Линейная алгебра:

Векторные пространства, базис, ранг

24 марта 2021

Факультет компьютерных наук

Комплексные числа: основы

Цель: расширить множество вещественных чисел числом i таким, что $i^2 = -1$. На этих числах должны быть определены все нужные арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление на любое ненулевое число.

Комплексные числа: основы

Цель: расширить множество вещественных чисел числом i таким, что $i^2 = -1$. На этих числах должны быть определены все нужные арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление на любое ненулевое число.

Рассмотрим множество «чисел» вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а i – просто символ. Как множество, $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. В этом случае нулем будет число вида $0 + 0i$, единицей $1 + 0i$. Числа вида $a + 0i$ можно отождествить с вещественными числами $a \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Комплексные числа: основы

Цель: расширить множество вещественных чисел числом i таким, что $i^2 = -1$. На этих числах должны быть определены все нужные арифметические операции: сложение, вычитание, умножение и деление на любое ненулевое число.

Рассмотрим множество «чисел» вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а i – просто символ. Как множество, $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. В этом случае нулем будет число вида $0 + 0i$, единицей $1 + 0i$. Числа вида $a + 0i$ можно отождествить с вещественными числами $a \in \mathbb{R}$. Таким образом, $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Сложение комплексных чисел: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Вычитание комплексных чисел: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

Умножение комплексных чисел: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Деление комплексных чисел

Определение

Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$. **Комплексно сопряженным** *к числу* z *называется число* $\bar{z} = a - bi$.

Деление комплексных чисел

Определение

Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$. **Комплексно сопряженным** *к числу* z *называется число* $\bar{z} = a - bi$.

Перемножим числа z и $\bar{z}$:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

Результат является неотрицательным вещественным числом.
Модуль комплексного числа z – это $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Деление комплексных чисел

Определение

Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$. **Комплексно сопряженным** *к числу* z *называется число* $\bar{z} = a - bi$.

Перемножим числа z и $\bar{z}$:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

Результат является неотрицательным вещественным числом.
Модуль комплексного числа z – это $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Найдем обратный к числу $z = a + bi$:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Таким образом, обратный к числу z имеет вид $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Деление комплексных чисел

Определение

Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$. **Комплексно сопряженным** *к числу* z *называется число* $\bar{z} = a - bi$.

Перемножим числа z и $\bar{z}$:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2.$$

Результат является неотрицательным вещественным числом.
Модуль комплексного числа z – это $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Найдем обратный к числу $z = a + bi$:

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Таким образом, обратный к числу z имеет вид $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Теорема (Основная теорема алгебры)

Любой многочлен $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} + t^n$, *где* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ $(n > 0)$, *имеет (комплексный) корень (более того, имеет ровно* n *комплексных корней с учетом кратности).*

Квадратные уравнения над $\mathbb{C}$

Квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Формула для решения такая же, как для $\mathbb{R}$:

$$D = b^2 - 4ac, \quad x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Квадратные уравнения над $\mathbb{C}$

Квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$

Формула для решения такая же, как для $\mathbb{R}$:

$$D = b^2 - 4ac, \quad x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Пример. $x^2 - 2x + 10 = 0.$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 10 = -36, \quad x_{12} = \frac{2 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{2 \pm 6i}{2} = 1 \pm 3i.$$

Абстрактные векторные пространства

В определении векторного пространства надо зафиксировать, откуда берутся коэффициенты. Варианты:

- Вещественные числа $\mathbb{R}$
- Комплексные числа $\mathbb{C}$
- Рациональные числа $\mathbb{Q}$

Будем считать, что эти коэффициенты вещественны.
Определение векторного пространства может показаться сложным и формальным. Но главное – понимать, как с ним работать. Действительно, никто из нас не знает строгого определения $\mathbb{R}$, но это не мешает нам с ним работать!

Абстрактные векторные пространства

В определении векторного пространства надо зафиксировать, откуда берутся коэффициенты. Варианты:

- Вещественные числа $\mathbb{R}$
- Комплексные числа $\mathbb{C}$
- Рациональные числа $\mathbb{Q}$

Будем считать, что эти коэффициенты вещественны.
Определение векторного пространства может показаться сложным и формальным. Но главное – понимать, как с ним работать. Действительно, никто из нас не знает строгого определения $\mathbb{R}$, но это не мешает нам с ним работать!

