Линейная алгебра: лекция 2

22 марта 2021

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Задачи

1. Найдите определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:
Запишем как сумму алгебраических дополнений:

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -3 - 5 \cdot (4) + 3 \cdot 5 = -8$$

Ответ: -8

2. Найдите характеристический многочлен и спектр матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -5 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение:
Запишем, что мы хотим найти, характеристический многочлен:

$$\det(\lambda E - B) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 5 & \lambda - 1 & 4 \\ 0 & 2 & \lambda - 4 \end{pmatrix} =$$

Разложим по 1 столбцу:

$$= (\lambda - 1) \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ 2 & \lambda - 4 \end{pmatrix} - 5 \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & \lambda - 4 \end{pmatrix} =$$

$= (\lambda-1)((\lambda-1)(\lambda-4)-8)+5(2(\lambda-4)+6) = (\lambda-1)(\lambda^2+4-5\lambda-8)+5(2\lambda-8+6) = (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda-4)+10(\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda-4+10) = (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

Спектр - решения характеристического многочлена равного 0.

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Ответ: Характеристический многочлен: $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ **и спектр** $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$

3. Разлагая по второму столбцу, вычислите определитель

$$\det \begin{pmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Решение:

Запишем разложение по 2 столбцу: $\det = -a \det \begin{pmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix} + b \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix} -$ $c \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix} + d \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ = <разложим каждый определитель по 1 столбцу> = $-a(4\cdot(-12+10)-2\cdot(-16+15)+4(-8+9))+b(5\cdot(-12+10)-2\cdot(-8+5)+4\cdot(-4+3))-c(5\cdot(-16+15)-4\cdot(-8+5)+4\cdot(-6+4))+d(5\cdot(-8+9)-4\cdot(-4+3)+2\cdot(-6+4)) = 2a-8b+1c+5d$

Ответ: Определитель равен: $2a - 8b + c + 5d$

4. Найдите определитель. Запишите его в виде многочлена от t

$$\det \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & -t \end{pmatrix}$$

Решение:

Разложим определитель по 1 колонке: $= -t \det \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -t & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -t & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & -t \end{pmatrix} - a_2 \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ a_3 & -t & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & -t & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & -t \end{pmatrix}$

В первом определители - нижнетреугольная матрица, поэтому он равен произведению элементов на диагонали. Матрицу под правым определителем мы за 3 перестановки пар столбцов приведем к почти диагональному виду. От этого знак определителя изменится три раза.

$= -t \cdot t^4 + a_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & -t \\ -t & 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix} =$

Разложим вторую матрицу по 1 колонке:

$= -t^5 + a_2(a_1 \det \begin{pmatrix} a_3 & -t & 0 \\ 0 & a_4 & -t \\ 0 & 0 & a_5 \end{pmatrix} + t \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_3 & -t & 0 \\ 0 & a_4 & -t \end{pmatrix}) =$

Получили нулевую строку $\Rightarrow$ правый определитель равен нулю, а слева - диагональная матрица. Раскроем и получим ответ. $= -t^5 + a_2 \cdot a_1 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$

Ответ: Определитель равен: $-t^5 + a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5$

5. Чему равен определитель матрицы, у которой сумма всех строк с четными номерами равна сумме всех строк с нечетными номерами?

Решение:

Примем значение, которому равна сумма нечетных строк за N. Мы знаем, что det не меняется от элементарного преобразования типа "прибавим строку умноженную на коэффициент к другой строке". Соберем таким образом сумму всех нечетных строк в 1 строке и всех четных строк в строке 2.

Теперь мы можем получить строку, где все элементы нулевые, вычтя из 1 строки 2 (так как по условию сумма их равны). Таким образом, мы получили строку, где все элементы равны 0, при этом это преобразование не изменило det. Определитель матрицы, которая имеет нулевую строку, равен 0.

Ответ: 0

6. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Найдите матрицу A^{-1} с помощью элементарных преобразований.

Решение:

Запишем матрицу вместе с единичной $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$ вычтем I-II $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$ вычтем III-3II $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \to$ III разделить на 3 $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

б) Найдите матрицу A^{-1} с помощью явной формулы (через присоединенную матрицу).

Решение:

Найдем определить A через разложение по столбцу 1. $\det A = 1 \cdot (3 - 0) = 3$

Найдем матрицу алгебраических дополнений.

$$\begin{pmatrix} 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -1\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ -1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица будет равна транспонированной матрице алгебраических дополнений, деленной на определитель исходной матрицы.

$$\frac{B^T}{\det A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

7. Найдите матрицу X, удовлетворяющую равенству

$$X\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$$

Решение:

Нам дано матричное уравнение $XA = B$. Домножим справа обе части на обратную матрицу к А.

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

Если обратная матрица к А существует.

Запишем матрицу вместе с единичной $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&2&3&0&1&0\\1&4&9&0&0&1\end{array}\right)$ → вычтем II-I и III-I $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&3&8&-1&0&1\end{array}\right)$ → вычтем I-II и III-2II $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&2&-1&0\\0&1&2&-1&1&0\\0&0&2&2&-3&1\end{array}\right)$ → вычтем II-III $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&2&-1&0\\0&1&0&-3&4&-1\\0&0&2&2&-3&1\end{array}\right)$ → прибавим I+0,5III и поделим III на 2 $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&-3&4&-1\\0&0&0&1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\-3&4&-1\\1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$BA^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\-3&4&-1\\1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&0\\0&3&0\end{pmatrix}$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&2&0\\0&3&0\end{pmatrix}$