Линейная алгебра: лекция 4

8 апреля 2021

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Квадратные матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ называются сопряженными, если найдется невырожденная матрица $C \in M_n(\mathbb{R})$ такая, что $B = C^{-1}AC$. Сопряженные матрицы обладают похожими свойствами, в частности, имеют одинаковый определитель, след и ранг, а также одинаковые наборы собственных значений.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ стандартным называется следующий базис

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Задачи:

1. Какие из следующих матриц сопряжены? Если они сопряжены, то укажите, с помощью какой матрицы:

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

   Решение:

   Из условия выше следует, что можно проверить сначала определитель, след и ранг матриц на равенство, а потом только считать более сложное решение для C.

$$trA = trB = 1$$

$$\det A = \det B = 0$$

$$rankA = rankB = 1$$

   Посчитаем решение.

   Нас интересует матрица $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$C^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

   Само уравнение будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   Перемножим справа 1 и 2 матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   Перемножим оставшиеся матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} -bc & -bd \\ ac & ad \end{pmatrix}$$

Нам нужно решение

$$\begin{cases} \frac{-bc}{ad-bc} = 1 \\ -bd = 0 \\ ac = 0 \\ ad = 0 \end{cases}$$

Решением будет $\begin{cases} a = 0 \\ d = 0 \\ bc \neq 0 \end{cases}$

Ответ: Эти матрицы сопряжены. Они сопряжены с помощью матрицы вида $\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$, где $bc \neq 0$

б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

Ответ: Эти матрицы не сопряжены так как их следы не равны: $trA = 5 \neq trB = 4$

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: Эти матрицы не сопряжены так как их определители не равны: $|A| = 1 \neq |B| = 2$

2. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы следующие векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите матрицу A линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, заданного по правилу $x \mapsto Ax$, такого, что $Av_i = u_i$ при $i = 1, 2, 3$.

Решение:

$AV = U$, где V - матрица из векторов v, а U - матрица из векторов u. Нам нужно найти $A = UV^{-1}$

Найдем сначала V^{-1} методом Гаусса.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$ вычтем III -2 I

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$ вычтем I - II и III+ II

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \to$ прибавим I + 2 III и умножим III на -1

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right)$ Мы нашли в правой части матрицу V^{-1}.

Рассчитаем A через произведение.

$$UV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: матрица $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ – линейное отображение, заданное в стандартном базисе матрицей $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Пусть

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ – векторы в } \mathbb{R}^3, \quad g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ – векторы в } \mathbb{R}^3.$$

Найти матрицу отображения φ в базисах f_1, f_2, f_3 и g_1, g_2.

Решение:
Согласно теореме с лекции, при смене базисов, нужно матрицу линейного отображения умножить слева на обратную матрицу перехода к новому базису в целевом пространстве и справа на матрицу перехода к новому базису в исходном пространстве: $A' = C_{e\to g}^{-1} A C_{e\to f}$

A уже известно, $C_{e\to f}$ - это матрица их колонок векторов f_1, f_2, f_3.

$$C_{e\to g}^{-1} = inv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Завершим расчет:

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ответ: матрица отображения φ **в базисах** f_1, f_2, f_3 **и** g_1, g_2 $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

4. В пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы следующие векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Существует ли линейное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ такое, что $\varphi(v_i) = u_i$ при $i = 1, 2, 3, 4, 5$, где

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Решение:
Переход между векторами $V \to U$ будет соответствовать умножению V на некоторую матрицу A_{2*3}.

$$U = AV$$
$$A = UV^{-1}$$

При этом в матрице V будут векторы, которые образуют базис их 5 векторов $v_1, ..., v_5$, а в матрице U - соответствующие им вектора из $u_1, ..., u_5$ Найдем базис пространства из векторов v

Привели к ступенчатому виду матрицу их всех векторов V и сразу найдем базисные вектора и обратную матрицу к ним.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 1 & 5 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \text{вычтем II-I и III-I}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 1 & 5 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & -4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \text{вычтем I-II и III+II}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \text{II+III}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Мы получили, что базис образован векторами v_1, v_2, v_4. Матрица $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

и обратная ей: $V^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Для пространства из векторов u, можно сразу заметить, что есть вектор u_5 и u_2 - и это стандартный базис

Составим $U = \begin{pmatrix} v_1 | & v_2 | & v_4 \end{pmatrix}$ и умножим ее на V^{-1}

$$A = UV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

По построению, векторы 1, 2, 4 переходят их v в u. Для векторов 3 и 5 также выполняется это преобразование, что можно проверить.

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = u_3$$

$$Av_5 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_5$$

Ответ: Да, такое линейное отображение φ существует и его матрица $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5. Найдите в стандартном базисе матрицу линейного оператора $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, который сжимает плоскость в 2 раза вдоль прямой $y = -2x$ и одновременно растягивает плоскость в 3 раза вдоль прямой $y = x$.

   Решение:
   Положим мы уже находимся в базисе, где происходит эта трансформация, тогда трансформации соответствует матрице оператора $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix}$ Найдем матрицу перехода от базиса в векторах $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ к стандартному. Сделаем это методом гаусса.

