Теоретические задачи

К задачам этой части нужно написать развернутое решение и сдать его (набранное в редакторе Word, в формате pdf или в виде текстового файла) в системе регистрации.

Первые две задачи совпадают с задачами теоретического теста. В системе регистрации нужно ввести ответы на эти задачи, а в качестве решения теоретических задач прислать развернутые объяснения.

T1. Параллели (для всех параллелей)

Четыре преподавателя ЛКШ сказали такие утверждения:

1. Любой школьник из параллели A умнее какого-нибудь школьника из параллели P.
2. Есть школьник в параллели A, который умнее некоторых школьников из параллели P.
3. Любой школьник из параллели A умнее любого школьника из параллели P.
4. Есть школьник в параллели A, который умнее любого школьника из параллели P.

После этого двое преподавателей сказали, что пошутили (то есть их утверждения ложны), а двое подтвердили, что их утверждения верны. Для каждого утверждения скажите, верно оно, неверно, или это нельзя установить из условия задачи.

T2. Театр (для всех параллелей)

В зимней смене ЛКШ школьники два раза ходили в театр. Оказалось, что оба раза девочек было меньше, чем $\frac{2}{5}$ общего количества школьников, пошедших в театр. И известно, что все школьники хотя бы раз сходили в театр. Какие из следующих утверждений точно верны?

1. Девочек в ЛКШ меньше, чем мальчиков.
2. Девочек в ЛКШ не больше 90%.
3. Девочек в ЛКШ не больше 60%.
4. Девочек в ЛКШ не больше 30%.
5. Девочек в ЛКШ не меньше 90%.
6. Девочек в ЛКШ не меньше 60%.
7. Девочек в ЛКШ не меньше 30%.
8. Хотя бы один мальчик ходил в театр дважды

T3. Функция (B', B)

Функция $f(n)$ задана соотношением $f(1) = 1$, $f(n) = 2f(\lfloor n/2 \rfloor) + 10n + 1$ при $n > 1$. Докажите, что существует константа c, такая что $f(n) \le cn \log_2 n$ для всех целых $n > 1$.

T4. Два пути (B, A', A, AY, AA, AS)

Рассмотрим связный неориентированный граф, содержащий хотя бы три вершины. Найдем в нем два самых длинных простых пути. Докажите, что они имеют общую вершину.

Путем в графе называется последовательность вершин, последовательно соединенных ребрами; *длиной* пути называется количество вершин в нем. Путь называется *простым*, если никакую вершину он не посещает более одного раза.

Т5. Много делителей (B, A', A, AY, AA, AS)

Пусть $d(n)$ — количество различных делителей числа n; например, $d(4) = 3$, $d(30) = 8$. Определите, для какого минимального натурального числа n:

а) (B) $d(n) = 2^{10}$.

б) (A', A, AY, AA, AS) $d(n) = 2^{1000}$.

В этой задаче полное доказательство приводить не требуется, достаточно верного ответа. Если сам ответ слишком велик, можно привести только его разложение на простые множители.

Т6. НОД и очередь (A', A, AY, AA, AS)

Опишите структуру данных, поддерживающую следующие операции со списком:

- добавить число в конец списка;
- удалить число из начала списка;
- вывести НОД всех чисел списка на текущий момент.

Придумайте как можно более эффективное решение, оцените временную сложность всех операций и затраты памяти.

Т7. Четыре бита (A', A, AY, AA, AS)

Петя хочет передать Маше сообщение из четырех битов (символов 0 или 1). Он знает, что хулиган Вася может испортить сообщение, изменив в нем не более одного символа не противоположный (но может не менять ни одного). Для надежности Петя может использовать в записке больше четырех битов. Какого минимального числа битов в записке достаточно, чтобы Маша всегда смогла однозначно расшифровать исходное сообщение?

Считайте, что Петя и Маша могут заранее договориться о способе шифрования/расшифровки сообщения. Если Вася меняет какой-то символ, ни Петя, ни Маша не могут узнать, какой символ он поменял, и менял ли он какой-либо символ вообще.