Теория вероятностей: лекция 2

7 мая 2021

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Задачи:

1. Докажите первые три свойства математического ожидания (МО от константы, МО от случайной величины умноженной на константу и МО суммы двух случайных величин)

1) а) Д-ть $Ec=c$

положим ξ - случайная величина, которая $=c$,

тогда единственный элементарный исход : $a=c$, $P(\xi=c)=1$

запишем Ec через определение : $Ec = c\cdot P(\xi=c) = 1c = \underline{c}$

доказали, что $Ec=c$.

б) Д-ть $Ec\xi = cE\xi$

Запишем, чему равно $Ec\xi$ через определение E:

$$Ec\xi = \sum c a_i P(\xi_i = a_i) = c\sum a_i P(\xi_i = a_i) = c\sum a_i p_i = \underline{cE\xi} \text{ ч.т.д.}$$

в) Д-ть $E(\xi+v) = E\xi + Ev$

$$E(\xi+v) = \sum_{a,b}(x_a+y_b)P(\xi=x_a, v=y_b) =$$

$$= \sum_a x_a \sum_b P(\xi=x_a, v=y_b) + \sum_b y_b \sum_a P(\xi=x_a, v=y_b) =$$

$$= \sum_a x_a P(\xi=x_a) + \sum_b y_b P(v=y_b) = \underline{E\xi + Ev} \quad \text{ч.т.д.}$$

2. Докажите следующие свойства дисперсии: Дисперсия константы, дисперсия от случайной величин, умноженной на константу и Дисперсия случайной величины к которой добавили константу

2) а) Д-ть $Dc = 0$.

по определению $Dc = E(c - Ec)^2 =$

$= \langle$ по св-ву мат. ожидания $\rangle = E(c - c)^2 = E(0) = \underline{0}$ ч.т.д

б) Д-ть $Dc\xi = c^2 D\xi$

запишем $Dc\xi = E(c\xi - Ec\xi)^2 = Ec^2(\xi - E\xi)^2 = c^2 E(\xi - E\xi)^2 =$

$= \underline{c^2 D\xi}$ ч.т.д.

используя только свойства М.О.

в) Доказать $D(c + \xi) = D\xi$

$D(c+\xi) = E(c + \xi - E(c+\xi))^2 = E(c + \xi - c - E\xi)^2 = E(\xi - E\xi)^2 = \underline{D\xi}$

ч.т.д.

3. Распределение случайной величины задано таблицей

ξ	-1	0	4	15
ξ^2	1	0	16	225
P	1/10	1/3	1/2	1/15

Найдите МО и дисперсию

Решение:
Допишем в таблице выше значения ξ^2

$$E(\xi) = \sum_i^4 \xi_i P_i = -\frac{1}{10} + 0 + 2 + 1 = 2.9$$

$$D(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = \sum_i^4 \xi_i^2 P_i - 2.9^2 = 0.1 + 0 + 8 + 15 - 8.41 = 14.69$$

Ответ: МО: 2.9**, дисперсия:** 14.69

4. У человека в кармане 6 похожих друг на друга ключей. Только один открывает дверь. Человек последовательно достает ключ и пробует открыть дверь, если не получается, то убирает ключ в другой карман. Сколько в среднем придется попробовать ключей, прежде чем получится открыть дверь

Решение:

Только один ключ из 6 открывает дверь. Построим случайную величину k = число взятых ключей, которое мы взяли чтобы открыть дверь. Представим, что мы открыли дверь первым ключём, вероятность этого:

$$P(k=1) = \frac{1}{6}$$

Для следующих ключей, вероятность равна произведению вероятности не открыть меньшим числом ключей на вероятность открыть последним ключём

$$P(k=2) = (1-\frac{1}{6})\frac{1}{5} = \frac{5}{6}\frac{1}{5} = \frac{1}{6}$$

$$P(k=3) = \frac{5}{6}(1-\frac{1}{5})\frac{1}{4} = \frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$P(k=4) = \frac{5}{6}\frac{4}{5}(1-\frac{1}{4})\frac{1}{3} = \frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(k=5) = \frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}(1-\frac{1}{3})\frac{1}{3} = \frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(k=6) = \frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}(1-\frac{1}{2})1 = \frac{5}{6}\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}1 = \frac{1}{6}$$

Запишем ее значения и вероятности этих исходов:

k	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Из расчета, приведенного в задании 8, мы уже нашли значение м.о.: $Ek = 3.5$

Ответ: в среднем придется попробовать 3.5 ключа

5. Автоматический механизм производит дефектную деталь с вероятностью p. Когда это происходит, выполняется регулировка механизма. Найдите среднее число качественных деталей, производимых между регулировками.

