Теория вероятностей: лекция 3 — 20 мая 2021

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Задачи:

1. Пусть $f(x) = xe^{-x}, x \geqslant 0$ Убедитесь, что функция f является плотностью. Найдите математическое ожидание

   Решение:
   Чтобы проверить, что это может быть плотность распределения, посчитаем ее интеграл от $-\infty$ до $+\infty$. интерпретируем условие, как то, что при $x < 0$, функция принимает значение $0 \Rightarrow$ можно сразу считать интеграл от 0 и проверять его равенство 1. Возьмем интеграл по частям:

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = (-xe^{-x})\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 0 - e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$$

   Найдем математическое ожидание, взяв интеграл от 0 до $+\infty$ от $xf(x)$, интегрируя по частям, а потом встретив интеграл, который уже посчитали выше:

$$E(x) = \int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx = (-e^{-x}x^2)\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty xe^{-x}\,dx = 0 + 2 = 2$$

   Ответ: Да, эта функция может быть функцией плотности распределения, если добавить, что $f(x < 0) = 0$. Математическое ожидание: $E(x) = 2$

2. Предположим, что мишень имеет форму круга с радиусом 10 футов, причем вероятность попадания в любой концентрический круг пропорциональна площади этого круга. Обозначим через R расстояние от точки попадания пули до центра круга. Найдите функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины R.

   Решение:
   Так как площадь круга растет как квадрат от радиуса, мы хотим, чтобы $\int f_R(x)dx \sim x^2$, т.е. при интегрировании мы получали что-то, зависящее от R^2. Попробуем взять $f_R(x) = Cx$ и определенное на интервале от 0 до 10 (вне интервала - 0). Возьмем интеграл от этой функции от $-\infty$ до $+\infty$ и приравняем результат к 1, чтобы найти константу. Потом проверим, что это подходит под отношение площадей.

$$\int_{-\infty}^\infty Cx\,dx = C\int_0^{10} x\,dx = C\frac{x^2}{2}\Big|_0^{10} = 50C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{50}$$

   Запишем функцию плотности распределения случайной величины R:

$$f_R(x) = \begin{cases} 0, x \notin [0, 10]; \\ \frac{x}{50}, x \in [0, 10]. \end{cases}$$

   Функция распределения, будет ее интегралом и задавать вероятность $P(R \leqslant x)$:

$$F_R(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{x^2}{100}, x \in (0, 10]; \\ 1, x > 10. \end{cases}$$

Проверим, что это соответствует условию "вероятности пропорциональны площади круга". Возьмем круги радиусом 1 и 2 и посчитаем вероятность попадания и их площади, сравним:

$$P(x < 1) = \int_0^1 \frac{x}{50}\,dx = \frac{1}{100} = 0.01$$
$$P(x < 2) = \int_0^2 \frac{x}{50}\,dx = \frac{1}{25} = 0.04$$

$$\frac{P(x<2)}{P(x<1)} = 4 = \frac{S_{circle}(R=2)}{S_{circle}(R=1)} = \frac{4\pi}{\pi} = 4$$

Мы получили то, что вероятности относятся также как площади кругов. Найдем математическое ожидание случайной величины R:

$$E(R) = \int_0^{10} \frac{x^2}{50}\,dx = \frac{x^3}{150}\Big|_0^{10} = \frac{1000}{150} = \frac{20}{3}$$

Ответ: плотность распределения случайной величины R:
$f_R(x) = \begin{cases} 0, x \notin [0,10]; \\ \frac{x}{50}, x \in [0,10]. \end{cases}$ **. Фукнция распределения:** $F_R(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{x^2}{100}, x \in (0,10]; \\ 1, x > 10. \end{cases}$
Математическое ожидание: $E(R) = \frac{20}{3} \approx 6.67$

3. Плотность распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \notin [0,2]; \\ Cx^2, x \in [0,2]. \end{cases}$$

