Министерство образования и науки Российской Федерации
Псковский государственный университет

А. А. Хватцев

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Учебное пособие

Псков
Псковский государственный университет
2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
Псковский государственный университет

А. А. Хватцев

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Учебное пособие

Рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики Псковского государственного университета

Псков
Псковский государственный университет
2017

УДК 512.643
ББК 22.151.51
Х30

Рекомендовано к изданию кафедрой высшей математики Псковского государственного университета

Рецензенты:
– П. В. Герасименко, заслуженный деятель науки России, академик МАН ВШ, д-р. тех. наук, профессор Санкт-Петербургского государственного университета путей сообщения
– М. В. Воронов, академик МАН ВШ, д-р. тех. наук, профессор Московского городского психолого-педагогического университета

Хватцев, А. А.
Х30 Линейные операторы : учебное пособие. — Псков : Псковский государственный университет, 2017. — 76 с.
ISBN 978-5-91116-560-4

В учебном пособии содержатся сведения из теории линейных вещественных пространств и теории линейных операторов, которые изучаются в курсе «Линейные операторы». Пособие предназначено студентам, обучающимся по магистерской программе направления «Информационные системы и технологии» и будет полезно также начинающим преподавателям соответствующих разделов линейной алгебры. Изложение теоретического материала приводится на уровне математической строгости, достаточном для практического использования. Часть теорем принимается без строгого доказательства и поясняется прикладными задачами. В пособии рассмотрено большое количество примеров (общим числом 47) и содержится задание для промежуточной аттестации студентов. Приведён пример выполнения зачётного задания.

УДК 512.643
ББК 22.151.51

ISBN 978-5-91116-560-4

СОДЕРЖАНИЕ

Служанка всех наук и всех наук хозяйка,
Вселенная немыслимых проблем,
Калейдоскоп определений, аксиом и теорем.

(Строчков И. А. Тост «За математику»)

1. МАТРИЦЫ. ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ МАТРИЧНОЙ АЛГЕБРЫ

Таблицу, записанную в форме

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

будем называть *прямоугольной матрицей* размера $m \times n$. *Элементами* $a_{ij}, (i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ матрицы A могут быть действительные или комплексные числа или какие-то другие объекты, например, алгебраические выражения. Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}$ составляют i-ую строку матрицы A, а элементы $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{mj}$ — её j-ый столбец. Если есть необходимость явно указать число строк и столбцов матрицы A, то будем использовать обозначение $A_{m\times n}$. Часто применяется также и сокращённое обозначение для матрицы A

$$A = \left\| a_{ij} \right\|,\ \left(i=\overline{1,m}\ ;\ j=\overline{1,n}\right) \qquad (1.2)$$

Если число строк и столбцов у матрицы A совпадает, т. е. $m=n$, то она называется *квадратной матрицей порядка* n.

Если все элементы $a_{ij}, (i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ матрицы A равны нулю, то она называется *нулевой.* Будем обозначать нулевую матрицу символом O.

Если у матрицы A строки и столбцы поменять местами, то получившуюся при этом матрицу принято называть *транспонированной* по отношению к матрице A. Обозначают транспонированную матрицу символом A^T. Ясно, что $\left(A^T\right)^T = A$.

Матрица, которая содержит только одну строку, т. е. матрица вида

$$A_{1\times n} = \left(a_{11}\ \ a_{12}\ \ \dots a_{1n}\right) \qquad (1.3)$$

называется *матрицей-строкой*, а матрица, содержащая только один столбец, называется *матрицей-столбцом*.

Матрицу-столбец (для сокращения записи, например) можно представить и виде матрицы-строки

$$A_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \end{pmatrix}^T \tag{1.4}$$

Квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}), \tag{1.5}$$

у которой отличны от нуля только элементы, стоящие на главной диагонали, называется *диагональной*.

Диагональная матрица, у которой все отличные от нуля элементы равны друг другу, называется *скалярной.*

Скалярная матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, называется *единичной*. За единичной матрицей закреплено обозначение E, т. е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Будем называть две матрицы $A = \|a_{ij}\|, (i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n)$ и $B = \|b_{ks}\|, (k = 1,2,\dots,p;\ s = 1,2,\dots,q)$ матрицами *одинаковой структуры*, если у них одинаковое число строк и одинаковое число столбцов, т. е. $m = p$, а $n = q$.

Две матрицы A и B одинаковой структуры считаются *равными* тогда и только тогда, когда равны их соответствующие элементы, т. е.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \left(i = \overline{1,m}\,;\ j = \overline{1,n}\right) \tag{1.7}$$

Суммой двух матриц A и B одинаковой структуры называется матрица C такой же структуры, причём элементы матрицы C равны сумме соответствующих элементов матриц A и B, т. е.

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \left(i = \overline{1,m}\,;\ j = \overline{1,n}\right) \tag{1.8}$$

Произведением матрицы A на число λ называется матрица B такой же структуры, что и матрица A, причём элементы матрицы B вычисляются по формуле

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}\ ,\ \left(i = \overline{1,m}\ ;\ j = \overline{1,n}\right) \tag{1.9}$$

Сложение двух матриц A и B, и произведение матрицы A на число λ подчиняются следующим восьми законам:

$$A + B = B + A \tag{1.10}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \tag{1.11}$$

$$A + (-A) = O \tag{1.12}$$

$$A + O = A \tag{1.13}$$

$$\lambda(\mu A) = \mu(\lambda A) = (\lambda\mu)A \tag{1.14}$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B \tag{1.15}$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \tag{1.16}$$

$$1 \cdot A = A \tag{1.17}$$

Две матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{p\times q}$ называются *матрицами согласованной структуры*, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, т. е. $n = p$.

Произведением матриц $A_{m\times n}$ и $B_{p\times q}$, согласованной структуры, называется матрица $C_{m\times q}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{is} = a_{i1}b_{1s} + a_{i2}b_{2s} + \ldots + a_{in}b_{ns} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{ks}\ ;\ \left(i = \overline{1,m}\ ;\ s = \overline{1,q}\right). \tag{1.18}$$

Для произведения матриц $A_{m\times n}$ и $B_{p\times q}$ используется традиционное обозначение $C = A \cdot B$.

Пример 1.1. Определить, какие из двух произведений $A \cdot B$ и $B \cdot A$ возможны, и вычислить возможное произведение, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

►Здесь $A_{2\times 3}$, $B_{3\times 2}$ и возможно как произведение $A \cdot B$, так и $B \cdot A$. Вычислим оба этих произведения.

$$C_1 = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot 3 + 1\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 3\cdot 0 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 7 \\ 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad ◄$$

Как видно из рассмотренного примера, операция умножения матриц некоммутативна, т. е. в общем случае

$$A \cdot B \neq B \cdot A \tag{1.19}$$

Если же матрицы A и B обладают свойством $A \cdot B = B \cdot A$, то они называются *перестановочными.* Отметим, что единичная матрица E порядка n является перестановочной с любой квадратной матрицей A такого же порядка n.

Операция умножения матриц подчиняется ассоциативному и дистрибутивному законам

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C \tag{1.20}$$

$$\begin{gathered} A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \\ (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \end{gathered} \tag{1.21}$$

2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Число $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ называется *определителем* матрицы A или *определителем второго порядка.* Обозначать определитель матрицы A будем следующим образом

$$\Delta_2 = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{2.1}$$

Теперь рассмотрим матрицу третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем третьего порядка или определителем матрицы третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле

$$\begin{gathered} \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + \\ + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{gathered} \tag{2.2}$$

Вычеркнем в матрице A строку с номером i и столбец с номером j. Оставшиеся элементы образуют матрицу второго порядка. Её определитель обозначим символом M_{ij} и назовём *минором* матрицы A или минором определителя матрицы A.

Число $$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{2.3}$$

называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} определителя матрицы A.

Например, минор M_{12} и алгебраическое дополнение A_{12} определителя (2.2) равны, соответственно

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23} \text{ и}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}).$$

Теперь легко заметить, что соотношение (2.2) может быть переписано в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad (2.4)$$

Соотношение (2.4) положим в основу определения определителей квадратных матриц любого порядка: ***определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки определителя на их алгебраические дополнения, т. е.***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{js}A_{js}; \ (i, s = 1, 2, \dots, n) \qquad (2.5)$$

Определители обладают следующими свойствами.

1) *Определитель не изменится, если в нём строки и столбцы поменять местами.*

2) *Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки определителя добавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.*

3) *Если в определителе две строки поменять местами, то знак определителя изменится на противоположный.*

4) *Если элементы одной строки определителя пропорциональны соответствующим элементам другой строки, то определитель равен нулю.*

5) *Определитель равен нулю, если все элементы какой-либо его строки равны нулю.*

6) *Для того чтобы умножить определитель на число надо все элементы какой-либо его строки умножить на это число.*

7) *Сумма произведений элементов какой-либо строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.*

8). *Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц, т. е.* $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Замечание

В силу свойства 1), сформулированные выше свойства 2)–7) останутся справедливыми, если в их формулировке слово «строка» заменить словом «столбец».

3. ОБРАТНАЯ МАТРИЦА

Пусть задана квадратная матрица A порядка n. Вычислим её определитель $\det A$. Если окажется, что $\det A \neq 0$, то матрицу A будем называть *невырожденной* или *неособенной.*

Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A порядка n, если выполняется соотношение

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \tag{3.1}$$

Справедлива теорема. Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную матрицу A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной. Если матрица A^{-1} существует, то она единственная.

На практике при вычислении обратных матриц чаще всего используются два метода.

Первый метод, который принято называть *методом присоединённой матрицы*, заключается в вычислении матрицы

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Матрицу C называют *союзной* или *присоединённой к матрице* A. *Подчеркнём, что строки союзной матрицы* C *составляют алгебраические дополнения элементов соответствующих столбцов матрицы* A.

Вычислим произведение $D = A \cdot C$. В соответствии с правилом умножения матриц и свойствами определителей получим, что элементы d_{ij} матрицы D равны

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{jk} = \begin{cases} 0, \text{если } i \neq j \\ \det A, \text{если } i = j \end{cases} \Rightarrow D = \det A \cdot E$$

Таким образом, чтобы найти A^{-1} остаётся только умножить матрицу C на число $\dfrac{1}{(\det A)}$, т. е.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot C \tag{3.3}$$

Второй метод основан на использовании так называемых *элементарных преобразований*. Будем называть этот метод методом Гаусса — Жордана.

Как известно $[1]$, *элементарными преобразованиями* матрицы называются следующие преобразования.

1. Добавление ко всем элементам какой-либо строки (какого-либо столбца) соответствующих элементов другой строки (другого столбца), умноженных на одно и то же, не равное нулю, число.

2. Умножение всех элементов какой-либо строки (какого-либо столбца) на неравное нулю число.

Отметим, что с помощью нескольких элементарных преобразований в матрице можно переставить местами две любые строки или два любых столбца.

Суть метода заключается в следующем.

Сначала присоединением к матрице A единичной матрицы E составляется расширенная матрица

$$(A|E)=\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right).$$

Затем с помощью элементарных операций над строками расширенная матрица $(A|E)$ преобразуется к виду $(E|B)$.

С формальной точки зрения такие преобразования могут быть реализованы умножением справа на матрицу A некоторой матрицы T, которая представляет собой произведение соответствующих элементарных матриц (матрицы перестановки, матрицы масштабирования): $T \cdot A = E$.

Следовательно, матрица преобразования T представляет собой обратную матрицу для матрицы A, т. е. $T = A^{-1}$.

Поэтому, $B = T \cdot E = A^{-1} \cdot E = A^{-1}$

Пример 3.1. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

►1. Метод присоединённой матрицы.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A и найдём определитель матрицы.

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\end{vmatrix}=6,\ A_{13}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=2,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-4,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}-1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=6,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1$$

$$\det A=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}\cdot A_{1k}=1\cdot 2+0\cdot 6+2\cdot 4=10.$$

Следовательно,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 6 & -4 & 6\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Чтобы убедиться в том, что матрица A^{-1} найдена правильно, вычислим произведение $A\cdot A^{-1}$.

$$A\cdot A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 6 & -4 & 6\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

2. Метод Гаусса — Жордана

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -6 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -4 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -6 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -10 & -4 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & \\ 0 & -1 & -6 & \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -6 & 4 & -6\\ -4 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 6 & -4 & 6\\ 4 & -1 & -1\end{pmatrix}\blacktriangleleft$$

Замечание.

Следует отметить, что объём вычислений, который требуется выполнить для нахождения обратных матриц, порядок которых превышает пять, в случае использования метода Гаусса — Жордана значительно меньше по сравнению с объёмом вычислений при использовании метода присоединённой матрицы. Поэтому метод Гаусса — Жордана является более предпочтительным.

4. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ПРИМЕРЫ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть E — некоторое множество, $x, y, z, \ldots$ — его элементы, а K — множество вещественных чисел $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Множество K принято называть числовым полем. Среди элементов множества E имеется один элемент, который мы всегда будем обозначать символом $\overline{0}$ и называть *нулевым* элементом этого множества. Кроме того каждому элементу $x \in E$ ставится в соответствие элемент $(-x) \in E$, который принято называть *противоположным* элементу $x \in E$.

Пусть каждой паре элементов x и y из множества E ставится в соответствие элемент $z \in E$, обозначаемый $x + y$ и называемый *суммой*. Пусть также $\forall x \in E$ и $\forall \alpha \in K$ поставлен в соответствие элемент, принадлежащий множеству E, обозначаемый αx и называемый *произведением числа* α *на элемент* x.

Предположим, что две операции удовлетворяют следующим **восьми аксиомам:**

1. $x + y = y + x$ (коммутативность сложения);
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (ассоциативность сложения);
3. $x + \overline{0} = x$;
4. $x + (-x) = \overline{0}$;
5. $(\lambda\alpha)x = \lambda(\alpha x) = \alpha(\lambda x)$;
6. $1 \cdot x = x$;
7. $(\alpha + \lambda)x = \alpha x + \lambda x$ (дистрибутивность относительно умножения суммы чисел на элемент множества E);
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (дистрибутивность относительно умножения числа на сумму элементов множества E).

Множество E, обладающее перечисленными свойствами, называется *вещественным линейным пространством*.

Следствия из аксиом.

1. В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент $\overline{0}$.

2. В линейном пространстве для любого элемента x существует единственный противоположный элемент $(-x)$.

3. Произведение произвольного элемента x пространства на число 0 равно нулевому элементу $\overline{0}$.

4. Произведение нулевого элемента $\overline{0}$ пространства на любое число α равно нулевому элементу.

5. Для любого элемента x линейного пространства справедливо равенство $(-x) = (-1)x$

Линейное пространство может быть образовано объектами любой природы. Например, пространства R^2 и R^3, которые образуют множества свободных геометрических векторов на плоскости и в трёхмерном пространстве соответственно, являются линейными [1].

Рассмотрим некоторые другие примеры линейных пространств.

1. Пространство R^n.

Вещественным пространством n *измерений или* n*-мерным векторным пространством* будем называть множество упорядоченных совокупностей действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Обозначается такое пространство символом R^n.

Каждую упорядоченную совокупность n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ назовём *элементом (точкой) пространства* R^n или n*-мерным вектором* и будем обозначать $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Сами числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами точки пространства* R^n *или* n*-мерного вектора.*

Пусть имеется два вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Вектор $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ называется *суммой* векторов x и y и обозначается символом $z = x + y$, если $z_k = x_k + y_k$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Два вектора x и y назовём *равными*, если равны их соответствующие координаты. *Произведением* n-мерного вектора x и действительного числа λ называется вектор, координаты которого равны произведению на это число координат вектора x, т. е. $y = \lambda x \Leftrightarrow y_k = \lambda x_k, k = 1,2,\ldots,n$.

Нулевым n *-мерным вектором* назовём вектор $\vec{0} = (0,0,\ldots,0)$. Вектор $(-x) = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ назовём вектором, *противоположным вектору* x.

Нетрудно убедиться, что введённые таким образом в пространстве R^n операции сложения и умножения на число удовлетворяют аксиомам линейного пространства. Следовательно, пространство R^n является линейным.

2. Пространство $R_{m\times n}$.

Множество прямоугольных матриц $A_{m\times n}$, у которых элементами $a_{ij}, (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$ являются действительные числа, будем обозначать $R_{m\times n}$. Операции сложения таких матриц и умножение на число удовлетворяют аксиомам линейного пространства (см. (1.10)–(1.17)). Следовательно, пространство $R_{m\times n}$ — линейное.

3. Пространство $\{\overline{0}\}$.

Рассмотрим множество $\{\overline{0}\}$, которое содержит только единственный элемент, и этот элемент является нулевым. Операции сложения и умножения на число определим соотношениями $\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$ и $\alpha\overline{0}=\overline{0}$. Для определённых таким образом операций аксиомы 1–8 выполняются. Поэтому множество $\{\overline{0}\}$ является линейным пространством.

4. Пространство $\{Ax=\overline{0}\}$.

