Теория вероятностей: лекция 4 **24 мая 2021**

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Задачи:

1. При $\lambda > 0$ определим плотность f так:
$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,\lambda e^{-\lambda u}, & \text{если } u \geqslant 0, \\ \frac{1}{2}\,\lambda e^{+\lambda u}, & \text{если } u < 0. \end{cases}$$
Такая функция f называется двусторонней экспоненциальной: пусть величина X имеет плотность f. Найдите плотность случайной величины |X|. [Указание. Вычислите сначала функцию распределения.]

Решение:
Обозначим $Y \sim |X|$. Посчитаем сначала функцию распределения для X:
$$F_X(x|x<0) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}dx = \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{\lambda x}dx = \frac{\lambda}{2\lambda}e^{\lambda x}\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{2}e^{\lambda x}$$
Заметим, что $\int_{-\infty}^{0} f(u)dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x}dx = \frac{1}{2}$. Для $x \geqslant 0 \to \int_{-\infty}^{x} f(u)dx = \int_{-\infty}^{0} f(u)dx + \int_{0}^{\infty} f(u)dx = \frac{1}{2} + \int_{0}^{\infty} f(u) =$
$$= \frac{1}{2} + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{2} - [\frac{\lambda}{2\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{x}] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} = 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x}$$
У полученной функции $F_X(x) = 1 - F_X(-x)$. Распишем, что нам нужно найти:
$$F_Y(x) = P(|X| < x) = P(x < X < x) = F_X(x) - F_X(-x) = 1 - F_X(-x) - F_X(-x) = 1 - 2F_X(-x)$$
$$f_Y(x) = F_Y'(x) = -F_X'(-x) = 2f_X(-x) = \lambda e^{(-\lambda x)}$$
Действительно, это функция плотности, так как ее интеграл от $-\infty$ до ∞ равен 1. $\int_0^{\infty}\lambda e^{(-\lambda x)}dx = 1$ Ниже 0 плотность вероятности 0 так как модуль числа не отрицательный.

Ответ: $f_{|X|}(x) = \begin{cases} \lambda e^{(-\lambda x)}, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$

2. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Пусть X - число промахов. Построить таблицу и функцию распределения.

Решение:
Опишем расчет вероятностей:
$P(X = 0) = 1 - 0.7 = 0.3$ - мы с 1 выстрела попали
$P(X = 1) = 0.7(1 - 0.7) = 0.21$ - мы с 1 выстрела не попали, но попали со 2
$P(X = 2) = 0.7^2(1 - 0.7) = 0.147$ - мы с 1 и 2 выстрела не попали, но попали с 3
$P(X = 3) = 0.7^3(1 - 0.7) = 0.1029$ - мы с 1 и 2 и 3 выстрела не попали, но попали с 4

$P(X=4)=0.7^4=0.2401$ - мы не попали 4 раза

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$, запишем найденные вероятности в таблицу, построим функцию распределения, описывая $P(X \leqslant x)$

Ответ:

X	0	1	2	3	4
$P(X)$	0,3	0,21	0,147	0,1029	0,2401
$F(X)$	0,3	0,51	0,657	0,7599	1

$$F(x)=\begin{cases} 0, x<0; \\ 0.3, 0 \leqslant x<1; \\ 0.51, 1 \leqslant x<2; \\ 0.657, 2 \leqslant x<3; \\ 0.7599, 3 \leqslant x<4; \\ 1, x \geqslant 4. \end{cases}$$

3. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [0, 1]. Докажите, что случайная величина:

$$Y=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$$

имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda>0$. Этот факт может использоваться для генерации экспоненциального распределения с помощью равномерного: чтобы сгенерировать экспоненциальную случайную величину можно сгенерировать равномерно распределенную на [0, 1] случайную величину и применить к ней выше приведенное преобразование.