Определение

Векторное пространство над $\mathbb{R}$ состоит из:

- *множества V (множество векторов);*
- *операции сложения векторов, т.е. отображения $+ : V \times V \to V$ вида $(v_1, v_2) \mapsto v_1 + v_2$;*
- *операции умножения векторов на число, т.е. отображения $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ вида $(r, v) \mapsto r \cdot v$.*

Абстрактные векторные пространства

Определение

Указанное множество V с операциями $+, \cdot$ должно удовлетворять следующим аксиомам:

1. *Для любых $v, u, w \in V$ верно: $(v+u)+w = v+(u+w)$.*
2. *Существует вектор $0 \in V$ такой, что для любого вектора $v \in V$ имеем: $0+v = v+0 = v$.*
3. *Для любого вектора $v \in V$ существует вектор $-v$ такой, что $v+(-v) = (-v)+v = 0$.*
4. *Для любых векторов $v, u \in V$ верно: $v+u = u+v$.*
5. *Для любых $r \in \mathbb{R}$ и $v, u \in V$ верно: $r \cdot (v+u) = r \cdot v + r \cdot u$.*
6. *Для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ верно: $(r_1+r_2) \cdot v = r_1 \cdot v + r_2 \cdot v$.*
7. *Для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ верно: $(r_1 r_2) \cdot v = r_1 \cdot (r_2 \cdot v)$.*
8. *Для любого $v \in V$ верно: $1 \cdot v = v$.*

Обычно элементы V называют *векторами*, а элементы $\mathbb{R}$ – *скалярами*. Даже в абстрактном случае полезно мыслить геометрически, представляя как главный пример n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$.

Примеры

1. $V = \mathbb{R}^n$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляр.
2. $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$ с обычными операциями сложения и умножения на скаляр.
3. $V = \{0\} = \mathbb{R}^0$.
4. $V = \mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}$ – множество многочленов от переменной x с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения и умножения на число.
5. $V = \mathbb{R}_{\leqslant k}[x] = \{a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k \mid a_i \in \mathbb{R}\}$ – множество многочленов от переменной x степени не выше k с вещественными коэффициентами с обычными операциями сложения и умножения на число.
6. $V = C[a, b]$ – множество непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с поточечными операциями сложения и умножения на число.

Подпространства

Определение

Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$, тогда подмножество $U \subseteq V$ называется **подпространством**, *если*

1. *Если $u, v \in U$, то и $v + u \in U$.*
2. *Если $r \in \mathbb{R}$ и $v \in U$, то и $r \cdot v \in U$.*

Стоит отметить, что всякое подпространство само является векторным пространством.

Примеры подпространств

1. $\{0\}, V$ – подпространства любого векторного пространства V.
2. $V = \mathbb{R}^2$, U – прямая, проходящая через начало координат.
3. $V = \mathbb{R}^3$, U – прямая или плоскость, проходящая через начало координат.

Примеры подпространств

1. $\{0\}, V$ – подпространства любого векторного пространства V.
2. $V = \mathbb{R}^2$, U – прямая, проходящая через начало координат.
3. $V = \mathbb{R}^3$, U – прямая или плоскость, проходящая через начало координат.
4. $V = \mathbb{R}^n$, U – множество решений ОСЛУ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.

Примеры подпространств

1. $\{0\}, V$ – подпространства любого векторного пространства V.
2. $V = \mathbb{R}^2$, U – прямая, проходящая через начало координат.
3. $V = \mathbb{R}^3$, U – прямая или плоскость, проходящая через начало координат.
4. $V = \mathbb{R}^n$, U – множество решений ОСЛУ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$
$U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.
5. $V = M_{m\times n}(\mathbb{R})$, U – матрицы с нулевой первой строкой.
6. $V = \mathbb{R}[x]$, $U = \mathbb{R}_{\leqslant k}[x]$ (многочлены степени не выше k).
7. $V = C[a, b]$, U – множество дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$.

Примеры не подпространств

1. $V = \mathbb{R}^2$, U – верхняя полуплоскость.

Примеры не подпространств

1. $V = \mathbb{R}^2$, U – верхняя полуплоскость.
2. $V = \mathbb{R}^2$, U – прямая, не проходящая через начало координат.

