Линейная алгебра: лекция 6 **27 апреля 2021**

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Задачи:

1. Чему может быть равен определитель вещественной ортогональной $n \times n$ матрицы? (Перечислите все возможные варианты и обоснуйте, что других вариантов нет)

   Решение:
   По свойству ортогональной матрицы: $AA^T = E$
   Следовательно определитель произведение самой на транспонированную равен 1

   $$|AA^T| = |E| = 1$$

   Разложим $|AA^T|$:
   $$|AA^T| = |A||A^T| = |A||A| = 1$$
   Заменим $|A| = x \Rightarrow x^2 = 1$
   У этого уравнения 2 решения: -1 и 1. Так как мы пришли к этому из свойств определителя и определения ортогональной матрицы, то это единственные варианты. **Ответ: Возможные значения определителя** $-1, 1$

2. Диагонализуйте следующие симметрические матрицы в ортонормированном базисе (то есть получите разложение
   $A = CDC^T$, где C – ортогональная матрица, а D – диагональная):

   а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2 а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = 1$

найдем собственные вектора

$\lambda_1 = 3$

$A - 3E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ФСР: $V_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

нормируем на длину $\to v_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1$

$A - 1E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ФСР: $V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

нормируем на длину $\to v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ответ: разложение $A = CDC^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Решение:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Найдем характеристический многочлен и его корни:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$$

Корнями будут $\lambda_{1,2} = 1$ - кратности 2 и $\lambda_3 = -1$

Найдем собственные вектора:

$\lambda_{1,2} = 1$

$A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ В этой матрице только 1 главная переменная, следовательно ФСР будет состоять из двух векторов. ФСР: $V_1 =< \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$. Они ортогональны, нормируем их на длину, чтобы получить ортонормированные вектора: $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Рассмотрим $\lambda_3 = -1$

$A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ В этой матрице 2 главные переменные, следовательно ФСР будет состоять из одного вектора. $V_{-1} =< \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$. Нормируем его $\to v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Выпишем $C = (v_1|v_2|v_3)$ и D как диагональную матрицу из соответствующих собственных значений.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ответ: Разложение $A = CDC^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

3. Пусть задана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix}.$$

а) Найдите разложение $A = CDC^T$, где C – ортогональная матрица, а D – диагональная.

3 а) $A = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix} \to$ найти $CDC^T = A$

найдем хар-й многочлен и собств-е значения A

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & 14 & 4 \\ 14 & 24-\lambda & 18 \\ 4 & 18 & 29-\lambda \end{vmatrix} = (13-\lambda)\begin{vmatrix} 24-\lambda & 18 \\ 18 & 29-\lambda \end{vmatrix} + (-14)\begin{vmatrix} 14 & 4 \\ 18 & 29-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 14 & 4 \\ 24-\lambda & 18 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 66\lambda^2 - 849\lambda + 784 = 0 \qquad \lambda_1 = 49 \quad \lambda_2 = 16 \quad \lambda_3 = 1$$

$\lambda_1 = 49$:

$$A - 49E = \begin{pmatrix} -36 & 14 & 4 \\ 14 & -25 & 18 \\ 4 & 18 & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{III - I} \begin{pmatrix} -36 & 14 & 4 \\ 14 & -25 & 18 \\ 40 & 4 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow[I : -2]{III : 4} \begin{pmatrix} 18 & -7 & -2 \\ 14 & -25 & 18 \\ 10 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[II : 2]{II - III}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -7 & -2 \\ 2 & -13 & 12 \\ 10 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \text{ vs } II} \begin{pmatrix} 2 & -13 & 12 \\ 18 & -7 & -2 \\ 10 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[III - 5I]{II - 9I} \begin{pmatrix} 2 & -13 & 12 \\ 0 & 110 & -110 \\ 0 & 66 & -66 \end{pmatrix} \xrightarrow[III - 66 II]{II : 110} \begin{pmatrix} 2 & -13 & 12 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I + 13 II}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V_{49} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \underset{\text{нормируем}}{\Rightarrow} v_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 16$:

$$A - 16E = \begin{pmatrix} -3 & 14 & 4 \\ 14 & 8 & 18 \\ 4 & 18 & 13 \end{pmatrix} \xrightarrow[I \text{ vs } III]{III + I} \begin{pmatrix} 1 & 32 & 17 \\ 14 & 8 & 18 \\ -3 & 14 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[III + 3I]{II - 14I} \begin{pmatrix} 1 & 32 & 17 \\ 0 & -440 & -220 \\ 0 & 110 & 55 \end{pmatrix} \xrightarrow[III - 55 II]{II : -220}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 32 & 17 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I - 16II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad V_{16} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$

$$A - E = \begin{pmatrix} 12 & 14 & 4 \\ 14 & 23 & 18 \\ 4 & 18 & 28 \end{pmatrix} \xrightarrow[I \leftrightarrow III]{III:2} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 14 \\ 14 & 23 & 18 \\ 12 & 14 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[III-6I]{II-7I} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 14 \\ 0 & -40 & -80 \\ 0 & -40 & -80 \end{pmatrix} \xrightarrow[III=II \Downarrow 0]{II:-40} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 14 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[I:2]{I-9II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Ответ: разложение

$$A = CDC^T = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{C^T}$$

б) Найдите какую-нибудь симметрическую матрицу B такую, что $B^2 = A$.

Решение:
Мы уже нашли разложение для симметричной матрицы $A = CDC^T$. Найдем $K : K^2 = D$. Так как D - диагональная матрица, то K можно построить, взяв квадратный корень поэлементно из значений D.

$$K = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица B такую, что $B^2 = A$ может быть найдена как $B = CKC^T$:

$$B = CKC^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -8 & 2 \\ 14 & -4 & -2 \\ 14 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 27 & 18 & 0 \\ 18 & 36 & 18 \\ 0 & 18 & 45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Для проверки: $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 4 \\ 14 & 24 & 18 \\ 4 & 18 & 29 \end{pmatrix} = A$

Ответ: Одно из возможных решений $A = B^2$: $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

4. Найдите сингулярное разложение и усечённое сингулярное разложение следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

Решение:
Найдем сначала сингулярное разложение. $A = C\Lambda D^T$

$S = AA^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 72 \\ 72 & 90 \end{pmatrix}$

Найдем характеристический многочлен для S и собственные вектора и собственные значения. $X_S(\lambda) = \lambda^2 - (tr(S)\lambda) + |S| = \lambda^2 - 180\lambda + 2916 = (\lambda - 18)(\lambda - 162)$

Корни найдены как решение квадратного уравнения.
Рассмотрим $\lambda = 162$
$S - 162E = \begin{pmatrix} -72 & 72 \\ 72 & -72 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
ФСР: будет вектор, который мы сразу разделим на его длину, чтобы иметь длину 1
$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
Рассмотрим $\lambda = 18$
$S - 18E = \begin{pmatrix} 72 & 72 \\ 72 & 72 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
ФСР: будет вектор, который мы сразу разделим на его длину, чтобы иметь длину 1
$v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Запишем $C = (v_1|v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
Λ найдем, записав в порядке убывания квадратные корни из собственных значений S по диагонали $\Lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{162} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{18} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$
Матрица D в этом задании состоит из 2 частей: $size(D_1) = (3X2), size(D_2) = (3X1)$ и $D = (D_1|D_2)$. Найдем из условия $A = C\Lambda D^T$ сначала D_1.

$$\begin{pmatrix} 9\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1} C^T A = D_1^T$$

$$D_1^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{18} & 0 \\ 0 & \frac{3\sqrt{2}}{18} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D_1^T = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 12 & 6 & 12 \\ -6 & -12 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Длины векторов из строк равны 1 $|D_1^T[0]| = |D_1^T[1]| = 1$ и их скалярное произведение $(D_1^T[0], D_1^T[1]) = 0 \Rightarrow$ они уже ортонормированные.
Построим D_2 так чтобы это получился вектор, ортогональный векторам $U_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ и $U_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ одновременно. Найдем его через решение методом Гаусса системы линейных уравнений относительно его координат x, y, z
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to$ прибавим к I + II

