Д/З.

① Задание 1

1 $A'_{ij} = \sum_{em} \alpha_{ie} \alpha_{jm} A_{em}$ = (поменяем немые индексы местами)

$= \sum_{me} \alpha_{im} \alpha_{je} A_{me}$ = (т.к. $A_{ij} = -A_{ji}$) =

$= -\sum_{me} \alpha_{im} \alpha_{je} A_{em}$

$A'_{ji} = \sum_{em} \alpha_{je} \alpha_{im} A_{em}$

$\Rightarrow A'_{ij} = -A_{ji}$

Независимых компонент в пространстве

– размерностью 2 : $2^2 = 4$

– размерностью 3 : $3^2 = 9$

2 Док-ть: $T_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

т.к. A_{ij} и B_{ij} – тензоры 2-ого ранга, то

$A'_{ij} = \sum_{em} \alpha_{ie} \alpha_{jm} A_{em}$

$B'_{ij} = \sum_{em} \alpha_{ie} \alpha_{jm} B_{em}$

$T'_{ij} = A'_{ij} + B'_{ij} = \sum_{em} \alpha_{ie} \alpha_{jm} A_{em} + \sum_{em} \alpha_{ie} \alpha_{jm} B_{em}$

$= \sum_{em} \alpha_{ie} \alpha_{jm} (A_{em} + B_{em}) = \sum_{em} \alpha_{ie} \alpha_{jm} T_{em}$

$\Rightarrow T_{ij}$ – тензор – 2-ого ранга

3 $a'_i = \sum_{e} \alpha_{ie} a_e$

$b'_j = \sum_{m} \alpha_{jm} b_m$

$c'_k = \sum_{p} \alpha_{kp} c_p$

$T_{ijk} = a_i b_j c_k$

$T'_{ijk} = a'_i b'_j c'_k = \sum_l \alpha_{il} a_l \sum_m \alpha_{jm} b_m \sum_p \alpha_{kp} c_p$

$= \sum_{lmp} \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kp} a_l \cdot b_m \cdot c_p =$

$= \sum_{lmp} \alpha_{il} \alpha_{jm} \alpha_{kp} \cdot T_{lmp}$

$\Rightarrow T_{ijk}$ – тензор 3-его ранга

4. Док-ть $S_{ij} A_{ij} = 0$ где $S_{ij} = S_{ji}$, $A_{ij} = -A_{ji}$

$S_{ij} A_{ij} = S_{ij}(-A_{ji}) = -S_{ij} A_{ji} = -S_{ji} A_{ji} = -S_{ij} A_{ij}$

такое тождество может быть, если $S_{ij} A_{ij} = 0$

5. см на 5 странице решения

6. $a(r) = a(x_1 x_2 x_3)$

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)$

$\varepsilon_{ji} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_i}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_i} - \frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right)$

$\Rightarrow \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$ – антисиммет. тензор 2-ого ранга

7. $C = \sum \delta_{ii}$

пусть размерность пространства n

т.к. $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ то в тензоре 2-ого ранга происходит суммирование только диагональных элементов, которые равны единице, поэтому получим

$C = \sum_i \delta_{ii} = n$

n – размерность пространства

8. см на 6 стр. решение

② Задание 2

- $T_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

$T_{ji} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ т.к

$\Rightarrow T_{ij} = T_{ji}$

③ Задание 3

- $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$, т.к размерность пространства 2 то имеем тензор 2×2

т.к $\varepsilon_{12} = 1$, то $\varepsilon_{21} = -1$, а $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, т.к антисимметр. тензор, получим

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ условий достаточно для определения всех компонентов

- повернем систему на угол φ

$\varepsilon'_{lm} = \sum_{ij} \alpha_{li} \alpha_{mj} \varepsilon_{ij}$

получим

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} \\ \varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin 2\varphi & \cos 2\varphi \\ -\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \end{pmatrix}$$

- Док-ть $\sum_{ij} \varepsilon_{ij} a_i b_j = S$

$$\sum_{ij} \varepsilon_{ij} a_i b_j = \left(\begin{matrix} \text{при } i = j \;\; \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0 \\ \Rightarrow \varepsilon_{11} a_1 b_1 = 0 \\ \varepsilon_{22} a_2 b_2 = 0 \end{matrix} \right)$$

$$= \varepsilon_{12} a_1 b_2 + \varepsilon_{21} a_2 b_1 = \left(\begin{matrix} \text{т.к } \varepsilon_{12} = 1, \\ \text{а } \varepsilon_{21} = -1 \end{matrix} \right)$$

$$= a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = S$$

4) Задача 4.