Примеры не подпространств

1. $V=\mathbb{R}^2$, U – верхняя полуплоскость.
2. $V=\mathbb{R}^2$, U – прямая, не проходящая через начало координат.
3. $V=\mathbb{R}^n$, U – множество решений неоднородной СЛУ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Примеры не подпространств

1. $V = \mathbb{R}^2$, U – верхняя полуплоскость.
2. $V = \mathbb{R}^2$, U – прямая, не проходящая через начало координат.
3. $V = \mathbb{R}^n$, U – множество решений неоднородной СЛУ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

4. $V = \mathbb{R}[x]$, U – многочлены степени ровно k.

Примеры не подпространств

1. $V = \mathbb{R}^2$, U – верхняя полуплоскость.
2. $V = \mathbb{R}^2$, U – прямая, не проходящая через начало координат.
3. $V = \mathbb{R}^n$, U – множество решений неоднородной СЛУ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

4. $V = \mathbb{R}[x]$, U – многочлены степени ровно k.
5. $V = C[a, b]$, U – множество непрерывных функций, имеющих хотя бы один нуль на отрезке $[a, b]$.

Линейная зависимость

Определение

Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ и $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$. Тогда выражение $r_1 v_1 + r_2 v_2 \ldots + r_n v_n$ называется линейной комбинацией векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Линейная комбинация называется тривиальной, если все $r_i = 0$, и нетривиальной в противном случае.

Определение

Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ называются линейно зависимыми, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, т.е. существуют $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, не все равные нулю, для которых $r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n = 0$. В противном случае векторы называются линейно независимыми.

Примеры

1. Один вектор $v \in V$ линейно зависим тогда и только тогда, когда он равен нулю.
2. Два вектора $v, u \in V$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. либо $v = \lambda u$ либо $u = \lambda v$.
3. Следующие векторы линейно зависимы в $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   Действительно, $2v_1 - 3v_2 + v_3 = 0$.

Примеры

1. Один вектор $v \in V$ линейно зависим тогда и только тогда, когда он равен нулю.
2. Два вектора $v, u \in V$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т.е. либо $v = \lambda u$ либо $u = \lambda v$.
3. Следующие векторы линейно зависимы в $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

   Действительно, $2v_1 - 3v_2 + v_3 = 0$.
4. Рассмотрим $V = \mathbb{R}^3$ и пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Тогда векторы v_1, v_2, v_3 линейно независимы. Векторы v_1, v_2, v_4 тоже линейно независимы. Но вот векторы v_1, v_2, v_3, v_4 уже зависимы, так как $v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0$. Также зависимы векторы v_1, v_2 и v_5, ибо $v_1 + v_2 - v_5 = 0$.

СЛУ как линейная комбинация столбцов матрицы

ОСЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Пусть матрица системы $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ имеет вид $A = (A_1|\ldots|A_n)$. Тогда система $Ax = 0$ переписывается так:

$$x_1A_1 + \ldots + x_nA_n = 0.$$

То есть решение однородной СЛУ – это выяснение, какие есть линейные комбинации между столбцами матрицы A.
Если же нам дана система $Ax = b$, то она переписывается в виде:

$$x_1A_1 + \ldots + x_nA_n = b.$$

То есть решение СЛУ – это выяснение, как можно линейно выразить вектор b через столбцы матрицы A.

Линейные оболочки

Пусть V – векторное пространство. Для простоты можно думать, что это $\mathbb{R}^n$. И пусть задан произвольный набор векторов $v_1, \ldots, v_k \in V$. Конечный набор векторов не образует подпространство, но можно рассмотреть наименьшее подпространство, содержащее данные векторы.
Это подпространство обозначается через $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ и называется **линейной оболочкой** векторов $v_1, \ldots, v_k$. Оно состоит из всех линейных комбинаций v_i:

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \in V \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

Линейные оболочки

Пусть V – векторное пространство. Для простоты можно думать, что это $\mathbb{R}^n$. И пусть задан произвольный набор векторов $v_1, \ldots, v_k \in V$. Конечный набор векторов не образует подпространство, но можно рассмотреть наименьшее подпространство, содержащее данные векторы.
Это подпространство обозначается через $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ и называется **линейной оболочкой** векторов $v_1, \ldots, v_k$. Оно состоит из всех линейных комбинаций v_i:

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_k v_k \in V \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}.$$

Теорема (Основная лемма о линейной зависимости)

Если векторы $u_1, u_2, \ldots, u_m$ линейно независимы и $u_1, u_2, \ldots, u_m \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, то $m \leqslant k$.

