Линейная алгебра: лекция 1

7 марта 2021

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Задачи

1. Решите систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6x + 12y + 5z + t = -6 \\ 9x + 18y + 17z - 8t = -9 \\ 5x + 10y + 4z + t = -5 \end{cases}$$

Решение:
Запишем в виде матрицы $Ax = b$
$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 12 & 5 & 1 & -6 \\ 9 & 18 & 17 & -8 & -9 \\ 5 & 10 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right)$ $\rightarrow$ вычтем I - III $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 9 & 18 & 17 & -8 & -9 \\ 5 & 10 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right)$ $\rightarrow$ вычтем II - 9(I) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 0 \\ 5 & 10 & 4 & 1 & -5 \end{array}\right)$ $\rightarrow$ вычтем III - 5(I) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\rightarrow$ вычтем II - 8(III) и поменяем II и III местами $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Получаем что y, t - зависимые переменные. Запишем полученную систему уравнение и найдем ответ через y, t

$$\begin{cases} z = t \\ x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = t \\ x = -1 - 2y - t \\ y, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} z = t \\ x = -1 - 2y - t \\ y, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

2. Найдите многочлен $f(x)$ третьей степени, для которого

$$f(1) = 1,\ f(-1) = 13,\ f(2) = 7,\ f(-3) = 17.$$

Решение:
Многочлен $f(x)$ будет иметь следующий вид: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ решим систему уравнений, где $x^3, x^2, x, 1$ это коэффициенты, а a, b, c, d - переменные. Запишем это в матричном виде. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 13 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 7 \\ -27 & 9 & -3 & 1 & 17 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ прибавим I к II, вычтем 8I из III и прибавим 27 I к IV, чтобы получить только 1 единицу в первой колонке $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 36 & 24 & 28 & 44 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ прибавим 2II к III и -18II к IV $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -6 & -3 & 27 \\ 0 & 0 & 24 & -8 & -208 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$

разделим II на 2,III на -3 и IV на 2 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 12 & -4 & -104 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ вычтем из IV 6 III $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -50 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ разделим IV на -10 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ вычтем IV из I, II, III $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ поделим III на 2 $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ вычтем из I сначала II а потом III $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$ $\Rightarrow$ мы нашли ответ $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -7 \\ d = 5 \end{cases}$.

Ответ: вид многочлена $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 5$

3. Выполните действия:

$$(2A)^2 - 3((BA)^T - E)^2,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Решим задачу по частям.

$C = (2A)^2 = 4AA = 4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 8 \\ -12 & -24 \end{pmatrix}$

$D = BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

$F = (BA)^T = (D)^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$G = (BA)^T - E = F - E = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$H = ((BA)^T - E)^2 = GG = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

$I = 3((BA)^T - E)^2 = 3H = 3\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

$(2A)^2 - 3((BA)^T - E)^2 = C - I = \begin{pmatrix} -20 & 8 \\ -12 & -24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & 23 \\ -12 & -51 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} -32 & 23 \\ -12 & -51 \end{pmatrix}$

4. Найдите все матрицы, коммутирующие с матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение:

Обозначим матрицу $X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. нам нужно найти $Y : XY - YX = 0$. Запишем $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Раскроем равенство, которое нам нужно

$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}3c-a & 3d-b\\ 2a+5c & 2b+5d\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2b-a & 3a+5b\\ 2d-c & 3c+5d\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}3c-2b & -3a-6b+3d\\ 2a+6c-2d & 2b-3c\end{pmatrix}=0$$

Нам требуется одновременно выполнение равенства нулю каждой из ячеек.

$$\begin{cases}3c-2b=0\\ -3a-6b+3d=0\\ 2a+6c-2d=0\\ 2b-3c=0\end{cases}$$

Запишем это в матричной форме для решения относительно переменных a, b, c, d

$\left(\begin{array}{cccc|c}0 & -2 & 3 & 0 & 0\\ -3 & -6 & 0 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 6 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0\end{array}\right)$ $\Rightarrow$ сложим II и III $\left(\begin{array}{cccc|c}0 & -2 & 3 & 0 & 0\\ -1 & -6 & 6 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 6 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0\end{array}\right)$ $\Rightarrow$ умножим II на 2 и прибавим к III $\left(\begin{array}{cccc|c}0 & -2 & 3 & 0 & 0\\ -1 & -6 & 6 & 1 & 0\\ 0 & -12 & 18 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0\end{array}\right)$ $\Rightarrow$ умножим I на 3 и вычтем из II $\left(\begin{array}{cccc|c}0 & -2 & 3 & 0 & 0\\ -1 & 0 & -3 & 1 & 0\\ 0 & -12 & 18 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0\end{array}\right)$ $\Rightarrow \begin{cases}3c-2b=0\\ a+3c-d=0\end{cases}$

a, b гласные и c, d зависимые. $c=\frac{2b}{3}$ и $d=a+2b$ при $a, b\in\mathbb{R}$