$a_{ij} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Док-ть:

$\det A = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} a_{1i} a_{2j}$, т.к. $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$

то $\sum_{ij} \varepsilon_{ij} a_{1i} a_{2j} = \varepsilon_{12} a_{11} a_{22} + \varepsilon_{21} a_{12} a_{21}$

(подставим $\varepsilon_{12} = 1$, $\varepsilon_{21} = -1$)

$\Rightarrow \sum_{ij} \varepsilon_{ij} a_{1i} a_{2j} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$.

5) Задача 5.

- $\sum_{l} \delta_{il} \delta_{lk}$, т.к. $\delta_{il} = \begin{cases} 1, & i = l \\ 0, & i \neq l \end{cases}$

то ненулевые элементы у нас будут только при $i = k = l$

$\Rightarrow \sum_{l} \delta_{il} \delta_{lk} = \delta_{11}\delta_{11} + \delta_{22}\delta_{22} + \dots + \delta_{ll}\delta_{ll}$

$\Rightarrow$ значит мы получим единичную матрицу

$\sum_{l} \delta_{il} \delta_{lk} = n$, где n - размерность пространства

- $\sum_{l} \delta_{ij} A_{jm}$, т.к. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

то $\sum_{l} \delta_{ij} A_{jm}$ - равно сумме диагональных элементов A_{jm}

- $\sum_{ij} \delta_{ij} \delta_{ij} = \sum_{i} \delta_{ii} =$ (как доказывали ранее)

$\sum_{i} \delta_{ii} = n$, где n - размерность пространства

5 пункт из 1 задания

• T_{ijk} – тензор 3^{его} ранга

1) док-ть $\sum_j T_{ijj} = a_i$

$$\underline{\sum_j T'_{ijj}} = \sum_{epm} \alpha_{ie} \overset{\delta_{pm}}{\alpha_{jp} \alpha_{jm}} T_{epm} = \sum_{epm} \alpha_{ie} \delta_{pm} T_{epm}$$

$$= \sum_{ep} \alpha_{ie} T_{epp} = \underline{\sum_e \alpha_{ie} \sum_p T_{epp}}$$

$\Rightarrow \sum_p T_{epp}$ – это вектор и мы можем записать

$$a_i = \sum_j T_{ijj}$$

док-ть:

2) $b_j = \sum_i T_{iji}$

$$\underline{\sum_j T'_{iji}} = \sum_{epm} \overset{\delta_{em}}{\alpha_{ie} \alpha_{jp} \alpha_{im}} T_{epm} = \sum_{epm} \alpha_{jp} \delta_{em} T_{epm} =$$

$$= \sum_{ep} \alpha_{jp} T_{epe} = \underline{\sum_p \alpha_{jp} \sum_e T_{epe}}$$

$\Rightarrow \sum_e T_{epe}$ – это вектор

$\Rightarrow \sum_e T_{epe} = b_p$ или $b_j = \sum_i T_{iji}$

док-ть:

3) $C_k = \sum_j T_{jjk}$

$$\underline{\sum_j T'_{jjk}} = \sum_{epm} \overset{\delta_{ep}}{\alpha_{je} \alpha_{jp}} \alpha_{km} T_{epm} = \sum_{epm} \delta_{ep} \alpha_{km} T_{epm} =$$

$$= \sum_{em} \alpha_{km} T_{eem} = \underline{\sum_m \alpha_{km} \sum_e T_{eem}}$$

$\sum T_{jjk}$ – вектор

$\Rightarrow \sum_j T'_{jjk} = C_k$

• 8 пункт из 1 задание

$S_{ij} = \sum_k Q_{ik} D_{kj}$ док-ть, что Q_{ik} - тензор 2-го ранга

$S_{ij} = S_{ikkj} = \sum_k Q_{ik} D_{kj}$

$S'_{ikkj} = \sum_{epnm} \alpha_{il} \alpha_{kp} \alpha_{kn} \alpha_{jm} S_{epnm} =$

$= \sum_{epnm} \alpha_{il} \alpha_{kp} \alpha_{kn} \alpha_{jm} Q_{en} D_{pm}$

с другой стороны

$S'_{ikkj} = Q'_{ik} D'_{kj} = Q_{ik} \sum_{pm} \alpha_{kp} \alpha_{jm} D_{pm}$

$\Rightarrow \sum_{epnm} \alpha_{il} \alpha_{kp} \alpha_{kn} \alpha_{jm} Q_{en} D_{pm} = \underbrace{\sum_{pm} \alpha_{kp} \alpha_{jm} D_{pm}}\, \underline{\underline{\sum_{en} \alpha_{il} \alpha_{kn} Q_{en}}}$

$= \underline{\underline{Q'_{ik}}} \underbrace{\sum_{pm} \alpha_{kp} \alpha_{jm} D_{pm}}$

$\Rightarrow Q'_{ik} = \sum_{en} \alpha_{il} \alpha_{kn} Q_{en}$

$\Rightarrow Q_{ik}$ - тензор $2^{ого}$ ранга