   $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \text{вычтем II-I}$$
   $$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \text{поделим II на -3}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \to \text{вычтем I-II}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Матрица перехода к стандартному базису - $T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Матрицу T^{-1} мы уже знаем - это записанные по столбцам координаты векторов, относительно которых происходит растяжение и сжатие. $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Наш ответ относительно матрицы A^* линейного оператора φ:

$$A^* = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0.5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 1\frac{2}{3} & 1\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ответ: в стандартном базисе матрица линейного оператора $\begin{pmatrix} 2\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ 1\frac{2}{3} & 1\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

6. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в стандартном базисе матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Можно ли эти матрицу диагонализовать в каком-нибудь базисе?

Решение:

Найдем собственные значения, решив уравнение относительно λ:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} -7-\lambda & 3 \\ -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -7-\lambda & 3 \end{vmatrix} =$$

$= (4-\lambda)(-28+7\lambda-4\lambda+\lambda+27)-5(-20+5\lambda+18)+6(-15+14+2\lambda) = (4-\lambda)(4\lambda-1)-5(5\lambda-2)+6(2\lambda-1) = 16\lambda-4-4\lambda^2+\lambda-25\lambda+10+12\lambda-6 = -4\lambda^2+4\lambda = -4\lambda(1-\lambda) = 0$

Корни $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ - это собственные значения.

Про диагонализируемость.
Если у матрицы n×n ровно n различных собственных значений, то она диагонализируема. Так как у нашей матрицы только 2 различных собственных значения, то она не диагонализируема. Собственные значения не меняются при переходе в другой базис $\Rightarrow$ эту матрицу нельзя диагонализовать в любом базисе.

Ответ: собственные значения: 1 и 0. Эту матрицу нельзя диагонализовать в любом базисе.

7. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Найдите собственные значения $n \times n$ матрицы $x^T x$, где x – матрица-строка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Решение:
Для начала найдем собственные значения для первых n в этой последовательности увеличивающихся матриц.

$n=1$: матрица имеет вид $\begin{pmatrix} a^2 \end{pmatrix}$. Найдем собственные значения из уравнения $\begin{vmatrix} a^2-\lambda \end{vmatrix} = 0$. собственные значения - только a^2

$n=2$: матрица имеет вид $\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$. Найдем собственные значения из уравнения $\begin{vmatrix} a^2-\lambda & ab \\ ab & b^2-\lambda \end{vmatrix} = a^2b^2 - a^2\lambda - \lambda b^2 + \lambda^2 - a^2b^2 = -a^2\lambda - \lambda b^2 + \lambda^2 = \lambda(\lambda - (a^2+b^2))$. Собственные значения - 0 и a^2+b^2

$n=3$: матрица имеет вид $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$. Найдем собственные значения из уравнения $\begin{vmatrix} a^2-\lambda & ab & ac \\ ab & b^2-\lambda & bc \\ ac & bc & c^2-\lambda \end{vmatrix} = (a^2-\lambda)\begin{vmatrix} b^2-\lambda & bc \\ bc & c^2-\lambda \end{vmatrix} - ab\begin{vmatrix} ab & ac \\ bc & c^2-\lambda \end{vmatrix} + ac\begin{vmatrix} ab & ac \\ b^2-\lambda & bc \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2-\lambda)\lambda^2 = 0$. Собственные значения - 0,0 и $a^2+b^2+c^2$

Также заметим, что начиная с $n=2$, определитель матрицы также равен $0 \Rightarrow$ среди собственных значений будет 0 для $n >= 2$.

Мы получаем последовательность, что для любого n собственные значения будут состоять из $n-1$ нулей и одного значения $a_1^2+a_2^2+c_3^2+...+a_n^2$. Длинная конструкция с квадратами похожа на квадрат длины вектора x. Покажем, что это верно, используя свойства собственного значения. Предположим, что мы нашли собственный вектор x (вектор столбец), тогда выполнится определение $Ax = \lambda x$.

$$(x^T x)x^T = x^T(xx^T) = x^T||x||^2 = ||x||^2 x^T = \lambda x^T$$

и $\lambda = ||x||^2$, следовательно квадрат длины вектора x всегда будет собственным значением.

Подойдем к определению числа собственных значений более строго. Нам нужно найти, какая будет размерность подпространства, образованного каждым λ. Возьмем $\lambda = 0$, нас интересует размерность пространства $\dim(A - \lambda E) = \dim(A - 0E) = \dim(A)$

Для любого $n > 1$, когда это собственное значение существует, матрица $x^T x$ имеет вид: $\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & ... & a_1a_n \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 & ... & a_2a_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1a_n & a_2a_n & a_3a_n & ... & a_n^2 \end{pmatrix}$. Если мы разделим каждую строку на a_i, где $i =$ номер строки, то мы получим, что каждая строка равна вектору $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Все строки линейно зависимые $\Rightarrow$ число линейно независимых строк $= 1 \Rightarrow \dim(x^T x) = n-1 \Rightarrow$ нулей среди собственных значений будет $n-1$. Так как длина вектора $||x||^2$ тоже собственное значение и их должно быть $\geqslant 1$, а общее число собственных значений $\leqslant n \Rightarrow$ мы можем утверждать, что собственное значение $||x||^2$ строго одно.

Ответ: собственным значением будет квадрат длины вектора x**:** $||x||^2 = a_1^2 + a_2^2 + c_3^2 + ... + a_n^2$ **и** $n-1$ **штук нулей.**