Таким образом, линейно независимая система векторов не может линейно выражаться через меньшее число векторов.

Базис

Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$ и пусть $v_1, v_2 \ldots, v_n \in V$.

Определение

Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *называется* ***базисом*** *пространства* V*, если:*

- *векторы* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *линейно независимы;*
- *любой вектор* $u \in V$ *представляется в виде* $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ *(то есть является линейной комбинацией базисных).*

Базис

Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$ и пусть $v_1, v_2 \ldots, v_n \in V$.

Определение

Система векторов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *называется* ***базисом*** *пространства* V*, если:*

- *векторы* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *линейно независимы;*
- *любой вектор* $u \in V$ *представляется в виде* $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ *(то есть является линейной комбинацией базисных).*

Оказывается, что следующие условия эквивалентны:

1. Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ – базис пространства V.
2. Векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ линейно независимы, и для любого $u \in V$ векторы $v_1, v_2, \ldots, v_n, u$ уже линейно зависимы.
3. Любой вектор $u \in V$ единственным образом представляется в виде $u = a_1 v_1 + a_2 v_2 \ldots + a_n v_n$, где $a_i \in \mathbb{R}$.

Описание всех векторных пространств с базисами

Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $v_1, \ldots, v_n \in V$. Тогда любой вектор $u \in V$ единственным образом представляется в виде $u = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$, а значит, однозначно описывается столбцом $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Кроме того, при сложении векторов u_1 и u_2 соответствующие столбцы будут складываться и при умножении u на коэффициент соответствующий столбец умножится на этот же коэффициент.

Описание всех векторных пространств с базисами

Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $v_1, \ldots, v_n \in V$. Тогда любой вектор $u \in V$ единственным образом представляется в виде $u = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$, а значит, однозначно описывается столбцом $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Кроме того, при сложении векторов u_1 и u_2 соответствующие столбцы будут складываться и при умножении u на коэффициент соответствующий столбец умножится на этот же коэффициент.

Таким образом, можно считать, что V и $\mathbb{R}^n$ – это одно и то же пространство: все свойства V будут такие же, как и свойства $\mathbb{R}^n$.

Описание всех векторных пространств с базисами

Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{R}$ с базисом $v_1, \ldots, v_n \in V$. Тогда любой вектор $u \in V$ единственным образом представляется в виде $u = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$, а значит, однозначно описывается столбцом $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.
Кроме того, при сложении векторов u_1 и u_2 соответствующие столбцы будут складываться и при умножении u на коэффициент соответствующий столбец умножится на этот же коэффициент.

Таким образом, можно считать, что V и $\mathbb{R}^n$ – это одно и то же пространство: все свойства V будут такие же, как и свойства $\mathbb{R}^n$.

Это рассуждение можно применить к векторному пространству $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$, где $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, «не очень похожему» на $\mathbb{R}^k$. Однако, если правильно выбрать в нем базис, то оно превратится в $\mathbb{R}^k$ для некоторого k.
Поэтому обычно доказывают результаты только для пространства $\mathbb{R}^n$, подразумевая, что они автоматически применимы к любому векторному пространству с конечным базисом.

Размерность

У любого векторного пространства V существует базис!
Только не всегда он состоит из конечного числа векторов.
Далее мы не будем обсуждать случай бесконечных базисов.

Теорема

Пусть V – векторное пространство. Тогда любые два базиса V имеют одинаковое число элементов.
(Это утверждение верно и для конечных, и для бесконечных базисов, но для работы с бесконечными базисами нужно понимать, как сравнивать бесконечные множества.)

Если V – векторное пространство, то число элементов в любом его базисе называется *размерностью* векторного пространства V и обозначается $\dim V$. Если конечного базиса нет, то пишут $\dim V = \infty$.

Примеры

Размерность – это величина, показывающая, насколько векторное пространство большое и характеризующее «количество степеней свободы» в пространстве. Кроме того, это понятие согласовано с нашей интуицией: прямая $\mathbb{R}^1$ имеет размерность 1, плоскость $\mathbb{R}^2$ – размерность 2, а пространство $\mathbb{R}^3$ – размерность 3. Для простых пространств размерность в точности равна числу коэффициентов, которые необходимы для задания векторов.