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to$ II + I
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \to$ II :-3
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to$ I+ II
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to$ запишем ФСР и поделим сразу вектор на его длину
$v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}$

Запишем ответ, используя для усеченного разложения только 2 колонки в Λ и 2 строки в D^T:

Ответ: SVD разложение исходной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 3\sqrt{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Усеченное SVD разложение: $A = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9\sqrt{2} & 0\\ 0 & 3\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$

4 б) решение

найдем сингулярное разложение $A = C \Lambda D^T$

$$S = AA^T = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\\ 2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 8\\ 8 & 10\end{pmatrix}$$

найдем хар-й многочлен S и его собственные векторы и собственные значения

$$|S - \lambda E| = \begin{vmatrix}10-\lambda & 8\\ 8 & 10-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 36 = (x-18)(x-2) = 0$$

рассмотрим $\lambda = 18$

$$S - 18E = \begin{pmatrix}-8 & 8\\ 8 & -8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{ФСР}: v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

рассмотрим $\lambda = 2$

$$S - 2E = \begin{pmatrix}8 & 8\\ 8 & 8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{ФСР}: v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

запишем $C = (v_1 | v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$$\Lambda = \begin{pmatrix}\sqrt{18} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

матрица $\underset{4\times 4}{D}$: $D = (\underset{4\times 2}{D_1} \mid \underset{4\times 2}{D_2})$

$$D_1^T = \begin{pmatrix}3\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix}^{-1} C^T A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}\cancel{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 3\cancel{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}3 & 3 & 3 & 3\\ -3 & -3 & 3 & 3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1/2 & 1/2 & 1/2\\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

вектора строк $\perp$ и имеют длину 1

найдем D_2, найдя ФСР для решения СЛУ, которые
4×2
найдут нам x, y, z, t : эти вектора $\perp$ $u_1 = (1\ 1\ 1\ 1)$ и $u_2 = (-1,-1,1,1)$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-1&-1&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{II+I} \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&2&2\end{pmatrix} \xrightarrow[-II+I]{II:2} \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

главные

ФСР: $u_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ $u_4 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

разделим их на длину, чтобы нормировать:

$|u_3| = |u_4| = \sqrt{2}$

$u_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ $u_4 = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\\0\end{pmatrix}$

Запишем ответ:

$\exists$ сингулярное разложение $A = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\end{pmatrix}$

усеченное
сингулярное разложение $A = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

в) $\begin{pmatrix}7 & 1 & 2\\ 5 & 5 & -2\\ 3 & 3 & 6\\ -1 & -7 & -2\end{pmatrix}$

Решение:

Найдем сначала сингулярное разложение. $A = C\Lambda D^T$ Так как в нашей исходной матрице столбцов меньше, чем строк, то возьмем $B = A^T$, пойдем по алгоритму для нахождения разложения $B = C\Lambda D^T$, а потом запишем $A = D\Lambda^T C^T$ для исходной матрицы.

$$S = BB^T = \begin{pmatrix}84 & 48 & 24\\ 48 & 84 & 24\\ 24 & 24 & 48\end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix}7 & 4 & 2\\ 4 & 7 & 2\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

Найдем характеристический многочлен для $S/12$ и собственные вектора и собственные значения λ_i'. Чтобы получить собственные значения для исходной S, умножим $12 \cdot \lambda_i' = \lambda_i$, а собственные вектора для $S/12$ и S будут совпадать. $X_S(\lambda) = |S/12 - \lambda' E| = \begin{vmatrix}7-\lambda' & 4 & 2\\ 4 & 7-\lambda' & 2\\ 2 & 2 & 4-\lambda'\end{vmatrix} = -\lambda'^3 + 18\lambda'^2 - 81\lambda' + 108 = -(\lambda' - 12)(\lambda' - 3)^2 = 0$

$\lambda_1' = 12, \lambda_1 = 144$
$\lambda_{2,3}' = 3, \lambda_{2,3} = 36$

Рассмотрим $\lambda_1' = 12, \lambda_1 = 144$

$S/12 - 12E = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow$ I + II, II $\cdot(-1)$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow$ II -4 I, IV -2I

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ II /-9 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ I - II $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 1 и 2 столбцы - главные,

запишем ФСР и сразу нормализуем вектор $v_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Рассмотрим $\lambda_{2,3}' = 3, \lambda_{2,3} = 36$

$S/12 - 3E = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ тут только 1 главный столбец.

