Линейная алгебра:
Линейные отображения

31 марта 2021

Линейные отображения

Пусть V и U – векторные пространства над $\mathbb{R}$, например, можно считать, что $V = \mathbb{R}^n$, а $U = \mathbb{R}^m$.
Линейное отображение $\varphi\colon V \to U$ – это отображение, удовлетворяющее двум условиям:

1. $\varphi(v + u) = \varphi(v) + \varphi(u)$ для всех $v, u \in V$ и
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$ для всех $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Линейные отображения

Пусть V и U – векторные пространства над $\mathbb{R}$, например, можно считать, что $V = \mathbb{R}^n$, а $U = \mathbb{R}^m$.
Линейное отображение $\varphi\colon V \to U$ – это отображение, удовлетворяющее двум условиям:

1. $\varphi(v + u) = \varphi(v) + \varphi(u)$ для всех $v, u \in V$ и
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$ для всех $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Если при этом φ бьет из одного пространства в то же самое, т.е. $\varphi\colon V \to V$, то φ называется *линейным оператором*.

Линейные отображения

Пусть V и U – векторные пространства над $\mathbb{R}$, например, можно считать, что $V = \mathbb{R}^n$, а $U = \mathbb{R}^m$.
Линейное отображение $\varphi\colon V \to U$ – это отображение, удовлетворяющее двум условиям:

1. $\varphi(v+u) = \varphi(v) + \varphi(u)$ для всех $v, u \in V$ и
2. $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$ для всех $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Если при этом φ бьет из одного пространства в то же самое, т.е. $\varphi\colon V \to V$, то φ называется *линейным оператором*.

Множество всех линейных отображений из V в U обозначается $\mathrm{Hom}(V, U)$.

Примеры

1. а) Вычисление координаты вектора: $\xi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу $\xi_i(x) = x_i$.

Примеры

1. а) Вычисление координаты вектора: $\xi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу $\xi_i(x) = x_i$.
   б) Вычисление линейной функции от координат вектора: $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу $l(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$.

Примеры

1. а) Вычисление координаты вектора: $\xi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу $\xi_i(x) = x_i$.
   б) Вычисление линейной функции от координат вектора: $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу $l(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$.
2. Укорачивание вектора $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $k < n$.
   $\varphi\colon (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$.

Примеры

1. а) Вычисление координаты вектора: $\xi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу $\xi_i(x) = x_i$.
   б) Вычисление линейной функции от координат вектора: $l \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу $l(x) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$.
2. Укорачивание вектора $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $k < n$.
   $\varphi \colon (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$.
3. Поворот плоскости на угол α относительно начала координат – это линейный оператор $\psi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Примеры

1. а) Вычисление координаты вектора: $\xi_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу $\xi_i(x) = x_i$.
   б) Вычисление линейной функции от координат вектора: $l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу $l(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$.
2. Укорачивание вектора $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $k < n$.
   $\varphi\colon (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$.
3. Поворот плоскости на угол α относительно начала координат – это линейный оператор $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
4. Поворот пространства на угол α относительно прямой, проходящей через начало координат – это линейный оператор $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Примеры

1. а) Вычисление координаты вектора: $\xi_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу $\xi_i(x) = x_i$.
   б) Вычисление линейной функции от координат вектора: $l \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ по правилу $l(x) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$.
2. Укорачивание вектора $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $k < n$.
   $\varphi \colon (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$.
3. Поворот плоскости на угол α относительно начала координат – это линейный оператор $\psi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
4. Поворот пространства на угол α относительно прямой, проходящей через начало координат – это линейный оператор $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
5. Растяжение пространства вдоль осей
   $\varphi \colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\lambda_1x_1, \ldots, \lambda_nx_n)$
   является линейным оператором на $\mathbb{R}^n$.

Примеры

6. Вычисление следа матрицы – это линейное отображение $\mathrm{tr}\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Примеры

6. Вычисление следа матрицы – это линейное отображение $\mathrm{tr}\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
7. Вычисление производной – это линейный оператор на пространстве бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\varphi(f(x)) = f'(x).$$

Примеры

6. Вычисление следа матрицы – это линейное отображение $\mathrm{tr}\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
7. Вычисление производной – это линейный оператор на пространстве бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(\mathbb{R})$:
$$\varphi(f(x)) = f'(x).$$
8. Пусть $V = C[0,1]$ – множество непрерывных функций на отрезке $[0,1]$, тогда у нас есть оператор интегрирования $I\colon V \to V$, определенный по правилу $f(x) \mapsto \int_0^x g(t)\,dt$

Важный вопрос: а как задавать линейные отображения и операторы? Оказывается для этого достаточно знать, куда отправляется базис.

