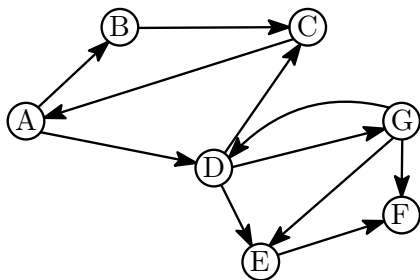




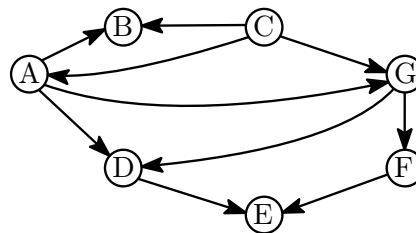
3 февраля 2021

**Дискретная математика:**  
**ориентированные графы и алгоритмы на графах.**

Домашнее задание.



Граф  $G$ .



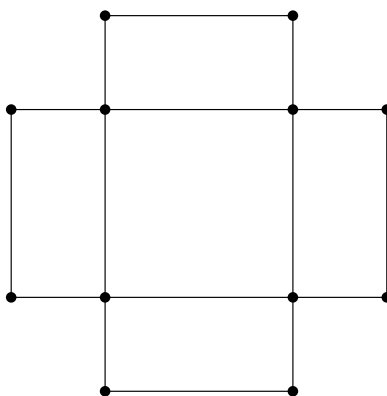
Граф  $H$ .

**1** Граф  $G$  изображен на рисунке выше.

- а) Найдите максимальную длину простого цикла в графе  $G$ . Укажите все различные простые циклы максимальной длины. (Достаточно предъявить ответ)
- б) Найдите компоненты сильной связности графа  $G$ . (Достаточно предъявить ответ)
- в) Какое минимальное число рёбер необходимо добавить в граф  $G$ , чтобы он стал сильно связным? (Необходимо обоснование ответа)

**2** Ациклический граф  $H$  изображен на рисунке выше. Осуществите топологическую сортировку вершин графа  $H$ . (Достаточно предъявить ответ. В ответе можно, например, указать последовательность вершин от меньшего номера к большему.)

*К остальным задачам необходимо привести решения с обоснованием.*



Граф  $R$ .

**3** Граф  $R$  изображен на рисунке выше. Верно ли, что граф  $L(R)$  гамильтонов?

**4** На плоскости отмечено 15 точек, которые соединены 25 непересекающимися отрезками так, что от любой точки можно добраться до любой другой по этим отрезкам.

- а) На сколько частей разбита плоскость этой фигурой?
- б) А на сколько частей разобьют плоскость 5 таких непересекающихся фигур?

**Определение.** Напомним, что *правильной раскраской* графа называется такое сопоставление каждой его вершине цвета, что любым двум смежным вершинам соответствуют разные цвета.

Кроме того, на занятии было доказано, что для правильной раскраски полного графа на  $n$  вершинах  $K_n$  необходимо  $n$  цветов.

**5** В некоторой компании 7 рабочих групп  $a, b, c, d, e, f$  и  $g$ . В пятницу необходимо провести собрания в каждой рабочей группе по отдельности, причем каждое собрание можно планировать в один из 4 временных слотов:

9:00 - 10:45,    11:00 - 12:45,    13:15 - 15:00    и    15:15 - 17:00.

Кроме того, некоторые сотрудники участвуют сразу в нескольких группах:

- есть те, кто одновременно состоят в  $a, b, c$  и  $d$ ;
- несколько сотрудников состоят в  $g, f$  и  $d$  одновременно;
- часть состоит в группах  $b, d$  и  $e$  одновременно;
- и еще один человек работает в  $e$  и  $f$ .

Собрания в разных группах можно проводить в одно и то же время, если нет сотрудников, которые в этот момент должны быть сразу на нескольких разных собраниях.

Получится ли провести все собрания в пятницу? Какое минимальное количество временных слотов необходимо?

**6** Напомним, что граф называется *двудольным*, если его можно правильно раскрасить в два цвета.

**а)** Какое наибольшее число ребер может быть в простом двудольном графе на  $k$  белых и  $m$  чёрных вершинах? (В нем не должно быть ребер, соединяющих вершины одинакового цвета.)

**б)** Какое наибольшее количество рёбер может быть в двудольном графе на  $2n$  вершинах?

**7** Рассмотрим алфавит, состоящий только из двух букв  $a$  и  $b$ . Все возможные слова, которые можно получить в этом алфавите, назовем языком.

**а)** Докажите, что в этом языке можно составить слово, в котором любая трехбуквенная комбинация этих двух букв ( $aaa, aab, \dots, bba, bbb$ ) встречается ровно один раз.

**б)** Существует ли слово, которое удовлетворяет условию предыдущего пункта и начинается на  $abba$ ? Если существует, то укажите его. Если не существует, то объясните, почему это невозможно.

**Замечание.** Трехбуквенная комбинация — три подряд идущие буквы в слове.

В слове  $aaaa$ , например, комбинация букв  $aaa$  встречается два раза (первые три буквы и последние). А вот в слове  $abaaba$  три комбинации:  $aba, bab$  и  $aba$ .