Математический анализ: лекция 4 **8 марта 2021**

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

1. Задача 1

Задачи.

(1) Вычислите интегралы:

(a) Пусть фигура $A \subseteq \mathbb{R}^2$ задана как область между графиками функций $y = x$ и $y = x^2$ на отрезке $x \in [0, 1]$. Найдите интеграл

$$\int\limits_A xy^2\, dxdy$$

Решение:
Запишем как последовательный интеграл:

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} yx^2 dxdy = \int_0^1 1/2y^2x^2 \Big|_y^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 1/2y^3 - 1/2y^4 dy = \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{10}\Big|_0^1 = 1/8 - 1/10 = \frac{1}{40}$$

Ответ: $\frac{1}{40}$

(b) Найдите интеграл

$$\int\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} |xy|\, dxdy$$

Решение:
Из-за знака x и y и того, что значения $|xy|$ одинаково себя ведут в каждой четверти координатной плоскости, будем считать только четверть этого интеграла в положительных значениях x и y и умножим результат на 4. Обозначим искомый ответ как V и будем искать $M = V/4$

$$M = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} xydxdy$$

посчитаем внутренний интеграл:

$$\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} xydx = \frac{1}{2}x^2y\Big|_0^{\sqrt{a^2-y^2}} = \frac{1}{2}y(a^2 - y^2) - 0 = \frac{1}{2}a^2y - \frac{1}{2}y^3$$

$$M = \int_0^a \frac{1}{2}a^2y - \frac{1}{2}y^3dy = \frac{1}{4}a^2y^2 - \frac{1}{8}y^4\Big|_0^a = \frac{1}{4}a^2a^2 - \frac{1}{8}a^4 = \frac{1}{8}a^4$$

$$V = 4M = \frac{1}{2}a^4$$

Ответ: $\frac{1}{2}a^4$

(c) Найдите интеграл

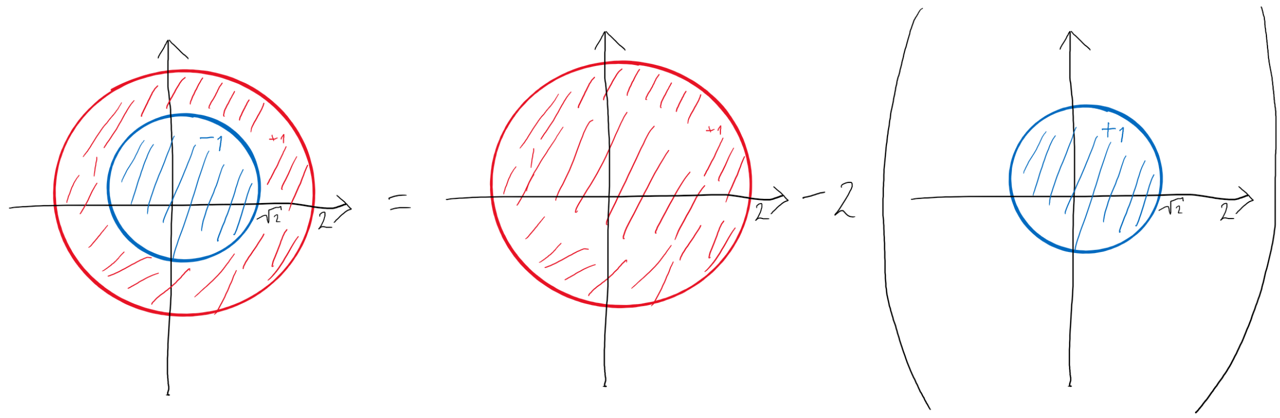
$$\int\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \operatorname{sgn}(x^2+y^2-2)\,dxdy$$

где

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

Решение:

Функция под интегралом принимает значение $+1$ вне круга радиусом $\sqrt{2}$ и -1 внутри этого круга. При этом границы интегрирования - это круг радиусом 2. Визуально, можно разложить задачу на нахождение 2 интегралов: $A = B - 2S$, где A- искомый результат, B - интеграл 1 по внешней границе, а S - интеграл 1 по границе круга с радиусом $\sqrt{2}$.



Мы знаем, что $\iint_{x^2+y^2\leqslant R^2} 1dxdy = \pi R^2$ Следовательно $B = 4\pi$, $S = 2\pi$ а ответ будет $A = B - 2S = 4\pi - 4\pi = 0$

Ответ: 0

2. вычислите интегралы

(a) $$\int\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant \pi/2 \\ 0\leqslant y\leqslant \pi/2}} \cos(x+y)\,dxdy$$

Решение:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy - \int_0^{\pi/2} \sin y\,dy = -1+1=0$$

$$= \langle \text{замена } u=x+y,\ du=dx \rangle = \int_y^{y+\frac{\pi}{2}} \cos u\,du = \sin u \Big|_y^{y+\frac{\pi}{2}} = \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) - \sin y =$$

$$= \cos y - \sin y$$

Ответ: 0

(b) $\displaystyle\int\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant \pi/2\\ 0\leqslant y\leqslant \pi/2}} |\cos(x+y)|\, dxdy$

Решение:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} |\cos(x+y)|\,dx\,dy = -\int_0^{\pi/2}\cos y\,dy - \int_0^{\pi/2}\sin y\,dy = -1-1=-2$$

$$= \sin(x+y)\cdot \operatorname{sgn}(\cos(x+y))\Big|_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)\cdot \underbrace{\operatorname{sgn}\left(\cos \left(\frac{\pi}{2}+y\right)\right)}_{-1} -$$

$$-\sin(y)\cdot \underbrace{\operatorname{sgn}(\cos y)}_{1} = -\cos y - \sin y$$

Ответ: -2

3. Найдите точки условного экстремуму

(a) $z = xy$ при $x + y = 1$

Решение:

Составим Лагранжиан:

$$L = \alpha(xy) - \lambda(x + y - 1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = \alpha y - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \alpha x - \lambda = 0$$

Решением систему уравнений $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases}$ будет или $\alpha = \lambda = 0$ или $a \neq 0, x = y = \frac{\lambda}{\alpha}$

Найдем точку $x = y$ на границе $x + y = 1$. $2x = 1; x = 0.5$. Точка $(0.5, 0.5)$ $z(0.5, 0.5) = 0.25$. Для другой точки - $z(5, -4) = -20$, $z(0.5, 0.5) > z(5, -4)$ значит мы нашли максимум.

Ответ: максимум в точке $(0.5, 0.5)$

(b) $z = x/a + y/b$ при $x^2 + y^2 = 1$

Решение:

Составим Лагранжиан:

$$L = \alpha(x/a + y/b) - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\alpha}{a} - 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\alpha}{b} - 2\lambda y = 0$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{a} - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\alpha}{b} - 2\lambda y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2a\lambda x = 0 \\ \alpha - 2b\lambda y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2a\lambda x = 0 \\ 2a\lambda x - 2b\lambda y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha - 2a\lambda x = 0 \\ y = \frac{ax}{b} \end{cases}$$

Подставим $y = \frac{ax}{b}$ в условие $x^2 + y^2 = 1$:

$$x^2 + \frac{a^2x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 + a^2x^2 = b^2 \Rightarrow x^2(a^2+b^2) = b^2 \Rightarrow x = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Выразим y через x и запишем координаты 2 точке: $(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$ и $(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$. Заметим, что функция $z = x/a + y/b$ возрастает в направлении роста y и x, значит точка с положительными знаками - максимум.

Ответ: максимум в точке $(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$ и минимум в точке $(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})$

4. Какие r и h дают наибольший объем полуцилиндрической ванны, площади S?

   Решение:
   Сведем эту задачу к поиску максимума. Площадь поверхности нашей фигуры равна площади одного круга и половине площади поверхности бока цилиндра:

   $S = \pi r^2 + \pi r h$. Объем этой фигуры - равен половине объема цилиндра(высота на площадь торца) $= V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$. Нужно найти максимум V при фиксированной площади. Составим Лагранжиан:

$$L = \alpha(\frac{1}{2}\pi r^2 h) - \lambda(\pi r^2 + \pi r h - S)$$
$$\frac{\partial L}{\partial r} = \alpha\pi r h - 2\lambda\pi r - \lambda\pi h = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial h} = \frac{1}{2}\alpha\pi r^2 - \lambda\pi r = 0$$

   Нетривиальным решением этой системы уравнений $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial h} = 0 \end{cases}$ будет $r = \frac{2\lambda}{\alpha}, h = \frac{4\lambda}{\alpha}$ при $\alpha \neq 0, \lambda \neq 0$. Это означает, что $h = 2r$. Проверим, максимум это или минимум. Сравним вариант $V(h = 2r)$ и $V(h = r)$.

   Подставим $h = r$ в формулу площади и выразим h и r через S. $h = r = \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$

$$V(h = r) = \frac{1}{2}\pi\frac{S}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{2\pi}} = \frac{S}{4\pi}\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$$

   Подставим $h = 2r$ в формулу площади и выразим h и r через S. $r = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ и $h = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{3\pi}}$

$$V(h = 2r) = \frac{1}{2}\pi\frac{S}{3\pi}\frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{3\pi}} = \frac{S}{3\pi}\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{3\pi}}$$

   Сравним:

$$V(h = r) < V(h = 2r) \Leftrightarrow \frac{S}{4\pi}\sqrt{\frac{S}{2\pi}} < \frac{S}{3\pi}\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{3\pi}} \Leftrightarrow 3\pi\sqrt{3\pi} < 4\pi\sqrt{2\pi} \Leftrightarrow 3\sqrt{3} < 4\sqrt{2} \Leftrightarrow 27 < 32$$

   Из этого следует, что мы нашли максимум.

   Ответ: максимальный объем при фиксированной площади при $h = 2r$

5. Найдите максимум и минимум функции $z = x^2+y^2-12x+16y$ при условии $x^2+y^2 \leqslant 25$

Решение:

$grad_a z = \big(2(x-6), 2(y+8)\big)$ и градиент равен 0 в точке $(6,-8)$, которая лежит вне окружности, радиуса 5, которая задана условием. Значит критические точки будут находится строго на границе $x^2+y^2=25$.

Составим Лагранжиан:

$$L = \alpha(x^2+y^2-12x+16y) - \lambda(x^2+y^2-25)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2\alpha(x-6) - 2\lambda x = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2\alpha(y+8) - 2\lambda y = 0$$

Решением этой системы уравнений $\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{cases}$ будет $y = -\frac{4x}{3}$ при $x \neq 0$.

Совмещая это условие с $x^2+y^2=25$, мы найдем 2 точки: $(3,-4); (-3,4)$

$$z(3,-4) = -75$$
$$z(-3,4) = 125$$

Мы нашли, какая точка минимум, какая максимум.

Ответ: минимум в точке $(3,-4)$ **и максимум в точке** $(-3,4)$