Определить константу C, вычислить вероятность $P\{-1 \leqslant \xi \leqslant 1\}$. Найти математическое ожидание и дисперсию

Решение:
Чтобы найти C, интегрируем функцию плотности от $-\infty$ до $+\infty$ и приравняем результат к 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Cx^2\,dx = C\int_0^2 x^2\,dx = C\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = C\frac{8}{3} = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{8}$$

Чтобы найти вероятность $P\{-1 \leqslant \xi \leqslant 1\}$, интегрируем плотность $p_\xi(x)$ от -1 до 1. Так как значения $p_\xi = 0, x < 0$, то достаточно взять пределы интегрирования от 0 до 1:

$$P\{-1 \leqslant \xi \leqslant 1\} = \int_0^1 \frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{3}{8}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{3}{8}\frac{1}{3} = \frac{1}{8}$$

Найдем математическое ожидание:

$$E(\xi) = \int_0^2 x\frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3\,dx = \frac{3x^4}{32}\Big|_0^2 = \frac{3\cdot 16}{32} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Для дисперсии, дополнительно найдем $E(\xi^2)$:

$$E(\xi^2) = \int_0^2 x^2\frac{3}{8}x^2\,dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^4\,dx = \frac{3x^5}{40}\Big|_0^2 = \frac{3\cdot 32}{40} = \frac{12}{5} = 2.4$$
$$D(\xi) = E(\xi^2) - [E(\xi)]^2 = 2.4 - 1.5^2 = 0.15$$

Ответ: $C = \frac{3}{8}$**. Вероятность** $P\{-1 \leqslant \xi \leqslant 1\} = \frac{1}{8} = 0.125$**. Математическое ожидание:** $E(\xi) = \frac{3}{2} = 1.5$**. Дисперсия:** $D(\xi) = 0.15$

4. Найдите $E[X^3]$ и $E[X^4]$, если $X \sim N(0, 1)$.

   Решение:
   Сначала $E[X^3]$: Нам нужно найти значение определенного интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 0$$

   Функция под интегралом - нечетная ($f(-x) = -f(x)$), а пределы интегрирования симметричны относительно $0 \Rightarrow$ результат будет 0.

   Для 4-го центрального момента нужно посчитать следующий интеграл:

$$E[X^4] = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx =$$

   будем считать по частям: $f = x^3, dgx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx$, $df = 3x^2dx$, $g = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

$$E[x^4] = (x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2})\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 0 + 3\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = 3$$

   Мы использовали то, что $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx = D(X) = 1$, согласно условию.

   Ответ: $E[X^3] = 0$**,** $E[X^4] = 3$

5. Пусть X имеет равномерное распределение на отрезке [a, b]. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = (5 + X \cdot \ln 2)/2$.

   Решение:
   По свойству математического ожидания: $E(Y) = (5 + E(X) \cdot \ln 2)/2 = (5 + (\frac{a+b}{2}) \cdot \ln 2)/2 = \frac{5}{2} + (\frac{a+b}{4}) \ln 2$

   По свойству дисперсии: $D(Y) = D(X)\frac{(\ln 2)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}\frac{(\ln 2)^2}{4} = \frac{(b-a)^2(\ln 2)^2}{48}$

   Ответ: $E(Y) = \frac{5}{2} + (\frac{a+b}{4}) \ln 2$ **и** $D(Y) = \frac{(b-a)^2(\ln 2)^2}{48}$

6. Пусть X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$. Найдите $D(X)$
   Решение:
   Мы знаем, что для экспоненциального распределения $E(x) = \frac{1}{\lambda}$ и $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$
   Найдем $E(x^2)$:

$$E(x^2) = \int_{0}^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}\, dx =$$

   интегрируем по частям

$$= \lambda(-\frac{x^2 e^{-\lambda x}}{\lambda})\Big|_{0}^{\infty} + \lambda \frac{2}{\lambda} \int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x}\, dx = 0 + \frac{2}{\lambda} E(x) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$D(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

   Ответ: Значение: $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ **и расчет выше.**