Примеры

Размерность – это величина, показывающая, насколько векторное пространство большое и характеризующее «количество степеней свободы» в пространстве. Кроме того, это понятие согласовано с нашей интуицией: прямая $\mathbb{R}^1$ имеет размерность 1, плоскость $\mathbb{R}^2$ – размерность 2, а пространство $\mathbb{R}^3$ – размерность 3. Для простых пространств размерность в точности равна числу коэффициентов, которые необходимы для задания векторов.

1. $\dim \mathbb{R}^n = n$.
2. $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = mn$. Базис состоит из матричных единиц E_{ij} – матриц, в которых единственный ненулевой элемент равен 1 и стоит на позиции (i, j).
3. Для $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$, где $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\dim V$ равна числу свободных переменных СЛУ $Ax = 0$.
4. $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$. Базис состоит из одночленов $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$
5. $\dim \mathbb{R}_{\leqslant k}[x] = k + 1$. Базис состоит из одночленов $1, x, x^2, \ldots, x^k$.

Размерность подпространства

Утверждение. Пусть V – конечномерное векторное пространство, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ – набор линейно независимых векторов. Тогда его можно дополнить до базиса V.

Утверждение. Пусть V – векторное пространство и пусть $U \subseteq V$ – подпространство.

1. $\dim U \leqslant \dim V$. В частности, если V обладает конечным базисом, то и U обязательно обладает конечным базисом.
2. $\dim U = \dim V$ тогда и только тогда, когда $U = V$.

Задание подпространств в $\mathbb{R}^n$

Существует два способа задания подпространства в $\mathbb{R}^n$:

1. С помощью образующих векторов: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в виде $U = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, где $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ – некоторые векторы. В этом случае часто бывает полезно, чтобы векторы v_i были линейно независимыми, то есть были базисом U.
2. С помощью ОСЛУ: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ задано в виде $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$, где $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ – некоторая матрица. В этом случае часто бывает полезно, чтобы строки матрицы A были линейно независимыми.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Выделение базиса из системы векторов

Задача. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ – векторы и $U = \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка. Среди векторов $v_1, \ldots, v_m$ найти базис пространства U и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

Выделение базиса из системы векторов

Задача. Пусть $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ – векторы и $U = \langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка. Среди векторов $v_1, \dots, v_m$ найти базис пространства U и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

Алгоритм.

1. Запишем векторы $v_1, \dots, v_m$ по столбцам в матрицу $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Например, при $n = 3$, $m = 5$

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \end{pmatrix}$$

Выделение базиса из системы векторов

Задача. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ – векторы и $U = \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка. Среди векторов $v_1, \ldots, v_m$ найти базис пространства U и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

Алгоритм.

1. Запишем векторы $v_1, \ldots, v_m$ по столбцам в матрицу $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Например, при $n = 3$, $m = 5$

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \end{pmatrix}$$

2. Приведем матрицу A элементарными преобразованиями строк к каноническому ступенчатому виду. Например,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

Выделение базиса из системы векторов

Задача. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ – векторы и $U = \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка. Среди векторов $v_1, v_2, \ldots, v_m$ требуется найти базис пространства U и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

Алгоритм.

2. Приведем матрицу A элементарными преобразованиями строк к каноническому ступенчатому виду. Например,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

Выделение базиса из системы векторов

Задача. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ – векторы и $U = \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка. Среди векторов $v_1, v_2, \ldots, v_m$ требуется найти базис пространства U и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

Алгоритм.

2. Приведем матрицу A элементарными преобразованиями строк к каноническому ступенчатому виду. Например,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

3. Пусть $k_1, \ldots, k_r$ – номера главных позиций в матрице A'. Тогда вектора $v_{k_1}, \ldots, v_{k_r}$ образуют базис U. В примере выше это векторы v_1, v_2 и v_4.

Выделение базиса из системы векторов

Задача. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ – векторы и $U = \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle$ – их линейная оболочка. Среди векторов $v_1, v_2, \ldots, v_m$ требуется найти базис пространства U и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

Алгоритм.