Важный вопрос: а как задавать линейные отображения и операторы? Оказывается для этого достаточно знать, куда отправляется базис.

Теорема

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ *– некоторый базис векторного пространства* V *и* $u_1, \ldots, u_n$ *– произвольный набор векторов другого пространства* U*. Тогда существует единственное линейное отображение* $\varphi\colon V \to U$ *такое, что* $\varphi(e_i) = u_i$*.*

Важный вопрос: а как задавать линейные отображения и операторы? Оказывается для этого достаточно знать, куда отправляется базис.

Теорема

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ *– некоторый базис векторного пространства* V *и* $u_1, \ldots, u_n$ *– произвольный набор векторов другого пространства* U*. Тогда существует единственное линейное отображение* $\varphi\colon V \to U$ *такое, что* $\varphi(e_i) = u_i$*.*

Доказательство. Действительно, пусть $v = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ – произвольный вектор из V. Тогда, если φ существует, оно должно действовать по правилу

$$\varphi(v) = \varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = \\ = x_1\varphi(e_1) + \ldots + x_n\varphi(e_n) = x_1u_1 + \ldots + x_nu_n$$

С другой стороны, легко видеть, что данное равенство однозначно задает линейное отображение.

Матрица линейного отображения

Пусть $\varphi\colon V \to W$ – линейное отображение. Выберем базисы $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в V и $\{f_1, \ldots, f_m\}$ – в W. Разложим образ вектора e_i по базису $\{f_1, \ldots, f_m\}$:

$$\varphi(e_i) = a_{1i} f_1 + \ldots + a_{mi} f_m.$$

Соберём все коэффициенты a_{ij} в матрицу A размера $m \times n$.
При этом коэффициенты разложения $\varphi(e_i)$ образуют i-й столбец A.
В матричном виде

$$\begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \ldots & \varphi(e_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & \ldots & f_m \end{pmatrix} A.$$

Матрица линейного отображения

Матрица A называется *матрицей линейного отображения* φ *в базисах* e *и* f. Если из контекста не ясно, какое отображение или какие базисы имеются в виду, то будем писать $A(\varphi, e, f)$.
Для пространства $\mathbb{R}^n$ есть стандартный базис

$$(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1).$$

И если не оговаривается, в каких базисах задано отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, то имеется в виду матрица в стандартных базисах.
В случае линейного оператора $V = W$ и базисы $\{e\}$ и $\{f\}$ выбираются одинаковыми. Получаем матрицу

$$A(\varphi, e) = A(\varphi, e, e).$$

Вычисление образа вектора по матрице отображения

Теорема

Пусть $\varphi\colon V \to W$ *– линейное отображение с матрицей* $A = A(\varphi, e, f)$*. И пусть вектор* v *имеет столбец координат* $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *в базисе* $\{e\}$*, то есть* $v = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$*. Тогда вектор* $\varphi(v)$ *в базисе* $\{f\}$ *имеет столбец координат*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i)$$

При этом по определению

$$\varphi(e_i) = a_{1i} f_1 + \ldots + a_{mi} f_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j.$$

Доказательство теоремы

$$\varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i)$$

При этом по определению

$$\varphi(e_i) = a_{1i} f_1 + \ldots + a_{mi} f_m = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j.$$

Получаем

$$\varphi(v) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i a_{ji} f_j) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_{ji} x_i) f_j\right)$$

Но при $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ мы как раз имеем $y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$.

