3. $i = 2\ j = 1$ 4

$0 \cdot a_x \cdot b_x = 0$ $\quad \underbrace{a_x b_y \quad\quad -a_y b_x}$ $\quad 0$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = \underbrace{a_x b_y - a_y b_x}$$ – площадь

Задача 4.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \sum_{i,j} \varepsilon_{ij} a_{1i} a_{2j}$$

При $i=1$ $j=1$

0

При $i=1$ $j=2$

$a_{11} \cdot a_{22}$

При $i=2$ $j=1$

$-a_{12} \cdot a_{21}$

При $i=2$ $j=2$

0

$$\det A = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Задача 5.

Пусть размерность пространства n.

$\sum_{i} \delta_{ii} = n.$ т.к $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$

$\sum_{i} \delta_{ij} A_{jm} = \sum_{l} A_{ll}$

$\sum_{ij} \delta_{ij} \delta_{ij} = n.$