Теория вероятностей: лекция 5 **12 июня 2021**

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Задачи:

1. Идеальная игральная кость бросается 100 раз. Найдите вероятность того, что сумма всех выпавших номеров окажется в пределах от 330 до 380.

   Решение:
   Пусть $X \sim$ дискретная случайная величина, отражающая значения с 1 кубика. Тогда: $EX = 3.5; DX = \frac{35}{12}$. Если $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ - случайная величина суммы на 100 кубиках, то $EY = 350; DY = 291\frac{2}{3}; \sigma(Y) = \sqrt{DY} = 5\sqrt{\frac{35}{3}}$.

   По ЦПТ, предположим, что число кубиков достаточно большое, поэтому сумма уже нормально распределена. Запишем нужную вероятность и найдем ответ:

$$P(330 < Y < 380) = \Phi(\frac{380 - EY}{\sigma(Y)}) - \Phi(\frac{330 - EY}{\sigma(Y)}) = \Phi(\frac{380 - 350}{5\sqrt{\frac{35}{3}}}) - \Phi(\frac{330 - 350}{5\sqrt{\frac{35}{3}}}) =$$

$$= \Phi(1.757) - \Phi(-1.171) = 0.961 - 0.121 = 0.840$$

   Ответ: вероятность получить сумму в интервале от 330 до 380 = 0.84

2. Допустим, что расстояния между автомобилями, движущимися в одном направлении по некоторому шоссе, экспоненциально распределены со средним значением 100 метров. Какова вероятность того, что на отрезке шоссе длиной в 5 километров находятся от 50 до 60 автомобилей?

   Решение:
   Пусть X - случайная величина, отвечающая за расстояние от автомобиля до следующего, которая распределена экспоненциально с $\lambda = 1/100$. Тогда $EX = 100; DX = 10000$. Нас интересует расстояние в 5 км. В среднем это будет 50 машин. Введем $Y = 50X$, тогда $EY = 5000; DY = 500000; \sigma(Y) = 500\sqrt{2}$. 50 Машин на 5 км, будут соответствовать Y=5000, а 60 машин на 5 км будут соответствовать $Y = \frac{5000 \cdot 50}{60} = 4166\frac{2}{3}$.
   Решим через ЦПТ:
   Запишем вопрос из условия:

$$P(4166\frac{2}{3} < Y < 5000) = \Phi(\frac{5000 - EY}{\sigma(Y)}) - \Phi(\frac{4166\frac{2}{3} - EY}{\sigma(Y)}) =$$

$$= \Phi(0) - \Phi(-1.179) = 0.5 - 0.119 = 0.381$$

   Через Г
   Мы знаем, что для распределения, состоящего из суммы экспоненциальных распределений есть функция Г распределения. В этом примере, параметры $\alpha = 50; \lambda = 1/100$:

$$P(4166\frac{2}{3} < Y < 5000) = CDF_{\Gamma(\alpha=50;\lambda=1/100)}(5000) - CDF_{\Gamma(\alpha=50;\lambda=1/100)}(4166\frac{2}{3}) =$$

$$= 0.518 - 0.114 = 0.404$$

   Ответ: вероятность, оцененная по ЦПТ = 0.381. Вероятность, оцененная через Гамма распределение = 0.404

3. В продукции цеха детали отличного качества составляют 50%. Детали укладываются в коробки по 200 шт. в каждой. Какова вероятность того, что число деталей отличного качества в коробке отличается от 100 не более, чем на 15

   Решение:
   Пусть $X \sim$ биномиальное распределение с n=100 и p=0.5. Которое соответствует числу отличных деталей в коробке. $EX = np = 100; DX = npq = 50; \sigma(X) = 5\sqrt{2}$.
   Используем ЦПТ и перейдем к нормальному распределению, чтобы решить задачу, так как n велико:

$$P(85 < X < 115) = \Phi(\frac{115 - EX}{\sigma(X)}) - \Phi(\frac{85 - EX}{\sigma(X)}) = \Phi(\frac{115 - 100}{5\sqrt{2}}) - \Phi(\frac{85 - 100}{5\sqrt{2}}) =$$

$$= \Phi(2.121) - \Phi(-2.121) = 0.983 - 0.017 = 0.966$$

   Ответ: вероятность получить число отличных деталей, отличное от 100 менее, чем на 15, оцененная по ЦПТ = 0.966.

