**Математический анализ: семинар 1** **16 февраля 2021**

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

## Задачи

1. Найти предел

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$
   **Решение:**
   При $n \to \infty$, слагаемые с основанием 3 доминируют ответ.
   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{3}{3})^n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
   **Ответ:** $1/3$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+a+...+a^n}{1+b+...+b^n}, \quad$ где $|a| < 1,\ |b| < 1$
   **Решение:**
   Числитель и знаменатель - сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии.
   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1-a}}{\frac{1}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a}$
   **Ответ:** $\frac{1-b}{1-a}$

2. Найти предел

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$
   **Решение:**
   Числитель и знаменатель дроби стремятся к 0. Используем правило Лопиталя.
   $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2x}{4x-1} = 2/3$
   **Ответ:** $\frac{2}{3}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(\cos x-1)}$
   **Решение:**
   Числитель и знаменатель дроби стремятся к 0. Используем правило Лопиталя.
   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(\cos x-1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\sin(x)(-\cos(\cos(x)-1))} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2(x^2-1)}{(1+x^2)^2}}{\sin^2(x)(-\sin(\cos(x)-1))-\cos(x)(\cos(x)-1)} = \frac{2}{-1}$
   **Ответ:** $-2$

3. Найти производную

   (a) $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$
   **Решение:**
   $y'(x) = \frac{(1-2x)\times(1-x+x^2)+(1-2x)\times(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}$
   **Ответ:** $\frac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}$

   (b) $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$
   **Решение:**

$$y'(x) = \frac{(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})'}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x+(\sqrt{1+e^{2x}})'}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x+\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x+\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} =$$

$$= \frac{\frac{e^x\sqrt{1+e^{2x}}+e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{\frac{e^x(\sqrt{1+e^{2x}}+e^x)}{\sqrt{1+e^{2x}}}}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}} = \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

**Ответ:** $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

4. Найти $y'$, если

   (a) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$

   **Решение:**

$$y'(x) = f'(\sin^2 x) \times (2\sin x\cos x) + f'(\cos^2 x) \times (-2\sin x \cos x) =$$
$$= (f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)) \times (2\sin x \cos x)$$

   **Ответ:** $(f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)) \times (2\sin x\cos x)$

   (b) $y = f(e^x)e^{f(x)}$

   **Решение:**

$$y'(x) = f'(e^x)e^{f(x)} + f(e^x)(e^{f(x)})' = e^x f'(e^x)e^{f(x)} + f(e^x)e^{f(x)}f'(x) =$$
$$= e^{f(x)}(e^x f'(e^x) + f(e^x)f'(x))$$

   **Ответ:** $e^{f(x)}(e^x f'(e^x) + f(e^x)f'(x))$

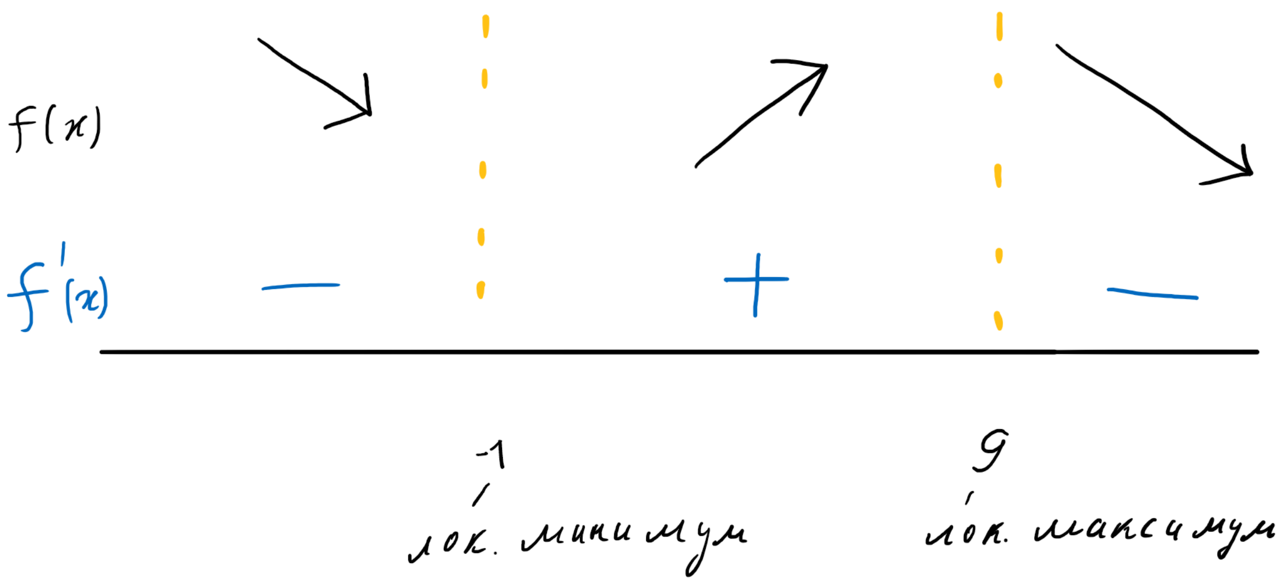
   где $f(x)$ – дифференцируемая функция.

