

Теория вероятностей:
лекция 3

20 мая 2021

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Задачи:

1. Пусть $f(x) = xe^{-x}, x \geq 0$ Убедитесь, что функция f является плотностью. Найдите математическое ожидание

Решение:

Чтобы проверить, что это может быть плотность распределения, посчитаем ее интеграл от $-\infty$ до $+\infty$. интерпретируем условие, как то, что при $x < 0$, функция принимает значение 0 \Rightarrow можно сразу считать интеграл от 0 и проверять его равенство 1. Возьмем интеграл по частям:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x} dx = (-xe^{-x}) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 0 - e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1$$

Найдем математическое ожидание, взяв интеграл от 0 до $+\infty$ от $xf(x)$, интегрируя по частям, а потом встретив интеграл, который уже посчитали выше:

$$E(x) = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = (-e^{-x} x^2) \Big|_0^{\infty} + 2 \int_0^{\infty} xe^{-x} dx = 0 + 2 = 2$$

Ответ: Да, эта функция может быть функцией плотности распределения, если добавить, что $f(x < 0) = 0$. Математическое ожидание: $E(x) = 2$

2. Предположим, что мишень имеет форму круга с радиусом 10 футов, причем вероятность попадания в любой концентрический круг пропорциональна площади этого круга. Обозначим через R расстояние от точки попадания пули до центра круга. Найдите функцию распределения, плотность и математическое ожидание случайной величины R .

Решение:

Так как площадь круга растет как квадрат от радиуса, мы хотим, чтобы $\int f_R(x) dx \sim x^2$, т.е. при интегрировании мы получали что-то, зависящее от R^2 . Попробуем взять $f_R(x) = Cx$ и определенное на интервале от 0 до 10 (вне интервала - 0). Возьмем интеграл от этой функции от $-\infty$ до $+\infty$ и приравняем результат к 1, чтобы найти константу. Потом проверим, что это подходит под отношение площадей.

$$\int_{-\infty}^{\infty} Cx dx = C \int_0^{10} x dx = C \frac{x^2}{2} \Big|_0^{10} = 50C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{50}$$

Запишем функцию плотности распределения случайной величины R :

$$f_R(x) = \begin{cases} 0, x \notin [0, 10]; \\ \frac{x}{50}, x \in [0, 10]. \end{cases}$$

Функция распределения, будет ее интегралом и задавать вероятность $P(R \leq x)$:

$$F_R(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0; \\ \frac{x^2}{100}, x \in (0, 10]; \\ 1, x > 10. \end{cases}$$

Проверим, что это соответствует условию "вероятности пропорциональны площади круга". Возьмем круги радиусом 1 и 2 и посчитаем вероятность попадания и их площади, сравним:

$$P(x < 1) = \int_0^1 \frac{x}{50} dx = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$P(x < 2) = \int_0^2 \frac{x}{50} dx = \frac{1}{25} = 0.04$$

$$\frac{P(x < 2)}{P(x < 1)} = 4 = \frac{S_{circle}(R=2)}{S_{circle}(R=1)} = \frac{4\pi}{\pi} = 4$$

Мы получили то, что вероятности относятся также как площади кругов. Найдем математическое ожидание случайной величины R:

$$E(R) = \int_0^{10} \frac{x^2}{50} dx = \frac{x^3}{150} \Big|_0^{10} = \frac{1000}{150} = \frac{20}{3}$$

Ответ: плотность распределения случайной величины R:

$$f_R(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 10]; \\ \frac{x}{50}, & x \in [0, 10]. \end{cases} \quad \text{Функция распределения: } F_R(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2}{100}, & x \in (0, 10); \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Математическое ожидание: $E(R) = \frac{20}{3} \approx 6.67$

3. Плотность распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 2]; \\ Cx^2, & x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Определить константу C, вычислить вероятность $P\{-1 \leq \xi \leq 1\}$. Найти математическое ожидание и дисперсию

Решение:

Чтобы найти C, интегрируем функцию плотности от $-\infty$ до $+\infty$ и приравняем результат к 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Cx^2 dx = C \int_0^2 x^2 dx = C \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = C \frac{8}{3} = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{8}$$

Чтобы найти вероятность $P\{-1 \leq \xi \leq 1\}$, интегрируем плотность $p_\xi(x)$ от -1 до 1. Так как значения $p_\xi = 0, x < 0$, то достаточно взять пределы интегрирования от 0 до 1:

$$P\{-1 \leq \xi \leq 1\} = \int_0^1 \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{3}{8} \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{3}{8} \frac{1}{3} = \frac{1}{8}$$

Найдем математическое ожидание:

$$E(\xi) = \int_0^2 x \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{3}{8} \int_0^2 x^3 dx = \frac{3x^4}{32} \Big|_0^2 = \frac{3 \cdot 16}{32} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Для дисперсии, дополнительно найдем $E(\xi^2)$:

$$E(\xi^2) = \int_0^2 x^2 \frac{3}{8} x^2 dx = \frac{3}{8} \int_0^2 x^4 dx = \frac{3x^5}{40} \Big|_0^2 = \frac{3 \cdot 32}{40} = \frac{12}{5} = 2.4$$

$$D(\xi) = E(\xi^2) - [E(\xi)]^2 = 2.4 - 1.5^2 = 0.15$$

Ответ: $C = \frac{3}{8}$. Вероятность $P\{-1 \leq \xi \leq 1\} = \frac{1}{8} = 0.125$. Математическое ожидание: $E(\xi) = \frac{3}{2} = 1.5$. Дисперсия: $D(\xi) = 0.15$

4. Найдите $E[X^3]$ и $E[X^4]$, если $X \sim N(0, 1)$.

Решение:

Сначала $E[X^3]$: Нам нужно найти значение определенного интеграла:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 0$$

Функция под интегралом - нечетная ($f(-x) = -f(x)$), а пределы интегрирования симметричны относительно 0 \Rightarrow результат будет 0.

Для 4-го центрального момента нужно посчитать следующий интеграл:

$$E[X^4] = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx =$$

будем считать по частям: $f = x^3, dgx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, df = 3x^2 dx, g = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

$$E[x^4] = \left(x^3 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 0 + 3 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = 3$$

Мы использовали то, что $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = D(X) = 1$, согласно условию.

Ответ: $E[X^3] = 0, E[X^4] = 3$

5. Пусть X имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = (5 + X \cdot \ln 2)/2$.

Решение:

По свойству математического ожидания: $E(Y) = (5 + E(X) \cdot \ln 2)/2 = (5 + (\frac{a+b}{2}) \cdot \ln 2)/2 = \frac{5}{2} + (\frac{a+b}{4}) \ln 2$

По свойству дисперсии: $D(Y) = D(X) \frac{(\ln 2)^2}{4} = \frac{b^2 - a^2}{12} \frac{(\ln 2)^2}{4} = \frac{(b^2 - a^2)(\ln 2)^2}{48}$

Ответ: $E(Y) = \frac{5}{2} + (\frac{a+b}{4}) \ln 2$ и $D(Y) = \frac{(b^2 - a^2)(\ln 2)^2}{48}$

6. Пусть X имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$. Найдите $D(X)$

Решение:

Мы знаем, что для экспоненциального распределения $E(x) = \frac{1}{\lambda}$ и $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$

Найдем $E(x^2)$:

$$E(x^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx =$$

интегрируем по частям

$$= \lambda \left(-\frac{x^2 e^{-\lambda x}}{\lambda} \right) \Big|_0^{\infty} + \lambda \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = 0 + \frac{2}{\lambda} E(x) = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$D(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ответ: Значение: $D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ и расчет выше.