**Математический анализ: лекция 2** **27 февраля 2021**

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

## Задачи

1. Посчитайте неопределенные интегралы

   (a) $\int sin^3(x)dx$
   **Решение:**

   $\int sin^3(x)dx = -\frac{1}{3}sin^2(x)cos(x) + \frac{2}{3}\int sin(x)dx = -\frac{2cos(x)}{3} - \frac{1}{3}sin^2(x)cos(x) + C$
   **Ответ:** $-\frac{2\cos(x)}{3} - \frac{1}{3}\sin^2(x)\cos(x) + C$

   (b) $\int (\frac{1-x}{x})^2 dx$
   **Решение:**
   Проведем замену $u = 1 - x$ и $du = -dx$
   $\int (\frac{1-x}{x})^2 dx = -\int \frac{u^2}{(u-1)^2}du = -\int (\frac{2}{u-1} + \frac{1}{(u-1)^2} + 1)du = -2\int \frac{1}{u-1}du - \int \frac{1}{(u-1)^2}du - u + C$
   Проводим еще одну замену $s = u - 1$ и $ds = du$
   $-2\int \frac{1}{s}ds - \int \frac{1}{(s)^2}ds - u + C = -2\log s + \frac{1}{s} - u + C$
   Вернемся обратно к u и поток к x

   $$= -2\log(u-1) + \frac{1}{u-1} - u + C = -2\log(-x) - \frac{1}{x} + x - 1 + C = -2\log(-x) - \frac{1}{x} + x + C$$

   **Ответ:** $-2\log(-x) - \frac{1}{x} + x + C$

   (c) $\int \frac{\log^2 x}{x}dx$
   **Решение:**
   Проведем замену $u = \log(x); du = \frac{1}{x}dx$

   $$\int \frac{\log^2 x}{x}dx = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\log^3 x + C$$

   **Ответ:** $\frac{1}{3}\log^3 x + C$

   (d) $\int \frac{1}{1+\cos x}dx$
   **Решение:**
   Используя формулу для двойного угла, выразим: $\cos x = 2\cos^2(x/2) - 1$

   $$\int \frac{1}{1+\cos x}dx = \int \frac{1}{2\cos^2(x/2)}dx = \frac{1}{2}\int \sec^2(x/2)dx = 2*\frac{1}{2}\operatorname{tg}(x/2) + C = \operatorname{tg}(x/2) + C$$

   **Ответ:** $\operatorname{tg}(x/2) + C$

2. Посчитайте определенные интегралы

(a) $\int_1^2 x\ln x dx$

**Решение:**

Интегрируем по частям: $\int f dg = fg - \int g df$ где, $f = \ln x, dg = x dx, df = 1/x dx, g = x^2/2$

$$\int_1^2 x\ln x dx = 1/2 * x^2\ln x - 1/2\int_1^2 x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4}\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 + 1/4 = 2\ln 2 - 3/4$$

**Ответ:** $2\ln 2 - 3/4$

(b) $\int_0^{2\pi} x\sin x dx$

**Решение:**

Интегрируем по частям: $\int f dg = fg - \int g df$ где, $f = x, dg = \sin x dx, df = dx, g = -\cos x$

$$\int_0^{2\pi} x\sin x dx = -x\cos x + \int_0^{2\pi}\cos x dx = \sin x - x\cos x\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= sin(2\pi) - 2\pi cos(2\pi) - (sin(0) - 0cos(0)) = -2\pi$$

**Ответ:** $-2\pi$

3. Найти предел $\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^1 \frac{e^t}{t}dt}{\ln x}$

**Решение:**

Моё понимание, что интеграл в числителе будет равен разности двух интегральных показательных функций

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ei(1) - Ei(x)}{\ln x} =$$

Возьмем производную от верхней и нижней части

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-e^x/x}{1/x} = \lim_{x\to 0} -e^x = -1$$

**Ответ:** $-1$

4. Найти площадь фигуры внутри кривой $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

**Решение:**

Фигура симметрична относительно оси OX и OY. Поэтому оценим только верхнюю правую четверть площади. Выразим из формулы y и возьмем интеграл от 0 до a.

$$\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx$$

делаем замену $\sin t = x/a, dx = a\cos t dt$

$$\int_0^{\pi/2} ab\sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} ab\cos^2 t dt$$

Заменим через формулу двойного угла $\cos^2 t = \frac{\cos 2t + 1}{2}$

$$= \int_0^{\pi/2} ab\frac{\cos 2t + 1}{2}dt = 1/2ba(1/2\sin 2t + t)\Big|_0^{\pi/2} = 1/4ab\pi$$

Общая площадь $ab\pi$

**Ответ:** $ab\pi$

5. Найти длину кривой $y = x^{3/2}$ от 0 до 4

**Решение:**
Запишем, что нужно считать

$$\int_0^4 \sqrt{1+(y')^2}dx =$$

$y'(x) = 3/2x^{0.5}, (y')^2 = \frac{9x}{4}$

$$= \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx =$$

заменим $u = \frac{9x}{4} + 1, du = 9/4dx$

$$= -\frac{4}{9}\int_1^{10} \sqrt{u}du = \frac{8u^{3/2}}{27}\Big|_1^{10} = \frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$$

**Ответ:** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$