Пусть $\{Ax=\overline{0}\}$ — множество решений однородной системы линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, где A — это вещественная матрица коэффициентов при неизвестных. Прежде всего, отметим, что множество $\{Ax=\overline{0}\}$ не пустое, так как однородная система линейных алгебраических уравнений всегда имеет так называемое тривиальное (чисто нулевое) решение. Из свойств решений однородной системы [1] следует, что сумма двух решений однородной системы и произведение её решения на число также являются решениями этой системы, т. е. принадлежат множеству $\{Ax=\overline{0}\}$. Ясно, что столбец неизвестных x является матрицей размера $n\times 1$, поэтому операции сложения и умножения на число на множестве $\{Ax=\overline{0}\}$ удовлетворяют аксиомам 1–8. Следовательно, пространство $\{Ax=\overline{0}\}$ является вещественным линейным пространством.

5. Пространство $P_n(x)$.

Обозначим через $P_n(x)$ множество алгебраических многочленов с действительными коэффициентами степени не выше чем n. При сложении двух таких многочленов нужно сложить коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, а при умножении многочлена на число нужно умножить на это число все коэффициенты многочлена. В результате получается многочлен, степень которого также не превышает n. В качестве нулевого элемента примем многочлен степени n, у которого все коэффициенты равны нулю, т. е. число ноль. Сложение действительных чисел и их умножение удовлетворяют аксиомам 1–8. Следовательно, множество $P_n(x)$ является вещественным линейным пространством.

6. Пространство $C(D)$.

Обозначим через $C(D)$ множество действительных функций одного аргумента, определённых и непрерывных на некотором множестве D. Например, множеством D может быть отрезок $[a,b]$, интервал (a,b), вся числовая ось или какая-то другая область. В первом случае будем использовать обозначение $C[a,b]$, во втором — $C(a,b)$, в третьем — $C(R)$. Если f и g — две функции аргумента x из пространства $C(D)$, а α — действительное число, то сумма $(f+g)$ этих функций и произведение αf определяются соотношениями

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (\alpha f)(x)=\alpha f(x),\ \forall x\in D \qquad (4.1)$$

Ясно, что операции (4.1) определены на $C(D)$, т. к. сумма двух непрерывных функций и произведение непрерывной функции на число являются также непрерывными функциями.

В качестве нулевого элемента примем функцию, тождественно равную нулю на всём множестве D. Легко проверить (рекомендуем читателям выполнить это самостоятельно), что все восемь аксиом линейного пространства выполняются, т. е. пространство $C(D)$ является линейным

7. Пространство $C^k(D)$, $k=1,2,\ldots,m$.

Множество функций, имеющих на множестве D непрерывные производные порядка $k=1,2,\ldots,m$, также образует линейное пространство. В самом деле, если $f(x), g(x)\in C^k(D)$ и $\alpha\in R$, то

$$(f(x)+g(x))^{(k)}=f^{(k)}(x)+g^{(k)}(x)\in C^k(D) \text{ и } (\alpha f(x))^{(k)}=\alpha f^{(k)}(x)\in C^k(D).$$

В качестве нулевого элемента примем функцию, тождественно равную нулю на всём множестве D. Такая функция дифференцируема любое число раз и все её производные также равны нулю.

8. Пространство $T_\varphi(R)$.

Рассмотрим множество тригонометрических двучленов с действительными коэффициентами, т. е. множество функций вида

$$f(t)=a\cos\varphi t+b\sin\varphi t,$$

где фиксированное число (частота) $\varphi\neq 0$, переменная t (также как коэффициенты a, b) может принимать только вещественные значения. Сумма таких многочленов и их произведение на действительное число являются тригонометрическими двучленами, т. е. являются элементами множества $T_\varphi(R)$. Нулевым элементом $\overline{0}$ служит двучлен $0(t)=0\cdot\cos\varphi t+0\cdot\sin\varphi=0$. Множество $T_\varphi(R)\subset C(R)$ и является линейным пространством.

Приведённые примеры не исчерпывают всего многообразия примеров линейных пространств. Например, линейные пространства образуют и множество функций m переменных, определённых и непрерывных на одном и том же множестве действительных чисел, и множество сходящихся бесконечных числовых последовательностей и др.

В дальнейшем, если нет в этом необходимости, не будем конкретизировать, какие элементы составляют линейное пространство, всякий раз используя для них название вектор. Также если нет в этом особой надобности, то вместо обозначения вектора $\overline{x}$ будем использовать x.

Пример 4.1. Пусть P — множество положительных чисел, в котором операция сложения двух любых векторов x и y определена равенством $(x+y)=xy$, а операция умножения на число $\alpha \in R$ — равенством $(\alpha x)=x^{\alpha}$ [2]. Является ли множество P вещественным линейным пространством и как в этом пространстве определяется нулевой вектор и вектор, противоположный вектору x?

►1. Так как $x>0$ и $y>0$, то $(x+y)=xy>0$ и $(\alpha x)=x^{\alpha}>0$, т. е. $x+y \in P$ и $\alpha x \in P$.

Нулевой элемент $\overline{0}$ и противоположный элемент $(-x)$ выберем так, чтобы выполнялись третья и четвёртая аксиомы линейного пространства.

2. Так как $(x+\overline{0})=x=x\overline{0} \Rightarrow \overline{0}=1$.

3. По определению $(x+(-x))=\overline{0}=1=x(-x) \Rightarrow (-x)=\dfrac{1}{x}$.

4. Теперь проверим выполнение остальных аксиом линейного пространства.

$(x+y)=xy=yx=(y+x)$; $x+(y+z)=x(yz)=(xy)z=(x+y)+z$;

$\alpha(x+y)=(xy)^{\alpha}=x^{\alpha}y^{\alpha}=(\alpha x)(\alpha y)=\alpha x+\alpha y$; $1\cdot x=x^{1}=x$;

$(\alpha+\lambda)x=x^{\alpha+\lambda}=x^{\alpha}x^{\lambda}=(\alpha x)(\lambda x)=\alpha x+\lambda x$ ◄.

5. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА. ИЗОМОРФИЗМ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Пусть имеется n векторов $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_n$ некоторого линейного пространства V. Умножим каждый вектор на число λ_j $(j=1,2,\ldots,n)$ и полученные результаты сложим. В результате получим вектор $\overline{b} \in V$

$$\overline{b}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\overline{a}_j=\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\ldots+\lambda_n\overline{a}_n \tag{5.1}$$

Выражение (5.1) называют *линейной комбинацией векторов* $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_n$. Может оказаться, что все коэффициенты $\lambda_j=0$, тогда эта комбинация называется *тривиальной*. Из следствий из аксиом линейного пространства вытекает, что тривиальная комбинация любых векторов равна нулевому вектору $\overline{0}$. Однако может оказаться, что и нетривиальная комбинация нескольких векторов является нулевым вектором. Например, если $\overline{a}=(1,1)$; $\overline{b}=(0,1)$; $\overline{c}=(1,0)$, то $1\cdot\overline{b}+1\cdot\overline{c}-1\cdot\overline{a}=\overline{0}$.

Пусть

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\bar{a}_j=\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_n\bar{a}_n=\bar{0} \qquad (5.2)$$

Если соотношение (5.2) выполняется лишь только в том случае, когда все числа $\lambda_j=0,\ (j=1,2,\ldots,n)$, то векторы $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ называются *линейно независимыми*. Если же выполняется соотношение (5.2), а среди чисел $\lambda_j\ (j=1,2,\ldots,n)$ хотя бы одно не равно нулю, то векторы $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ называются *линейно зависимыми*.

Пример 5.1. Выяснить, является ли линейно независимой система векторов

$$a_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

линейного пространства $R_{2\times 2}$ вещественных квадратных матриц второго порядка.

►Составим равенство (5.2)

$$\lambda_1\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2\lambda_1+\lambda_2&2\lambda_2-\lambda_3\\\lambda_3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Последнее матричное равенство равносильно системе уравнений

$$\begin{cases}2\lambda_1+\lambda_2=0\\2\lambda_2-\lambda_3=0\\\lambda_3=0\end{cases},$$

а эта система имеет единственное решение $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Следовательно, эта система векторов является линейно независимой. ◄

Пример 5.2. Выяснить, является ли линейно независимой в пространстве $P_3(x)$ система векторов: $x^3-2x^2+2;\ x^2+5;\ 5$.

► Составим равенство (5.2)

$$\lambda_1\left(x^3-2x^2+2\right)+\lambda_2\left(x^2+5\right)+5\lambda_3=0=0\cdot x^3+0\cdot x^2+0\cdot x+0\cdot 1.$$

Два алгебраических многочлена считаются равными только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной. Поэтому, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}\lambda_1=0\\-2\lambda_1+\lambda_2=0\\2\lambda_1+5\lambda_2+5\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\\lambda_2=0\\\lambda_3=0\end{cases}$$

Следовательно, система векторов $x^3-2x^2+2;\ x^2+5;\ 5$ в пространстве $P_3(x)$ является линейно независимой. ◄

Теорема 1. Для того чтобы векторы $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ были линейно зависимыми необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из них являлся линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

Необходимость. Пусть векторы $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ линейно зависимы. Тогда $\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_n\bar{a}_n=\bar{0}$, а среди чисел $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ есть числа, отличные от нуля. Пусть $\lambda_k\neq 0$, тогда

$$\bar{a}_k=-\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\bar{a}_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_k}\bar{a}_2+\ldots+\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\bar{a}_n\right)=\gamma_1\bar{a}_1+\gamma_2\bar{a}_2+\ldots+\gamma_n\bar{a}_n,$$

т. е. вектор $\bar{a}_k$ является линейной комбинацией остальных векторов.

Достаточность. Пусть, например, $\bar{a}_1=\lambda_2\bar{a}_2+\lambda_3\bar{a}_3+\ldots+\lambda_n\bar{a}_n$. Тогда $-\bar{a}_1+\sum\limits_{k=2}^{n}\lambda_k\bar{a}_k=\bar{0}$. В этой линейной комбинации, по крайней мере, один коэффициент отличен от нуля, и она является тривиальной. Значит, векторы $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ являются линейно зависимыми. ☻

Если в векторном пространстве V существует n линейно независимых векторов, а любая система из $n+1$ векторов является линейно зависимой, то эта система n линейно независимых векторов называется *базисом пространства* V. При этом пространство V называется n мерным и обозначается V_n.

Пример 5.3.

1. Можно ли на множестве $R_{m\times n}$ вещественных матриц размера $m\times n$ за базис принять $m\cdot n$ векторов

$$e_{11}=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix},e_{12}=\begin{pmatrix}0&1&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix},\ldots,e_{mn}=\begin{pmatrix}0&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&1\end{pmatrix}?$$

► Равенство (5.2) в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&\lambda_2&\ldots&\lambda_n\\\lambda_{n+1}&\lambda_{n+2}&\ldots&\lambda_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\\lambda_{mn-n+1}&\lambda_{mn-n+2}&\ldots&\lambda_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&0&\ldots&0\end{pmatrix}$$

Откуда получаем $\lambda_j = 0,\ j = 1,2,\ldots,mn$.

Следовательно, векторы $e_{11}, e_{12,\ldots,} e_{mn}$ линейно независимы.

Теперь возьмём произвольный вектор из множества $R_{m\times n}$, т. е. возьмём любую матрицу $A = \|a_{ij}\|$, $\left(i = \overline{1,m}\ ;\ j = \overline{1,n}\right)$. Ясно, что $A = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} e_{ij}$. Другими словами матрица A является линейной комбинацией матриц e_{ij}, $i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$. Тогда в соответствии с теоремой 1 векторы $A, e_{11},\ldots,e_{mn}$ являются линейно зависимыми. Значит, векторы $e_{11}, e_{12,\ldots,} e_{mn}$ можно принять в качестве базиса пространства $R_{m\times n}$ ◄

2. В пространстве R^n в качестве базиса можно взять векторы $\bar{e}_1 = (1,0,\ldots,0), \bar{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots, \bar{e}_n = (0,0,\ldots,0,1)$

Пример 5.4.

1. Выяснить, образуют ли базис в пространстве $P_2(x)$ система векторов $1, x, x^2$.

►Сначала, докажем, что векторы $1, x, x^2$ в пространстве $P_2(x)$ линейно независимы.

Равенство (5.2) в данном случае имеет вид

$$\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot x + \lambda_3 \cdot x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого равенства, получаем: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Значит, векторы $1, x, x^2$ — линейно независимы. Очевидно, что любой многочлен второй степени $c + bx + ax^2$ является линейной комбинацией векторов $1, x, x^2$ с коэффициентами c, b, a. Следовательно, система векторов $1, x, x^2$ образует базис в пространстве $P_2(x)$. ◄

2. Аналогично, можно показать, что векторы $1, (x - x_0), (x - x_0)^2$, где $\forall x_0 \in R$, также образуют базис в пространстве $P_2(x)$.

3. Базисом в пространстве $P_n(x)$ являются системы $n+1$ векторов: $1, x, x^2,\ldots,x^n$ или $1, (x - x_0), (x - x_0)^2,\ldots,(x - x_0)^n$.

Пример 5.5. Показать, что в пространстве $T_\varphi(R)$ базис образуют два вектора: $e_1 = \cos\varphi t$ и $e_2 = \sin\varphi t$, и поэтому размерность $T_\varphi(R)$ равна двум.

► Сначала, докажем, что векторы e_1 и e_2 в пространстве $T_\varphi(R)$ линейно независимы.

Равенство (5.2) в данном случае имеет вид

$$\lambda_1 \cos\varphi t + \lambda_2 \sin\varphi t = \overline{0} = 0\cos\varphi t + 0\sin\varphi t$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos\varphi t$ и $\sin\varphi t$ в левой и правой частях этого равенства, получаем: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Значит векторы $\cos\varphi t$ и $\sin\varphi t$ линейно независимы. Ясно, что любой вектор пространства $T_\varphi(R)$, т. е. любой многочлен $f(t) = a\cos\varphi t + b\sin\varphi t$, можно рассматривать как линейную комбинацию векторов $\cos\varphi t$ и $\sin\varphi t$. Значит, любые три вектора $\cos\varphi t, \sin\varphi t$ и $f(t) = a\cos\varphi t + b\sin\varphi t$ являются линейно зависимыми. Следовательно, два вектора $e_1 = \cos\varphi t$ и $e_2 = \sin\varphi t$ образуют базис в пространстве $T_\varphi(R)$, а размерность этого пространства равна двум.

Теорема 2. Всякий вектор $\overline{a} \in V_n$ единственным образом представим в виде линейной комбинации векторов базиса.

Доказательство.

Пусть векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ образуют базис пространства V_n. Тогда векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ и $\overline{a}$ линейно зависимы, и, следовательно, существует линейная комбинация $\mu\overline{a} + \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{e}_k = \overline{0}$. При этом $\mu \neq 0$, иначе векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ линейно зависимы, т. е. не образуют базиса. Поэтому

$$\overline{a} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{e}_k \text{, где } \alpha_k = -\frac{\lambda_k}{\mu}. \qquad (5.3)$$

Теперь докажем, что представление (5.3) единственно.

Предположим, что существует ещё одно представление $\overline{a} = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k \overline{e}_k$.

Вычитая из (5.3) последнее соотношение получим

$$\overline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\overline{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\overline{e}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\overline{e}_n \qquad (5.4)$$

В (5.4) $\alpha_k - \beta_k = 0, k = 1,2,\ldots,n$, так как иначе векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ не образуют базиса. ☻

Пример 5.6. Показать, что система векторов, рассмотренная в примере 5.2., хотя и является линейно независимой в пространстве $P_3(x)$, но базиса в этом пространстве не образует.

► Пусть $p_0x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3$ произвольный многочлен из пространства $P_3(x)$. Если векторы $x^3 - 2x^2 + 2$; $x^2 + 5$; 5 образуют базис, то тогда в соответствии с теоремой 2 этот многочлен может быть представлен в виде линейной комбинации этих векторов, причём единственным образом. Другими словами

$$p_0x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = \alpha_1\left(x^3 - 2x^2 + 2\right) + \alpha_2\left(x^2 + 5\right) + \alpha_3 \cdot 5$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого равенства, получаем систему

$$\begin{cases} p_0 = \alpha_1 \\ p_1 = -2\alpha_1 + \alpha_2 \\ p_2 = 0 \\ p_3 = 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 5\alpha_3 \end{cases}$$

Из этой системы следует, что многочлен $p_0x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3$ не является произвольным, т.к. коэффициент $p_2 = 0$. Таким образом, не любой вектор пространства $P_3(x)$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $x^3 - 2x^2 + 2;\ x^2 + 5;\ 5$. Значит, эти векторы не образуют базис.◄

Коэффициенты разложения (5.4) называются *координатами вектора* $\bar{a}$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$.

Из теоремы 2 следует: если базис линейного пространства V_n фиксирован, то для задания любого вектора пространства достаточно задать только координаты этого вектора в выбранном базисе. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между векторами линейного пространства и множеством упорядоченных совокупностей действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т. е. векторами пространства R^n. В пространстве R^n при сложении векторов их координаты складываются, а чтобы умножить вектор на число на это же число надо умножить координаты вектора. Следовательно, чтобы сложить векторы пространства V_n надо сложить их координаты, а чтобы умножить вектор на число надо на это же число умножить все его координаты. Этот факт является частью более общей теории, называемой *изоморфизмом* линейных пространств.