2. Приведем матрицу A элементарными преобразованиями строк к каноническому ступенчатому виду. Например,

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

3. Пусть $k_1, \ldots, k_r$ – номера главных позиций в матрице A'. Тогда вектора $v_{k_1}, \ldots, v_{k_r}$ образуют базис U. В примере выше это векторы v_1, v_2 и v_4.
4. Пусть v_i – вектор соответствует неглавной позиции в A'. Тогда в i-ом столбце A' записаны координаты разложения v_i через найденный базис выше. В примере выше $v_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2$ и $v_5 = a_{51}v_1 + a_{52}v_2 + a_{53}v_4$.

Пример

Пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Пример

Пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}5\\12\\7\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Тогда

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 12 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 5 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Пример

Пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}5\\12\\7\end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Тогда

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 1 & -1\\3 & 2 & 12 & 1 & 1\\2 & 1 & 7 & 1 & 0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & -1 & 2\\2 & 1 & 7 & 1 & 0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 1 & 5 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & -1 & 2\\1 & 0 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 1\\1 & 1 & 5 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 1\\0 & 1 & 3 & 1 & -2\\0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 1\\0 & 1 & 3 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Тогда v_1, v_2 и v_4 – базис линейной оболочки $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\rangle$.
$v_3 = 2v_1 + 3v_2$ и $v_5 = v_1 - 2v_4$.

Фундаментальная система решений (ФСР)

Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, тогда пространство $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$, заданное в виде множества решений ОСЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

можно задать в виде линейной оболочки не более чем n линейно независимых векторов. На самом деле, их количество равно количеству свободных неизвестных ОСЛУ $Ax = 0$. Базис пространства U называется *фундаментальной системой решений*. Наша задача – научиться находить его.

Задача. Дана матрица $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Необходимо найти базис пространства $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.

Задача. Дана матрица $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Необходимо найти базис пространства $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.

Алгоритм.

1. Приведем матрицу A к (каноническому) ступенчатому виду. Пусть, например, он имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & a_{16} \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{36} \end{pmatrix}$$

Задача. Дана матрица $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Необходимо найти базис пространства $U = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.

Алгоритм.

1. Приведем матрицу A к (каноническому) ступенчатому виду. Пусть, например, он имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & a_{16} \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} & 0 & a_{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{36} \end{pmatrix}$$

2. ФСР строится так: каждой свободной переменной будет соответствовать свой вектор. Полагаем значение данной свободной переменной равным 1, а остальных свободных переменных – 0. После чего рассчитываем значения главных переменных. В примере выше свободные переменные есть x_2, x_4 и x_6. Тогда ФСР такова:

$$v_2 = \begin{pmatrix} -a_{12} \\ \underline{1} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ \underline{0} \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -a_{14} \\ \underline{0} \\ -a_{24} \\ \underline{1} \\ 0 \\ \underline{0} \end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix} -a_{16} \\ \underline{0} \\ -a_{26} \\ \underline{0} \\ -a_{36} \\ \underline{1} \end{pmatrix},$$

В векторах выше подчеркнуты позиции свободных переменных, которые мы задаем сами.

Ранг системы векторов

Определение

Пусть V – некоторое векторное пространство. Рангом системы векторов $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ называется максимальное количество линейно независимых векторов среди них. Это число обозначаем $\mathrm{rk}\,(v_1, \ldots, v_k)$.

Утверждение. $\mathrm{rk}\,(v_1, \ldots, v_k) = \dim\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$.

Ранг системы векторов

Определение

Пусть V – некоторое векторное пространство. Рангом системы векторов $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ называется максимальное количество линейно независимых векторов среди них. Это число обозначаем rk $(v_1, \dots, v_k)$.

Утверждение. rk $(v_1, \dots, v_k) = \dim\langle v_1, \dots, v_k\rangle$.

Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ – произвольная матрица.

Определение

Пусть $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}^m$ – столбцы матрицы A, то есть $A = (A_1|\dots|A_n)$. Тогда **столбцовым рангом** *матрицы A называется ранг системы $(A_1, \dots, A_n)$, то есть rk$_{\text{столб}} A =$ rk $(A_1, \dots, A_n)$.*

Определение

Пусть $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{R}^n$ – строки матрицы A, то есть $A^T = (A_1|\dots|A_m)$. Тогда **строковым рангом** *матрицы A называется ранг системы $(A_1, \dots, A_m)$, то есть rk$_{\text{стр}} A =$ rk $(A_1, \dots, A_m)$.*

Ранг матрицы

Теорема

Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *– произвольная матрица. Тогда* $\mathit{rk}_{\,\textit{столб}} A = \mathit{rk}_{\,\textit{стр}} A$*. Это число обозначается через* $\mathit{rk}\, A$ *и называется* **рангом матрицы**.

