Date 06.02.2022

① Известно, что ген. совокуп-ть распр. норм. со ср. кв. откл. = 16. Найти доверительный интервал для оценки мат. ожидания $a$ с надежностью 0,95, если выборочная средняя $M = 80$, а объем выборки $n = 256$.

$\sigma = 16$
$M(x) = a$
$P = 0,95$
$x_в = 80$
$n = 256$

Уже был вып. анализ ген. совокупности => критерий оценки К будет критерий Фишера Z (из табл. распределений Лапласа $Z < 0$)

Ген совокуп-ть распред. нормально и задача на доверительный интервал => можем от критерия $\alpha$ перейти к $\alpha/2$.

$\alpha = 1 - P = 1 - 0,95 = 0,05$

$\alpha/2 = \frac{0,05}{2} = 0,025$

Т.к. был вып. анализ ген. совокупности => стд. ошибка ср. = $\sigma/n$, где $\sigma$ взято из ген. совокупности.

$Z(P_z = 0,025) = -1,96$

Находим доверит. инт. по ф-ле:

$$\left[\bar{x}_в \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \Rightarrow \left[80 \pm 1,96 \cdot \frac{16}{\sqrt{256}}\right] \Rightarrow [80-1,96; 80+1,96]$$

<u>Вывод</u>: [78,04; 81,90] – этот интервал с вероятностью 95% покрывает истинное мат. ожидание $M(x) = a$ генеральной совокупности.

② В рез-те 10 независимых изм. некоторой величины X, вып. с одинаковой точностью, получены опытные данные: 6,9, 6,1, 6,2, 6,8, 7,5, 6,3, 6,4, 6,9, 6,7, 6,1. Предполагая, что рез-ты изм. подчинены норм. закону распред. вероятностей, оценить истинное значение величины X при помощи доверительного интервала, покрывающего это знач. с доверительной вероятностью 0,95.

Не известно $\sigma$ => не было анализа ген. совокупности. => критерий Стьюдента $t$ из табл. Стьюдента.

Тогда ср. ошибка $= \frac{S}{\sqrt{n}}$, где S - это корень из дисперсии по выборке $S = \sqrt{D_{\text{в}}(x)}$

$\sqrt{D_{\text{в}}(x)}$ - несмещенная оценка дисперсии.

Испытания проводились с одинаковой точностью => => ген. совокупность распред. нормально => переходим от $\alpha$ к $\alpha/2$

$P = 0,95 \Rightarrow \alpha = 1 - P = 1 - 0,95 = 0,05$

$\alpha/2 = \frac{0,05}{2} = 0,025$

Находим ср. величину по выборке $\bar{x}_{\text{в}}$:

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{6,9+6,1+6,2+6,8+7,5+6,3+6,4+6,9+6,7+6,1}{10} = 6,59$$

Находим несмещенную оценку дисперсии:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 = \frac{0,0961+0,2401+0,1521+0,0441+0,8281+0,0841+0,0361+\ldots}{9}$$

$= 0,2032$

$S = \sqrt{0,2032} = 0,4508$

Критерий Стьюдента $t = t_{\alpha/2} = 2,262$

Находим доверительный интервал по ф-ле:

$$\left[\bar{x}_{\text{в}} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right] \Rightarrow \left[6,59 \pm 2,262 \cdot \frac{0,4508}{\sqrt{10}}\right] \Rightarrow \left[6,59 - 0,3225; 6,59 + 0,3225\right]$$

Вывод: этот интервал покрывает истинное значение X с доверительной вероятностью 95% - [6,2675; 6,9125]

(3) Утверждается, что шарики для подшипников, изготовленные автоматич. станком, имеют средний диаметр 17 мм. Используя односторонний критерий с $\alpha = 0,05$, проверить эту гипотезу, если в выборке из $n = 100$ шариков средн. диаметр оказался равным 17,5 мм, а дисперсия известна и равна 4 кв. мм

Date

$\mu_0 = 17$
$\mu = 17,5$
$n = 100$
$\alpha = 0,05$
$D = 4$

Гипотеза:

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu > \mu_0$

Известна дисперсия => был анализ ген. совокупности.

$\sigma = \sqrt{D(x)} = \sqrt{4} = 2$

Стд. ошибка среднего $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Так как был анализ ген. совокупности, то критерием оценки будет критерий Фишера $Z$ по табл. для $Z > 0$

Найдем $Z_{табл}$ и $Z_{расч}$.

$Z_{табл} = Z(1-\alpha) = Z(1-0,05) = Z(P=0,95) = 1,65$

$$Z_{расч} = \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{17,5-17}{\frac{2}{10}} = \frac{5}{2} = 2,5$$

$Z_{расч} > Z_{табл}$

Вывод: отвергаем гипотезу $H_0$, гипотеза $H_1$ на уровне значимости 5% верна и $\mu = 17,5$.

4 Продавец утверждает, что ср. вес пачки печенья сост. 200 г. Из партии извлечена выборка из 10 пачек. Вес каждой пачки сост. 202, 203, 199, 197, 195, 201, 200, 204, 194, 190. Известно, что ср. веса распределены нормально. Верно ли утверждение продавца, если учитывать, что доверительная вероятность равна 99%?

$n = 10$
$\alpha = 1\%$
$P = 0,99$
$\mu_0 = 200$
$\mu = \bar{x}_B$

Date

Гипотеза:

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

Неизвестно $\delta$ => не было анализа ген. совокуп-ти.
=> критерий Стьюдента $t$.

Стд. ошибка среднего = $\frac{s}{\sqrt{n}}$, где $s$ - среднеквадратичное откл. от несмещенной оценки дисперсии выборки.

Находим ср. величину по выборке $\bar{x}_в$

$$\bar{x}_в = \frac{202+203+199+197+195+201+200+204+194+190}{10} = 198,5$$

Находим несмещён. оценку дисперсии:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_в)^2 = \frac{(202-198,5)^2+(203-198,5)^2+(199-198,5)^2+\dots}{9}$$

$$= \frac{12,25+20,25+0,25+2,25+12,25+6,25+2,25+30,25+20,25+72,25}{9} =$$

$$= \frac{178,5}{9} = 19,83$$

$$S = \sqrt{19,83} = 4,4535$$

Найдем $t_{табл}$ и $t_{расч}$.

$t_{табл}$: $k = n-1 = 10-1 = 9$

$p = 1-\alpha = 1-0,01 = 0,99 \Rightarrow t_{табл} = 2,821$

$t_{расч}$:

$$t_{расч} = \frac{|\mu-\mu_0|}{\frac{\delta}{\sqrt{n}}} = \frac{|198,5-200|}{\frac{4,4535}{\sqrt{10}}} = \frac{1,5\cdot\sqrt{10}}{4,4535} = \frac{4,4734}{4,4535} = 1,065$$

$t_{расч} < t_{табл}$

Вывод: принимаем гипотезу $H_0$, согласно которой $\mu = 200$ на уровне значимости 99%