Линейная алгебра: лекция 2

21 марта 2021

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Задачи

1. Найдите определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:
Запишем как сумму алгебраических дополнений:

$$\det A = 1 * \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 5 * \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + 3 * \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -3 - 5 * (4) + 3 * 5 = -8$$

Ответ: -8

2. Найдите характеристический многочлен и спектр матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -5 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение:
Запишем, что мы хотим найти, характеристический многочлен:

$$\det(\lambda E - B) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -2 & 3 \\ 5 & \lambda - 1 & 4 \\ 0 & 2 & \lambda - 4 \end{pmatrix} =$$

Разложим по 1 столбцу:

$$= (\lambda - 1) \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ 2 & \lambda - 4 \end{pmatrix} - 5 \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & \lambda - 4 \end{pmatrix} =$$

$= (\lambda-1)((\lambda-1)(\lambda-4)-8)+5(2(\lambda-4)+6) = (\lambda-1)(\lambda^2+4-5\lambda-8)+5(2\lambda-8+6) = (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda-4)+10(\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda-4+10) = (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$

Спектр - решения характеристического многочлена равного 0.

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Ответ: Характеристический многочлен: $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$ **и спектр** $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$

3. Разлагая по второму столбцу, вычислите определитель

$$\det\begin{pmatrix}5 & a & 2 & -1\\ 4 & b & 4 & -3\\ 2 & c & 3 & -2\\ 4 & d & 5 & -4\end{pmatrix}$$

Решение:

Запишем разложение по 2 столбцу: $\det = -a\det\begin{pmatrix}4 & 4 & -3\\ 2 & 3 & -2\\ 4 & 5 & -4\end{pmatrix} + b\det\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 3 & -2\\ 4 & 5 & -4\end{pmatrix} -$ $c\det\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 4 & 4 & -3\\ 4 & 5 & -4\end{pmatrix} + d\det\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 4 & 4 & -3\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix} = <\text{разложим каждый определитель по 1 столбцу}> =$ $-a(4*(-12+10)-2*(-16+15)+4(-8+9))+b(5*(-12+10)-2*(-8+5)+4*(-4+3))-$ $c(5*(-16+15)-4*(-8+5)+4*(-6+4))+d(5*(-8+9)-4*(-4+3)+2*(-6+4)) =$ $2a-8b+1c+5d$

Ответ: Определитель равен: $2a-8b+c+5d$

4. Найдите определитель. Запишите его в виде многочлена от t

$$\det\begin{pmatrix}-t & 0 & 0 & 0 & a_1\\ a_2 & -t & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_3 & -t & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_4 & -t & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_5 & -t\end{pmatrix}$$

Решение:

Разложим определитель по 1 колонке: $= -t\det\begin{pmatrix}-t & 0 & 0 & 0\\ a_3 & -t & 0 & 0\\ 0 & a_4 & -t & 0\\ 0 & 0 & a_5 & -t\end{pmatrix} - a_2\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & a_1\\ a_3 & -t & 0 & 0\\ 0 & a_4 & -t & 0\\ 0 & 0 & a_5 & -t\end{pmatrix}$

В первом определители - диагональная матрица, поэтому он равен произведению элементов на диагонали. Матрицу под правым определителем мы за 3 перестановки пар столбцов приведем к почти диагональному виду. От этого знак определителя изменится три раза.

$= -t*t^4 + a_2\det\begin{pmatrix}a_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_3 & -t & 0\\ 0 & 0 & a_4 & -t\\ -t & 0 & 0 & a_5\end{pmatrix} =$

Разложим вторую матрицу по 1 колонке:

$= -t^5 + a_2(a_1\det\begin{pmatrix}a_3 & -t & 0\\ 0 & a_4 & -t\\ 0 & 0 & a_5\end{pmatrix} + t*\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ a_3 & -t & 0\\ 0 & a_4 & -t\end{pmatrix}) =$

Получили нулевую строку $\Rightarrow$ правый определитель равен нулю, а слева - диагональная матрица. Раскроем и получим ответ. $= -t^5 + a_2*a_1*a_3*a_4*a_5$

Ответ: Определитель равен: $-t^5 + a_1*a_2*a_3*a_4*a_5$

5. Чему равен определитель матрицы, у которой сумма всех строк с четными номерами равна сумме всех строк с нечетными номерами?

Решение:

Примем значение, которому равна сумма нечетных строк за N. Мы знаем, что det не меняется от элементарного преобразования типа "прибавим строку умноженную на коэффициент к другой строке". Соберем таким образом сумму всех нечетных строк в 1 строке и всех четных строк в строке 2.

Теперь мы можем получить строку, сумма которой равна 0, вычтя из 1 строки 2. Таким образом, мы получили строку, сумма элементов которой равна 0.

Ответ: 0

6. Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

а) Найдите матрицу A^{-1} с помощью элементарных преобразований.

Решение:

Запишем матрицу вместе с единичной $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$ вычтем I-II $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$ вычтем III-3II $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \to$ III разделить на 3 $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

б) Найдите матрицу A^{-1} с помощью явной формулы (через присоединенную матрицу).

Решение:

Найдем определить A через разложение по столбцу 1. $\det A = 1 * (3 - 0) = 3$

Найдем матрицу алгебраических дополнений.

$$\begin{pmatrix} 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -1\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ -1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица будет равна транспонированной матрице алгебраических дополнений, деленной на определитель исходной матрицы.

$$\frac{B^T}{\det A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

7. Найдите матрицу X, удовлетворяющую равенству

$$X\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

Решение:
Нам дано матричное уравнение $XA = B$. Домножим справа обе части на обратную матрицу к А.

$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$

$$X = BA^{-1}$$

Если обратная матрица к А существует.

Запишем матрицу вместе с единичной $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 9 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ $\rightarrow$ вычтем II-I и III-I $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 8 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$ $\rightarrow$ вычтем I-II и III-2II $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1\end{array}\right)$ $\rightarrow$ вычтем II-III $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 1\end{array}\right)$ $\rightarrow$ прибавим I+0,5III и поделим III на 2 $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -3 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right)$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ -3 & 4 & -1\\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$BA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ -3 & 4 & -1\\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$