Пример 1

Рассмотрим линейный оператор, который растягивает плоскость по оси x в 2 раза и сжимает по оси y в 3 раза. Выберем стандартный базис $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$. Тогда $\varphi(e_1) = 2e_1$, имеет координаты $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Аналогично $\varphi(e_2) = \frac{1}{3}e_2$, имеет координаты $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Получаем

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Если мы хотим найти образ вектора $(3, 5)$, то он равен

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Пример 2

Пусть φ – поворот против часовой стрелки на α. Тогда вектор $(1,0)$ переходит в вектор $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, а вектор $(0,1)$ – в вектор $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$.
Матрица оператора φ в стандартном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Если взять $\alpha = \frac{\pi}{6}$, то образ вектора $(4,7)$ равен

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - \frac{7}{2} \\ 2 + \frac{7\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Замена базисов

Если в некотором пространстве V есть два базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ и $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$, то их можно связать матрицей перехода. А именно, разложим каждый вектор e'_i по базису $e_1, \ldots, e_n$:

$$e'_i = c_{1i}e_1 + \ldots + c_{ni}e_n.$$

Соберём все коэффициенты c_{ij} в матрицу $C = C_{e \to e'}$, именуемой *матрицей перехода от e к e'*. Коэффициенты разложения e'_i стоят в i-ом столбце. Получаем

$$\begin{pmatrix} e'_1 & \ldots & e'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{pmatrix} C.$$

Свойства матрицы перехода

У матриц перехода есть несколько важных свойств:

- $C_{e \to e} = E$.

Свойства матрицы перехода

У матриц перехода есть несколько важных свойств:

- $C_{e \to e} = E$.
- $C_{e \to e''} = C_{e \to e'} C_{e' \to e''}$.

Свойства матрицы перехода

У матриц перехода есть несколько важных свойств:

- $C_{e\to e} = E$.
- $C_{e\to e''} = C_{e\to e'} C_{e'\to e''}$.
- $C_{e'\to e} = C_{e\to e'}^{-1}$. В частности, $C_{e\to e'}$ – квадратная обратимая (невырожденая) матрица.

Свойства матрицы перехода

У матриц перехода есть несколько важных свойств:

- $C_{e \to e} = E$.
- $C_{e \to e''} = C_{e \to e'} C_{e' \to e''}$.
- $C_{e' \to e} = C_{e \to e'}^{-1}$. В частности, $C_{e \to e'}$ – квадратная обратимая (невырожденая) матрица.
- Если e – стандартный базис $\mathbb{R}^n$, то $C_{e \to e'} = \begin{pmatrix} e'_1 & \mid & e'_2 & \mid & \ldots & \mid & e'_n \end{pmatrix}$ – матрица, в которой векторы e'_i стоят по столбцам.

Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов

Теорема

Пусть в пространстве V есть два базиса $\{e\}$ и $\{e'\}$, а в пространстве W – два базиса $\{f\}$ и $\{f'\}$. И пусть φ – линейное отображение из V в W. Тогда

$$A' = A(\varphi, e', f') = C_{f\to f'}^{-1} \cdot A(\varphi, e, f) \cdot C_{e\to e'}.$$

В применении к линейным операторам, имея в виду $f = e$, $f' = e'$, получаем

$$A' = A(\varphi, e') = C_{e\to e'}^{-1} \cdot A(\varphi, e) \cdot C_{e\to e'}.$$

Часто эту формулу пишут кратко:

$$A' = C^{-1}AC.$$

Пример

Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, которое в стандартных базисах задаётся матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Выберем новые базисы: в $\mathbb{R}^2$ – базис $(1,1),(2,3)$, а в $\mathbb{R}^3$ – базис $(1,0,0),(2,1,0),(3,3,1)$. Тогда в новых базисах отображение φ имеет матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Пример

Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ по правилу

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Геометрический смысл такого отображения легко понять. Мы растягиваем вдоль первой оси в λ раз, а по второй оси в μ раз. Но что, если мы хотим выбрать два линейно независимых вектора u_1, u_2 и сделать растяжение в λ раз вдоль u_1 и в μ раз вдоль u_2. Мы видим, что в базисе u_1, u_2 матрица отображения будет диагональной, как выше. Потому, чтобы записать такое отображение в стандартных базисах в виде $\varphi(x) = Ax$, нужно применить предыдущую теорию. Имеем:

$$A(\varphi, e) = C_{u\to e}^{-1} A(\varphi, u) C_{u\to e} = C_{e\to u} A(\varphi, u) C_{e\to u}^{-1} =$$

$$= (u_1|u_2) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} (u_1|u_2)^{-1}.$$

Сопряженные матрицы

Определение. Две матрицы A и $B \in M_n(\mathbb{R})$ **сопряжены** (или подобны), если существует невырожденная C такая, что

$$B = C^{-1}AC.$$

Как видно из предыдущего примера, в случае линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданного как $\varphi(x) = Ax$, матрица A сопряжена матрице этого оператора в любом другом базисе. Напротив, если взять сопряженные матрицы, то они задают один и тот же оператор в разных базисах.