Ранг матрицы

Теорема

Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ – произвольная матрица. Тогда rk $_{столб}A = $ rk $_{стр}A$. Это число обозначается через rk A и называется **рангом матрицы**.

Примеры:

1. rk $A = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$.
2. rk $A = 1$ тогда и только тогда, когда $A \neq 0$ и все столбцы матрицы A пропорциональны одному общему столбцу (или, эквивалентно, все строки пропорциональны одной общей строке). Иными словами, матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} (y_1 y_2 \dots y_n) = xy^t,$$

где $x \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^n$ – ненулевые векторы.

Другие определения ранга

Определение

Факториальным рангом *матрицы* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *называется число*

$$\min\{k \in \mathbb{N} \mid A = BC, \text{ где } B \in M_{m\times k}(\mathbb{R}), C \in M_{k\times n}(\mathbb{R})\},$$

то есть это минимальное число k *такое, что матрица* A *представима в виде произведения матриц* BC*, где число столбцов* B *и число строк* C *есть* k*.*

Другие определения ранга

Определение

Факториальным рангом *матрицы* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *называется число*

$$\min\{k \in \mathbb{N} \mid A = BC,\ \text{где } B \in M_{m\times k}(\mathbb{R}), C \in M_{k\times n}(\mathbb{R})\},$$

то есть это минимальное число k *такое, что матрица* A *представима в виде произведения матриц* BC*, где число столбцов* B *и число строк* C *есть* k*.*

Определение

Тензорным рангом *матрицы* A *называется следующее число*

$$\min\{k \mid A = x_1 y_1^t + \ldots + x_k y_k^t,\ \text{где } x_i \in \mathbb{R}^m, y_i \in \mathbb{R}^n\}$$

то есть это минимальное число k *такое, что матрица* A *представима в виде суммы* k *«тощих» матриц вида* xy^t*, где* $x \in \mathbb{R}^m$ *и* $y \in \mathbb{R}^n$*.*

Другие определения ранга

Выделим в матрице A какой-нибудь набор из k строк и одновременно набор из k столбцов и рассмотрим матрицу, составленную из элементов на пересечении этих строк и столбцов, – некоторую квадратную матрицу размера $k \times k$. Такие матрицы мы будем называть квадратными подматрицами матрицы A. Определители таких подматриц будем называть **минорами** размера k.

Определение

Минорным рангом *матрицы A называется максимальный размер ненулевого минора в A (т.е. максимальный размер обратимой квадратной подматрицы в A).*

Другие определения ранга

Выделим в матрице A какой-нибудь набор из k строк и одновременно набор из k столбцов и рассмотрим матрицу, составленную из элементов на пересечении этих строк и столбцов, – некоторую квадратную матрицу размера $k \times k$. Такие матрицы мы будем называть квадратными подматрицами матрицы A. Определители таких подматриц будем называть **минорами** размера k.

Определение

Минорным рангом *матрицы A называется максимальный размер ненулевого минора в A (т.е. максимальный размер обратимой квадратной подматрицы в A).*

Теорема

Для любой матрицы $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ все пять видов ранга (столбцовый, строковый, факториальный, тензорный, минорный) совпадают и не превосходят $\min(m, n)$.

Свойства ранга

1. Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Тогда $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$.
2. Пусть $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, тогда

$$|\operatorname{rk} A - \operatorname{rk} B| \leqslant \operatorname{rk}(A+B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

Смысл: если шевелить матрицу A с помощью матрицы B, то ранг A может измениться не более чем на ранг B в любую сторону. Теперь посмотрим на матрицы: $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ и $C = -A$. Тогда $\operatorname{rk}(A+B) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$ и $\operatorname{rk}(A+C) = \operatorname{rk} A - \operatorname{rk} C$.

