**Дискретная математика: комбинаторика и вероятность.** **21 января 2020**

Домашнее задание №2.

Кирилл Сетдеков

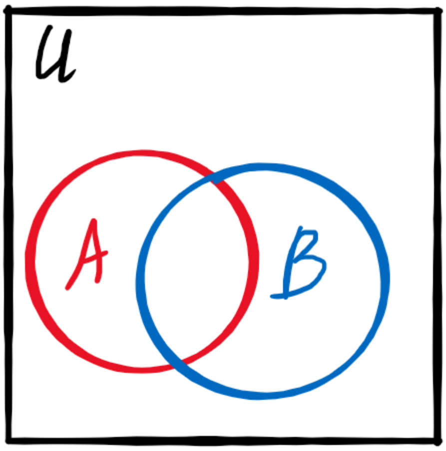
$\boxed{1}$ После опроса 250 человек оказалось, что английский знают ровно 210 респондентов, испанский — 100, а оба языка — 80. Сколько из опрошенных не знают ни английского, ни испанского?

**Решение:**

Пусть $U$ - все участвовавшие в опросе люди, тогда:

$$|U| = 250; |A| = 210; |B| = 100; |A \cap B| = 80$$

Нас интересует $|U \backslash (A \cup B)|$




$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 210 + 100 - 80 = 230$$

$$|U \backslash (A \cup B)| = |U| - |A \cup B| = 250 - 230 = 20$$

**Ответ: 20**

$\boxed{2}$ Есть 10 кандидатов на 6 различных вакансий. Каждого кандидата можно взять на любую вакансию. Сколькими способами можно заполнить вакансии? (Каждая вакансия должна быть заполнена ровно одним человеком.

**Решение:**

Нас интересует количество размещение из 10 по 6, так как нам важно, какой из 6 человек занимает какую вакансию.

$$A_{10}^6 = \frac{10!}{4!} = 151200$$

**Ответ: 151200**

$\boxed{3}$ Найдите вероятность того, что в случайном шестизначном коде будет хотя бы две одинаковые цифры.

**Решение:**

В шестизначном коде $10^6$ вариантов. Чтобы у нас все цифры были разные, необходимо выбрать 6 уникальных цифр из 10, таких способов $A_{10}^6$.

Тогда, если считать событие «В коде есть хотя бы 2 одинаковые цифры» $= A$, «В коде все цифры уникальные» $= A^c$, $|\Omega| = 10^6$

$$P(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{A_{10}^6}{10^6} = \frac{151200}{10^6}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{A_{10}^6}{10^6} = \frac{1061}{1250} \approx 0.8488$$

**Ответ:** $\frac{1061}{1250} \approx 0.8488$

$\boxed{4}$ **а)** Каких натуральных чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых есть единица или тех, в записи которых её нет?

**Решение:**

Пусть событие «Есть хотя бы 1 единица в записи» $= A$, тогда $A^c =$ «В записи числа нет ни 1 единицы». Нам нужно сравнить $P(A) vs P(A^c)$. Все возможные числа до 1 миллиона - $\Omega$.

$$|\Omega| = 10^6$$

так как мы можем выбрать любую цифру для каждого из 6 знаков.

$$|A^c| = 9^6$$

так как если взять в любом разряде цифру кроме 1, то остается 9 цифр и получится число без единиц.

$$P(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{9^6}{10^6} \approx 0.5314$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{10^6 - 9^6}{10^6} \approx 0.4686$$

$$P(A^c) > P(A)$$

**Ответ: Чисел где нет ни одной единицы больше чем чисел где есть хотя бы одна единица, среди чисел до 1 миллиона**

**б)** Тот же вопрос для первых 10 миллионов чисел.

(В нашем курсе мы считаем, что натуральные числа начинаются с 0.)

**Решение:**

Аналогично, «Есть хотя бы 1 единица в записи» $= A$, тогда $A^c =$ «В записи числа нет ни 1 единицы». Нам нужно сравнить $P(A) vs P(A^c)$.