Линейное отображение с заданными образами

Возникает вопрос: пусть даны несколько векторов $v_1, \ldots, v_k \in V$ и векторы $w_1, \ldots, w_k \in W$. Существует ли линейное отображение, переводящее каждый вектор v_i в w_i? Разберёмся сперва со случаем, когда $v_1, \ldots, v_k$ – базис V. Тогда отображение φ существует и единственно. Более того, в стандартных базисах оно задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} w_1 & | & \ldots & | & w_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & | & \ldots & | & v_k \end{pmatrix}^{-1}$$

Линейное отображение с заданными образами

Возникает вопрос: пусть даны несколько векторов $v_1, \ldots, v_k \in V$ и векторы $w_1, \ldots, w_k \in W$. Существует ли линейное отображение, переводящее каждый вектор v_i в w_i? Разберёмся сперва со случаем, когда $v_1, \ldots, v_k$ – базис V. Тогда отображение φ существует и единственно. Более того, в стандартных базисах оно задаётся матрицей

$$\begin{pmatrix} w_1 & | & \ldots & | & w_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & | & \ldots & | & v_k \end{pmatrix}^{-1}$$

Например, если $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (1, 1)$, $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 5, 7)$, то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Пример, когда $v_1, \ldots, v_k$ – не базис.

Выясним, существует ли отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, со следующим свойством

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Используя первые два условия, мы находим, что у нас такое отображение должно задаваться матрицей

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}$$

А теперь применим ее к третьему вектору и увидим:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Значит, такого отображения не существует.

Образ и ядро отображения

Если $\varphi\colon V \to W$ – линейное отображение (как и выше, $V = \mathbb{R}^n$ и $W = \mathbb{R}^m$), то с ним можно связать два подпространства. Первое из них – *ядро* φ, а именно: $\ker\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$. Второе – *образ* φ: $\mathrm{Im}\varphi = \varphi(V) \subseteq W$, то есть все, что можно получить из V, применив к нему φ.

Образ и ядро отображения

Если $\varphi\colon V \to W$ – линейное отображение (как и выше, $V = \mathbb{R}^n$ и $W = \mathbb{R}^m$), то с ним можно связать два подпространства. Первое из них – *ядро* φ, а именно: $\ker\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$. Второе – *образ* φ: $\mathrm{Im}\varphi = \varphi(V) \subseteq W$, то есть все, что можно получить из V, применив к нему φ.

Связь с СЛУ Пусть φ задается матрицей $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, то есть наше отображение имеет вид $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и задано по правилу $x \mapsto y = Ax$, здесь $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$.

- **Ядро** – это пространство решений однородной системы линейных уравнений $\{y \in \mathbb{R}^n \mid Ay = 0\}$.
- **Образ**. Введем следующие обозначения для столбцов матрицы A: $A = (A_1|\ldots|A_n)$. Тогда по определению в образе φ лежат все возможные векторы вида Ax.

$$\mathrm{Im}\varphi = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \{x_1A_1 + \ldots + x_nA_n \mid x_i \in \mathbb{R}\} = \langle A_1, \ldots, A_n\rangle$$

То есть образ – это линейная оболочка столбцов матрицы A. Если $e_1, \ldots, e_n$ – это стандартный базис $\mathbb{R}^n$, то i-ый столбец матрицы A – это образ вектора e_i.

Образ и ядро отображения

- **Прообраз вектора**. Пусть мы зафиксировали вектор $b \in \mathbb{R}^m$ и хотим найти все векторы $x \in \mathbb{R}^n$ такие, что они переходят в b под действием φ. Тогда это означает, что нам надо решить уравнение $Ax = b$. То есть решение неоднородной системы означает, что мы ищем прообраз к некоторому вектору.

