Домашнее задание к лекции 4

Напомним, что непрерывная функция на ограниченном замкнутом (т.е. содержащем границу) множестве (например на прямоугольнике или на диске или на сфере) обязательно имеет минимум и максимум.

Задачи.

(1) Вычислите интегралы:

(a) Пусть фигура $A \subseteq \mathbb{R}^2$ задана как область между графиками функций $y = x$ и $y = x^2$ на отрезке $x \in [0, 1]$. Найдите интеграл

$$\int\limits_A xy^2 \, dxdy$$

(b) Найдите интеграл

$$\int\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} |xy| \, dxdy$$

(c) Найдите интеграл

$$\int\limits_{x^2+y^2 \leqslant 4} \operatorname{sgn}(x^2 + y^2 - 2) \, dxdy$$

где

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

(2) Вычислите интегралы.

(a)

$$\int\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2}} \cos(x + y) \, dxdy$$

(b)

$$\int\limits_{\substack{0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi/2}} |\cos(x + y)| \, dxdy$$

(3) Найдите точки условного экстремума

(a) для функции $z = xy$ при условии,что $x + y = 1$.

(b) для функции $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ приусловии,что $x^2 + y^2 = 1$ (считаем,что $a, b > 0$).

(4) Дана цилиндрическая бочка радиуса r и высоты h. Ее разрезали по вертикали вдоль оси симметрии на две одинаковые полуцилиндрические ванны. Какими надо выбрать радиус и высоту, чтобы при фиксированной площади поверхности S, полученная ванная имела наибольшую вместимость? Площадь поверхности полуцилиндра – это площадь боковой поверхности и оснований (полукругов).

(5) Найти минимум и максимум функции $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ при условии $x^2 + y^2 \leqslant 25$.