Два произвольных вещественных линейных пространства V и V' называются *изоморфными,* если между векторами этих пространств можно установить взаимно однозначное соответствие таким образом, что если векторам $x, y \in V$ соответствуют векторы $x', y' \in V'$, то вектору $x + y$ соответствует вектор $x' + y'$, а вектору $\lambda x,\ \forall \lambda \in R$ отвечает вектор $\lambda x'$.

Если линейные пространства V и V' изоморфны, то нулевому вектору пространства V соответствует нулевой вектор пространства V'. Следовательно, если пространства V и V' изоморфны и элементам $x_j \in V,\ j = 1,2,\ldots,n$ отвечают элементы $x'_j \in V',\ j = 1,2,\ldots,n$, то линейная комбинация $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ будет нулевым вектором пространства V тогда и только тогда, когда линейная комбинация $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j x'_j$ будет нулевым вектором пространства V'.

Значит, если пространства V и V' изоморфны, то максимальное число линейно независимых векторов в каждом из этих пространств одно и то же, т. е. *изоморфные линейные пространства имеют одинаковую размерность*.

Справедливо и обратное утверждение: *два любых вещественных линейных пространств одинаковой размерности изоморфны*.

6. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА ОТ ОДНОГО БАЗИСА К ДРУГОМУ

Как видно из рассмотренных примеров, в линейном вещественном пространстве базисов может быть несколько. Как связаны между собой векторы разных базисов линейного пространства?

Пусть $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ и $\overline{e}'_1,\overline{e}'_2,\ldots,\overline{e}'_n$ два разных базиса пространства V_n. Каждый вектор $\overline{e}'_k, k=1,2,\ldots,n$ единственным образом можно разложить по базису $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$, т. е.

$$\overline{e}'_k=\tau_{1k}\overline{e}_1+\tau_{2k}\overline{e}_2+\ldots+\tau_{nk}\overline{e}_n=\sum_{j=1}^{n}\tau_{jk}\overline{e}_j,\ k=1,2,\ldots,n \tag{6.1}$$

Введём в рассмотрение матрицу

$$T=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \cdots & \tau_{nn}\end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Матрица T *называется матрицей перехода* от базиса $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ к базису $\overline{e}'_1,\overline{e}'_2,\ldots,\overline{e}'_n$.

Подчеркнём, что столбец с номером $k=1,2,\ldots,n$ матрицы T состоит из координат вектора $\overline{e}'_k$ в базисе $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$.

Соотношение (6.1) тогда можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix}\overline{e}'_1 & \overline{e}'_2 & \ldots & \overline{e}'_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \ldots & \overline{e}_n\end{pmatrix}\cdot T \tag{6.3}$$

С другой стороны, совершенно аналогично можно было бы каждый вектор базиса $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ разложить по базису $\overline{e}'_1,\overline{e}'_2,\ldots,\overline{e}'_n$, т. е. существует такая матрица L, что

$$\begin{pmatrix}\overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \ldots & \overline{e}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{e}'_1 & \overline{e}'_2 & \ldots & \overline{e}'_n\end{pmatrix}\cdot L \tag{6.4}$$

Теперь подставим соотношение (6.4) в выражение (6.3).

В результате получим

$$\left(\bar{e}'_1 \quad \bar{e}'_2 \quad \dots \quad \bar{e}'_n\right) = \left(\bar{e}'_1 \quad \bar{e}'_2 \quad \dots \quad \bar{e}'_n\right) \cdot L \cdot T \Rightarrow L \cdot T = E, \qquad (6.5)$$

где E единичная матрица.

Следовательно, $L = T^{-1}$ или $T = L^{-1}$. Таким образом, матрицы взаимного перехода от одного базиса пространства V_n к другому являются взаимно обратными, и поэтому они невырожденные.

Пример 6.1. Рассматривается линейное пространство вещественных квадратных матриц второго порядка $[2]$. Пусть базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ составляют векторы

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а базис $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3, \bar{e}'_4$ состоит из векторов

$$\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу T перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ к базису $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3, \bar{e}'_4$ и убедиться, что она невырожденная.

► В соответствии с правилами сложения матриц и умножения матрицы на число замечаем, что

$$\bar{e}'_1 = 2\bar{e}_1, \bar{e}'_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2, \bar{e}'_3 = 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3, \bar{e}'_4 = -\bar{e}_4.$$

Следовательно,

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \det T = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (-1) = -12$$

Так как определитель матрицы T не равен нулю, то она является невырожденной.◄

Пример 6.2. В пространстве $P_2(x)$ найти матрицу T перехода от базиса $x^2, x, 1$ к базису $(x+1)^2, (x+1), 1$ и матрицу L обратного перехода.

► Пусть $e_1 = x^2$, $e_2 = x$, $e_3 = 1$.

Тогда $e'_1 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $e'_2 = e_2 + e_3$, $e'_3 = e_3$.

Следовательно, матрица перехода от первого базиса ко второму равна $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Теперь найдем матрицу $L = T^{-1}$ обратного перехода.

Имеем.

$$\det T = 1;\ T_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ T_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ T_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$T_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ T_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ T_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$T_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ T_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ T_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

Следовательно,

$$L = T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. ◄$$

Пример 6.3. Найти матрицу T перехода от первого базиса e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 ко второму базису e_2, e_3, e_1, e_5, e_4 и матрицу L обратного перехода от второго базиса к первому.

► *Способ 1.*

Составим матрицу T, а затем найдём матрицу обратного перехода с помощью формулы $L = T^{-1}$.

Так как

$$e'_1 = e_2;\ e'_2 = e_3; e'_3 = e_1; e'_4 = e_5; e'_5 = e_4,$$

то матрица T перехода от первого базиса ко второму имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицу T^{-1} будем искать с помощью элементарных преобразований матрицы T.

$$(T|E) = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&0&0&1&0\end{array}\right)=(E|L)\Rightarrow L=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Пояснение. Матрица $(E|L)$ получается из матрицы $(T|E)$, если в матрице $(T|E)$ сначала поменять местами вторую и первую строки и пятую с четвёртой. Затем в получившейся матрице поменять местами вторую и третью строки.

Способ 2.

Примем в качестве первого базиса базис e_2, e_3, e_1, e_5, e_4, а в качестве второго — e_1, e_2, e_3, e_4, e_5. Тогда $e_1' = e_3;\ e_2' = e_1; e_3' = e_2; e_4' = e_5; e_5' = e_4$. Используя теперь определение матрицы перехода от одного базиса к другому (6.1)–(6.2), сразу получим

$$L=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}. \blacktriangleleft$$

7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ ВЕКТОРА ПРИ ПЕРЕХОДЕ ОТ ОДНОГО БАЗИСА К ДРУГОМУ

Пусть вектор $\bar{x}$ имеет координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ и координаты $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ в базисе $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$. Установим связь между этими координатами, т. е. между $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$.

Имеем

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{e}_k,\ \bar{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k' \bar{e}_k' \ \text{ и } \ \bar{e}_k' = \sum_{j=1}^{n} \tau_{jk} \bar{e}_j .$$

Тогда

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k' \bar{e}_k' = \sum_{k=1}^{n} x_k' \sum_{j=1}^{n} \tau_{jk} \bar{e}_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k' \tau_{jk} \right) \bar{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{e}_j \Rightarrow$$

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \tau_{jk} x_k',\ k = 1,2,\ldots,n \qquad (7.1)$$

Введём в рассмотрение матрицы-столбцы $X=(x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)^T$ и $X'=(x'_1 \quad x'_2 \quad \dots \quad x'_n)^T$. Тогда систему (7.1) можно переписать в виде

$$X = T \cdot X', \tag{7.2}$$

где T — матрица перехода от базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ к базису $\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \dots, \overline{e}'_n$.

Так как матрица T неособенная, то, умножая (7.2) слева на матрицу T^{-1}, получим

$$X' = T^{-1}X \tag{7.3}$$

Пример 7.1. Дана матрица $T=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса e_1, e_2 к базису e'_1, e'_2. Найти координаты вектора $x = 4e_1 + e_2$ в базисе e'_1, e'_2.

►Так как

$$X=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ а } T^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$X'=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8+2 \\ -4+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1{,}25 \\ -0{,}125 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $x = 1{,}25e'_1 - 0{,}125e'_2$ ◄

Пример 7.2. Даны два базиса: e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3. Найти координаты вектора $x = 3e_1 - 2e_2 + e_3$ в базисе e'_1, e'_2, e'_3, если $e'_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_2 = 3e_1 + 4e_3$, $e'_3 = e_3$.

►Матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e'_1, e'_2, e'_3 имеет вид

$$T=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу T^{-1} отыщем методом Гаусса — Жордана

$$(T|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

(поменяли местами первую и вторую строки)

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$$

(из второй и третьей строк вычли первую)

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right)=\left(E\middle|T^{-1}\right)\Rightarrow T^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(вторую строку поделили на 3, умножили на (-4) и сложили с третьей)

Значит,

$$X'=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } x=-2e_1'+\frac{5}{3}e_2'-\frac{11}{3}e_3' \blacktriangleleft$$

Пример 7.3. Найти матрицу перехода от базиса a_1, a_2, a_3 к базису b_1, b_2, b_3, если заданы разложения этих векторов в базисе e_1, e_2, e_3:

$a_1 = 3e_1 + 2e_2 + e_3$, $a_2 = e_1 - 2e_2 + e_3$, $a_3 = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$

$b_1 = e_1 + e_2$, $b_2 = e_1 - e_3$, $b_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

► Пусть T — матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису a_1, a_2, a_3, а T_1 — матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису b_1, b_2, b_3, т. е.

$$(a_1\ a_2\ a_3)=(e_1\ e_2\ e_3)\cdot T, \text{ а } (b_1\ b_2\ b_3)=(e_1\ e_2\ e_3)\cdot T_1 \qquad (7.4)$$

В соответствии с условиями задачи

$$T=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};\ T_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из соотношений (7.4) можно получить, что $(b_1\ b_2\ b_3)=(a_1\ a_2\ a_3)\cdot T^{-1}\cdot T_1$, т. е. матрица перехода от базиса a_1, a_2, a_3 к базису b_1, b_2, b_3 вычисляется по формуле $L = T^{-1}T_1$.

Имеем

$$T_{11}=\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-8; T_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-4; T_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4;$$

$$T_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-1; T_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=7; T_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2;$$

$$T_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=6; T_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-2; T_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-8;$$

$$\det T=3\cdot(-8)+1\cdot(-4)+2\cdot 4=-20;\ T^{-1}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -6 \\ 4 & -7 & 2 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$L=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}8 & 1 & -6\\ 4 & -7 & 2\\ -4 & 2 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}9 & 14 & 3\\ -3 & 2 & -1\\ -2 & -12 & 6\end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

Пример 7.4. Найти матрицу перехода от базиса a_1,a_2,a_3 к базису b_1,b_2,b_3, если известно, что:

$a_1=3e_1+2e_2+e_3,\ a_2=e_1-2e_2+e_3,\ a_3=2e_1+2e_2+3e_3$;

$b_1=e_1'+e_2',\ b_2=e_1'-e_3',\ b_3=e_1'+e_2'+e_3'$.

Матрица T_0 перехода от базиса e_1,e_2,e_3 к базису e_1',e_2',e_3' имеет вид

$$T_0=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

► Пусть T — матрица перехода от базиса e_1,e_2,e_3 к базису a_1,a_2,a_3, а T_1 — матрица перехода от базиса e_1',e_2',e_3' к базису b_1,b_2,b_3, т. е.

$$(a_1\ a_2\ a_3)=(e_1\ e_2\ e_3)\cdot T, \text{ а } (b_1\ b_2\ b_3)=(e_1'\ e_2'\ e_3')\cdot T_1.$$

Кроме того, по условию $(e_1'\ e_2'\ e_3')=(e_1\ e_2\ e_3)\cdot T_0$. Исключив из этих соотношений матрицы $(e_1\ e_2\ e_3)$ и $(e_1'\ e_2'\ e_3')$, получим

$$(b_1\ b_2\ b_3)=(a_1\ a_2\ a_3)\cdot T^{-1}\cdot T_0\cdot T_1.$$

Так что интересующая нас матрица перехода от базиса a_1,a_2,a_3 к базису b_1,b_2,b_3 вычисляется по формуле $L=T^{-1}T_0T_1$. Матрицы T,T^{-1},T_1 найдены в примере 7.3. Следовательно,

$$L=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}8 & 1 & -6\\ 4 & -7 & 2\\ -4 & 2 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}8 & 1 & -6\\ 4 & -7 & 2\\ -4 & 2 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}18 & 1 & 32\\ 14 & 13 & 16\\ -4 & 2 & -16\end{pmatrix}$$

Замечание.

Отметим, что выражение $(b_1\ b_2\ b_3)=(a_1\ a_2\ a_3)\cdot T^{-1}\cdot T_0\cdot T_1$ представляет разложение векторов базиса b_1,b_2,b_3 по базису e_1,e_2,e_3. Легко убедиться, что матрицей перехода от базиса e_1,e_2,e_3 к базису b_1,b_2,b_3 является матрица $T_0\cdot T_1$, т. е.

$$(b_1\ \ b_2\ \ b_3) = (e_1\ \ e_2\ \ e_3)\cdot T_0 \cdot T_1 = (e_1\ \ e_2\ \ e_3)\cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$b_1 = 3e_1 + e_3, b_2 = e_1 - e_2 + e_3, b_3 = 4e_1$.◄

8. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО. УГОЛ МЕЖДУ ВЕКТОРАМИ. НЕРАВЕНСТВО КОШИ — БУНЯКОВСКОГО

Будем говорить, что в вещественном линейном пространстве V определено *скалярное произведение*, если каждой паре векторов $\bar{x}, \bar{y} \in V$ поставлено в соответствие действительное число $(\bar{x}, \bar{y})$, причём это соответствие обладает следующими свойствами

1) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$;   2) $\lambda(\bar{x}, \bar{y}) = (\lambda\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, \lambda\bar{y})$;

3) $(\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z})$;   4) $(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0$.

Знак «=» в последнем неравенстве возможен только когда $\bar{x} = \bar{0}$.

Линейное пространство V, в котором определено скалярное произведение, удовлетворяющее перечисленным четырём свойствам (аксиомам), называется *евклидовым пространством*.

Замечание.

Подчеркнём два обстоятельства.

1. При введении понятия евклидова пространства мы никак не уточняли ни природу элементов пространства V, ни правило образования суммы элементов пространства V, ни правило умножения элементов этого пространства на действительное число. Важно лишь, чтобы эти правила удовлетворяли восьми аксиомам линейного пространства.

2. При введении скалярного произведения элементов линейного пространства V, также не фиксируется какое-либо определённое правило вычисления скалярного произведения. Важно лишь, чтобы это правило удовлетворяло четырём вышеперечисленным аксиомам.

Рассмотрим несколько конкретных примеров евклидовых пространств.

Пример 8.1.

Определим скалярное произведение в пространстве R^n с базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ формулой

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad (8.1)$$

►Очевидность выполнения 1), 2) и 4) аксиом скалярного произведения, не вызывает сомнений. Проверим выполнение третьей аксиомы.

$$(\bar{x}+\bar{y},\bar{z})=\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)z_k=\sum_{k=1}^{n}(x_k z_k+y_k z_k)=\sum_{k=1}^{n}x_k z_k+\sum_{k=1}^{n}y_k z_k= \blacktriangleleft$$
$$=(\bar{x},\bar{z})+(\bar{x},\bar{z})$$

Пространство R^n, в котором скалярное произведение определяется с помощью соотношения (8.1), принято обозначать символом E^n.

Пример 8.2. Проверить, является ли евклидовым пространство $C[a,b]\,(a<b)$, в котором каждой паре функций $f(x)$ и $g(x)$ этого пространства в качестве скалярного произведения ставится в соответствие число

$$(f,g)=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx\,, \tag{8.2}$$

где «вес» $\rho(x)$ — фиксированная положительная непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция.

►Выполнение 1), 2) и 3) аксиом следует из свойств определённого интеграла. Докажем только справедливость четвёртой аксиомы.

Прежде всего, отметим следующее. Если $f(x)\neq 0$ хотя в одной точке $x_0\in[a,b]$, то в силу непрерывности функции $f(x)$ на этом отрезке, существует некоторый отрезок $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, в котором $f^2(x)>0$. Поэтому

$$(f,f)=\int_a^b \rho(x)f^2(x)dx=\int_\alpha^\beta \rho(x)f^2(x)dx>0$$

и, следовательно, равенство $(f,f)=0$ возможно лишь при условии, что $f(x)\equiv 0,\ x\in[a,b]$.◄

Пример 8.3. В линейном пространстве $P_n(x)$ — алгебраических многочленов, степень которых не превосходит n, скалярное произведение может быть введено с помощью, например, соотношения

$$(P,Q)=\sum_{k=0}^{n}p_k q_k\,, \tag{8.3}$$

где $P=P(x)=\sum_{k=0}^{n}p_k x^{n-k}$; $Q=Q(x)=\sum_{k=0}^{n}q_k x^{n-k}$,

или соотношения

$$(P,Q)=\int_a^b P(x)Q(x)dx, \tag{8.4}$$

где $a,b,\ (a<b)$ — некоторые фиксированные числа.

