4 б) решение

найдем сингулярное разложение $A = C \Lambda D^T$

$$S = A A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

найдем хар-й многочлен, и его собственные вектора и собственные значения

$$|S - \lambda E| = \begin{vmatrix} 10-\lambda & 8 \\ 8 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 36 = (x-18)(x-2) = 0$$

рассмотрим $\lambda = 18$

$$S - 18E = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ФСР: \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

рассмотрим $\lambda = 2$

$$S - 2E = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ФСР: \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

запишем $C = (v_1 | v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

матрица D: $\quad D = (D_1 | D_2)$

$3 \times 4 \quad\quad 4 \times 2 \quad 4 \times 2$

$$D_1^T = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} C^T A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

вектора строк D_1 и имеют длину 1