Все возможные числа до 10 миллиона - $\Omega$. $|\Omega| = 10^7$ так как мы можем выбрать любую цифру для каждого из 7 знаков и $|A^c| = 9^7$.

$$P(A^c) = \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{9^7}{10^7} \approx 0.4783$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = \frac{10^7 - 9^7}{10^7} \approx 0.5217$$

$$P(A^c) < P(A)$$

**Ответ: Чисел где есть хотя бы одна единица больше чем чисел где нет ни одной единицы, среди чисел до 10 миллионов**

$\boxed{\mathbf{5}}$ Найдите вероятность выпадения дубля при броске двух кубиков (дубль означает, что на обоих кубиках выпало одинаковое значение).

**Решение:**

Пусть событие «Выпал дубль из двух кубиков» $= A$, все возможные броски двух кубиков - $\Omega$.

Перечислим все возможные исходы, которые мы считаем дублями как значения на каждом кубике. Событие $A$ будет множеством элементарных событий

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

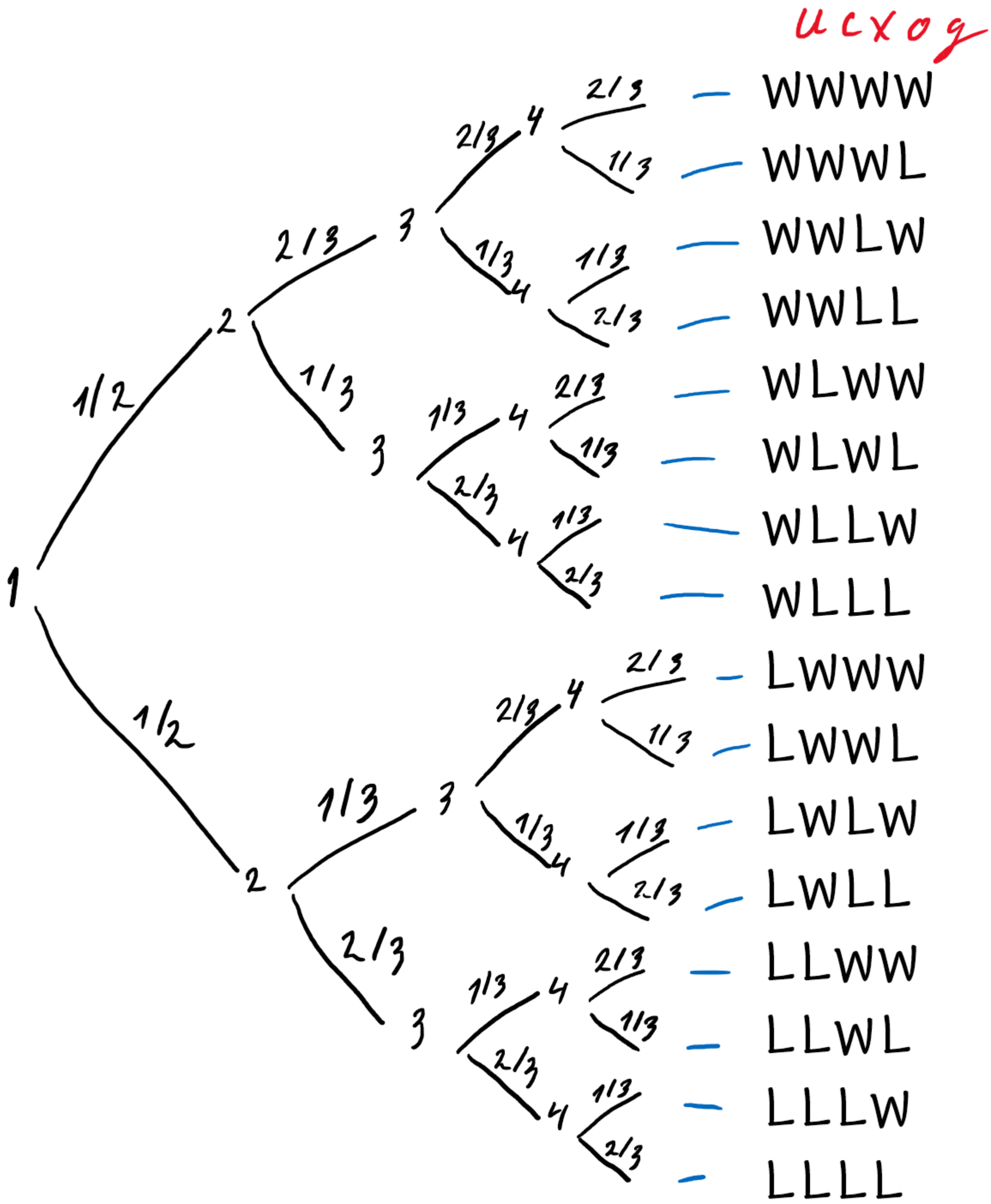
$$|A| = 6; |\Omega| = 36; P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