Образ и ядро отображения

- **Прообраз вектора**. Пусть мы зафиксировали вектор $b \in \mathbb{R}^m$ и хотим найти все векторы $x \in \mathbb{R}^n$ такие, что они переходят в b под действием φ. Тогда это означает, что нам надо решить уравнение $Ax = b$. То есть решение неоднородной системы означает, что мы ищем прообраз к некоторому вектору.
- **Связь между ОСЛУ и СЛУ**. Пусть x_0 – произвольное решение для $Ax = b$ и $\ker \varphi = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ – решения однородной системы. Тогда все решения системы $Ax = b$ имеют вид $x_0 + z$, где $z \in \ker \varphi$. То есть прообраз любого вектора b является сдвигом ядра отображения φ. Однако, обратите внимание, прообраз вектора b может быть пуст, а ядро всегда не пусто, в нем как минимум всегда найдется нулевой вектор. Таким образом ядро отвечает за единственность решения, если оно есть.

Образ и ядро отображения

- **Прообраз вектора**. Пусть мы зафиксировали вектор $b \in \mathbb{R}^m$ и хотим найти все векторы $x \in \mathbb{R}^n$ такие, что они переходят в b под действием φ. Тогда это означает, что нам надо решить уравнение $Ax = b$. То есть решение неоднородной системы означает, что мы ищем прообраз к некоторому вектору.
- **Связь между ОСЛУ и СЛУ**. Пусть x_0 – произвольное решение для $Ax = b$ и $\ker \varphi = \{y \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ – решения однородной системы. Тогда все решения системы $Ax = b$ имеют вид $x_0 + z$, где $z \in \ker \varphi$. То есть прообраз любого вектора b является сдвигом ядра отображения φ. Однако, обратите внимание, прообраз вектора b может быть пуст, а ядро всегда не пусто, в нем как минимум всегда найдется нулевой вектор. Таким образом ядро отвечает за единственность решения, если оно есть.

  Полезно понимать, что для любого b найдется прообраз относительно φ, если в системе $Ax = 0$ (или $Ax = b$) количество главных переменных равно количеству строк матрицы A, то есть m. В терминах ранга это означает, что $\operatorname{rk} A = m$.

Теорема

Пусть V *и* W *– векторные пространства и* $\varphi\colon V \to W$ *– линейное отображение. Тогда*

1. φ *сюръективно тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Im}\varphi = W$*.*
2. φ *инъективно тогда и только тогда, когда* $\ker\varphi = 0$*.*
3. $\dim\ker\varphi + \dim\mathrm{Im}\varphi = \dim V$*.*

Теорема

Пусть V и W – векторные пространства и $\varphi\colon V \to W$ – линейное отображение. Тогда

1. *φ сюръективно тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}\varphi = W$.*
2. *φ инъективно тогда и только тогда, когда $\ker\varphi = 0$.*
3. *$\dim\ker\varphi + \dim\mathrm{Im}\varphi = \dim V$.*

Доказательство (1) Это просто переформулировка сюръективности на другом языке.
(2) Так как $\ker\varphi = \varphi^{-1}(0)$ и прообраз всегда содержит 0, то из инъективности вытекает, что $\ker\varphi = 0$. Наоборот, пусть $\varphi(v) = \varphi(v')$, тогда $\varphi(v) - \varphi(v') = 0$. А значит, $\varphi(v - v') = 0$. То есть $v - v'$ лежит в ядре, а значит равен 0, что и требовалось.
(3) Этот пункт доказывать не будем.

Теорема

Пусть V и W – векторные пространства и $\varphi\colon V \to W$ – линейное отображение. Тогда

1. *φ сюръективно тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}\varphi = W$.*
2. *φ инъективно тогда и только тогда, когда $\ker\varphi = 0$.*
3. *$\dim\ker\varphi + \dim\mathrm{Im}\varphi = \dim V$.*

Доказательство (1) Это просто переформулировка сюръективности на другом языке.
(2) Так как $\ker\varphi = \varphi^{-1}(0)$ и прообраз всегда содержит 0, то из инъективности вытекает, что $\ker\varphi = 0$. Наоборот, пусть $\varphi(v) = \varphi(v')$, тогда $\varphi(v) - \varphi(v') = 0$. А значит, $\varphi(v - v') = 0$. То есть $v - v'$ лежит в ядре, а значит равен 0, что и требовалось.
(3) Этот пункт доказывать не будем.