Пример 8.4. В линейном пространстве $R_{n\times n}$ — квадратных матриц порядка n в качестве скалярного произведения матриц A и B можно взять число

$$(A,B)=Sp\left(A\cdot B^T\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{jk} \tag{8.5}$$

Напомним, что символом $Sp(C)$ обозначается *след* матрицы C — сумма элементов этой матрицы, стоящих на главной диагонали.

Выполнение аксиом скалярного произведения для выражений (8.3)–(8.5) предлагаем проверить внимательным читателям самостоятельно.

Длиной вектора $\overline{x}$ в евклидовом пространстве называется число

$$|\overline{x}|=\sqrt{(\overline{x},\overline{x})} \tag{8.6}$$

Так как формула для вычисления скалярного произведения векторов в евклидовом пространстве, вообще говоря, может быть введена несколькими способами, то используя различные формулы, можно получить различные значения длины одного и того же вектора этого пространства. Поэтому, вместо термина *длина* вектора часто пользуются термином *норма* вектора. Норму вектора $\overline{x}$ принято обозначать символом $\|\overline{x}\|$. Например, евклидовой нормой квадратной матрицы $A_{n\times n}$ называют число

$$\|A\|=Sp\left(A\cdot A^T\right)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}^2}\,.$$

Углом между векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$ назовём число

$$\varphi=\arccos\frac{(\overline{x},\overline{y})}{|\overline{x}||\overline{y}|}\,,\ 0\le\varphi\le\pi\,. \tag{8.7}$$

Если $(\overline{x},\overline{y})=0$, то векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ называются *ортогональными.*

Для того чтобы угол между векторами $\overline{x}$ и $\overline{y}$ можно было бы определить по формуле (8.7), должно выполняться условие

$$-1\le\frac{(\overline{x},\overline{y})}{|\overline{x}||\overline{y}|}\le1\Leftrightarrow(\overline{x},\overline{y})^2\le(\overline{x},\overline{x})\cdot(\overline{y},\overline{y}) \tag{8.8}$$

Неравенство (8.8) называется *неравенством Коши — Буняковского*.

Для доказательства (8.8) рассмотрим вектор $\overline{x}+t\,\overline{y}$, где t — любое действительное число. Имеем $(\overline{x}+t\,\overline{y},\overline{x}+t\,\overline{y})\ge0$, или

$$(\overline{x},\overline{x})+2t(\overline{x},\overline{y})+t^2(\overline{y},\overline{y})\ge0 \tag{8.9}$$

Соотношение (8.9) является квадратным трёхчленом относительно t. Так как этот трёхчлен принимает только неотрицательные значения при любых значениях t, то его дискриминант может быть только неположительным, т. е.

$$D=\left(\bar{x},\bar{y}\right)^2-\left(\bar{x},\bar{x}\right)\cdot\left(\bar{y},\bar{y}\right)\le 0 \Rightarrow (8.8)$$ ☻

С помощью неравенства Коши — Буняковского легко доказать ещё одно важное и хорошо известное неравенство — *неравенство треугольника:*

$$\left|\bar{x}+\bar{y}\right|\le\left|\bar{x}\right|+\left|\bar{y}\right| \tag{8.10}$$

В самом деле, имеем

$$0\le\left(\bar{x}+\vec{y},\bar{x}+\vec{y}\right)=\left|\bar{x}+\vec{y}\right|^2=\left(\bar{x},\bar{x}\right)+2\left(\bar{x},\bar{y}\right)+\left(\bar{y},\bar{y}\right)\le\left|\bar{x}\right|^2+2\left|\bar{x}\right|\left|\bar{y}\right|+\left|\bar{y}\right|^2=$$
$$=\left(\left|\bar{x}\right|+\left|\bar{y}\right|\right)^2\Rightarrow\left|\bar{x}+\bar{y}\right|\le\left|\bar{x}\right|+\left|\bar{y}\right|$$ ☻

9. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. МАТРИЦА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть даны два множества Q и Q_1 элементов различной природы. Правило, которое каждому элементу $\bar{x}$ множества Q ставит в соответствие элемент $\bar{y}$ множества Q_1, принято называть *преобразованием* или *оператором*, действующим из множества Q в множество Q_1.

В дальнейшем будем рассматривать только такие операторы, которые вектору линейного (евклидова) пространства V *ставят в соответствие только один вектор этого же пространства*, а для обозначения преобразования будем использовать запись

$$A:\bar{x}\to\bar{y} \text{ или } \bar{y}=A\left(\bar{x}\right) \text{ или } \bar{y}=A\bar{x},\ \bar{x},\bar{y}\in V \tag{9.1}$$

Оператор A *называется линейным*, если для любых векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, принадлежащих линейному пространству, выполняются два условия (аксиома аддитивности и аксиома однородности):

1) $A\left(\bar{x}+\bar{y}\right)=A\bar{x}+A\bar{y}$

2) $A\left(\lambda\bar{x}\right)=\lambda A\bar{x}$

Теорема. Линейный оператор A, действующий в линейном пространстве V_n, переводит линейную комбинацию одних векторов в линейную комбинацию других.

Доказательство.

Пусть $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_n$ произвольные векторы из некоторого линейного пространства.

По определению линейного оператора

$$A\left(\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_1\bar{a}_2+\ldots+\lambda_1\bar{a}_n\right)=\lambda_1A\left(\bar{a}_1\right)+\lambda_2A\left(\bar{a}_2\right)+\ldots+\lambda_nA\left(\bar{a}_n\right)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\bar{y}_k$$ ☻

Пусть $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$ — базис в линейном пространстве V_n. Линейный оператор A переводит каждый вектор $\bar{e}_k$, $k=1,2,\ldots,n$ в вектор $A\left(\bar{e}_k\right)$.

Разложим этот вектор по базису

$$A(\bar{e}_k) = a_{1k}\bar{e}_1 + a_{2k}\bar{e}_2 + \ldots + a_{nk}\bar{e}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\bar{e}_j \tag{9.2}$$

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n

$$A = \|a_{ij}\|, \left(i = \overline{1,n}\ ;\ j = \overline{1,n}\right) \tag{9.3}$$

Матрица A называется *матрицей линейного оператора* A в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$. Эту матрицу всегда будем обозначать также как и сам линейный оператор. Столбцы матрицы A состоят из координат вектора $A(\bar{e}_k)$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$.

Задание матрицы A полностью определяет линейный оператор A, т. е. зная матрицу A и вектор x, можно найти вектор $\bar{y} = A(\bar{x})$.

В самом деле, пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\bar{e}_k$.

Найдём вектор $\bar{y} = A(\bar{x})$. Имеем

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j\bar{e}_j = A(\bar{x}) = A\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\bar{e}_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k A(\bar{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} a_{jk}\bar{e}_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k a_{jk}\right)\bar{e}_j$$

Откуда

$$y_j = \sum_{k=1}^{n} x_k a_{jk},\ j = 1,2,\ldots,n \tag{9.4}$$

Таким образом, найдены координаты вектора $\bar{y} = A(\bar{x})$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$.

Введём матрицы — столбцы

$$Y = (y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n)^T \text{ и } X = (x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)^T.$$

Тогда согласно соотношению (9.4) линейное преобразование $\bar{y} = A(\bar{x})$ равносильно матричному уравнению

$$Y = A \cdot X \tag{9.5}$$

Пример 9.1. Найти матрицу A линейного оператора, действующего в пространстве E_3 с базисом $\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)$, если известно, что этот оператор переводит всякий вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $\bar{y} = A(\bar{x}) = (2x_1, x_1 - 3x_2, -x_3)$.

► Найдём векторы $A(\bar{e}_1)$, $A(\bar{e}_2)$, $A(\bar{e}_3)$ и разложим их по базису.

$$A(\bar{e}_1) = (2,1,0), A(\bar{e}_2) = (0,-3,0), A(\bar{e}_3) = (0,0,-1).$$

В соответствии с (9.2): $A(\bar{e}_1) = a_{11}(1,0,0) + a_{21}(0,1,0) + a_{31}(0,0,1) = (2,1,0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a_{11} = 2, a_{21} = 1, a_{31} = 0$. Аналогично, $a_{12} = 0, a_{22} = -3, a_{32} = 0$ и $a_{13} = 0, a_{23} = 0, a_{33} = -1$.

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Замечание. Можно заметить, что коэффициенты разложения векторов $A(\bar{e}_1), A(\bar{e}_2), A(\bar{e}_3)$ по базису в данном случае совпадают с координатами этих векторов. Это получилось не случайно. Базис $\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (0,1,0), \bar{e}_3 = (0,0,1)$ является каноническим. Известно, что *коэффициенты разложения любого вектора по каноническому базису совпадают с его координатами.* ◄

Пример 9.2. В пространстве $P_n(x)$ рассматривается оператор дифференцирования, ставящий в соответствие каждому алгебраическому многочлену степени не выше n, его производную, которая, очевидно, также является многочленом степени не выше n: $D(P(x)) = P'(x)$. Требуется найти матрицы D и D' этого оператора соответственно в базисах

$$e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2, \ldots, e_{n+1} = x^n \text{ и } e'_1 = 1, e'_2 = \frac{x}{1!}, e_3 = \frac{x^2}{2!}, \ldots, e_{n+1} = \frac{x^n}{n!}.$$

►Как известно [3], производная от суммы функций равна сумме производных этих функций, и постоянное число можно выносить за знак производной. Поэтому оператор $D(P(x)) = P'(x)$ является линейным. Найдём векторы $D(e_1), D(e_2), \ldots, D(e_{n+1})$, а также $D(e'_1), D(e'_2), \ldots, D(e'_{n+1})$ и разложим их по соответствующему базису.

$$D(e_1) = (1)' = 0,\ D(e_2) = (x)' = 1, \ldots,\ D(e_{n+1}) = \left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

$$D(e'_1) = (1)' = 0,\ D(e'_2) = \left(\frac{x}{1!}\right)' = 1, \ldots,\ D(e'_{n+1}) = \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Видим, что

$D(e_1) = 0e_1 + 0e_2 + \ldots + 0e_{n+1}, D(e_2) = 1e_1 + 0e_2 + \ldots + 0e_{n+1}$,

$D(e_3) = 0e_1 + 2e_2 + \ldots + 0e_{n+1}, \ldots, D(e_{n+1}) = 0e_1 + 0e_2 + \ldots + ne_n + 0e_{n+1}$.

$D(e'_1) = 0, D(e'_2) = e'_1, D(e'_3) = e'_2, \ldots, D(e'_{n+1}) = e'_{n-1}$

Следовательно,

$$D=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\ \text{а}\quad D'=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}\qquad ◄$$

Пример 9.3. В пространстве $T_\varphi(R)$ рассматривается оператор дифференцирования, который каждой функции $f(t)=a\cos\varphi t+b\sin\varphi t$ ставит в соответствие её производную $f'(t)=(-a\sin\varphi t+b\cos\varphi t)\varphi$, т. е. $d(f(t))=f'(t)$.

Базис в пространстве $T_\varphi(R)$ составляют векторы: $e_1=\cos\varphi t$ и $e_2=\sin\varphi t$. Требуется найти матрицу этого оператора.

► $d(e_1)=-\varphi\sin\varphi t=-\varphi e_2$, $d(e_2)=\varphi\cos\varphi t=\varphi e_1$.

Значит, матрица оператора $d(f(t))=f'(t)$ имеет вид

$$d=\begin{pmatrix}0 & \varphi\\ -\varphi & 0\end{pmatrix} ◄$$

В заключение этого параграфа отметим, что оператор $E(x)$, который ставит в соответствие вектору $\bar{x}$ тот же самый вектор, т. е. $\bar{x}=E(\bar{x})$, называется *тождественным* или *единичным*. Матрица тождественного оператора в любом базисе является единичной.

Оператор A, ставящий в соответствие вектору $\bar{x}$ нулевой вектор, называется *нулевым*, т. е. $A(\bar{x})=\bar{0}$. Матрица нулевого оператора в любом базисе является нулевой.

10. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ПРИ ПЕРЕХОДЕ К НОВОМУ БАЗИСУ

Пусть A — линейный оператор: $\bar{y}=A(\bar{x})$. Пусть $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$ и $\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\ldots,\bar{e}'_n$ — два базиса, и, наконец, T — матрица перехода от базиса $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$ к базису $\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\ldots,\bar{e}'_n$.

В базисе $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$ вектору $\bar{x}$, вектору $\bar{y}$ и оператору A соответствуют столбец $X=(x_1\quad x_2\quad \ldots\quad x_n)^T$, столбец $Y=(y_1\quad y_2\quad \ldots\quad y_n)^T$ и матрица A, а в базисе $\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\ldots,\bar{e}'_n$ – X', Y' и A'. В соответствии с соотношениями (7.2) и (7.3): $X'=T^{-1}X$, $Y'=T^{-1}Y$, $X=T\cdot X'$. С другой стороны $Y=A\cdot X$, а $Y'=A'\cdot X'$. Следовательно,

$$Y'=A'\cdot X'=T^{-1}Y=T^{-1}AX=T^{-1}ATX'=\left(T^{-1}AT\right)X'\Rightarrow$$

$$A'=T^{-1}AT \tag{10.1}$$

Пример. 10.1. Даны два базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ и $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2$ линейного пространства и матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ линейного оператора в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. Найти матрицу A' этого оператора в базисе $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2$, если $\bar{e}'_1 = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$, $\bar{e}'_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2$.

► Матрица перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ к базису $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2$ имеет вид $T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, значит обратная матрица $T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Следовательно,
$$A' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ -1 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 14 \\ -41 & -21 \end{pmatrix}. ◄$$

Пример. 10.2. В базисе $\bar{e}_1 = (1,2)$, $\bar{e}_2 = (-1,2)$ линейный оператор A имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $\bar{e}'_1 = (2,0)$, $\bar{e}'_2 = (-2,-4)$.

►Сначала найдём матрицу T перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ к базису $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2$. Очевидно, что $\bar{e}'_2 = -2\bar{e}_1$. Найдём коэффициенты разложения вектора $\bar{e}'_1$ по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2$. Имеем
$$\bar{e}'_1 = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Будем решать эту систему методом Гаусса — Жордана:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

Следовательно, $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$. Значит, $T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Обратная матрица $T^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, а матрица A' оператора A в базисе $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2$ в соответствии с (10.1) равна
$$A' = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. ◄$$

11. АЛГЕБРА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть V — некоторое вещественное линейное векторное пространство, а $L(V)$ — множество всех линейных операторов, действующих в пространстве V. Пусть, наконец, заданы два оператора $A:V\to V$ и $B:V\to V$.

Операторы $A(x)$ и $B(x)$ называются *равными*, если $A(x)=B(x)\forall x\in V$. Другими словами, если A и B матрицы операторов $A(x)$ и $B(x)$ в одном и том же базисе пространства V, то для того чтобы эти операторы были равными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $A=B$.

На множестве $L(V)$ определены две линейные операции: *сложение операторов и умножение оператора на число* из того числового поля, на котором определено пространство V. Так как в результате этих операций получается также линейный оператор, то множество $L(V)$ удовлетворяет всем восьми аксиомам линейного пространства, т. е. множество $L(V)$ — линейное вещественное пространство.

Кроме линейных операций на множестве $L(V)$ могут определяться и другие операции.

Предположим, что линейный оператор задан невырожденной матрицей A, т. е. существует обратная матрица A^{-1}. Пусть $\overline{x}_1=A(\overline{x})$ или в матричной форме $X_1=A\cdot X\Rightarrow X=A^{-1}\cdot X_1$.

Оператор, который в некотором базисе задаётся матрицей A^{-1}, называется *обратным* оператору, задаваемому в этом базисе матрицей A.

Если $\overline{x}_1=A(\overline{x})$, а $\overline{x}_2=B(\overline{x}_1)$ или в матричном виде $X_1=A\cdot X$; $X_2=B\cdot X_1$, то $X_2=B\cdot A\cdot X=(B\cdot A)X$. Следовательно, линейный оператор, переводящий вектор $\overline{x}$ в вектор $\overline{x}_2$, определяется матрицей $C=B\cdot A$.

Оператор $C(x)$, который в некотором базисе определяется матрицей $C=B\cdot A$, называется *произведением* или *композицией* операторов $A(x)$ и $B(x)$.

Произведение операторов является некоммутативным, но ассоциативным и дистрибутивным [4].

Пример 11.1. Оператор $A(x)$ в базисе $\overline{e}_1,\overline{e}_2$ имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, а оператор $B(x)$ имеет матрицу $B'=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ в базисе $\overline{e}'_1=2\overline{e}_1-\overline{e}_2,\overline{e}'_2=\overline{e}_1-\overline{e}_2$. Найти матрицу оператора $A(x)+B(x)$ в базисах $\overline{e}_1,\overline{e}_2$ и $\overline{e}'_1,\overline{e}'_2$.

►1. Найдем матрицу B оператора $B(x)$ в базисе $\overline{e}_1,\overline{e}_2$.

Матрица T перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ к базису $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$ в соответствии с условием задачи имеет вид $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$\det T = -1, T_{11} = -1,\ T_{12} = 1, T_{21} = -1, T_{22} = 2 \Rightarrow T^{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = TB'T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица $A + B$ оператора $A(x) + B(x)$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ имеет вид

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Найдём матрицу A' оператора $A(x)$ в базисе $\bar{e}_1', \bar{e}_2'$.

