Дискретная математика: неориентированные графы

27 января 2021

Факультет компьютерных наук

Графы – мотивировка

Пример 3.1 Между девятью планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля — Меркурий, Плутон — Венера, Земля — Плутон, Плутон — Меркурий, Меркурий — Венера, Уран — Нептун, Нептун — Сатурн, Сатурн — Юпитер, Юпитер — Марс и Марс — Уран.

Можно ли добраться с Земли до Марса?

Определение неориентированного графа

Неформально, **граф** — это пара множества **вершин** и множества **ребер**.

Рассмотрим произвольное множество вершин V.

Ребра удобно рассматривать как множество пар вершин

$$\mathrm{E} \subseteq \{\ \{\mathrm{v}, \mathrm{u}\} \mid \mathrm{u}, \mathrm{v} \in \mathrm{V}\}.$$

Определение. **Графом** называется пара $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$.

Базовые определения теории графов

Определение. Вершина и ребро **инцидентны**, если вершина является концом этого ребра.

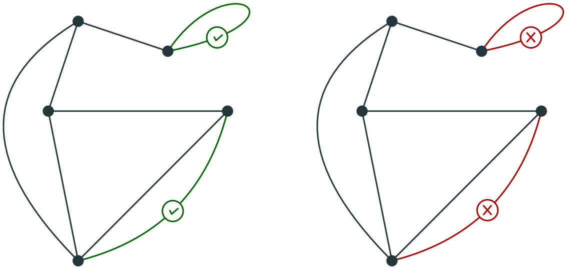
Определение. **Петля** в графе — ребро, инцидентное одной и той же вершине.

Определение. Два ребра, имеющие общую концевую вершину, называются **смежными**.

Определение. **Изолированной вершиной** — вершину, не инцидентная ни одному ребру.

Определение. **Степенью** вершины v называется количество инцидентных ей ребер. Обозначение: $\deg \mathrm{v}$.

Полный граф



Далее на этой лекции мы будем рассматривать графы **без петель** и **кратных ребер**.

Определение. Граф на n вершинах называется **полным**, если в нём каждая вершина соединена с каждой. Обозначение K_n.

Утверждение. В полном графе K_n ровно $\frac{n(n-1)}{2}$ ребер.

Лемма о рукопожатиях

Лемма (О рукопожатиях). Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер:

$$\sum_{v_i \in V} \deg v_i = 2|E|.$$

Пример 3.2 У кого в среднем больше партнеров противоположного пола? У мужчин или у женщин?

The Social Organization of Sexuality

https://press.uchicago.edu/ucp/books/book/chicago/S/bo3626005.h

Пути и циклы

Определение. **Путём** в графе называют последовательность вершин $u_1, u_2, \ldots, u_n$, в которой каждые две соседние вершины соединены ребром.

Определение. **Длиной пути** называют количество рёбер пути (если в пути n вершин, то его длина $n-1$).

Определение. **Циклом** в неориентированном графе называют путь длины не меньше трёх, начальная и конечная вершина которого совпадают.

Определение. Путь называют **простым**, если все его вершины различны.

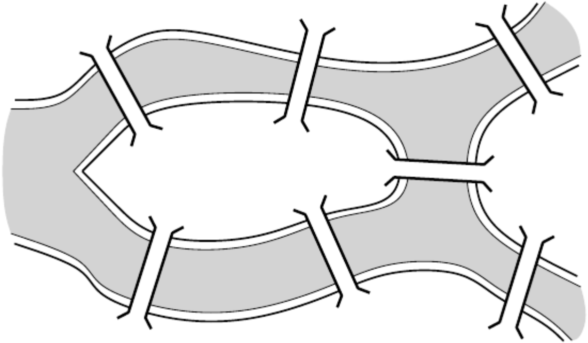
Определение. Цикл называют **простым**, если все вершины цикла кроме u_1 и u_n различны.

Эйлеровы пути и циклы

Эйлеров путь в графе — это путь, проходящий по всем рёбрам графа ровно по одному разу.

Эйлеров цикл — эйлеров путь, являющийся циклом.

