

Линейная алгебра:
лекция 4

8 апреля 2021

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Квадратные матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ называются сопряженными, если найдется невырожденная матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$ такая, что $B = C^{-1}AC$. Сопряженные матрицы обладают похожими свойствами, в частности, имеют одинаковый определитель, след и ранг, а также одинаковые наборы собственных значений.

В пространстве \mathbb{R}^n стандартным называется следующий базис

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задачи:

1. Какие из следующих матриц сопряжены? Если они сопряжены, то укажите, с помощью какой матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

Решение:

Из условия выше следует, что можно проверить сначала определитель, след и ранг матриц на равенство, а потом только считать более сложное решение для C .

$$\text{tr} A = \text{tr} B = 1$$

$$\det A = \det B = 0$$

$$\text{rank} A = \text{rank} B = 1$$

Посчитаем решение.

Нас интересует матрица $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$C^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Само уравнение будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Перемножим справа 1 и 2 матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Перемножим оставшиеся матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} -bc & -bd \\ ac & ad \end{pmatrix}$$

Нам нужно решение

$$\begin{cases} \frac{-bc}{ad-bc} = 1 \\ -bd = 0 \\ ac = 0 \\ ad = 0 \end{cases}$$

Решением будет $\begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ bc \neq 0 \end{cases}$

Ответ: Эти матрицы сопряжены. Они сопряжены с помощью матрицы вида $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, где $bc \neq 0$

б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

Ответ: Эти матрицы не сопряжены так как их следы не равны: $tr A = 5 \neq tr B = 4$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: Эти матрицы не сопряжены так как их определители не равны: $|A| = 1 \neq |B| = 2$

2. В пространстве \mathbb{R}^3 заданы следующие векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу A линейного оператора $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, заданного по правилу $x \mapsto Ax$, такого, что $Av_i = u_i$ при $i = 1, 2, 3$.

Решение:

$AV = U$, где V - матрица из векторов v , а U - матрица из векторов u . Нам нужно найти $A = UV^{-1}$

Найдем сначала V^{-1} методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{вычтем III} - 2 \text{ I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{вычтем I} - \text{II} \text{ и III} + \text{II}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{прибавим I} + 2 \text{ III} \text{ и умножим III на } -1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ Мы нашли в правой части матрицу } V^{-1}.$$

Рассчитаем A через произведение.

$$UV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: матрица $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Пусть $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Пусть

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ – векторы в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ – векторы в } \mathbb{R}^2.$$

Найти матрицу отображения φ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2 .

Решение:

Согласно теореме с лекции, при смене базисов, нужно матрицу линейного отображения умножить слева на обратную матрицу перехода к новому базису в целевом пространстве и справа на матрицу перехода к новому базису в исходном пространстве: $A' = C_{e \rightarrow g}^{-1} A C_{e \rightarrow f}$

A уже известно, $C_{e \rightarrow f}$ – это матрица их колонок векторов f_1, f_2, f_3 .

$$C_{e \rightarrow g}^{-1} = inv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Завершим расчет:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: матрица отображения φ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2 $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

4. В пространстве \mathbb{R}^3 заданы следующие векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Существует ли линейное отображение $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что $\varphi(v_i) = u_i$ при $i = 1, 2, 3, 4, 5$, где

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Решение:

Переход между векторами $V \rightarrow U$ будет соответствовать умножению V на некоторую матрицу $A_{2 \times 3}$.

$$U = AV$$

$$A = UV^{-1}$$

При этом в матрице V будут векторы, которые образуют базис их 5 векторов v_1, \dots, v_5 , а в матрице U – соответствующие им вектора из u_1, \dots, u_5 . Найдем базис пространства из векторов v

Привели к ступенчатому виду матрицу их всех векторов V и сразу найдем базисные вектора и обратную матрицу к ним.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & -2 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{вычтем II-I и III-I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & -1 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -4 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{вычтем I-II и III+II}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{II+III}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & | & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & | & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Мы получили, что базис образован векторами v_1, v_2, v_4 . Матрица $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

и обратная ей: $V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Для пространства из векторов u , можно сразу заметить, что есть вектор u_5 и u_2 - и это стандартный базис

Составим $U = (v_1 | v_2 | v_4)$ и умножим ее на V^{-1}

$$A = UV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

По построению, векторы 1, 2, 4 переходят их v в u . Для векторов 3 и 5 также выполняется это преобразование, что можно проверить.

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = u_3$$

$$Av_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_5$$

Ответ: Да, такое линейное отображение φ существует и его матрица $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. Найдите в стандартном базисе матрицу линейного оператора $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, который сжимает плоскость в 2 раза вдоль прямой $y = -2x$ и одновременно растягивает плоскость в 3 раза вдоль прямой $y = x$.