Решение:
Распишем, чем будет функция распределения длс случайной величины Y:

$$F_Y(x)=P(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)<x)=P(\ln(1-X)>-\lambda x)=P(1-X>e^{-\lambda x})=P(-X>-1+e^{-\lambda x})=$$

$$=P(X>1-e^{-\lambda x})$$

Тут $1-e^{-\lambda x}=F_{exp}(x)\in[0,1]$ и при этом $F_Y(0)=0; F_Y(\infty)=1$ и функция $F_Y(x)$ монотонна возрастающая. $F_Y(x)$ удостоверяет требованиям к функции распределения и имеет форму как у экспоненциального распределения.

4. Случайные приращения цен акций двух компаний за день X и Y имеют совместное распределение, заданное таблицей:

X /Y	-1	$+1$
-1	0,3	0,2
$+1$	0,1	0,4

Найти коэффициент корреляции.

Решение:

Для удобства расчета, дополнительно запишем в таблицу вероятности $p(XY), p(X), p(Y)$ и значения X^2, Y^2:

Значение	$p(XY)$	$p(X)$	$p(Y)$	$X^2; Y^2$
-1	0,3	0,5	0,4	1
$+1$	0,7	0,5	0,6	1

$E(X) = -1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0$
$E(Y) = -1 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 0.2$
$E(XY) = -1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.7 = 0.2$. Вероятности для XY найдены из суммирования вероятностей тех исходов, которые дают произведения -1 и $+1$
$E(X^2) = 1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 1$
$E(Y^2) = 1 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 1$

$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1 - 0 = 1$
$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 1 - 0.04 = 0.96$
$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.4 - 0 \cdot 0.2 = 0.4$

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{0.4}{\sqrt{1 \cdot 0.96}} \approx 0.40825$$

Ответ: Корреляция акций: $Corr(X, Y) \approx 0.40825$

5. Симметричная игральная кость имеет две зеленые, две красные и две белые стороны. Ее подбрасывают один раз. Пусть X = 1, если зеленая сторона сверху и 0 иначе. А Y=1, если красная сторона сверху и 0 иначе. Найдите ковариацию и корреляцию этих случайных величин

Решение:
Для удобства расчета, дополнительно запишем в таблицу вероятности $p(X), p(Y)$ и значения X^2, Y^2, X, Y:

Грань	Вероятность	$X; X^2$	$Y; Y^2$
зеленый	1/3	1	0
красный	1/3	0	1
белый	1/3	0	0

Вероятности выпадения X и Y равны, как и их значения, следовательно: $E(X) = E(Y) = 1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 2/3 = 1/3$
$XY = 0 \Rightarrow E(XY) = 0$
$E(X^2) = E(Y^2) = 1 \cdot 1/3 + 0 \cdot 2/3 = 1/3$
$D(X) = D(Y) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$
$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - \frac{1}{3}\frac{1}{3} = -\frac{1}{9}$

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{-\frac{1}{9}}{\sqrt{\frac{2}{9}\frac{2}{9}}} = -\frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}} = -0.5$$

Ответ: $Cov(X, Y) = -\frac{1}{9} \approx -0.11$**;** $Corr(X, Y) = -0.5$

6. Найдите коэф. Ковариации и корреляции для двух независимых случайных величин $X \sim Exp(3)$ и $X \sim Exp(12)$

Решение:
Для удобства, обозначим вторую экспоненциальную случайную величину, как $Y \sim Exp(12)$. Так как по условию, 2 величины независимы $\Rightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$, так как эти 2 величины не зависимы и их вероятности функция плотности совместного

распределения их произведения равна произведению функций плотности распределения X и Y. ($g(XY) = f_X(X) \cdot g_Y(Y)$)

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X)E(Y) - E(X)E(Y) = 0$$

Так как их ковариация равна 0, то разделив ее на $\sqrt{D(X)D(Y)}$, мы также получим также $0 \Rightarrow Corr(X, Y) = 0$

Ответ: $Cov(X, Y) = 0; Corr(X, Y) = 0$