5. Исследовать на экстремумы

   (a) $y = (x+1)^{10}e^{-x}$

   **Решение:**

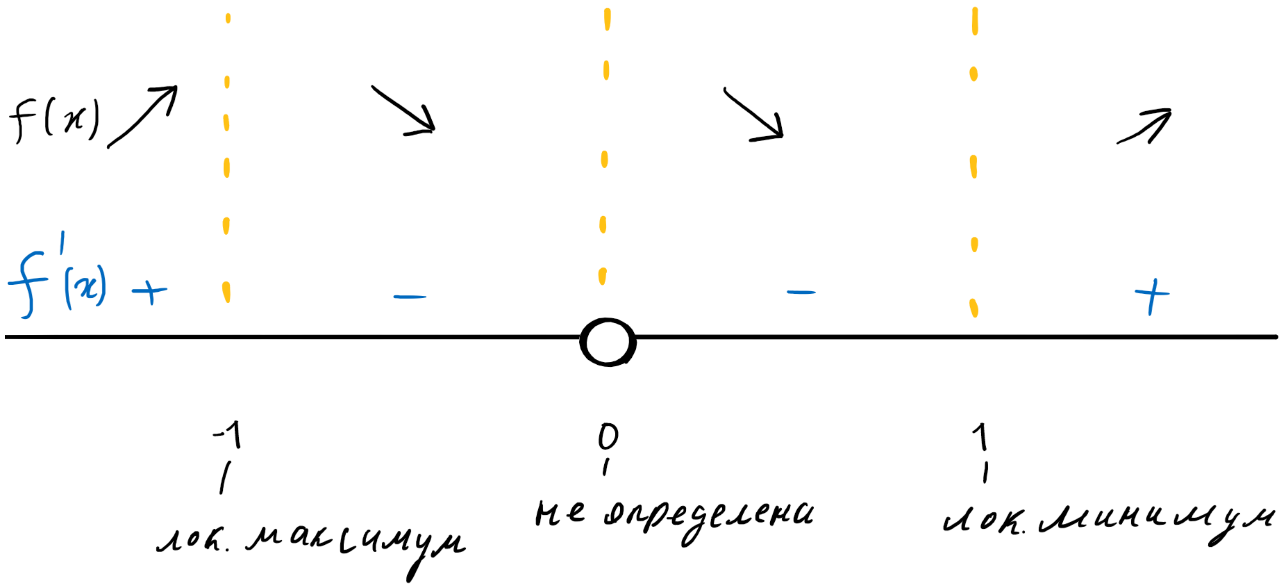
   $y' = 10(x+1)^9e^{-x} - (x+1)^{10}e^{-x} = e^{-x}(9-x)(x+1)^9$
   $y' = 0$ при $x = -1$ или $x = 9$




   -1 - локальный минимум, в 9 - локальный максимум.

   (b) $y = x + \frac{1}{x}$

   **Решение:**
   $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$
   $y \neq 0$ и $y' = 0$ при $x = \pm 1$




-1 - локальный максимум, в 0 - функция не определена $\lim\limits_{x\to+0} y = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to-0} y = -\infty$, в 1 - локальный минимум.