**Ответ:** $\frac{1}{6}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Команда принимает участие в турнире, где сыграет *четыре* игры.

Вероятность выиграть в первом матче равна $\frac{1}{2}$. Вероятность выигрыша после победы в предыдущем матче возрастает до $\frac{2}{3}$, а после поражения уменьшается до $\frac{1}{3}$.

Нарисуем дерево решений:




Какова вероятность

**а)** выиграть не менее двух игр?

**Решение:**

Пусть $X$ - число выигранных игр. Нас интересует $P(X \geqslant 2)$.

$$P(X \geqslant 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$$

Выиграть 0 игр можно 1 способом - проиграть все, т.е. получить следующую последовательность выигрышей: $(L, L, L, L)$, где $W$ - выигрыш и $L$ проигрыш. Вероятность этого события равна произведению вероятностей каждого из последовательных исходов матчей. Возьмем их из дерева.

$$P(X = 0) = P(L, L, L, L) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$$

Для числа выигрышей $= 1$, есть 4 варианта:

$$(W, L, L, L), (L, W, L, L), (L, L, W, L), (L, L, L, W)$$

Выпишем для них вероятности из дерева решений

$$P(X=1)=P(W,L,L,L)+P(L,W,L,L)+P(L,L,W,L)+P(L,L,L,W)=\frac{2}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{2}{27}=\frac{6}{27}$$

Запишем ответ:

$$P(X\geqslant 2)=1-\frac{4}{27}-\frac{6}{27}=\frac{17}{27}\approx 0.6296$$

**Ответ:** $\frac{17}{27}\approx 0.6296$

**б)** выиграть ровно две игры?

**Решение:**

Из 4 игры будет 6 возможных последовательностей игр, где выиграно ровно 2. $C_4^2=6$. Эти последовательности:

$$(W,W,L,L),(W,L,W,L),(W,L,L,W),(L,W,W,L),(L,W,L,W),(L,L,W,W)$$

$$P(X=2)=\frac{2}{27}+\frac{1}{54}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{54}+\frac{2}{27}=\frac{7}{27}\approx 0.259$$

**Ответ:** $\frac{7}{27}\approx 0.259$

$\boxed{7}$ Монету бросают восемь раз. Найдите вероятности событий:

**а)** $A$ — "орел выпал 6 раз";

**Решение:**

Считаем, что это это испытание Бернулли, где $p=1/2; N=8, k=6$. Тогда вероятность события А:

$$P(A)=C_N^k\times p^k\times(1-p)^{N-k}=C_8^6\times(\frac{1}{2})^6\times(\frac{1}{2})^2=C_8^6\times(\frac{1}{2})^8=\frac{28}{2^8}=\frac{7}{64}$$

**Ответ:** $\frac{7}{64}\approx 0.109$

**б)** $B$ — "орел выпал не менее трех раз".

**Решение:**

X - число выпавших орлов.

$$P(B)=P(X\geqslant 3)=1-P(B^c)=1-P(X<3)$$

$P(A)$ уже известно и $P(A)=P(X=6)=P(X=2)$ так как $C_8^6=C_8^2$. Также $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$. Можно выразить:

$$P(B)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(A)$$

Осталось посчитать $P(X=0)$ и $P(X=1)$.

$$P(X=0)=C_8^0\times(\frac{1}{2})^8=\frac{1}{2^8}$$

$$P(X=1)=C_8^1\times(\frac{1}{2})^8=\frac{8}{2^8}$$

$$P(B)=1-\frac{1}{2^8}-\frac{8}{2^8}-\frac{28}{2^8}=\frac{219}{256}$$

**Ответ:** $\frac{219}{256}\approx 0.855$