Решение:

Положим мы уже находимся в базисе, где происходит эта трансформация, тогда трансформации соответствует матрице оператора $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ Найдём матрицу

перехода от базиса в векторах $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ к стандартному. Сделаем это методом гаусса.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & -2 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{вычтем II-I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & -3 & | & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{поделим II на -3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right) \rightarrow \text{вычтем I-II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right)$$

Матрица перехода к стандартному базису - $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Матрицу T^{-1} мы уже знаем - это записанные по столбцам координаты векторов, относительно которых происходит растяжение и сжатие. $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Наш ответ относительно матрицы A^* линейного оператора φ :

$$A^* = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0,5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 1\frac{2}{3} & 1\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ответ: в стандартном базисе матрица линейного оператора $\begin{pmatrix} 2\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 1\frac{2}{3} & 1\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

6. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в стандартном базисе матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Можно ли эту матрицу диагонализировать в каком-нибудь базисе?

Решение:

Найдем собственные значения, решив уравнение относительно λ :

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} -7-\lambda & 3 \\ -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7-\lambda & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda)(-28+7\lambda-4\lambda+\lambda+27) - 5(-20+5\lambda+18) + 6(-15+14+2\lambda) = (4-\lambda)(4\lambda-1) - 5(5\lambda-2) + 6(2\lambda-1) = 16\lambda-4-4\lambda^2+\lambda-25\lambda+10+12\lambda-6 = -4\lambda^2+4\lambda = -4\lambda(1-\lambda) = 0$$

Корни $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ - это собственные значения.

Про диагонализируемость.

Если у матрицы $n \times n$ ровно n различных собственных значений, то она диагонализуема. Так как у нашей матрицы только 2 различных собственных значения, то она не диагонализуема. Собственные значения не меняются при переходе в другой базис \Rightarrow эту матрицу нельзя диагонализировать в любом базисе.

Ответ: собственные значения: 1 и 0. Эту матрицу нельзя диагонализировать в любом базисе.

7. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Найдите собственные значения $n \times n$ матрицы $x^T x$, где x - матрица-строка (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Решение:

Для начала найдем собственные значения для первых n в этой последовательности увеличивающихся матриц.

$n = 1$: матрица имеет вид (a^2) . Найдем собственные значения из уравнения $|a^2 - \lambda| = 0$. собственные значения - только a^2

$n = 2$: матрица имеет вид $\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$. Найдем собственные значения из уравнения

$$\begin{vmatrix} a^2 - \lambda & ab \\ ab & b^2 - \lambda \end{vmatrix} = a^2b^2 - a^2\lambda - \lambda b^2 + \lambda^2 - a^2b^2 = -a^2\lambda - \lambda b^2 + \lambda^2 = \lambda(\lambda - (a^2 + b^2)).$$

Собственные значения - 0 и $a^2 + b^2$

$n = 3$: матрица имеет вид $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Найдем собственные значения из уравнения

$$\begin{vmatrix} a^2 - \lambda & ab & ac \\ ab & b^2 - \lambda & bc \\ ac & bc & c^2 - \lambda \end{vmatrix} = (a^2 - \lambda) \begin{vmatrix} b^2 - \lambda & bc \\ bc & c^2 - \lambda \end{vmatrix} - ab \begin{vmatrix} ab & ac \\ bc & c^2 - \lambda \end{vmatrix} + ac \begin{vmatrix} ab & ac \\ b^2 - \lambda & bc \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 - \lambda)\lambda^2 = 0.$$

Собственные значения - 0, 0 и $a^2 + b^2 + c^2$

Также заметим, что начиная с $n = 2$, определитель матрицы также равен 0 \Rightarrow среди собственных значений будет 0 для $n \geq 2$.

Мы получаем последовательность, что для любого n собственные значения будут состоять из $n - 1$ нулей и одного значения $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$. Длинная конструкция с квадратами похожа на квадрат длины вектора x . Покажем, что это верно, используя свойства собственного значения. Предположим, что мы нашли собственный вектор x (вектор столбец), тогда выполнится определение $Ax = \lambda x$.

$$(x^T x)x^T = x^T (xx^T) = x^T \|x\|^2 = \|x\|^2 x^T = \lambda x^T$$

и $\lambda = \|x\|^2$, следовательно квадрат длины вектора x всегда будет собственным значением.

Ответ: собственным значением будет квадрат длины вектора x : $\|x\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$ и $n - 1$ штук нулей.