Еще полезно понимать, что если в пространствах V и W задать пару подпространств $V' \subseteq V$ и $W' \subseteq W$ таких, что $\dim V' + \dim W' = \dim V$, то найдется (и не одно) линейное отображение $\varphi\colon V \to W$ такое, что $\ker\varphi = V'$, а $\mathrm{Im}\varphi = W'$.

Собственные значения и собственные векторы

Определение. Пусть $\varphi\colon V \to V$ – линейный оператор на пространстве V. Будем говорить, что ненулевой вектор $v \in V$ является *собственным*, если $\varphi(v) = \lambda v$.

Собственные значения и собственные векторы

Определение. Пусть $\varphi\colon V \to V$ – линейный оператор на пространстве V. Будем говорить, что ненулевой вектор $v \in V$ является *собственным*, если $\varphi(v) = \lambda v$.

То есть на собственный вектор оператор φ действует растяжением. Если $\varphi(v) = \lambda v$ для $v \neq 0$, число λ называется *собственным значением* оператора φ. При фиксированном $\lambda \in \mathbb{R}$ множество всех собственных векторов с собственным значением λ и нулевой вектор, т.е. $\{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$, будем обозначать через V_λ. Все V_λ обязательно будут подпространствами. Заметим, что

$$V_\lambda = \ker(\varphi - \lambda \cdot \mathrm{Id}).$$

Собственные значения и собственные векторы

Если мы выберем базис в пространстве V, то оператор φ будет задаваться матрицей $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. В этом случае, собственный вектор задается уравнением $Ax = \lambda x$, где $x \in \mathbb{R}^n$.
Беда в том, что мы пока заранее не знаем, какие λ нам подходят. Чтобы это выяснить нужно переписать уравнение так:

$$(A - \lambda E)x = 0.$$

Оно имеет решение тогда и только тогда, когда $A - \lambda E$ – вырожденная матрица. Это, в свою очередь, происходит тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E) = 0$. Напомним, что **характеристический многочлен** φ (он же характеристический для A) это $\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda E)$, т.е. собственные значения – это спектр матрицы A (корни $\chi_A(t)$).

Теорема

Пусть $\varphi\colon V \to V$ *– некоторый линейный оператор с матрицей* $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ *в некотором базисе. Тогда*

1. *Все собственные значения оператора* φ *– это в точности корни характеристического многочлена* $\chi_A(t) = (-1)^n \det(A - tE)$*.*
2. *Если* λ *– НЕ корень характеристического многочлена, то* $V_\lambda = 0$*.*
3. *Если* λ *– корень характеристического многочлена, то* V_λ *– ненулевое подпространство* V*. Кроме того,* $\dim V_\lambda$ *не превосходит кратности корня* λ *у характеристического многочлена (то есть максимального* k *такого, что* $\chi_A(t)$ *делится на* $(t-\lambda)^k$*).*

Теорема

Пусть $\varphi\colon V \to V$ *– линейный оператор и пусть* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *– его разные собственные значения (тут не важно, из* $\mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$*) и* $v_1, \ldots, v_k \in V$ *– соответствующие им ненулевые собственные векторы. Тогда* $v_1, \ldots, v_k$ *линейно независимы.*

Теорема

Пусть $\varphi\colon V \to V$ – линейный оператор и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – его разные собственные значения (тут не важно, из $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) и $v_1, \ldots, v_k \in V$ – соответствующие им ненулевые собственные векторы. Тогда $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы.

Доказательство. Пусть $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Мы можем считать, что данное выражение самое короткое (то есть содержит минимальное количество слагаемых) из всех подобных выражений, равных нулю, и все коэффициенты μ_i ненулевые. Так как $v_i \neq 0$, $k \neq 1$. Тогда

$$0 = \varphi(0) = \varphi(\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k) = \\ = \mu_1 \varphi(v_1) + \ldots + \mu_k \varphi(v_k) = \lambda_1 \mu_1 v_1 + \ldots + \lambda_k \mu_k v_k$$

Вычтем отсюда изначальное уравнение, умноженное на λ_n. Получим $(\lambda_1 - \lambda_n) v_1 + \ldots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n) v_{n-1} = 0$. Это даёт более короткую линейную комбинацию v_i, равную нулю. Противоречие.

