

ТЕОРИЯ ОЦЕНИВАНИЯ

Упражнение 1 (15 баллов). Пусть дана реализация выборки x_1, \dots, x_n их нормального распределения $\mathcal{N}(\theta, 3)$. Проверьте несмещенность и состоятельность следующих оценок параметра $\theta \in \mathbb{R}$:

- (1) $\hat{\theta}_1(x_1, \dots, x_n) = 0$;
- (2) $\hat{\theta}_3(x_1, \dots, x_n) = 2x_n$;
- (3) $\hat{\theta}_4(x_1, \dots, x_n) = 2x_2 - x_3$;
- (4) $\hat{\theta}_5(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n$.

Посчитайте значения этих оценок на следующих данных ($n = 10$):

-3.19 2.25 4.64 -0.39 -1.44 -1.87 -1.68 0.27 0.43 0.58.

Упражнение 2 (25 баллов). Пусть дана реализация выборки x_1, \dots, x_n из равномерного распределения на отрезке $[\theta; \theta + 1]$. Найдите оценку для неизвестного параметра θ методом моментов и методом максимального правдоподобия. (Тут нужно найти оценки теоретически, ничего реализовывать в Python не нужно.)

Упражнение 3 (25 баллов). Пусть дана реализация выборки x_1, \dots, x_n из равномерного распределения $\text{Unif}[0, \theta]$. Найдите оценки для неизвестного параметра θ методом моментов и методом максимального правдоподобия. Реализуйте эту задачу в Python:

- (1) сгенерируйте θ из равномерного распределения на $[25, 50]$;
- (2) сгенерируйте выборку из $\text{Unif}[0, \theta]$ размера $n = 10, 100, 1\,000, 10\,000, 100\,000, 1\,000\,000$;
- (3) найдите значения полученных оценок (и посчитав значения полученных теоретических оценок, и численно с помощью метода `fit()` из SciPy);
- (4) выведите отклонения полученных оценок от истинного значения параметра θ . Что происходит с ростом n ?

Упражнение 4 (35 баллов). Пусть дана реализация выборки x_1, \dots, x_n их нормального распределения $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$. Найдите оценки для неизвестных параметров θ_1 и θ_2^2 методом моментов и методом максимального правдоподобия. Реализуйте эту задачу в Python:

- (1) сгенерируйте θ_1 из равномерного распределения на $[-5, 5]$, а θ_2^2 — из равномерного распределения на $[0.5, 10]$;
- (2) сгенерируйте выборку из $\mathcal{N}(\theta_1, \theta_2^2)$ размера $n = 10, 100, 1\,000, 10\,000, 100\,000, 1\,000\,000$;
- (3) найдите значения полученных оценок (и посчитав значения полученных теоретических оценок, и численно с помощью метода `fit()` из SciPy);
- (4) выведите отклонения полученных оценок от истинного значения параметров θ_1 и θ_2^2 . Что происходит с ростом n ?