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A' + B' = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 11 & 11 \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

Пример 11.2. В линейном пространстве R^3 оператор A переводит всякий вектор $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $\bar{y} = A(\bar{x}) = (3x_1, x_1 - x_2, 2x_3)$, а оператор B, также действующий в R^3, переводит вектор $\bar{y}$ в вектор $\bar{z} = B(\bar{y}) = (2y_1 + y_2, y_3 - y_1, y_1)$. Найти матрицу оператора C, который переводит вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{z}$, если базисом в пространстве R^3 служит система векторов $\bar{e}_1 = (1,0,0), \bar{e}_2 = (1,1,0), \bar{e}_3 = (1,1,1)$.

►1. Найдём матрицу оператора A. Для этого разложим векторы $A(\bar{e}_1), A(\bar{e}_2), A(\bar{e}_3)$ по базису. Имеем

$A(\bar{e}_1) = (3,1,0),\ A(\bar{e}_2) = (3,0,0),\ A(\bar{e}_3) = (3,0,2)$. Или

$$a_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_{31}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{21} + a_{31} = 3 \\ a_{21} + a_{31} = 1 \\ a_{31} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 2 \\ a_{21} = 1 \\ a_{31} = 0 \end{cases}$$

Аналогично, $a_{12} = 3,\ a_{22} = 0,\ a_{32} = 0, a_{13} = 1,\ a_{23} = -2,\ a_{33} = 2$.

Следовательно, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найдём матрицу оператора B.

$$B(\bar{e}_1) = (2,-1,1),\ B(\bar{e}_2) = (3,-1,1),\ B(\bar{e}_3) = (3,0,1)$$

$$b_{11}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+b_{21}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+b_{31}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}b_{11}+b_{21}+b_{31}=2\\b_{21}+b_{31}\qquad=-1\\b_{31}\qquad\qquad=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b_{11}=3\\b_{21}=-2\\b_{31}=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}b_{12}=4\\b_{22}=-2,\\b_{32}=1\end{cases}\begin{cases}b_{13}=3\\b_{23}=-1,\\b_{33}=1\end{cases}B=\begin{pmatrix}3&4&3\\-2&-2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

$$3.\ C=B\cdot A=\begin{pmatrix}3&4&3\\-2&-2&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&1\\1&0&-2\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&9&1\\-6&-6&0\\3&3&1\end{pmatrix}◄$$

12. ЯДРО И ОБРАЗ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Образом или *областью значений* линейного оператора $A:V\to V$ называется множество всех векторов $y\in V$, которые удовлетворяют соотношению $y=A(x),\ x\in V$. Обозначать образ оператора A принято символом: $\mathrm{Im}A$.

Ядром линейного оператора $A:V\to V$ называется множество всех векторов $x\in V$, которые удовлетворяют соотношению $A(x)=\overline{0}$, где $\overline{0}$ — нулевой вектор линейного пространства V. Обозначают ядро оператора A символом $\mathrm{Ker}A$.

Область значений и ядро линейного оператора являются подпространствами в линейном пространстве V.

Размерность образа оператора совпадает с рангом матрицы A линейного оператора, обозначается символом $\dim(\mathrm{Im}A)=\mathrm{rank}\,A$ и называется *рангом* оператора A.

Размерность ядра оператора называется *дефектом* этого оператора и обозначается символом $\dim(\mathrm{Ker}A)=\mathrm{defekt}\,A$.

Сумма ранга и дефекта оператора равна размерности линейного пространства V_n, т.е. $\dim(\mathrm{Im}A)+\dim(\mathrm{Ker}A)=n$.

Теорема. Пусть $A:V\to V$ — линейный оператор, действующий в n-мерном вещественном линейном пространстве V_n. Пусть известно, что $\dim(\mathrm{Ker}A)=k,\ 0\le k\le n$ и векторы $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_k$ образуют базис ядра оператора A, т. е. $A(\overline{e}_j)=\overline{0},\ j=1,2,\ldots,k$. Тогда если система векторов $\overline{e}_{k+1},\overline{e}_{k+2},\ldots,\overline{e}_n$, дополняет векторы $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_k$ до базиса пространства V_n, то векторы $A(\overline{e}_{k+1}),A(\overline{e}_{k+2}),\ldots,A(\overline{e}_n)$ образуют базис образа оператора A.

Доказательство.

В самом деле. Так как $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_k, \bar{e}_{k+1}, \ldots, \bar{e}_n$ — базис пространства V_n, то для $\forall x \in V_n$ справедливо единственное представление

$$x = \lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \ldots + \lambda_k\bar{e}_{k1} + \lambda_{k+1}\bar{e}_{k+1} + \ldots + \lambda_n\bar{e}_n \Rightarrow$$

$$A(x) = A\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\bar{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j A(\bar{e}_j) = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j \underbrace{A(\bar{e}_j)}_{0} + \sum_{j=k+1}^{n}\lambda_j A(\bar{e}_j) \Rightarrow$$

$$y = A(x) = \alpha_1 A(\bar{e}_{k+1}) + \alpha_2 A(\bar{e}_{k+2}) + \ldots + \alpha_{n-k} A(\bar{e}_n).$$

Как видим, всякий вектор y, входящий в подпространство $\operatorname{Im} A$, представлен в виде линейной комбинации векторов $A(\bar{e}_{k+1}), A(\bar{e}_{k+2}), \ldots, A(\bar{e}_n)$, причём единственным способом. ☻

Пример 12.1. В линейном пространстве R^4 с каноническим базисом $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$ действует линейный оператор A по правилу $y = A(x) = (x_1 + x_3, 2x_1, x_1 + x_2, 0)$. Определить матрицу оператора A, $\operatorname{rank} A$, $\operatorname{defekt} A$, $\operatorname{Ker} A$ и базис ядра, базис $\operatorname{Im} A$.

►Имеем

1. $A(e_1) = (1,2,1,0)$, $A(e_2) = (0,0,1,0)$, $A(e_3) = (1,0,0,0)$, $A(e_4) = (0,0,0,0)$

Так как в пространстве R^4 используется канонический базис, то

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Найдём ядро оператора A

$$A(x) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Будем решать эту систему методом Гаусса — Жордана.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_4 = t, x_1 = x_2 = x_3 = 0,\ \forall t \in R,\ t \neq 0$.

Следовательно,

$$\operatorname{Ker} A = t(0,0,0,1) = te_4,\ \operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{Im} A) = 3,\ \dim(\operatorname{Ker} A) = \operatorname{defekt} A = 1.$$

Базисом ядра оператора является вектор e_4. Векторы e_1, e_2, e_3 дополняют базис ядра оператора A до базиса пространства R^4. В соответствии с доказанной выше теоремой базис области значений оператора A составляют векторы $A(e_1) = (1,2,1,0)$, $A(e_2) = (0,0,1,0)$, $A(e_3) = (1,0,0,0)$.◄

Пример 12.2. Найти ядро, область значений, ранг и дефект линейного оператора $A : V \to V$, матрица которого в некотором базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

►1. Найдём ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований строк этой матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 6 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 5 \\ -9 & 0 & -9 & 9 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, то ранг матрицы A равен трём. Следовательно, $\operatorname{rank} A = \dim(\operatorname{Im} A) = 3$, $\dim(\operatorname{Ker} A) = \operatorname{defekt} A = 1$.

2. Уравнение $A(x) = \overline{0}$ приводится к виду $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Откуда получаем $x_4 = 0,\ x_3 = -t,\ x_1 = x_2 = t,\ \forall t \in R,\ t \neq 0$.

Следовательно, $\operatorname{Ker} A = t(1,1,-1,0)$

3. Найдём область значений оператора.

Если $x = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, то

$$y = A(x) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Так как

$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, а столбцы $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ линейно независимы, то

$$\operatorname{Im} A = \alpha_1(2,4,1,-1) + \alpha_2(1,3,5,1) + \alpha_3(-1,2,4,2), \ \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R. \blacktriangleleft$$

13. СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть A — линейный оператор, заданный квадратной матрицей A. Если существует *ненулевой вектор* $\overline{x}$ и такое число λ, что

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x}, \qquad 1)$$

то число λ и вектор $\overline{x}$ называются соответственно *собственным числом (собственным значением) и собственным вектором* оператора A (матрицы A).

Теорема. Каждому собственному вектору соответствует только одно собственное число.

Доказательство (метод от противного).

Предположим, что собственному вектору $\overline{x}$ соответствует два неравных друг другу собственных числа λ_1 и λ_2, т. е. $A\overline{x} = \lambda_1\overline{x}$ и $A\overline{x} = \lambda_2\overline{x}$, причём $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Вычтем из первого равенства второе и получим $\overline{0} = (\lambda_1 - \lambda_2)\overline{x}$. Так как $\overline{x} \neq \overline{0}$, то $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Откуда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2$, а это противоречит предположению. ☻

Теорема. Если $\overline{x}$ — собственный вектор с собственным числом λ, а $\gamma \neq 0$ — произвольное число, то вектор $\gamma\overline{x}$ также является собственным вектором, соответствующим собственному числу λ.

Доказательство.

$A(\gamma\overline{x}) = \gamma A\overline{x} = \gamma\lambda\overline{x} = \lambda(\gamma\overline{x})$ ☻

Теорема. Если $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$ — два собственных вектора с одним и тем же собственным числом λ, то их сумма $\overline{x}_1 + \overline{x}_2$ также является собственным вектором с собственным числом λ.

Доказательство.

Имеем $A\overline{x}_1 = \lambda\overline{x}_1$ и $A\overline{x}_2 = \lambda\overline{x}_2$. Поэтому

$$A(\overline{x}_1 + \overline{x}_2) = A\overline{x}_1 + A\overline{x}_2 = \lambda\overline{x}_1 + \lambda\overline{x}_2 = \lambda(\overline{x}_1 + \overline{x}_2)$$ ☻

Вернёмся к уравнению (13.1). Этому соотношению отвечает матричное уравнение

$$AX = \lambda EX \text{ или } (A - \lambda E)X = 0, \qquad (13.2)$$

где E и O — единичная и нулевая матрицы такого же порядка что и A.

Чтобы линейная однородная система (13.2) имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы её определитель был равен нулю, т. е.

$$\det(A - \lambda E) = |A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow f(\lambda) = 0 \qquad (13.3)$$

Выражение $f(\lambda)$ называется *характеристическим многочленом,* а уравнение (13.3) — *характеристическим уравнением* оператора A.

Система (13.2) в развёрнутом виде выглядит следующим образом

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots \qquad + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \qquad (13.4)$$

Пример 13.1. Найти собственные числа и соответствующие им собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

►1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-\lambda^3 + 18\lambda^2 - 99\lambda + 162 = (\lambda - 3)\left(-\lambda^2 + 15\lambda - 54\right) = 0 \qquad (13.5)$$

Корнями уравнения (13.5) являются числа $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 9, \lambda_3 = 3$.

2) Определяем теперь собственные векторы

При $\lambda_1 = 6$ система (13.4) имеет вид

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad = 0 \\ -2x_1 \quad - 2x_3 = 0 \\ \quad -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ -4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases} \qquad (13.6)$$

В (13.6) можно считать x_2 свободной неизвестной, а x_1 и x_3 — базисными. Возьмём $x_2 = 1$. Тогда получим, что $x_1 = 2,\ x_3 = -2$.
Следовательно, вектор $\overline{x}_1 = (2,1,-2)$ является собственным вектором, соответствующим собственному числу $\lambda_1 = 6$. Аналогично, для $\lambda_2 = 9$ находим вектор $\overline{x}_2 = (2,-2,1)$, а для $\lambda_3 = 3$– вектор $\overline{x}_3 = (1,2,2)$. ◄

Пример 13.2. Найти собственные числа и соответствующие им собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

►1). Составляем характеристическое уравнение и находим его корни

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 3 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -7 & 3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(2-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda - 2\right) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

2). Определяем теперь собственные векторы

При $\lambda_1 = -1$ система (13.4) имеет вид

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ \qquad 3x_2 \qquad = 0 \\ -7x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -4x_1 + 4x_3 = 0 \\ -7x_1 + 7x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 = t,\ t \neq 0,\ t \in R, \\ x_{2=0} \end{cases}$$

Таким образом, $(t,0,t),\ t \neq 0,\ t \in R$ — множество собственных векторов матрицы A с собственным значением $\lambda_1 = -1$.

При $\lambda_2 = 2$ система (13.4) имеет вид

$$-7x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 7s \\ x_3 = 7p \\ x_1 = 3s + 4p,\ \forall s,p \in R,\ s^2 + p^2 \neq 0 \end{cases}$$

Таким образом, $(3s + 4p, 7s, 7p), \forall s,p \in R,\ s^2 + p^2 \neq 0$ — множество собственных векторов матрицы A с собственным значением $\lambda_2 = 2$.

Положив $s = 0,\ p = 1$, затем $s = 1,\ p = 0$ и $t = 1$, получим линейно независимые собственные векторы $(4,0,7), (3,7,0), (1,0,1)$ [1].◄

Хотя линейный оператор в разных базисах задается, вообще говоря, различными матрицами, однако все эти матрицы имеют один и тот же набор собственных чисел.

В самом деле, пусть A и A' — матрицы линейного оператора в базисах $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ и $\overline{e}'_1,\overline{e}'_2,\ldots,\overline{e}'_n$, соответственно, а T — матрица перехода от базиса $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ к базису $\overline{e}'_1,\overline{e}'_2,\ldots,\overline{e}'_n$. Тогда $A' = T^{-1}AT$.

Пусть λ — собственное число матрицы A.

Имеем

$$|A' - \lambda E| = \left|T^{-1}AT - \lambda E\right| = \left|T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T\right| = \left|T^{-1}(A - \lambda E)T\right| = \left|T^{-1}\right||A - \lambda E||T|$$

Так как $\left|T^{-1}\right||T| = 1$, то, следовательно, $|A' - \lambda E| = |A - \lambda E| = 0$.

14. ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

Рассмотрим матрицу A, все собственные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ которой различны, и линейный оператор A, связанный с этой матрицей в некотором базисе. Пусть $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n$ — n *различных* собственных векторов матрицы A, соответствующих этим числам. Докажем, что векторы $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n$ линейно независимы. Предположим противное: векторы $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_n$ являются линейно зависимыми. Без нарушения общности можно считать, что векторы $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_k, k < n$ — линейно независимы, а векторы $\overline{x}_{k+1},\overline{x}_{k+2},\ldots,\overline{x}_n$ являются их линейными комбинациями. Например,

$$\overline{x}_n = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j\overline{x}_j \tag{14.1}$$

Применим к соотношению (14.1) оператор A. В результате получим

$$A\overline{x}_n = A\left(\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\overline{x}_j\right) = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j A\overline{x}_j = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j\lambda_j\overline{x}_j \tag{14.2}$$

С другой стороны

$$A\overline{x}_n = \lambda_n\overline{x}_n = \lambda_n\cdot\sum_{j=1}^{k}\alpha_j\overline{x}_j \tag{14.3}$$

Вычтем из (14.3) выражение (14.2), получим

$$\sum_{j=1}^{k}(\lambda_n - \lambda_j)\alpha_j\overline{x}_j = \overline{0} \tag{14.4}$$

Так как $\lambda_n \neq \lambda_j, j = 1,2,\ldots,k$, а векторы $\overline{x}_1,\overline{x}_2,\ldots,\overline{x}_k, k < n$ являются собственными, то все числа $\alpha_j, j = 1,2,\ldots,k$ должны быть равными нулю. Но тогда из (14.1) следует, что $\overline{x}_n = \overline{0}$, чего быть не может (вектор $\overline{x}_n$ — собственный). Получили противоречие. ☻

Итак, собственные векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, соответствующие различным собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A — линейно независимы. Примем векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ в качестве нового базиса. В этом базисе линейный оператор A задаётся матрицей A', столбцы которой состоят из координат вектора $A\bar{x}_j$, $j = 1,2,\ldots,n$ в базисе $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$. Но $A\bar{x}_j = \lambda_j \bar{x}_j$. Следовательно,

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \tag{14.5}$$

Но $A' = T^{-1}AT$, где T матрица перехода от исходного базиса к базису $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$. Следовательно, если $\bar{x}_j = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{kj}\bar{e}_k$, $j = 1,2,\ldots,n$ — разложения собственных векторов матрицы A по векторам исходного базиса, то столбцы матрицы T состоят из координат собственных векторов в исходном базисе, т. е.

$$T = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} \tag{14.6}$$

Пример 14.1. Найти матрицу перехода T от исходного базиса к базису, состоящему из собственных векторов матрицы A, рассмотренной в примере 13.1, и убедиться в том, что такой переход преобразует матрицу A к диагональному виду.

► 1. В соответствии с (14.6) и результатами решения примера 13.1:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Найдём матрицу T^{-1}. Имеем:

$T_{11} = -6$, $T_{12} = -6$, $T_{13} = -3$, $T_{21} = -3$, $T_{22} = 6$, $T_{23} = -6$,

$T_{31} = 6$, $T_{32} = -3$, $T_{33} = -6$, $\det T = -27$

$$T^{-1} = -\frac{1}{27}\begin{pmatrix} -6 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & -3 \\ -3 & -6 & -8 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. $A' = T^{-1}AT = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -7 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 & 18 & 3 \\ 6 & -18 & 6 \\ -12 & 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ◄$$

Если собственные числа матрицы имеют кратность, большую единицы, но при этом каждому собственному числу соответствует столько линейно независимых векторов, какова его кратность (как, например, в примере 13.2), то матрица тоже приводится к диагональному виду. Этот вывод следует из **теоремы (о диагонализируемости матрицы линейного оператора)** $[5]$.