Решение:
Если вероятность дефекта p, то вероятность, что деталь не дефектная $1-p$. Вероятность того, что деталь 2 будет не дефектная будет $p(1-p)$, так как мы хотим чтобы одновременно первая деталь была не дефектная а вторая - дефектная. Все детали независимо друг от друга могут быть дефектными. На основе этого запишем в таблицу значение дискретной с.в. k , которая показывает число деталей до ремонта и вероятность этого события:

k	1	2	3	k
P	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	$p(1-p)^{k-1}$

Запишем м.о. как бесконечную последовательность:

$$Ek = 1p + 2p(1-p) + 3p(1-p)^2 + ... + kp(1-p)^{k-1}$$

Известно, что эта последовательность сходится к $\frac{1}{p}$, следовательно

$$Ek = \frac{1}{p}$$

Ответ: среднее число качественных деталей, производимых между регулировками $\frac{1}{p}$

6. Из ста карточек с числами 00, 01, 02. . . 99 наудачу вынимается одна. Пусть случайная величина ξ – сумма цифр на карточке, а v – произведение цифр на карточке. Найдите МО и дисперсию каждой случайной величины

   Решение:

   Введем еще одну случайную величину - b, которая принимает значения от 0 до 9 с вероятностью 1/10. Мы можем свести решение исходной задачи к нахождению Eb, Db и из них найти МО и дисперсию для ξ и v.

   Запишем значения и вероятности для случайной величины b:

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
P	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10	1/10

$$E(b) = \sum_{i}^{10} a_i P_i = 4.5$$

$$D(b) = E(b^2) - (E(b))^2 = \sum_{i}^{10} b_i^2 P_i - 4.5^2 = 8.25$$

   По свойствам МО и дисперсии, так как первая и 2 цифра - независимые случайные величины на этих карточках:

$$E(\xi) = 2E(b) = 9$$

$$D(\xi) = 2D(b) = 16.5$$

$$E(v) = E(b)E(b) = 4.5^2 = 20.25$$

$$D(v) = E(b^2)E(b^2) - E(b))^2 E(b))^2 = [E(b^2)]^2 - E(b))^4 = 28.5^2 - 4.5^4 = 402.1875$$

   Ответ: для суммы: $E(\xi) = 9$**,** $D(\xi) = 16.5$**; для произведения:** $E(v) = 20.25$**,** $D(v) = 402.1875$

7. Аудитор обнаруживает финансовые нарушения у проверяемой фирмы с вероятностью 0,85. Найти вероятность того, что среди 8 фирм будет выявлено строго больше 6 нарушителей

   Решение:
   Случайная величина n, которая равна выявленному числу фирм имеет биномиальное распределение с параметром $p = 0.85$.

   Нас интересует событие $A : n > 6$
   Оно эквивалентно объединению событий $n = 7$ и $n = 8$.
   Найдем вероятность:

$$P(n = 7) + P(n = 8) = C_8^7 p^7 q + p^8 = 8 \cdot 0.85^7 \cdot 0.15 + 0.85^8 \approx 0.6572$$

   Ответ: искомая вероятность: ≈ 0.6572

8. Найти дисперсию и МО суммы очков, выпавших на n игральных костях
   Решение:
   Пусть a - случайная величина, которая задает значение, которое выдает 1 кубик. Запишем ее значения, вероятности и a^2, чтобы посчитать $E(a); D(a)$

a	1	2	3	4	5	6
a^2	1	4	9	16	25	36
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$$E(a) = \sum_{i}^{6} a_i P_i = \frac{28}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$D(a) = E(a^2) - (E(a))^2 = \sum_{i}^{6} a_i^2 P_i - \frac{7^2}{2^2} = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12} = 2\frac{11}{12}$$

По свойству МО: $E(na) = nE(a) = \frac{7}{2}n$
По свойству дисперсии, учитывая, что результаты кубиков независимы:
$D(na) = n^2 E(a) = 2\frac{11}{12}n^2$
Ответ: Дисперсия: $2\frac{11}{12}n^2$**, МО:** $3\frac{1}{2}n$