Теория вероятностей: лекция 1 **15 мая 2021**

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Задачи:

1. Из колоды вынимается карта. Если это пики, то эксперимент прекращается. Если нет, то карта откалывается и вынимается новая. Опишите вероятностное пространство. Необязательно перечислять все элементы пространства, достаточно описать общую идею

   Решение:
   Вероятностное пространство будет состоять из элементарных исходов, число которых равно числу карт в колоде (положим стандартная колода, 52 карты, $|\Omega| = 52$).
   Элементарные исходы будут:
   a_1 : мы достали пиковую карту на 1 шаге. $P(a_1) = \frac{1}{4}$
   a_2 : мы достали пиковую карту на 2 шаге, но не достали на прошлом шаге. $P(a_2) = (1 - P(a_1))\frac{13}{52-1} = \frac{13 \cdot 3}{4 \cdot 51} \approx 0.19$
   a_k : мы достали пиковую карту на k шаге, но не достали на всех прошлых (k-1) шагах. $P(a_k) = (1 - \sum_{k=1}^{k-1} P(a_i))\frac{13}{52-k+1} = \frac{13 \cdot 3}{4 \cdot 51} \approx 0.19$
   a_{40} : мы достали пиковую карту на 40 шаге, но не достали на всех прошлых (39) шагах. $P(a_k) = (1 - \sum_{k=1}^{39} P(a_i))\frac{13}{13} = \frac{13 \cdot 3}{4 \cdot 51} \approx 1.57 \times 10^{-12}$
   $a_m, m > 40$: мы достали пиковую карту на m шаге. $P(a_m) = 0$ так как мы точно достали пиковую карту на шаге 40 или раньше.

2. Аналогичный эксперимент, только карта возвращается обратно в колоду, и колода тасуется каждый раз. Опишите вероятностное пространство

   Решение:
   Вероятностное пространство будет состоять из элементарных исходов, число которых бесконечно (так как мы можем сколько угодно удачно доставать не пиковую карту).
   Элементарные исходы будут:
   a_1 : мы достали пиковую карту на 1 шаге. $P(a_1) = \frac{1}{4}$
   a_2 : мы достали пиковую карту на 2 шаге, но не достали на прошлом шаге. $P(a_2) = (1 - P(a_1))\frac{1}{4} = \frac{3}{16}$
   a_k : мы достали пиковую карту на k шаге, но не достали на всех прошлых (k-1) шагах. $P(a_k) = (1 - P(a_1))^{(k-1)}\frac{1}{4} = (\frac{3}{4})^{(k-1)}\frac{1}{4}$

3. Мастер, имея 20 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

   Решение:
   Для того чтобы проверить только 2 детали (событие A), он должен проверить сначала нестандартную деталь (4 из 20), а потом взять стандартную (16 из 19 оставшихся).
   $P(A) = \frac{4}{20}\frac{16}{19} = \frac{16}{95} \approx 0.1684$

   Ответ: вероятность, что он проверит ровно две детали: $\frac{16}{95} \approx 0.1684$

4. Игральная кость бросается трижды. Какова вероятность того, что с каждым разом вы получаете все больший номер?

Решение:
Выпишем подходящие комбинации. Нам подойдет любой из вариантов последовательностей результатов из этого набора:
$A = \{(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,2,6),(1,3,4),(1,3,5),(1,3,6),(1,4,5),(1,4,6),(1,5,6),$ $(2,3,4),(2,3,5),(2,3,6),(2,4,5),(2,4,6),(2,5,6),(3,4,5),(3,4,6),(3,5,6),(4,5,6)\}$

$$|A| = 20$$

Пространство элементарных исходов состоит из 3 выпавших значений на 3 кубиках и имеет элементов:

$$|\Omega| = 6^3 = 216$$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{20}{216} = \frac{5}{54} \approx 0.0926$

Ответ: вероятность того, что с каждым разом вы получаете все больший номер из трех бросков: $\frac{5}{54} \approx 0.0926$

5. В электронном приборе имеются лампы двух типов. Прибор не работает тогда и только тогда, когда есть бракованные лампы обоих типов. Вероятность того, что бракованы лампы первого типа, равна 0.1, второго типа — 0.2. Известно, что две лампы бракованы. Какова вероятность того, что, несмотря на это, прибор работает?

   Решение:
   Интерпретируем задание: у нас есть лампы типа A, для каждой из них есть вероятность 0.1, что она сломана и типа B, для каждой из них есть вероятность 0.2, что она сломана. Вероятность получить лампу А или В одинаковая. w - прибора работает.
   Из двух сломанных ламп может быть 4 варианта, какие нам попались сломанные.
   $P(AA) = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01$ Прибор при этом работает: $P(w|AA) = 1$
   $P(AB) = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$ Прибор при этом сломан: $P(w|AB) = 0$
   $P(BA) = 0.2 \cdot 0.1 = 0.02$ Прибор при этом сломан: $P(w|BA) = 0$
   $P(BB) = 0.2 \cdot 0.2 = 0.04$ Прибор при этом работает: $P(w|BB) = 1$
   Найдем вероятность того, что устройство работает через полную вероятность:

$$P(w) = P(w|AA)P(AA) + P(w|AB)P(AB) + P(w|BA)P(BA) + P(w|BB)P(BB) = \\ = 0.01 \cdot 1 + 0.02 \cdot 0 + 0.02 \cdot 0 + 0.04 \cdot 1 = 0.05$$

$$P(2broken) = P(AA) + P(AB) + P(BA) + P(BB) = 0.09$$

$$P(w|2broken) = \frac{P(w)}{P(2broken)} = \frac{0.05}{0.09} = \frac{5}{9} \approx 0.556$$

   Ответ: вероятность того, что, с 2 бракованными лампами прибор работает: $\frac{5}{9} \approx 0.556$

6. Сначала бросается идеальная игральная кость, затем — симметричные монеты в количестве, равном номеру, выпавшему на кости. Какова вероятность получить в результате 6 «орлов»? А 1 «орел»?