Свойства ранга

1. Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Тогда $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$.
2. Пусть $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, тогда

$$|\operatorname{rk} A - \operatorname{rk} B| \leqslant \operatorname{rk}(A+B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

   Смысл: если шевелить матрицу A с помощью матрицы B, то ранг A может измениться не более чем на ранг B в любую сторону. Теперь посмотрим на матрицы: $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ и $C = -A$. Тогда $\operatorname{rk}(A+B) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$ и $\operatorname{rk}(A+C) = \operatorname{rk} A - \operatorname{rk} C$.
3. Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ и $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, тогда

$$\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - n \leqslant \operatorname{rk}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$$

   Равенства вновь достигаются: пусть $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ и $B = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Тогда $\operatorname{rk}(A^2) = \operatorname{rk} A$ и $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - 2$.

Свойства ранга

1. Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Тогда $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$.
2. Пусть $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, тогда

$$|\operatorname{rk} A - \operatorname{rk} B| \leqslant \operatorname{rk}(A+B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

   Смысл: если шевелить матрицу A с помощью матрицы B, то ранг A может измениться не более чем на ранг B в любую сторону. Теперь посмотрим на матрицы: $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ и $C = -A$. Тогда $\operatorname{rk}(A+B) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$ и $\operatorname{rk}(A+C) = \operatorname{rk} A - \operatorname{rk} C$.
3. Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ и $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, тогда

$$\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - n \leqslant \operatorname{rk}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$$

   Равенства вновь достигаются: пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда $\operatorname{rk}(A^2) = \operatorname{rk} A$ и $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - 2$.
4. Для любой матрицы $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ и любых обратимых матриц $C \in M_m(\mathbb{R})$ и $D \in M_n(\mathbb{R})$ верно: $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(CA) = \operatorname{rk}(AD)$.
   Смысл: ранг не меняется при умножении на обратимую матрицу.

Свойства ранга

1. Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Тогда $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$.
2. Пусть $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, тогда

$$|\operatorname{rk} A - \operatorname{rk} B| \leqslant \operatorname{rk}(A+B) \leqslant \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

   Смысл: если шевелить матрицу A с помощью матрицы B, то ранг A может измениться не более чем на ранг B в любую сторону. Теперь посмотрим на матрицы: $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ и $C = -A$. Тогда $\operatorname{rk}(A+B) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$ и $\operatorname{rk}(A+C) = \operatorname{rk} A - \operatorname{rk} C$.
3. Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ и $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, тогда

$$\operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - n \leqslant \operatorname{rk}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B)$$

   Равенства вновь достигаются: пусть $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ и $B = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Тогда $\operatorname{rk}(A^2) = \operatorname{rk} A$ и $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - 2$.
4. Для любой матрицы $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ и любых обратимых матриц $C \in M_m(\mathbb{R})$ и $D \in M_n(\mathbb{R})$ верно: $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk}(CA) = \operatorname{rk}(AD)$.
   Смысл: ранг не меняется при умножении на обратимую матрицу.
5. Для любых матриц $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ и $B \in M_{s\times t}(\mathbb{R})$ имеем:

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix} = \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$$

Связь ранга и обратимости

Теорема

Пусть $A \in M_n(\mathbb{R})$ – квадратная матрица. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. A *– обратима;*
2. $\det A \neq 0$*;*
3. *rk* $A = n$*.*

Матрицы, удовлетворяющие условиям этой теоремы, также называют **невырожденными**.

Таким образом, на ранг можно смотреть как на степень невырожденности матрицы A. Самый высокий ранг у невырожденных матриц, самый маленький – у нулевой, но есть еще и промежуточные состояния.

Алгоритм нахождения ранга матрицы

Задача. Дана матрица $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Необходимо найти $\operatorname{rk} A$.

Алгоритм нахождения ранга матрицы

Задача. Дана матрица $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Необходимо найти $\operatorname{rk} A$.
Алгоритм основан на следующих фундаментальных свойствах ранга:

1. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк (столбцов) – следует из вышеприведенного свойства 4.
2. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк (т.е. количеству ступенек).

Алгоритм нахождения ранга матрицы

Задача. Дана матрица $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Необходимо найти $\operatorname{rk} A$.
Алгоритм основан на следующих фундаментальных свойствах ранга:

1. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк (столбцов) – следует из вышеприведенного свойства 4.
2. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк (т.е. количеству ступенек).

Алгоритм.

1. Приводим матрицу A к ступенчатому виду.
2. Подсчитываем число ненулевых строк (ступенек) полученной матрицы – это и есть ранг A.