Теорема. Линейный оператор A линейного вещественного пространства V_n диагонализируем, если все его собственные числа λ_j вещественны, и кратность m_j каждого числа λ_j совпадает с числом $s_j = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_j E)$.

Число m_j называется *алгебраической кратностью* собственного числа λ_j. Число s_j — максимальное число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_j, называется его *геометрической кратностью*. Всегда $s_j \le m_j$.

Пусть характеристический многочлен оператора A приводится к виду

$$f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdot (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda_p - \lambda)^{m_p}, \qquad (14.7)$$

где $\lambda_k \ne \lambda_j,\ k \ne j,\ k, j = 1,2,\ldots,p,\ m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n$.

Если $m_j = s_j,\ j = 1,2,\ldots,p$, то число линейно независимых собственных векторов оператора A равно размерности пространства V_n, и из них можно составить базис в пространстве R^n. В этом базисе матрица A' оператора A имеет диагональный вид: каждое собственное значение встречается на главной диагонали этой матрицы столько раз, какова его алгебраическая кратность. Последовательность появления собственных чисел на диагонали определяется нумерацией собственных векторов. Вне диагонали все элементы матрицы равны нулю.

Пример 14.2. Убедиться в том, что условия диагонализируемости для матрицы A, рассмотренной в примере 13.2, выполняются.

►Матрица имеет два собственных числа: $\lambda_1 = -1$ кратности $m_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ с кратностью $m_2 = 2$. Найдём числа $s_j = n - \mathrm{rank}(A - \lambda_j E),\ j = 1,2$.

$$A-2E=\begin{pmatrix}-7&3&4\\0&0&0\\-7&3&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-7&3&4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rank}(A-2E)=1$$

Следовательно, $s_2=n-\operatorname{rank}(A-\lambda_2E)=3-1=2=m_2$.

Аналогично,

$$A+E=\begin{pmatrix}-4&3&4\\0&3&0\\-7&3&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&3&4\\0&3&0\\-3&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&0&4\\0&3&0\\-3&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rank}(A+E)=2$$

Следовательно, $s_1=n-\operatorname{rank}(A-\lambda_1E)=3-2=1=m_1$. Условия теоремы о диагонализируемости матрицы оператора выполнены.

Ниже слева записана матрица A в базисе, составленном из её собственных векторов, когда эти векторы занумерованы в порядке:

1) $x_1=(1,0,1)$, $x_2=(4,0,7)$, $x_3=(3,7,0)$, а справа — в порядке

2) $x_1=(4,0,7)$, $x_2=(3,7,0)$, $x_3=(1,0,1)$.

1) $A'=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ 2) $A'=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ ◄

15. ЖОРДАНОВА ФОРМА МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Если условия выше приведённой теоремы не выполняются, то матрица линейного оператора не диагонализируема. В этом случае матрица оператора может быть приведена к так называемой жордановой (нормальной) форме.

15.1. Жорданова клетка

Начнём построение жордановой формы матрицы линейного оператора с изучения, так называемой жордановой клетки.

Рассмотрим квадратную матрицу $J_k(\lambda_0)$ порядка k

$$J_k(\lambda_0)=\begin{pmatrix}\lambda_0&1&0&\dots&0&0\\0&\lambda_0&1&\dots&0&0\\0&0&\lambda_0&\dots&0&0\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&\lambda_0&1\\0&0&0&\cdots&0&\lambda_0\end{pmatrix}\qquad(15.1)$$

Уравнение $(\lambda_0 - \lambda)^k = 0$ является характеристическим уравнением матрицы $J_k(\lambda_0)$. Значит, λ_0 — собственное число этой матрицы, причём алгебраическая кратность λ_0 равна k.

Матрица $J_k(\lambda_0)$ называется *жордановой клеткой порядка* k, соответствующей собственному значению λ_0.

Матрица системы (13.4), ненулевые решения которой являются собственными векторами матрицы $J_k(\lambda_0)$, соответствующими числу λ_0, имеет вид

$$A_{\lambda_0} = J_k(\lambda_0) - \lambda_0 E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы A_{λ_0} равен $k-1$. Поэтому существует только один линейно независимый собственный вектор, отвечающий числу λ_0. Следовательно, ни в одном базисе матрица $J_k(\lambda_0)$ не приводится к диагональному виду.

15.2. Присоединённые векторы

Ненулевой вектор x называется *присоединённым вектором* оператора (матрицы) A, отвечающим собственному числу λ, если существует некоторое натуральное число $m \geq 1$, для которого выполняются соотношения

$$(A - \lambda E)^{m-1} x \neq \overline{0}, \; (A - \lambda E)^m x = \overline{0} \qquad (15.2)$$

Число m при этом называется *высотой* присоединённого вектора. Очевидно, что присоединённый вектор высоты 1 является собственным вектором.

Пусть e_1 $(e_1 \neq \overline{0})$ — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению λ.

Рассмотрим последовательность векторов $e_1, e_2, \dots, e_m$, удовлетворяющих системе соотношений

$$\begin{array}{ll} (A - \lambda E)\, e_1 = \overline{0} & \Rightarrow (A - \lambda E)\, e_1 = \overline{0} \\ (A - \lambda E)\, e_2 = e_1 & \Rightarrow (A - \lambda E)^2\, e_2 = (A - \lambda E) e_1 = \overline{0} \\ (A - \lambda E)\, e_3 = e_2 & \Rightarrow (A - \lambda E)^3\, e_3 = \overline{0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (A - \lambda E)\, e_m = e_{m-1} & \Rightarrow (A - \lambda E)^m\, e_m = \overline{0} \end{array} \qquad (15.3)$$

В соответствии с определением (15.2) заключаем, что «цепочка» векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$ состоит из собственного вектора e_1 и порождённых им присоединённых векторов $e_2, e_3, \cdots, e_m$ (высота вектора e_k равна k, $k = 2, 3, \cdots, m$).

Теорема. Векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ линейно независимы.

Доказательство этой теоремы достаточно громоздко, здесь не приводится и может быть найдено в работе [4].

Если число векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$ равно размерности пространства V_n, т. е. $m = n$, то эти векторы образуют базис в пространстве R^n, а матрица оператора A в этом базисе имеет вид жордановой клетки порядка n с числом λ.

15.3. Жорданов блок

Пусть λ_0 — собственное число, алгебраическая кратность которого равна m. *Жордановым блоком*, отвечающим собственному числу λ_0, называется блочно-диагональная матрица, каждый блок которой представляет собой жорданову клетку вида (15.1):

$$G(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \boxed{J_{k_1}(\lambda_0)} & & & \\ & \boxed{J_{k_2}(\lambda_0)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_{k_s}(\lambda_0)} \end{pmatrix} \qquad (15.4)$$

На главной диагонали матрицы $G(\lambda_0)$ расположены s жордановых клеток $J_{k_1}(\lambda_0), J_{k_2}(\lambda_0), \ldots, J_{k_s}(\lambda_0)$, где s — геометрическая кратность собственного числа λ_0. Сумма порядков клеток Жордана равна алгебраической кратности числа λ_0, т. е. $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = m$. Все элементы матрицы $G(\lambda_0)$ вне жордановых клеток равны нулю. Порядок расположения клеток Жордана в матрице $G(\lambda_0)$ не является фиксированным.

Приведём несколько примеров жордановых блоков, при этом рассмотрим самый простой случай, кода характеристическое уравнение матрицы имеет вид $(\lambda - \lambda_0)^m = 0$

Пример 15.1. Пусть $m = 2, s = 1$. В этом случае блок состоит из одной клетки порядка 2:

$$G(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Пример 15.2. Пусть $m = 3, s = 1$. В этом случае блок состоит из одной клетки порядка 3:

$$G(\lambda_0)=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Пример 15.3. Пусть $m=3, s=2$. В этом случае блок состоит из двух жордановых клеток порядков 1 и 2:

$$G(\lambda_0)=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ или } G(\lambda_0)=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

Пример 15.4. Пусть $m=4, s=3$. В этом случае жорданов блок состоит из трёх клеток:

$$G(\lambda_0)=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \text{ или } G(\lambda_0)=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

$$\text{или } G(\lambda_0)=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

15.4. Теорема о жордановой (нормальной) форме матрицы

Пусть характеристический многочлен линейного оператора A, действующего в линейном пространстве над полем комплексных чисел размерности n, имеет вид

$$f(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{m_1}\cdot(\lambda_2-\lambda)^{m_2}\cdot\ldots\cdot(\lambda_p-\lambda)^{m_p},$$

где $\lambda_k \neq \lambda_j,\ k \neq j,\ k, j = 1,2,\ldots,p,\ m_1+m_2+\ldots+m_p=n$.

Тогда в этом пространстве существует базис, состоящий из собственных и присоединённых векторов оператора A, в котором матрица оператора имеет блочно-диагональную форму

$$A'=\begin{pmatrix} G(\lambda_1) & & & \\ & G(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & G(\lambda_p) \end{pmatrix}, \qquad (15.5)$$

где $G(\lambda_j)$ — жорданов блок, соответствующий собственному числу λ_j. Указанный базис принято называть *жордановым* или *каноническим* базисом.

Доказательство этой теоремы также можно найти в работе $[4]$.

Замечание. В данном пособии рассматриваются только вещественные линейные пространства. Так как множество вещественных чисел является подмножеством комплексных чисел, то сформулированная теорема останется верной, если считать, что все собственные числа λ_j, $j = 1,2,\ldots,p$ являются вещественными.

15.5. Построение жорданова базиса и жордановой формы матрицы

Пусть линейный оператор A, действующий в вещественном линейном пространстве V_n размерности n, в некотором базисе задаётся матрицей A. И пусть все собственные числа матрицы A вещественны, а их количество с учётом алгебраической кратности этих чисел равно размерности пространства V_n.

Кроме того, известно, что матрица A не может быть приведена к диагональному виду, т. е. хотя бы одно из собственных чисел имеет линейно независимых собственных векторов меньше, чем его алгебраическая кратность. Для определённости пусть некоторое число λ имеет алгебраическую кратность m, а максимальное число линейно независимых собственных векторов у этого числа равно $s < m$.

Как следует из сформулированной выше теоремы, чтобы построить жорданов базис необходимо для каждого такого собственного числа построить $m - s$ присоединённых векторов, так чтобы общее число линейно независимых собственных векторов и присоединённых векторов для этого числа равнялось его алгебраической кратности. Тогда общее число всех линейно независимых векторов и порождённых ими присоединённых векторов и образует нужный жорданов базис. Жорданову форму матрицы A записывают уже в соответствии с жордановым базисом.

Пример 15.5. Привести матрицу A линейного оператора к жордановой форме A'. Построить жорданов базис. Для контроля правильности построения жорданова базиса воспользоваться соотношением $TA' = AT$, где T — матрица перехода к жорданову базису.

$$1).\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

►1. Найдём корни характеристического уравнения матрицы A.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & 4-\lambda & 5 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)^3 = 0$$

Следовательно, собственное число $\lambda = 3$ имеет алгебраическую кратность, равную 3.

2. Определим теперь геометрическую кратность λ.

Матрица $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

С помощью элементарных преобразований определим ранг этой матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A - 3E) = 2$$

Максимальное число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному числу $\lambda = 3$, равно $s = 3 - \operatorname{rank}(A - 3E) = 1$. В соответствии с (15.1) жорданова форма матрицы A состоит из одной жордановой клетки третьего порядка $J_3(3)$, т. е.

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Найдём собственный вектор и два порождаемых им присоединенных вектора.

Собственный вектор является ненулевым решением системы $(A - 3E)X = \overline{0}$, которая приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2t \\ x_2 = -t, \ \forall t \in R, \ t \neq 0 \\ x_3 = t \end{cases}$$

Возьмём $t = 1$, получим первый вектор жорданова базиса $e_1 = (2,-1,1)$. Присоединённый вектор высоты, равной 2, получим, найдя ненулевое решение системы $(A - 3E)e_2 = e_1$.

Преобразуем расширенную матрицу этой системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow e_2 = (1,1,0)$$

Аналогично найдя ненулевое решение системы $(A - 3E)e_3 = e_2$, получим присоединённый вектор высоты 3: $e_3 = (0,1,0)$.

Векторы $e_1=(2,-1,1)$, $e_2=(1,1,0)$, $e_3=(0,1,0)$ образуют жорданов базис.

3. Проверим правильность построения канонического базиса.

Матрица T перехода к жорданову базису от стандартного базиса $f_1=(1,0,0)$, $f_2=(0,1,0)$, $f_3=(0,1,0)$ имеет вид

$$T=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix};\quad TA'=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&5&1\\-3&2&4\\3&1&0\end{pmatrix}$$

$$AT=\begin{pmatrix}4&1&-1\\-2&4&5\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&5&1\\-3&2&4\\3&1&0\end{pmatrix}$$

Вывод: получен верный жорданов базис. ◄

2). $A=\begin{pmatrix}1&4&-8&4\\-1&5&-6&4\\0&0&-1&4\\0&0&-1&3\end{pmatrix}$

►1. Найдём собственные числа матрицы A.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&4&-8&4\\-1&5-\lambda&-6&4\\0&0&-1-\lambda&4\\0&0&-1&3-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(\lambda-1)^2(\lambda-3)^2=0$$

Следовательно, матрица A имеет два собственных числа $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=3$, оба — алгебраической кратности, равной 2.

2. Найдём собственные векторы, соответствующие $\lambda_1=1$.

$$A-\lambda_1E=\begin{pmatrix}0&4&-8&4\\-1&4&-6&4\\0&0&-2&4\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&4&-8&4\\-1&0&2&0\\0&0&-2&4\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&4&0&-12\\-1&0&0&4\\0&0&0&0\\0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

Так как $\operatorname{rank}(A-\lambda_1E)=3$, то максимальное число линейно независимых собственных векторов, соответствующих $\lambda_1=1$, равно $s_1=4-3=1$.

Следовательно, числу λ_1 соответствует жорданова клетка порядка 2. Пусть вектор $e_1=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ — собственный вектор, отвечающий λ_1. Координаты этого вектора удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 4x_2 - 12x_4 = 0 \\ -x_1 + 4x_4 = 0 \\ -x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4t \\ x_2 = 3t \\ x_3 = 2t \\ x_4 = t \end{cases}, \forall t \in R, t \neq 0. \text{ При } t = 1 \text{ получаем, } e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Присоединённый вектор e_2, порождаемый собственным вектором e_1, является ненулевым решением системы $(A - E)e_2 = e_1$. Преобразуем расширенную матрицу этой системы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 4 & -8 & 4 & 4 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Одним из ненулевых решений этой системы является вектор $e_2 = (-1,-1,-1,0)$.

4. Совершенно аналогично убеждаемся, что собственное число $\lambda_2 = 3$ также имеет геометрическую кратность $s_2 = 1$. Собственным вектором e_3 и порождаемым им присоединённым вектором e_4, отвечающими числу $\lambda_2 = 3$, являются векторы $e_3 = (2,1,0,0)$ и $e_4 = (-1,0,0,0)$ соответственно.

5. Векторы $e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ составляют жорданов базис. Матрица T перехода к жорданову базису и матрица оператора A в этом базисе имеют вид

$$T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ а } TA' = AT = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ◄$$

Замечание. Присоединенные векторы являются ненулевыми решениями неоднородных систем линейных алгебраических уравнений (15.3). Как известно [1], вопрос о существовании решений у таких систем сводится к выполнению условий теоремы Кронекера — Капели. Поэтому в случаях, когда собственному числу матрицы соответствует несколько линейно независимых собственных векторов, может оказаться, что не для любого из них можно построить цепочку присоединённых векторов. Для определения нужного собственного вектора можно воспользоваться приёмом, который демонстрируется в примере 15.6.

Пример 15.6. Привести матрицу A линейного оператора к жордановой форме A'.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -2 & 0\\ -1 & 5 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

►1. Найдём собственные числа матрицы A.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 4 & -2 & 0\\ -1 & 5-\lambda & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(\lambda-3)^4=0$$

Следовательно, матрица A имеет одно собственное значение $\lambda=3$ алгебраической кратности 4.

2. Определим ранг матрицы $A-\lambda E=A-3E$ и определим геометрическую кратность числа λ.

$$A-3E=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -2 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \operatorname{rank}(A-3E)=1$$

Значит, $s=4-1=3$. Собственному числу $\lambda=3$ соответствует три линейно независимых собственных вектора. Найдём эти векторы. Система для определения координат собственного вектора, как показано выше, сводится к одному уравнению: $-x_1+2x_2-x_3=0$. Решение этого уравнения имеет вид: $x_4=C_4$, $x_3=C_3$, $x_2=C_2$, $x_1=2C_2-C_3$, где C_2,C_3,C_4 — произвольные действительные числа, не все одновременно равные нулю.

