ДЗ #1

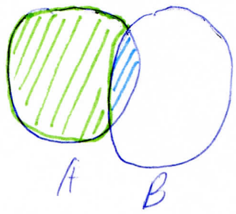
17.01.2021

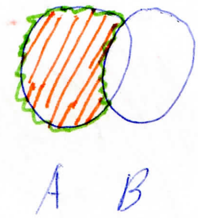
Сетдеков Кирилл

Задание №1

Какие из равенств выполнены для любых множеств A, B, C?

а) $\underline{A \setminus (A \cap B)} = \underline{A \cap (A \setminus B)}$ да, равенство верно





Докажем: Пусть

«$x \in A \setminus (A \cap B)$» $= d(x)$, «$x \in A$» $= a(x)$, «$x \in B$» $= b(x)$

«$x \in A \cap (A \setminus B)$» $= c(x)$

Тогда: $d(x) = a(x) \wedge \neg(a(x) \wedge b(x)) = a(x) \wedge (\neg a(x) \vee \neg b(x)) =$

$= \underbrace{(a(x) \wedge \neg a(x))}_{0} \vee (a(x) \wedge \neg b(x)) = a(x) \wedge \neg b(x)$

$c(x) = a(x) \wedge (a(x) \wedge \neg b(x)) = \underbrace{(a(x) \wedge a(x))}_{a} \wedge \neg b(x) = a(x) \wedge \neg b(x)$

$c(x) = a(x) \wedge \neg b(x) = d(x) \Rightarrow$ исходное равенство верно

б) $(A \cup B) \Delta (A \cap B) = A \Delta B$ да, равенство верно

согласно определению $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

Пусть: ~~«A∪B»~~ «$x \in (A \cup B) \Delta (A \cap B)$» $= c(x)$

~~(A∪B)Δ A(…)~~ «$x \in A \Delta B$» $= d(x) =$ «$x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$»

Тогда:

$c(x) = \underbrace{[(a(x) \vee b(x)) \wedge \neg(a(x) \wedge b(x))]}_{d(x)} \vee [(a(x) \wedge b(x)) \wedge \neg(a(x) \vee b(x))] =$

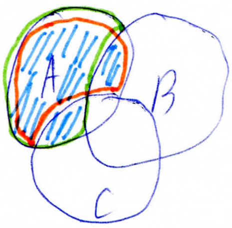
$= d(x) \vee [(a(x) \wedge b(x)) \wedge (\neg(a(x)) \wedge \neg b(x))] = d(x) \vee 0 = d(x)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{исходное равенство верно}}$

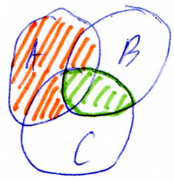
в) $((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = A \setminus (B \cup C)$

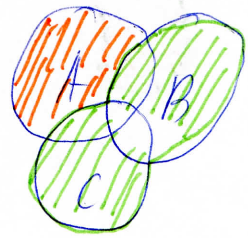
не верно. нарисуем контр-пример.

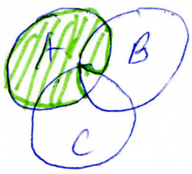
$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C))$ $\qquad$ $A \setminus (B \cup C)$



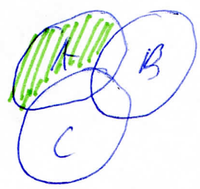
$\cap$







— левая часть



— правая часть.

множества не равны.

Численный пример: $A = \{1, 2, 4, 5\}$

$B = \{1, 2, 3, 6\}$

$C = \{1, 3, 4, 7\}$

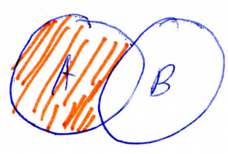
$((A \setminus B) \cup (A \setminus C)) \cap (A \setminus (B \cap C)) = \{2, 4, 5\} = K$

$A \setminus (B \cup C) = \{5\} = P$

множество $K \neq P$

Задание №2 $\qquad$ Верно ли, что для любых A, B

$\underbrace{(A \cup B) \setminus B}_{A \setminus B} \subseteq A$



$\forall x:\ x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A \Rightarrow A \setminus B \subseteq A \Rightarrow (A \cup B) \setminus B \subseteq A$

Задание №3

Доказать $\neg(a \vee (b \oplus 1)) \wedge (a \to 1) = \neg a \wedge b$

Пусть $k(x)$ – левая часть равенства, $l(x)$ – правая. Тогда:

$k(x) = (\neg a \wedge \neg(b \oplus 1)) \wedge (a \to 1) = (\neg a \wedge \neg(\neg b)) \wedge (a \to 1) =$

$= (\neg a \wedge b) \wedge \underbrace{(a \to 1)}_{1} = (\neg a \wedge b) \wedge 1 = \neg a \wedge b$

$k(x) = \neg a \wedge b = l(x) \Rightarrow$ исходное равенство верно

Задание №4

упростим высказывание:

$a(x)$ = «в числе 7 цифр»

$b(x)$ = «$\neg$ 3-й разряд четный»

$c(x)$ = «число четно»

заполним таблицу истинности

	число	$a(x)$	$b(x)$	$a \to b$	$c(x)$	$c(x) \wedge (a \to b)$
а)	0	0	1	1	1	1
б)	1234567	1	1	1	0	0
в)	2222222	1	0	0	1	0
г)	123457	0	0	1	0	0

высказывание ложно для чисел б), в) г)

Задание №5

$A = \{7, 5, 1, 4, 2, 6, 3\}$ $B = \{x \mid x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$

$C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

для каких x, $x \in C$, «$(x \in A) \to \neg(x \in B)$» $= 1$

$a(x)$ = «$x \in A$»

$b(x)$ = «$x \notin B$»

$a(x) \to b(x) = 1$, если:

$\left[\begin{array}{l} a(x) = 0 \\ \begin{cases} a(x) = 1 \\ b(x) = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \{0, 8, 9\} \\ \cancel{x \notin}\ x \in A \text{ и } x \notin B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \{0, 8, 9\} \\ x \in \{1, 3, 5, 7\} \end{array}\right.$

$\boxed{\text{ответ: } x \in \{0, 1, 3, 5, 7, 8, 9\}}$

Задача № 6

доказать $2+4+6+\dots 2n = n(n+1)$

пусть $M = 2+4+6+\dots 2n$

$M = 2n+(2n-2)+(2n-4)+\dots 2$ | отразим порядок

сложим два варианта написания M по компоненты

$2M = (2n+2)+(2n+2)+\dots \underbrace{(2n+2)}_{\text{n штук}}$

$2M = n(2n+2)$ | :2

$M = n(n+1)$ ч.т.д.