Пример 3.3 (Задача Эйлера о кёнигсбергских мостах.) Город Кёнигсберг (ныне Калининград) был расположен на берегах реки Прегель и двух островах, которые соединены семью мостами. Можно ли было прогуляться по городу, пройдя по каждому мосту ровно один раз, так, чтобы маршрут начался и закончился на берегу?



Эйлеровы пути и циклы

Теорема 1 (Критерий существования эйлерова цикла). В графе $G = (V, E)$ существует эйлеров цикл тогда и только тогда, когда все вершины имеют четную степень.

Теорема 2 (Критерий существования эйлерова пути). В графе $G = (V, E)$ существует эйлеров путь тогда и только тогда, когда количество вершин с нечетной степенью меньше или равно двум.

Связность

Определение. Говорят, что вершина v **достижима** из вершины u, если в графе есть путь из u в v.

Определение. Множество состоящее из попарно достижимых вершин называют **компонентой связности**.

Определение. Граф называется **связным**, если он содержит ровно одну компоненту связности.

Пример 3.4 Пусть G — граф на 15 вершинах, причем каждая имеет степень не меньше 7. Докажите, что G связен.

Пример 3.5 Найдите наибольшее возможное число ребер в несвязном графе на n вершинах.

Деревья

Определение. Связный граф без простых циклов называется **деревом**.

Утверждение. В любом дереве есть вершина степени 1 ("висячая вершина"или "лист").

Утверждение. У любого дерева ровно $|V| - 1$ ребро.

Пример 3.6 Существует ли дерево на 9 вершинах, из которых хотя бы 2 имеют степень 5?

Остовное дерево

Определение. Пусть G некоторый связный граф. Подграф, являющийся деревом и содержащий все вершины называется **остовным деревом** графа G.

Утверждение. У любого связного графа есть остовное дерево.

Пример 3.7 В каждом связном графе есть такая вершина, что если ее удалить (вместе со всеми исходящими из нее ребрами), то граф останется связным.

Дополнение графа

Дополнительный материал

Определение. **Дополнением** $\bar{G}$ графа G называется граф на том же множестве вершин, в котором пара вершин связана ребром тогда и только тогда, когда в G эта пара вершин ребром не связана.

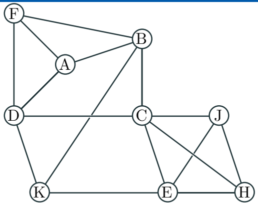
Пример 3.8 Докажите, что граф или его дополнение связны (возможно оба связны).

Разрезы

Дополнительный материал

Определение. **Разрезом** в графе называют разбиение множества вершин графа V на множества S и T (которые не пересекаются). То есть $\mathrm{V} = \mathrm{S} \cap \mathrm{T}$, $\mathrm{S} \cap \mathrm{T} = \varnothing$.

Определение. **Величиной (или размером) разреза** называют суммарное количество рёбер, которые ведут из вершин множества S в вершины множества T.



Пример 3.9 Найдите в графе G разрез размера 6. Есть ли в графе G разрез большего размера?

Из определения следует, что количество рёбер в минимальном разрезе неориентированного графа — это количество рёбер, которое необходимо удалить, чтобы граф стал несвязным.

Пример 3.10 Найдите минимальный разрез графа G. Докажите, что найденный разрез действительно минимальный.

Семинарская часть

$\boxed{3.1}$ Найдите число рёбер в графе K_5.

$\boxed{3.2}$ Найдите число путей и простых путей длины 4 в графе K_5. Тот же вопрос для путей длины 5.

$\boxed{3.3}$ Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны $4, 4, 4, 4, 2$.

$\boxed{3.4}$ В графе 100 вершин и 800 рёбер. Докажите, что в этом графе есть хотя бы одна вершина степени не меньше 16.

$\boxed{3.5}$ Дерево имеет 2020 вершин. Верно ли, что в нём найдется простой путь длины 3?

$\boxed{3.6}$ В дереве нет вершин степени 2. Докажите, что количество висячих вершин (т.е. вершин степени 1) больше половины общего количества вершин.

$\boxed{3.7}$ У связного графа на 10 вершинах 15 ребер. Какое максимальное число ребер можно удалить из него так, чтобы он остался связным?