Ответ: все матрицы вида $\begin{pmatrix}a & b\\ \frac{2b}{3} & a+2b\end{pmatrix}$ **где** $a, b\in\mathbb{R}$

5. Студент перемножил следующие матрицы, расположив их в некотором порядке (были использованы все матрицы):

$$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 4 & -3 & 2 & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ -2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ -3 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 12 & -7\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Вычислите матрицу, которую он получил (перечислите все возможные варианты).

Решение:

Запишем размер каждой матрицы. Из-за того что размер разный, возможны перемножения только определенных вариантов. Составим направленный граф, где матрицы будут вершинами, а ребра идут между двумя матрицами, которые можно умножить. Например, можно умножить FA, поэтому соединим $F\to A$.

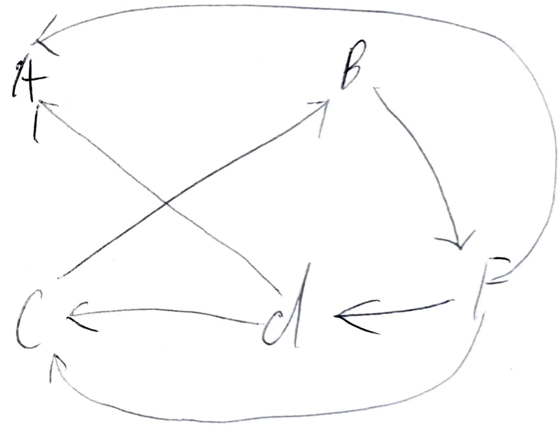
$A_{2\times 5}$

$B_{4\times 3}$

$C_{2\times 4}$

$d_{2\times 2}$

$F_{3\times 2}$



C B F D A

D C B F A

Исходя из того, что мы должны закончить умножение матриц, умножив справа на A, получим что всего возможно только 2 последовательности умножения, которые включают все матрицы: $CBFDA$ и $DCBFA$.

Запишем первое решение.

$$CBFDA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 12 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -5 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 12 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & -12 & 9 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$DCBFA = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 12 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 12 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 12 & -7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 28 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 105 & -98 & 63 & 56 \\ -1 & 15 & -14 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Ответ: два варианта перемножения $CBFDA = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & -12 & 9 & -6 & -6 \end{pmatrix}$ **и** $DCBFA = \begin{pmatrix} -7 & 105 & -98 & 63 & 56 \\ -1 & 15 & -14 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

6. Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ такова, что $A^m = 0$ для некоторого натурального m. Покажите, что матрица $(E - A)$ обратима (*указание: найдите явный вид обратной матрицы*).

Решение:

Догадаемся, что можно соорудить конструкцию, похожую на сумму бесконечной геометрической прогрессии. По аналогии с $\frac{1}{1-x} \sim (E-A)^-1$

$$(E-A)^-1 = \sum_{m=0}^{\infty} A^m = E + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{m-1} + A^m + \ldots$$

При этом $A^m = 0$ и все слагаемые с большим m будут равны 0, следовательно сумма будет выглядеть.

$$(E-A)^-1 = \sum_{m=0}^{m-1} A^m = E + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{m-1}$$

Проверим, что будет при перемножении этой матрицы на исходную.

$$(E-A)(E-A)^-1 = (E-A)\sum_{m=0}^{m-1} A^m = (E-A)(E + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{m-1}) =$$

$$= E + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{m-1} - A - A^2 + A^3 - \ldots - A^{m-1} - A^m = E - A^m + \sum_{i=1}^{m-1} A^i - A^i$$

так как $A^m = 0$, то сумма сверху $=$ $E - 0 + 0 = E$, следовательно мы получили формулу для обратной матрицы

Ответ: обратную матрицу к можно найти таким образом: $(E-A)^-1 = \sum_{m=0}^{m-1} A^m = E + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{m-1}$