   Решение:
   Вариант получить 6 орлов только 1: выбросить "6 потом выбросить 6 орлов. Вероятность этого события $P = \frac{1}{6}(\frac{1}{2})^6 = \frac{1}{384} \approx 0.0026$
   Вариант получить 1 орел без решек только 1: выбросить "1 потом выбросить 1 орел. Вероятность этого события $P = \frac{1}{6}\frac{1}{2} = \frac{1}{12} \approx 0.083$

Вариантов выбросить 1 орла с любым количеством решек несколько, в зависимости от броска кубика:
Выпало 1: $P(O|1) = \frac{1}{2}$
Выпало 2: 1 орел - случайная величина, распределенная по Бернулли с 2 испытаниями и 1 успехом: $P(O|2) = C_2^1 \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
Выпало 3: 1 орел - случайная величина, распределенная по Бернулли с 3 испытаниями и 1 успехом: $P(O|3) = C_3^1 \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{8}$
Выпало 4: 1 орел - случайная величина, распределенная по Бернулли с 4 испытаниями и 1 успехом: $P(O|4) = C_4^1 \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^3 = 4\frac{1}{16} = \frac{1}{4}$
Выпало 5: 1 орел - случайная величина, распределенная по Бернулли с 5 испытаниями и 1 успехом: $P(O|5) = C_5^1 \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^4 = 5\frac{1}{32} = \frac{5}{32}$
Выпало 6: 1 орел - случайная величина, распределенная по Бернулли с 6 испытаниями и 1 успехом: $P(O|6) = C_6^1 \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^5 = 6\frac{1}{64} = \frac{3}{32}$

Найдем вероятность 1 орла через полную вероятность:

$$P(O) = P(O|1)P(1) + P(O|2)P(2) + P(O|3)P(3) + P(O|4)P(4) + P(O|5)P(5) + P(O|6)P(6) = \\ = \frac{1}{2}\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{1}{6} + \frac{3}{8}\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\frac{1}{6} + \frac{5}{32}\frac{1}{6} + \frac{3}{32}\frac{1}{6} = \frac{5}{16} = 0.3125$$

Ответ: вероятность получить в результате 6 «орлов»: $\frac{1}{384} \approx 0.0026$**. 1 «орел» без других монет:** $\frac{1}{12} \approx 0.083$**. 1 «орел» с любым числом решек или без решек:** $\frac{5}{16} = 0.3125$

7. Вам сообщили, что из четырех карт, лежащих на столе рубашкой вверх, две принадлежат красной масти и две — черной. Если вы называете цвет наудачу, то с какой вероятностью дадите 0, 2, 4 верных ответа?

   Решение:
   У нас для каждой карты шанс ответить верно $p = 0.5$. Вероятность ответить корректно k раз это с.в X, имеющая распределение Бернулли.

$$P(x = 0) = C_4^0 p^0 q^4 = \frac{1}{2^4} = 0.0625$$

$$P(x = 2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6\frac{1}{2^4} = 0.375$$

$$P(x = 4) = C_4^4 p^4 q^0 = \frac{1}{2^4} = 0.0625$$

   Ответ: вероятность дать 0 верных ответов: 0.0625**. Вероятность дать 2 верных ответа:** 0.375**. Вероятность дать 4 верных ответа:** 0.0625

8. В телеграфном сигнале «точки» и «тире» появляются в пропорции 3:4. В силу некоторых причин, вызывающих очень сильное искажение сообщения, «точки» заменяются на «тире» с вероятностью 1/4, в то время как «тире» превращаются в «точки» с вероятностью 1/3. Если получена «точка», то какова вероятность того, что этот символ был «точкой» при отправлении сообщения?

   Решение:
   Обозначим H_1 - исходная точка, H_2 - исходное тире. По условию: $P(H_1) = 3/7$, $P(H_2) = 4/7$
   Используя условие, обозначим условные вероятности:

$$P(\cdot|H_1) = 3/4$$

$$P(-|H_2) = 2/3$$

Так как нас интересуют точки, обозначим обратное событие к получению тире при отправке тире $\backslash -|H_2 = \cdot|H_2$

$$P(\cdot|H_2) = 1 - P(-|H_2) = 1/3$$

Запишем полную вероятность для получения точки:

$$P(\cdot) = P(\cdot|H_1)P(H_1) + P(\cdot|H_2)P(H_2) = \frac{3}{4}\frac{3}{7} + \frac{1}{3}\frac{4}{7} = \frac{43}{84}$$

По формуле Байеса, найдем ответ на вопрос в задании:

$$P(H_1|\cdot) = \frac{P(\cdot|H_1)P(H_1)}{P(\cdot)} = \frac{\frac{3}{4}\frac{3}{7}}{\frac{43}{84}} = \frac{27}{43} \approx 0.628$$

Ответ: Если получена «точка», то вероятность того, что этот символ был «точкой» при отправлении сообщения $\frac{27}{43} \approx 0.628$