Теорема

Пусть $\varphi\colon V \to V$ – оператор на n-мерном пространстве (не важно комплексном или вещественном), при этом его характеристический многочлен имеет n различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда соответствующие ненулевые собственные вектора $v_1, \ldots, v_n$ образуют базис V и в этом базисе матрица φ диагональная с числами λ_i на диагонали.

Теорема

Пусть $\varphi\colon V \to V$ *– оператор на* n*-мерном пространстве (не важно комплексном или вещественном), при этом его характеристический многочлен имеет* n *различных корней* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$*. Тогда соответствующие ненулевые собственные вектора* $v_1, \ldots, v_n$ *образуют базис* V *и в этом базисе матрица* φ *диагональная с числами* λ_i *на диагонали.*

Доказательство. Действительно, для каждого такого λ_i обязательно найдется ненулевой собственный вектор. Из предыдущей теоремы все такие собственные вектора линейно независимы, а значит образуют базис. По определению в этом базисе $\varphi(v_i) = \lambda_i v_i$, т.е.

$$(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)) = (v_1, \ldots, v_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

На это утверждение можно смотреть так: если есть квадратная матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (или $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$) такая, что $\det(A - \lambda E)$ имеет n различных корней, то существует такая невырожденная матрица $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ (соответственно из $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$), что $C^{-1}AC$ является диагональной и на диагонали стоят корни. Комплексный случай хорош тем, что корни обязательно существуют у многочлена, надо лишь, чтобы они были различными. В вещественном случае существование корней не гарантировано.

Теорема

Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ – квадратная матрица. Предположим, что $\chi_A(t)$ имеет ровно n различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда

1. *Для каждого λ_i найдется единственный с точностью до пропорциональности ненулевой собственный вектор v_i.*
2. *Матрица A представляется в следующем виде $A = CDC^{-1}$, где*
$$C = (v_1 | \ldots | v_n) \text{ и } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Сделаем пару замечаний.

- В пункте (1) нам не важно какой именно ненулевой собственный вектор v_i выбрать, для выполнения разложения из пункта (2) годится любой.
- Если матрица взялась «из жизни» или из «непрерывных случайных данных», то с вероятностью один, характеристический многочлен такой матрицы будет иметь n различных комплексных корней, так как совпадение корней – это маловероятно. То есть над комплексными числами любая случайная матрица с вероятностью один превращается в диагональную с помощью замены координат.

Поиск собственных значений и векторов

Следующий алгоритм годится как для комплексных, так и для вещественных матриц. Разница лишь в том, что в вещественном случае у нас, вообще говоря, будет меньше собственных значений. Для определенности алгоритм рассказывается для вещественных матриц.
Дано Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.
Задача Найти все собственные значения λ_i для A и для каждого λ_i найти базис пространства V_{λ_i}.

Поиск собственных значений и векторов

Следующий алгоритм годится как для комплексных, так и для вещественных матриц. Разница лишь в том, что в вещественном случае у нас, вообще говоря, будет меньше собственных значений. Для определенности алгоритм рассказывается для вещественных матриц.

Дано Матрица $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Задача Найти все собственные значения λ_i для A и для каждого λ_i найти базис пространства V_{λ_i}.

Алгоритм

1. Посчитать характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$.
2. Найти корни многочлена $\chi_A(\lambda)$. Корни $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ будут собственным значениями A.
3. Для каждого λ_i найти ФСР системы $(\lambda_i E - A)x = 0$. Тогда ФСР будет базисом V_{λ_i}.

Отметим, что общее количество собственных векторов для всех собственных значений λ_i не превосходит n – размерности матрицы, так как $\dim V_{\lambda_i}$ не превосходит кратности корня λ_i, а сумма кратностей всех корней в точности равна степени многочлена $\chi_A(\lambda)$, которая есть n – размер матрицы A.
Если количество собственных векторов оказалось равно n, то матрица A приводится в диагональный вид. Пусть $v_{i1}, \ldots, v_{in_i}$ – собственные вектора с собственным значением λ_i, при этом n_i будет кратность собственного значения λ_i. Пусть C – матрица, составленная из векторов v_{ij}. Пусть D – диагональная матрица с диагональю $(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k)$, где каждое λ_i повторяется n_i раз. Тогда $C^{-1}AC = D$.