Полагая $C_2=1,C_3=C_4=0$, $C_4=1,C_3=C_2=0$, $C_1=1,C_2=C_4=0$, получим три линейно независимых вектора: $e_1=(2,1,0,0)$, $e_2=(0,0,0,1)$ и $e_3=(-1,0,1,0)$.

3. Чтобы определить для какого из этих векторов следует строить присоединённый вектор, рассмотрим расширенную матрицу системы для нахождения присоединённого вектора высоты 2

$$\left(\begin{array}{cccc|l}-2 & 4 & -2 & 0 & 2C_2-C_3\\ -1 & 2 & -1 & 0 & C_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_4\end{array}\right)$$

Условия теоремы Кронекера — Капели выполняются (ранги матрицы $(A-3E)$ и расширенной матрицы совпадают), если $C_4=C_3=0, C_2\neq 0$.

Следовательно, присоединённый вектор надо строить для вектора e_1. Решив систему $(A-3E)e_1' = e_1$, получим $e_1' = (-1,0,0,0)$.

Векторы $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_1' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ составляют жорданов базис.

Матрица T перехода к жорданову базису и матрица A' оператора A в этом базисе имеют вид

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ а } TA' = AT = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

15.6. Построение жордановой формы матрицы с помощью элементарных преобразований

Существует метод нахождения только жордановой формы матрицы линейного оператора A без построения жорданова базиса [5]. Этот метод заключается в приведении к каноническому (диагональному) виду матрицы $A_\lambda = A - \lambda E$.

Элементарными преобразованиями матрицы A_λ называют следующие:

1) умножение любой строки матрицы A_λ на любое число $\alpha \neq 0$ из того числового поля, на котором определён оператор (в нашем случае множество вещественных чисел);

2) умножение любого столбца матрицы A_λ на любое число $\alpha \neq 0$ из того числового поля, на котором определён оператор (в нашем случае множество вещественных чисел);

3) прибавление к любой строке матрицы A_λ любой другой строки, умноженной на любой многочлен $\varphi(\lambda)$;

4) прибавление к любому столбцу матрицы A_λ любого другого столбца, умноженного на любой многочлен $\varphi(\lambda)$;

5) в матрице A_λ можно поменять местами две любые строки или два любых столбца.

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу A_λ к каноническому виду:

$$A_\lambda \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & e_{n-j+1}(\lambda) & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

Отличные от единицы многочлены $e_{n-j+1}(\lambda), \ldots, e_{n-1}(\lambda), e_n(\lambda)$ называются *инвариантными множи*телями матрицы A_λ. Среди них нет многочленов, равных нулю, сумма степеней всех этих многочленов равна n, и все они раскладываются на линейные множители [5]. Пусть, например, многочлен $e_{n-j+1}(\lambda)$ раскладывается на произведение множителей: $(\lambda-\lambda_1)^{k_{1j}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{2j}} \ldots (\lambda-\lambda_p)^{k_{pj}}$. Множитель $(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}$ называется *элементарным делителем* многочлена $e_{n-j+1}(\lambda)$. Элементарные делители всех многочленов $e_{n-j+1}(\lambda), \ldots, e_{n-1}(\lambda), e_n(\lambda)$ называются *элементарными делителями* матрицы A_λ. Каждому элементарному делителю $(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}$ матрицы A_λ в жордановой форме A' оператора A соответствует жорданова клетка порядка k_{ij}, относящаяся к числу λ_i.

Таким образом, жорданова (нормальная) форма матрицы линейного оператора A с помощью *элементарных делителей* матрицы A_λ определяется однозначно с точностью до порядка расположения жордановых клеток на главной диагонали.

Пример 15.7. Привести матрицу A линейного оператора к жордановой форме A' с помощью элементарных преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

►

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -1 & -3 \\ -2 & 5-\lambda & 6 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{меняем местами} \\ \text{1 - ю и 3 - ю строки} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ -2 & 5-\lambda & 6 \\ 4-\lambda & -1 & -3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} \text{вычитаем 1 - ю} \\ \text{строку из 2 - й и 3 - й} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 6-2\lambda \\ 0 & 3-\lambda & -3+\lambda(4-\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{вычитаем 2 - ю} \\ \text{строку из 3 - й} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 6-2\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-3)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{прибавляем ко} \\ \text{2 - у стлбцу 1 - й} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 3-\lambda & 6-2\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-3)^2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} \text{к 3 - у столбцу} \\ \text{прибавляем } (1\text{ - й}) \cdot \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 6-2\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-3)^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-3)^2 \end{pmatrix}$$

Элементарными делителями матрицы A_λ являются двучлены $(\lambda-3)$ и $(\lambda-3)^2$. Первому делителю соответствует жорданова клетка порядка 1 для числа $\lambda=3$, а второму — жорданова клетка порядка 2 для того же самого собственного числа $\lambda=3$.

Следовательно,

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ или } A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

Пример 15.8. Привести матрицу A линейного оператора к жордановой форме A' с помощью элементарных преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 & 6 \\ -3 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

►

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 6 & -6 & 6 \\ -3 & 8-\lambda & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -6 & 6 & -1-\lambda & 6 \\ -5 & 8-\lambda & -3 & 3 \\ 1-\lambda & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 5-\lambda \\ -5 & 8-\lambda & -3 & 3 \\ 1-\lambda & 0 & 0 & 4 \\ -6 & 6 & -1-\lambda & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8-\lambda & -3 & 5\lambda-22 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-3)^2 \\ 0 & 6 & -1-\lambda & 6\lambda-24 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8-\lambda & -3 & 5\lambda-22 \\ 0 & 6 & -1-\lambda & 6\lambda-24 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-3)^2 \end{pmatrix}$$

Далее, как легко заметить, все преобразования совершаются только со второй и третьей строками этой матрицы.

$$\begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 & 5\lambda-22 \\ 6 & -1-\lambda & 6\lambda-24 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8-\lambda & -3 & 5\lambda-22 \\ -2+\lambda & 2-\lambda & \lambda-2 \end{pmatrix} \to$$
$$\to \begin{pmatrix} 5-\lambda & -5+\lambda & 4\lambda-20 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрицы A_λ приводится к виду

$$A_\lambda \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-3)^2 \end{pmatrix}$$

Так как все многочлены, стоящие на диагонали этой матрицы взаимно простые, то матрица A_λ приводится к форме $[5]$:

$$A_\lambda \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2-\lambda)(5-\lambda)(\lambda-3)^2 \end{pmatrix}$$

Элементарными делителями матрицы A_λ являются $(2-\lambda),(5-\lambda)$ и $(\lambda-3)^2$. Первому и второму делителям соответствуют жордановы клетки порядка 1 соответственно для чисел $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 5$, а третьему — жорданова клетка порядка 2 для числа $\lambda_3 = 3$. Поэтому с точностью до порядка расположения жордановых клеток на диагонали

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \blacktriangleleft$$

16. СОПРЯЖЁННЫЕ И САМОСОПРЯЖЁННЫЕ (СИММЕТРИЧЕСКИЕ) ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этом параграфе и далее будем рассматривать операторы, действующие в конечномерном вещественном евклидовом пространстве.

Оператор B евклидова пространства V_n называется сопряжённым к линейному оператору A, если для любых двух векторов $\overline{x}.\overline{y} \in V_n$ выполняется соотношение

$$(A\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, B\overline{y}) \qquad (16.1)$$

Легко доказать следующие утверждения $[4]$:

1. Оператор B, сопряжённый к линейному оператору A, сам также является линейным.

2. Каждый линейный оператор имеет сопряжённый, причём единственный.

Договоримся обозначать оператор, сопряжённый оператору A, символом A^*.

Сопряжённыё операторы обладают следующими свойствами:

$$1.\ \left(A^*\right)^* = A \qquad 2.\ (A+B)^* = A^* + B^*$$
$$3.\ (\lambda A)^* = \lambda A^*$$
$$4.\ (AB)^* = B^* A^* \qquad 5.\ E^* = E \tag{16.2}$$

Линейный оператор A, евклидова пространства V_n, называется *самосопряжённым* или *симметрическим*, если для любых двух векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ этого пространства выполняется равенство

$$(A\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}, A\bar{y}) \tag{16.3}$$

Теорема. Собственные числа вещественного самосопряжённого оператора вещественны.

Доказательство.

Пусть λ — собственное число, а $\bar{x}$ — соответствующий ему собственный вектор. Тогда

$$(A\bar{x}, \bar{x}) = (\bar{x}, A\bar{x}) = (\bar{x}, \lambda\bar{x}) = \lambda(\bar{x}, \bar{x}) \tag{16.4}$$

Числа $(A\bar{x}, \bar{x})$ и $(\bar{x}, A\bar{x})$ являются действительными, по определению скалярного произведения. Но тогда из (16.4) следует, что и число λ — тоже действительное. ☻

Теорема. Симметрический оператор в любом ортонормированном базисе задаётся симметрической матрицей.

Доказательство.

Напомним следующие определения.

1. Квадратная матрица A называется *симметрической*, если $A = A^T$, т. е. элементы матрицы A обладают свойством $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

2. Векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ образуют *ортонормированный* базис, если скалярное произведение

$$(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \begin{cases} 0, \text{если } i \neq j \\ 1, \text{если } i = j \end{cases} \tag{16.5}$$

Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ — ортонормированный базис. Столбцы матрицы A линейного оператора состоят из координат вектора $A\bar{e}_i$ в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$, т.е. $A\bar{e}_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}\bar{e}_k$. Имеем

$$(A\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\bar{e}_k, \bar{e}_j\right) = a_{1i}(\bar{e}_1, \bar{e}_j) + a_{2i}(\bar{e}_2, \bar{e}_j) + \ldots + a_{ni}(\bar{e}_n, \bar{e}_j) = a_{ji}$$

$$\left(\bar{e}_i, A\bar{e}_j\right) = \left(\bar{e}_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\bar{e}_k\right) = a_{1j}\left(\bar{e}_i, \bar{e}_1\right) + a_{2j}\left(\bar{e}_i, \bar{e}_2\right) + \ldots + a_{nj}\left(\bar{e}_i, \bar{e}_n\right) = a_{ij}$$

Так как по условию оператор A симметрический, то $\left(A\bar{e}_i, \bar{e}_j\right) = \left(\bar{e}_i, A\bar{e}_j\right)$, и, следовательно, $a_{ij} = a_{ji}$. А это означает, что матрица A — симметрическая. ☻

Теорема. Если линейный оператор A, евклидова пространства V_n, хотя бы в одном ортонормированном базисе задаётся симметрической матрицей, то он является симметрическим.

Доказательство.

Пусть линейный оператор A в ортонормированном базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ задаётся симметрической матрицей A, $a_{ij} = a_{ji}\ (i, j, = 1, 2, \ldots, n)$. Возьмём два любых вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из V_n. В базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ эти векторы представимы в виде $\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i$, $\bar{y} = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j\bar{e}_j$. Поэтому

$$A\bar{x} = A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i A\bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\bar{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji}\right)\bar{e}_j$$

Аналогично,

$$A\bar{y} = A\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\bar{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j A\bar{e}_j = \sum_{j=1}^{n} y_j\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij}\right)\bar{e}_i$$

Следовательно,

$$\left(A\bar{x}, \bar{y}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji}\right)\bar{e}_j, \sum_{j=1}^{n} y_j\bar{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ji} y_j \qquad (16.6)$$

$$\left(\bar{x}, A\bar{y}\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{e}_i, \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij}\right)\bar{e}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} y_j\right) \qquad (16.7)$$

Так как $a_{ij} = a_{ji}\ (i, j, = 1, 2, \ldots, n)$, то соотношения (16.6) и (16.7) совпадают, а это означает, что оператор A — симметрический. ☻

Теорема. Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам симметрического оператора, ортогональны.

Доказательство.

Пусть λ и μ $(\lambda \neq \mu)$ — два собственных числа оператора A, а $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — соответствующие им собственные векторы. Значит, $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ и $A\bar{y} = \mu\bar{y}$. Тогда $\left(A\bar{x}, \bar{y}\right) = \left(\lambda\bar{x}, \bar{y}\right) = \lambda\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$; $\left(\bar{x}, A\bar{y}\right) = \left(\bar{x}, \mu\bar{y}\right) = \mu\left(\bar{x}, \bar{y}\right)$. Так как оператор ***A*** – симметрический, то $\left(A\bar{x}, \bar{y}\right) = \left(\bar{x}, A\bar{y}\right)$. Поэтому

$$\lambda\left(\bar{x}, \bar{y}\right) = \mu\left(\bar{x}, \bar{y}\right) \Rightarrow (\lambda - \mu)\left(\bar{x}, \bar{y}\right) = 0 \Rightarrow \left(\bar{x}, \bar{y}\right) = 0, \text{ т.к. } \lambda - \mu \neq 0 \ ☻$$

В п. 14 показано, что собственные векторы, соответствующие различным собственным числам образуют базис. С учётом только что доказанной теоремы приходим к выводу.

Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам симметрического оператора, образуют ортогональный базис.

Пусть симметрический оператор A имеет n различных собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. И пусть $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ — n различных собственных векторов оператора, соответствующих этим числам. Рассмотрим векторы $\overline{x}_k^0 = \dfrac{\overline{x}_k}{\sqrt{(\overline{x}_k, \overline{x}_k)}}, k = 1,2,\ldots,n$. Эти векторы образуют ортонормированный базис, т.е. $\left(\overline{x}_i^0, \overline{x}_j^0\right) = \begin{cases} 0, \text{если } i \neq j \\ 1, \text{если } i = j \end{cases}$. Матрица T перехода к базису $\overline{x}_1^0, \overline{x}_2^0, \ldots, \overline{x}_n^0$ имеет вид $T = \begin{pmatrix} x_{11}^0 & x_{12}^0 & \cdots & x_{1n}^0 \\ x_{21}^0 & x_{22}^0 & \cdots & x_{2n}^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1}^0 & x_{n2}^0 & \cdots & x_{nn}^0 \end{pmatrix}$, где $x_{kj}^0, k = 1,2,\ldots,n$ — координаты вектора $\overline{x}_j^0, j = 1,2,\ldots,0$. Произведение матрицы T и транспонированной к ней матрицы равно

$$T \cdot T^T = \begin{pmatrix} \left(\overline{x}_1^0, \overline{x}_1^0\right) & \left(\overline{x}_1^0, \overline{x}_2^0\right) & \cdots & \left(\overline{x}_1^0, \overline{x}_n^0\right) \\ \left(\overline{x}_2^0, \overline{x}_1^0\right) & \left(\overline{x}_2^0, \overline{x}_2^0\right) & \cdots & \left(\overline{x}_2^0, \overline{x}_n^0\right) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\overline{x}_n^0, \overline{x}_1^0\right) & \left(\overline{x}_n^0, \overline{x}_2^0\right) & \cdots & \left(\overline{x}_n^0, \overline{x}_n^0\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E$$

Матрица B, для которой выполняется соотношение $B^T = B^{-1}$, называется *ортогональной*.

Так как $T \cdot T^T = E$, то $T^T = T^{-1}$ и, значит, матрица T является ортогональной.

Итак, матрица симметрического линейного оператора евклидова пространства V_n в базисе, составленном из нормированных собственных векторов, соответствующих различным собственным числам, имеет диагональный вид $A' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

Пример 16.1. Убедиться в том, что матрица, составленная из нормированных собственных векторов самосопряжённого оператора, который в некотором базисе задаётся матрицей A, является ортогональной.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$►\ |A-\lambda E|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3+9\lambda^2-18\lambda=0.$$

Оператор имеет три различных собственных значения: $\lambda_1=0$, $\lambda_2=6$ и $\lambda_3=3$.

Этим собственным числам отвечают собственные векторы: $e_1=(t,2t,2t)$, $e_2=(2k,-2k,k)$ и $e_3=(2s,s,-2s)$ соответственно, где действительные числа $t,k,s\neq 0$. Возьмём $t=k=s=1$. В этом случае норма каждого из собственных векторов будет равняться три, а матрица T перехода к базису из нормированных собственных векторов имеет вид

$$T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow T^T=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}=T$$

$$T\cdot T^T=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^T=T^{-1}$$

Матрица T — ортогональная.◄

Пример 16.2. Линейный оператор $A: E^2 \to E^2$ в некотором ортонормированном базисе e_1,e_2 имеет матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу сопряжённого оператора A^* в ортонормированном базисе

$$e_1'=\frac{1}{\sqrt{5}}e_1+\frac{2}{\sqrt{5}}e_2,\ e_2'=\frac{2}{\sqrt{5}}e_1-\frac{1}{\sqrt{5}}e_2$$

►Матрица сопряжённого оператора в некотором базисе совпадает с транспонированной матрицей исходного оператора в том же базисе. Поэтому, сначала найдём матрицу A' оператора A в базисе e_1',e_2'

Матрица T перехода от базиса e_1,e_2 к базису e_1',e_2' имеет вид

$$T=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^T=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ T\cdot T^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1}=T^T.$$

Матрицу A' оператора в базисе e_1',e_2' найдём по формуле $A'=T^{-1}AT$.

$$A'=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 19 & 8 \\ -17 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 19 & -17 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}◄$$

17. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Линейный оператор P, вещественного евклидова пространства V_n, называется *ортогональным*, если для любых двух векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ этого пространства выполняется равенство

$$(P\overline{x}, P\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y}) \tag{17.1}$$

Из соотношения (17.1) следует, что ортогональный оператор сохраняет скалярное произведение. Следовательно, если векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ составляют ортонормированный базис в пространстве V_n, то и система векторов $P\overline{e}_1, P\overline{e}_2, \ldots, P\overline{e}_n$ тоже является ортонормированным базисом в пространстве V_n.

