

Теория вероятностей:
лекция 4

24 мая 2021

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Задачи:

1. При $\lambda > 0$ определим плотность f так:

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda u}, & \text{если } u \geq 0, \\ \frac{1}{2} \lambda e^{+\lambda u}, & \text{если } u < 0. \end{cases}$$

Такая функция f называется двусторонней экспоненциальной: пусть величина X имеет плотность f . Найдите плотность случайной величины $|X|$. [Указание. Вычислите сначала функцию распределения.]

Решение:

Обозначим $Y \sim |X|$. Посчитаем сначала функцию распределения для X :

$$F_X(x|x < 0) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda x} dx = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^x e^{\lambda x} dx = \frac{\lambda}{2\lambda} e^{\lambda x} \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{2} e^{\lambda x}$$

Заметим, что $\int_{-\infty}^0 f(u) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda x} dx = \frac{1}{2}$. Для $x \geq 0 \rightarrow \int_{-\infty}^x f(u) dx = \int_{-\infty}^0 f(u) dx + \int_0^x f(u) dx = \frac{1}{2} + \int_0^x f(u) dx =$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^x \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} \int_0^x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2} - \left[\frac{\lambda}{2\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^x \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x}$$

У полученной функции $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$. Распишем, что нам нужно найти:

$$F_Y(x) = P(|X| < x) = P(x < X < x) = F_X(x) - F_X(-x) = 1 - F_X(-x) - F_X(-x) = 1 - 2F_X(-x)$$

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = -F'_X(-x) = 2f_X(-x) = \lambda e^{(-\lambda x)}$$

Действительно, это функция плотности, так как ее интеграл от $-\infty$ до ∞ равен 1. $\int_0^\infty \lambda e^{(-\lambda x)} dx = 1$ Ниже 0 плотность вероятности 0 так как модуль числа не отрицательный.

Ответ: $f_{|X|}(x) = \begin{cases} \lambda e^{(-\lambda x)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

2. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Пусть X - число промахов. Построить таблицу и функцию распределения.

Решение:

Опишем расчет вероятностей:

$P(X = 0) = 1 - 0.7 = 0.3$ - мы с 1 выстрела попали

$P(X = 1) = 0.7(1 - 0.7) = 0.21$ - мы с 1 выстрела не попали, но попали со 2

$P(X = 2) = 0.7^2(1 - 0.7) = 0.147$ - мы с 1 и 2 выстрела не попали, но попали с 3

$P(X = 3) = 0.7^3(1 - 0.7) = 0.1029$ - мы с 1 и 2 и 3 выстрела не попали, но попали с 4

$P(X = 4) = 0.7^4 = 0.2401$ - мы не попали 4 раза

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$, запишем найденные вероятности в таблицу, построим функцию распределения, описывая $P(X \leq x)$

Ответ:

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0,3	0,21	0,147	0,1029	0,2401
$F(X)$	0,3	0,51	0,657	0,7599	1

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 0.3, & 0 \leq x < 1; \\ 0.51, & 1 \leq x < 2; \\ 0.657, & 2 \leq x < 3; \\ 0.7599, & 3 \leq x < 4; \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

3. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Докажите, что случайная величина:

$$Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$$

имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$. Этот факт может использоваться для генерации экспоненциального распределения с помощью равномерного: чтобы сгенерировать экспоненциальную случайную величину можно сгенерировать равномерно распределенную на $[0, 1]$ случайную величину и применить к ней выше приведенное преобразование.

Решение:

Распишем, чем будет функция распределения для случайной величины Y :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P\left(-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X) < x\right) = P(\ln(1 - X) > -\lambda x) = P(1 - X > e^{-\lambda x}) = P(-X > -1 + e^{-\lambda x}) = \\ &= P(X > 1 - e^{-\lambda x}) \end{aligned}$$

Тут $1 - e^{-\lambda x} = F_{exp}(x) \in [0, 1]$ и при этом $F_Y(0) = 0$; $F_Y(\infty) = 1$ и функция $F_Y(x)$ монотонна возрастающая. $F_Y(x)$ удовлетворяет требованиям к функции распределения и имеет форму как у экспоненциального распределения.

4. Случайные приращения цен акций двух компаний за день X и Y имеют совместное распределение, заданное таблицей:

X/Y	-1	+1
-1	0,3	0,2
+1	0,1	0,4

Найти коэффициент корреляции.

Решение:

Для удобства расчета, дополнительно запишем в таблицу вероятности $p(XY)$, $p(X)$, $p(Y)$ и значения X^2 , Y^2 :

Значение	$p(XY)$	$p(X)$	$p(Y)$	$X^2; Y^2$
-1	0,3	0,5	0,4	1
+1	0,7	0,5	0,6	1

$$E(X) = -1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0$$

$$E(Y) = -1 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 0.2$$

$E(XY) = -1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.7 = 0.4$. Вероятности для XY найдены из суммирования вероятностей тех исходов, которые дают произведения -1 и $+1$

$$E(X^2) = 1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 1$$

$$E(Y^2) = 1 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 1$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1 - 0 = 1$$

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1 - 0.04 = 0.96$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.4 - 0 \cdot 0.2 = 0.4$$

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{0.4}{\sqrt{1 \cdot 0.96}} \approx 0.40825$$

Ответ: Корреляция акций: $Corr(X, Y) \approx 0.40825$

5. Симметричная игральная кость имеет две зеленые, две красные и две белые стороны. Ее подбрасывают один раз. Пусть $X = 1$, если зеленая сторона сверху и 0 иначе. А $Y=1$, если красная сторона сверху и 0 иначе. Найдите ковариацию и корреляцию этих случайных величин

Решение:

Для удобства расчета, дополнительно запишем в таблицу вероятности $p(X), p(Y)$ и значения X^2, Y^2, X, Y :

Грань	Вероятность	$X; X^2$	$Y; Y^2$
зеленый	1/3	1	0
красный	1/3	0	1
белый	1/3	0	0

Вероятности выпадения X и Y равны, как и их значения, следовательно: $E(X) = E(Y) = 1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 2/3 = 1/3$

$$XY = 0 \Rightarrow E(XY) = 0$$

$$E(X^2) = E(Y^2) = 1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 2/3 = 1/3$$

$$D(X) = D(Y) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}$$

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{-\frac{1}{9}}{\sqrt{\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9}}} = -\frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}} = -0.5$$

Ответ: $Cov(X, Y) = -\frac{1}{9} \approx -0.11$; $Corr(X, Y) = -0.5$

6. Найдите коэф. Ковариации и корреляции для двух независимых случайных величин $X \sim Exp(3)$ и $X \sim Exp(12)$

Решение:

Для удобства, обозначим вторую экспоненциальную случайную величину, как $Y \sim Exp(12)$. Так как по условию, 2 величины независимы $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$, так как эти 2 величины не зависимы и их вероятности функция плотности совместного

распределения их произведения равна произведению функций плотности распределения X и Y . ($g(XY) = f_X(X) \cdot g_Y(Y)$)

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

Так как их ковариация равна 0, то разделив ее на $\sqrt{D(X)D(Y)}$, мы также получим также $0 \Rightarrow Corr(X, Y) = 0$

Ответ: $Cov(X, Y) = 0; Corr(X, Y) = 0$