4. Два кинотеатра вмещают 1 000 зрителей. Допустим, что каждый зритель выбирает один из кинотеатров случайно и независимо от других зрителей. Сколько мест необходимо иметь в каждом кинотеатре, чтобы вероятность того, что какому-то зрителю не удастся попасть на сеанс из-за отсутствия мест, была не более 1% ?

   Решение:
   1000 человек расходятся по 2 кинотеатрам. Пусть X - число мест в первом кинотеатре, Y - число мест в 2-м кинотеатре. А $V \sim$ биномиальная случайная величина, показывающая сколько человек пошло в кинотеатр 1. $EV = np = 500; DV = npq = 250; \sigma(V) = 5\sqrt{10}$

   Используем ЦПТ и записываем задачу ограничения:

$$P(X < V) + P(Y < V) < 0.01$$

   так как одинаковая вероятность пойти в первый или второй кинотеатр, можно предположить, что $P(X < V) = P(Y < V)$ и $X = Y$, что сведет нашу задачу к:

$$P(X < V) < 0.005 \Rightarrow$$

$$1 - P(V < X) < 0.005 \Rightarrow$$

$$1 - \Phi(\frac{X - EV}{\sigma(V)}) < 0.005 \Rightarrow$$

$$\frac{X - EV}{\sigma(V)} < \Phi^{-1}(0.995) \Rightarrow$$

$$X > 500 + \Phi^{-1}(0.995) \cdot \sigma(V) = 500 + 2.58 \cdot 15.81 = 540.7$$

   Ответ: если в каждом из кинотеатров будет 541 место или больше, вероятность каждому из зрителей не попасть на сеанс будет менее 1%

5. Срок службы электрической лампы имеет показательное распределение с математическим ожиданием 1000 часов. Найти вероятность того, что средний срок службы для 100 ламп составит не менее 900 часов.

Решение:

5) Пусть $X \sim exp(\lambda = \frac{1}{1000})$ – с.в. часов работы лампочки

$Y = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$ – с.в. среднего времени работы 100 ламп

$EX = 1000 \quad DX = 10^6$

$EY = EX = 1000 \quad DY = \frac{1}{100} DX = 10^4 \quad \sigma(Y) = 100$

$P(Y > 900) = 1 - P(Y < 900) = 1 - \Phi\left(\frac{900 - EY}{\sigma(Y)}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{900-1000}{100}\right) =$

$= 1 - \Phi(-1) = 1 - 0{,}159 = 0{,}841$

Ответ: $p = 0{,}841$

Ответ: $p \approx 0.841$

6. В городе за год рождается 20 000 детей и считается, что вероятность рождения мальчика p = 0.51. В этом случае существует такое число d, что среди рожденных за год детей разница числа мальчиков и числа девочек будет не больше d с вероятностью 0.99. Найдите это d.

Решение:

Пусть X - число мальчиков, W - число девочек в этом городе, $C = X - W$ - разница числа мальчиков и девочек.

Тогда из свойств биномиального распределения: $EX = np = 10200; EW = nq = 9800; DX = DW = npq = 4998$.

$EC = 400$, $DC = DX + DW - 2Cov(X, W)$
С ковариацией мы можем сказать следующее: $Corr(X, W) = -1$, так как эти числа линейно зависимые, следовательно $Cov(X, W) = Corr(X, W)\sigma(X)\sigma(Y) = -DX$ так как дисперсии равны, то и стандартные отклонения равны. Следовательно $DC = 2DX - -2DX = 4DX$. $\sigma(C) = 2\sqrt{4998}$.

Согласно ЦПТ, решим задание.

$$P(C < d) = 0.99 \Rightarrow$$

$$\Phi(\frac{d - 400}{\sigma(C)}) = 0.99 \Rightarrow$$

$$\frac{d - 400}{\sigma(C)} = \Phi^{-1}(0.99) \Rightarrow$$

Φ^{-1} - функция обратного нормального стандартного распределения. Посчитаем ответ:

$$d = 400 + \sigma(C) \cdot \Phi^{-1}(0.99) = 400 + 141.39 \cdot 2.33 \approx 728.9$$

Ответ: $d \approx 728.9$