ФСР: $< (v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) >$

v_2, v_3 не ортогональны, так как $(v_2, v_3) \neq 0 \Rightarrow$ проведем ортогонализацию Грамма-Шмидта для v_2, v_3:

Возьмем $u_2 = v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ так как он ортогонален v_1. Найдем u_3:

$$u_3 = v_3 - pr_{u_2}v_3 = v_3 - \frac{(u_2, v_3)}{(u_2, u_2)} \cdot u_2 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$|u_3| = \sqrt{1/16 + 1/16 + 1} = \sqrt{\frac{18}{16}} = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. Нормализуем u_2, u_3, поделив их на длину:

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

Запишем $C = (v_1|u_2|u_3)$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

Λ найдем, записав в порядке убывания квадратные корни из собственных значений S по диагонали ($\sqrt{\lambda_1} = 12, \sqrt{\lambda_{1,2}} = 6$) в матрицу размера с B:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрица D в этом задании состоит из 2 частей: $size(D_1) = (4X3), size(D_2) = (4X1)$ и $D = (D_1|D_2)$. Найдем из условия $B = C\Lambda D^T$ сначала D_1.

$$D_1^T = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} C^T B = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{6\sqrt{2}} & \frac{1}{6\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{18\sqrt{2}} & -\frac{1}{18\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{9} \end{pmatrix} B =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{36} \\ -\frac{1}{6\sqrt{2}} & \frac{1}{6\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{18\sqrt{2}} & -\frac{1}{18\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & -7 \\ 2 & -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем D_2 размером 4x1, найдя ФСР для решения СЛУ, которые найдут нам x, y, z, t : этот вектор будет ортогонален $l_1 = (1, 1, 1, -1), l_2 = (-1, 0, 0, -1), l_3 = (0, -1, 1, 0)$. Эти вектора получены из строк D_1^T путем умножения их на положительные числа, для удобства расчетов. Сделаем это методом Гаусса.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ II + I $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ I - II и III + II $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ запишем ФСР: $< \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} >$, нормализуем и запишем вектор, который образует $D_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Мы нашли все компоненты для SVD $B = C\Lambda D^T$. Для оригинальной матрицы разложение будет иметь вид $A = D\Lambda^T C^T$.

Проверим в Python то, что перемножение SVD и усеченного SVD дают исходную матрицу для проверки используем:

```
import numpy as np

dt_1 = np.array(
    [[0.5, 0.5, 0.5, -0.5],
     [-1 / np.sqrt(2), 0, 0, -1 / np.sqrt(2)],
     [0, -1 / np.sqrt(2), 1 / np.sqrt(2), 0]])
dt = np.vstack([dt_1, np.array([-1 / np.sqrt(2), 0, 0, 1 / np.sqrt(2)])])
L = np.array([[12, 0, 0, 0],
              [0, 6, 0, 0],
              [0, 0, 6, 0]])
c_t = np.array([[2 / 3, 2 / 3, 1 / 3],
                [-1 / np.sqrt(2), 1 / np.sqrt(2), 0],
                [-np.sqrt(2) / 6, -np.sqrt(2) / 6, -2 * np.sqrt(2) / 3]])
dt.T @ L.T @ c_t
print(dt.T @ L.T @ c_t)

[[ 7.  1.  2.]
 [ 5.  5. -2.]
 [ 3.  3.  6.]
 [-1. -7. -2.]]
```

Для усеченного SVD проверка:

```
print(np.delete(dt.T, 3, 1) @ np.delete(L.T, 3, 0) @ c_t)
[[ 7.  1.  2.]
 [ 5.  5.  6.]
 [ 3.  3. -2.]
 [-1. -7. -2.]]
```

Запишем ответ, используя для усеченного разложения только 3 ненулевые строки в Λ^T и 3 первые колонки в в D:

Ответ: SVD разложение исходной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

Усеченное SVD разложение:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$