Условие (17.1) называют условием ортогональности оператора P.

Теорема. Для того чтобы вещественный линейный оператор P был ортогональным необходимо и достаточно, чтобы существовал обратный оператор P^{-1} и выполнялось соотношение

$$P^* = P^{-1} \tag{17.2}$$

Доказательство.

1). Необходимость. Пусть P — ортогональный оператор, т. е. выполняется условие (17.1). Так как у всякого линейного оператора имеется сопряжённый, то оператор P^* существует. Следовательно, для любых векторов $\overline{x}, \overline{z} \in V_n$ выполняется соотношение $(P\overline{x}, \overline{z}) = (x, P^*\overline{z})$. Возьмём $\overline{z} = P\overline{y}$. Тогда условие ортогональности примет вид

$$(P\overline{x}, P\overline{y}) = (\overline{x}, P^*P\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y}) \Rightarrow (\overline{x}, (P^*P - E)\overline{y}) = 0 \tag{17.3}$$

Так как векторы $\forall \overline{x}, \overline{z} \in V_n$, то условие (17.3) выполняется только в том случае, когда $P^*P - E = \overline{0}$.

Точно также доказывается, что и $PP^* - E = \overline{0}$. Таким образом,

$$P^*P = PP^* = E \Rightarrow P^* = P^{-1}$$

2) Достаточность. Пусть выполняется соотношение (17.2). Следовательно,

$P^*P = PP^* = E$. Тогда $(P\overline{x}, P\overline{y}) = (\overline{x}, P^*P\overline{y}) = (P\overline{x}, E\overline{y}) = (\overline{x}, \overline{y})$ ☻

Доказанную теорему можно переформулировать в следующем виде.

Если векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ составляют ортонормированный базис в пространстве V_n, то оператор P является ортогональным тогда и только тогда, когда его матрица в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ — ортогональна.

Пример 17.1. В пространстве многочленов $P_2(x)$ скалярное произведение определено равенством $(x, y) = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k \beta_k$, где $x = \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3$,

$y=\beta_1 t^2+\beta_2 t+\beta_3$. Оператор P задан следующим образом: $P\left(t^2\right)=-t^2$, $P(t)=-1$ и $P(1)=t$. Базис образуют векторы $t^2, t, 1$. Доказать, что оператор P является ортогональным.

►Имеем

$P\left(t^2\right)=-t^2=-1\cdot t^2+0\cdot t+0\cdot 1$,

$P(t)=-1=0\cdot t^2+0\cdot t+(-1)\cdot 1$, $\quad P(1)=t=0\cdot t^2+1\cdot t+0\cdot 1$. Следовательно, матрица оператора P имеет вид

$$P=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Оператор P будет ортогональным, если его матрица является ортогональной, т. е. $P\cdot P^T=E$.

$$P\cdot P^T=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Следовательно, оператор P является ортогональным.◄

Пример 17.2. Будет ли ортогональным оператор $A:E^3\to E^3$, если этот оператор ставит в соответствие любому вектору $\bar{x}\in E^3$ векторное произведение этого вектора на некоторый фиксированный вектор $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, т. е. $A(\bar{x})=\bar{x}\times\bar{a}$?

►Возьмём в пространстве E^3 ортонормированный базис: $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$. Найдём векторы $A(\bar{i})$, $A(\bar{j})$, $A(\bar{k})$, разложим их по базису, и построим матрицу оператора A в данном базисе.

$$A(\bar{i})=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 1 & 0 & 0\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=-a_3\bar{j}+a_2\bar{k},\quad A(\bar{j})=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 1 & 0\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=a_3\bar{i}-a_1\bar{k},$$

$$A(\bar{k})=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 0 & 0 & 1\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=-a_2\bar{i}+a_1\bar{j}.$$

Матрица оператора в этом базисе имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}0 & a_3 & -a_2\\ -a_3 & 0 & a_1\\ a_2 & -a_1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}$$

$$AA^T=\begin{pmatrix}0 & a_3 & -a_2\\ -a_3 & 0 & a_1\\ a_2 & -a_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_3^2+a_2^2 & -a_2a_1 & -a_3a_1\\ -a_2a_1 & a_3^2+a_1^2 & -a_3a_2\\ -a_3a_1 & -a_2a_3 & a_1^2+a_2^2\end{pmatrix}\neq E$$

Так как матрица A не является ортогональной, то и сам оператор также не будет ортогональным. ◄

18. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ

- ***Теоретические вопросы***

1. Дайте определение базиса n-мерного линейного пространства.
2. Чему равны координаты нулевого вектора линейного пространства в любом базисе?
3. Всякая ли матрица T порядка n может быть матрицей перехода от одного базиса к другому в n-мерном линейном пространстве?
4. Чем являются элементы k-го столбца матрицы T перехода от одного базиса к другому в n-мерном линейном пространстве?
5. Что называется скалярным произведением векторов в вещественном линейном пространстве?
6. Какое линейное пространство называется евклидовым пространством?
7. Что называется оператором в векторном пространстве V?
8. Какой оператор называется линейным?
9. Какая матрица называется матрицей линейного оператора в данном базисе?
10. Что называется ядром линейного оператора? Как оно обозначается?
11. Что называется образом линейного оператора? Как обозначается образ линейного оператора?
12. Существует ли базис, в котором матрица линейного оператора является вырожденной?
13. Что называется собственным вектором и собственным значением линейного оператора?
14. Какое уравнение называется характеристическим уравнением линейного оператора?
15. Как найти собственные значения линейного оператора, если известна матрица A этого оператора в некотором базисе?

16. Как найти собственный вектор линейного оператора, соответствующий некоторому собственному значению, если известна матрица A этого оператора в некотором базисе?

17. Что такое присоединённый вектор линейного оператора?

18. Какую матрицу называют жордановой формой матрицы линейного оператора?

19. Какой линейный оператор называют самосопряжённым?

20. Какой линейный оператор называют ортогональным?

- ***Задачи***

В линейном пространстве $R_{2\times2}$ действует оператор $A: R_{2\times2} \to R_{2\times2}$, который произвольному вектору $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ ставит в соответствие вектор $A(x)$.

Требуется:

1. Проверить оператор A на линейность.
2. Найти $\operatorname{Ker} A$ и базис в нём.
3. Найти $\operatorname{Im} A$ и базис в нём.
4. Найти матрицы A и A' оператора A соответственно в базисах $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ и $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3, \bar{e}'_4$, причём матрицу A' построить двумя способами:

1) пользуясь только определением матрицы линейного оператора

2) с помощью формулы $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$, где T — матрица перехода от первого базиса ко второму.

Базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ во всех вариантах является каноническим, т. е. его составляют векторы

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а базис $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3, \bar{e}'_4$ состоит из векторов

в вариантах **1–8:**

$$\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

в вариантах **9–16:**

$$\bar{e}'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \bar{e}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \bar{e}'_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оператор A задаётся соотношением:

1. $A(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 & x_1 + x_3 \\ x_4 & x_3 \end{pmatrix}$

2. $A(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 & x_2 \\ x_3 + 2x_4 - x_1 & x_2 \end{pmatrix}$

3. $A(x)=\begin{pmatrix} x_1 & 3x_1+x_2 \\ x_3 & x_4+x_2 \end{pmatrix}$

4. $A(x)=\begin{pmatrix} x_1+x_3+2x_4 & x_2 \\ x_3+2x_4 & x_4 \end{pmatrix}$

5. $A(x)=\begin{pmatrix} 3x_1 & x_1+x_2 \\ 2x_1 & x_4 \end{pmatrix}$

6. $A(x)=\begin{pmatrix} 2x_1-x_4 & 3x_2 \\ x_1 & x_2+x_4-x_1 \end{pmatrix}$

7. $A(x)=\begin{pmatrix} x_1-2x_2 & x_1+x_3 \\ x_4 & x_4+x_2 \end{pmatrix}$

8. $A(x)=\begin{pmatrix} x_1+x_4+2x_2 & x_1+x_2 \\ x_3+x_4 & x_4 \end{pmatrix}$

9. $A(x)=\begin{pmatrix} 3x_1+x_3 & x_2+x_3 \\ x_4 & x_3+x_4 \end{pmatrix}$

10. $A(x)=\begin{pmatrix} x_1-x_2 & x_2 \\ x_3-2x_2 & x_4+x_1-x_3 \end{pmatrix}$

11. $A(x)=\begin{pmatrix} x_1+2x_2 & 2x_3 \\ x_3-2x_4 & x_4 \end{pmatrix}$

12. $A(x)=\begin{pmatrix} 3x_1+2x_2 & x_2+3x_1 \\ x_3+x_1-x_2 & 4x_3 \end{pmatrix}$

13. $A(x)=\begin{pmatrix} -2x_2 & 2x_1+x_3 \\ x_4+x_1 & x_4+x_1 \end{pmatrix}$

14. $A(x)=\begin{pmatrix} x_1+2x_4+x_2 & x_1+x_2 \\ x_3-3x_4 & 2x_4 \end{pmatrix}$

15. $A(x)=\begin{pmatrix} -2x_2 & 2x_1+2x_3 \\ x_4+3x_1 & x_4-x_1 \end{pmatrix}$

16. $A(x)=\begin{pmatrix} x_1+2x_4 & x_1+x_2-x_3 \\ x_3-3x_4 & 2x_4 \end{pmatrix}$

Пример 18.1. В линейном пространстве $R_{2\times 2}$ действует оператор A, который произвольному вектору $x=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ ставит в соответствие вектор y по правилу $y=\begin{pmatrix} 3x_1+x_2 & x_1+x_2 \\ x_3+x_4 & x_3 \end{pmatrix}$. Базис $\bar{e}'_1,\bar{e}'_2,\bar{e}'_3,\bar{e}'_4$ состоит из векторов $\bar{e}'_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\bar{e}'_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\bar{e}'_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\bar{e}'_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

► **1.** Для установления линейности оператора A необходимо проверить выполнение двух аксиом: 1) аксиома аддитивности $A(x+y)=A(x)+A(y)$, 2) аксиома однородности $A(\lambda x)=\lambda A(x)$.

Возьмём два произвольных вектора $x=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ и $y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$.

Тогда $x+y=\begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 \\ x_3+y_3 & x_4+y_4 \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$A(x+y)=\begin{pmatrix} 3(x_1+y_1)+(x_2+y_2) & (x_1+y_1)+(x_2+y_2) \\ (x_3+y_3)+(x_4+y_4) & (x_3+y_3) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3x_1+x_2 & x_1+x_2 \\ x_3+x_4 & x_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3y_1+y_2 & y_1+y_2 \\ y_3+y_4 & y_3 \end{pmatrix}=A(x)+A(y).$$

Пусть $\forall\lambda \in R$.

Тогда $\lambda x=\begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda x_2 \\ \lambda x_3 & \lambda x_4 \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$A(\lambda x)=\begin{pmatrix} 3\lambda x_1+\lambda x_2 & \lambda x_1+\lambda x_2 \\ \lambda x_3+\lambda x_4 & \lambda x_3 \end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix} 3x_1+x_2 & x_1+x_2 \\ x_3+x_4 & x_3 \end{pmatrix}=\lambda A(x).$$

Оператор A — линейный.

2. Ядром оператора называется множество векторов пространства, которые переводятся этим оператором в нулевой вектор пространства, т.е. множество векторов x, для которых $A(x)=\overline{0}$. В нашем случае это означает, что если вектор $x \in \operatorname{Ker}A$, то

$$\begin{pmatrix} 3x_1+x_2 & x_1+x_2 \\ x_3+x_4 & x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 3x_1+x_2=0 \\ x_1+x_2=0 \\ x_3+x_4=0 \\ x_3=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_3=0 \\ x_4=0 \\ x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}\Rightarrow \operatorname{Ker}A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Так как ядром оператора является нулевой вектор, то базисом в этом ядре может служить любой вектор пространства.

3. Образом $\operatorname{Im}A$ или областью значений оператора является множество образов всех векторов данного пространства. Следовательно, если вектор $x=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ — произвольный вектор пространства $R_{2\times 2}$, а вектор

$y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$ — образ вектора x, то должно выполняться соотношение

$$\begin{pmatrix} 3x_1+x_2 & x_1+x_2 \\ x_3+x_4 & x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} 3x_1+x_2=y_1 \\ x_1+x_2=y_2 \\ x_3+x_4=y_3 \\ x_3=y_4 \end{cases}. \qquad (18.1)$$

Вычислим определитель матрицы системы (18.1)

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-2&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система (18.1) всегда имеет единственное решение. Следовательно, столбцы матрицы A линейно независимы, и их можно принять в качестве базиса. Поэтому, $\operatorname{Im} A$ составляют векторы

$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (3,1,0,0)x_1 + (1,1,0,0)x_2 + (0,0,1,1)x_3 + (0,0,1,0)x_4$

4. Построим матрицу A оператора в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$. Для этого найдём векторы $A(\bar{e}_1), A(\bar{e}_2), A(\bar{e}_3), A(\bar{e}_4)$ и разложим их по базису $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$. В соответствии с условием

$$A(\bar{e}_1)=\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix},\ A(\bar{e}_2)=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ A(\bar{e}_3)=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\ A(\bar{e}_4)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

Видим, что

$A(\bar{e}_1) = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2,\ A(\bar{e}_2) = \bar{e}_1 + \bar{e}_2,\ A(\bar{e}_3) = \bar{e}_3 + \bar{e}_4,\ A(\bar{e}_4) = \bar{e}_3.$

Следовательно,

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \tag{18.2}$$

Аналогично, построим матрицу A'. Имеем

$$A(\bar{e}'_1)=\begin{pmatrix}3&1\\0&0\end{pmatrix},\ A(\bar{e}'_2)=\begin{pmatrix}4&2\\0&0\end{pmatrix},\ A(\bar{e}'_3)=\begin{pmatrix}4&2\\1&1\end{pmatrix},\ A(\bar{e}'_1)=\begin{pmatrix}4&2\\2&1\end{pmatrix}$$

$A(\bar{e}'_1) = 2\bar{e}'_1 + \bar{e}'_2,\ A(\bar{e}'_2) = 2\bar{e}'_1 + 2\bar{e}'_2,$

$A(\bar{e}'_3) = 2\vec{e}'_1 + \bar{e}'_2 + \bar{e}'_4,\ A(\bar{e}'_4) = 2\bar{e}'_1 + \bar{e}'_3 + \bar{e}'_4$

Следовательно,

$$A'=\begin{pmatrix}2&2&2&2\\1&2&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \tag{18.3}$$

Теперь найдём матрицу A' вторым способом. Сначала построим матрицу T перехода от базиса $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ к базису $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3, \bar{e}'_4$. Для этого разложим векторы второго базиса по первому базису:

$\bar{e}'_1 = \bar{e}'_1,\ \bar{e}'_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2,\ \bar{e}'_3 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3,\ \bar{e}'_4 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3 + \bar{e}_4.$

Следовательно,

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Матрицу T^{-1} найдём с помощью следующих элементарных преобразований. Сначала из первой строки матрицы $(\mathrm{T}|\mathrm{E})$ вычтем вторую, затем из второй строки полученной матрицы вычтем третью и, наконец, из третьей строки уже новой матрицы вычтем четвёртую.

$$(\mathrm{T}|\mathrm{E})=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-1&0&0\\0&1&1&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-1&0&0\\0&1&0&0&0&1&-1&0\\0&0&1&0&0&0&1&-1\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)=\left(\mathrm{E}|\mathrm{T}^{-1}\right)$$

Таким образом,

$$\mathrm{T}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad(18.4)$$

$$\mathrm{A}'=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&2&2\\1&2&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\blacktriangleleft$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хватцев А. А. Алгебра и геометрия: учебное пособие / А. А. Хватцев. Псков: Издательство ППИ, 2008. 79 с.

2. Апотёнок Р. Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / Р. Ф. Апотёнок, А. М. Маркина, В. Б. Хейнман. Минск: Вышейшая школа, 1990. 284 с.

3. Хватцев А. А. Математический анализ: конспект лекций / А. А. Хватцев. 2-е изд. Псков: Издательство ППИ, 2008. 132 с.

4. Ильин В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. М.: Физматлит, 2001. 320 с.

5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. 17-е изд. СПб.: Лань, 2008. 432 с.

Учебное издание

Хватцев Александр Алексеевич

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Учебное пособие

Технический редактор: А. А. Хватцев
Компьютерная вёрстка: А. А. Хватцев, В. А. Яковлева
Корректор: С. Н. Емельянова

Подписано в печать 24.04.2017. Формат 60×90/16.
Гарнитура Times New Roman. Усл. п. л. 4,75.
Тираж 60 экз. Заказ № 5347.

Изготовлено на Versant 2100.

Адрес издательства:
Россия 180000, г. Псков, ул. Л. Толстого, д. 4[а], корп. 3[а].
Издательство Псковского государственного университета

ISBN 978-5-91116-560-4

9 785911 165604