Математический анализ: лекция 3

7 марта 2021

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

Задачи

1. Найдите $\frac{\partial f}{\partial x}(a,1)$

$$f(x,y) = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$$

Решение:
Дифференцируем как сумму:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}) = \frac{\partial}{\partial x}(x)+(y-1)(\frac{\partial}{\partial x}(\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}})) = 1+(y-1)(\frac{\partial}{\partial x}(\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}})) =$$

Применяем цепное правило, где : $\frac{\partial}{\partial x}(\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}) = \frac{\partial \arcsin u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$ где $u = \sqrt{\frac{x}{y}}$; $\frac{\partial \arcsin u}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

$$= 1 + (y-1)\frac{\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{\frac{x}{y}}))}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} =$$

Применяем цепное правило для корня из частного: $\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{\frac{x}{y}})) = \frac{\partial\sqrt{u}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$ где $u = \frac{y}{y}$; $\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{u}) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$
и после этого - выносим константу и считаем производную

$$= 1 + \frac{\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{y})}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} = 1 + \frac{1}{2y\sqrt{\frac{x}{y}}}\frac{y-1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} = 1 + \frac{y-1}{2y\sqrt{\frac{x(y-x)}{y^2}}} = 1 + \frac{y-1}{2\sqrt{x(y-x)}}$$

Подставим $x = a, y = 1$

$$1 + \frac{1-1}{2\sqrt{a(1-a)}} = 1$$

Ответ: 1

2. Найти градиент и матрицу Гессе

   (a) $u = ln(x+y^2)$
   Решение:
   Градиент по определению - $grad_a u = (\frac{\partial u}{\partial x}(a), \frac{\partial u}{\partial y}(a))$
   Матрица Гессе - квадратная матрица из производных второго порядка по x и y

$$H_a(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

Всего надо посчитать 6 производных, начнем с первой производной по x

$$\frac{\partial ln(x+y^2)}{\partial x}$$

Используем цепное правило: $\frac{\partial ln(x+y^2)}{\partial x} = \frac{\partial \ln u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$ где $u = x+y^2$, $\frac{\partial}{\partial u}\ln u = \frac{1}{u}$

$$= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x+y^2)}{x+y^2} = \frac{1}{x+y^2}$$

Используя ту же замену, считаем:

$$\frac{\partial ln(x+y^2)}{\partial y} = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x+y^2)}{x+y^2} = \frac{2y}{x+y^2}$$

Теперь найдем вторые производные.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{(x+y^2})=$$

Сделаем замену и используем цепное правило: где $u = x+y^2$; $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{u}) = -\frac{1}{u^2}$

$$= -\frac{\frac{\partial}{\partial x}(x+y^2)}{(x+y^2)^2} = -\frac{1}{(x+y^2)^2}$$

Делаем ту же замену и считаем смешанную производную:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{(x+y^2})= -\frac{\frac{\partial}{\partial y}(x+y^2)}{(x+y^2)^2} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$$

Считаем вторую производную по y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a) = 2\frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{(x+y^2})= < using - derivative - of - the - quotient >=$$

$$= 2\frac{(x+y^2)(\frac{\partial}{\partial y}y) - y(\frac{\partial}{\partial y}(x+y^2))}{(x+y^2)^2} = 2\frac{(x+y^2)-2y^2}{(x+y^2)^2} = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}$$

Ответ: $grad_a u = (\frac{1}{x+y^2}(a), \frac{2y}{x+y^2}(a))$ **;** $H_a(u) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(x+y^2)^2}(a) & -\frac{2y}{(x+y^2)^2}(a) \\ -\frac{2y}{(x+y^2)^2}(a) & \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2}(a) \end{pmatrix}$

(b) $u = \frac{\cos x^2}{y}$

Решение:

Считаем первые производные:

По x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\cos x^2}{y}) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(\cos x^2)}{y} = \frac{-\frac{\partial}{\partial x}(x^2)\sin x^2}{y} = -\frac{2x\sin x^2}{y}$$

По y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos x^2 \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y}) = -\frac{\cos x^2}{y^2}$$

Теперь считаем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a) = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{2x\sin x^2}{y}) = \frac{-2}{y}\frac{\partial}{\partial x}(x\sin x^2) =$$

используем производную произведения и потом цепное правило

$$= \frac{-2}{y}(x(\frac{\partial}{\partial x}\sin x^2) + \sin x^2 \frac{\partial}{\partial x}x) = \frac{-2}{y}(x\cos x^2(\frac{\partial}{\partial x}x^2) + \sin x^2) = \frac{-2(2x^2\cos x^2 + \sin x^2)}{y}$$

Считаем смешанную производную:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{2x\sin x^2}{y}) = 2x\sin x^2 \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{1}{y}) = \frac{2x\sin x^2}{y^2}$$

Считаем производную по y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a) = \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{\cos x^2}{y^2}) = -\cos x^2 \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{y^2}) = \frac{2\cos x^2}{y^3}$$

Ответ: $grad_a u = (-\frac{2x\sin x^2}{y}(a), -\frac{\cos x^2}{y^2}(a))$ **;** $H_a(u) = \begin{pmatrix} \frac{-2(2x^2\cos x^2 + \sin x^2)}{y}(a) & \frac{2x\sin x^2}{y^2}(a) \\ \frac{2x\sin x^2}{y^2}(a) & \frac{2\cos x^2}{y^3}(a) \end{pmatrix}$

3. Проверьте равенство

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

для функций

(a) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$

(b) $u = x^{y^2}$

Решение для a и b:

$u = x^2 - 2xy - 3y^2$

$$\frac{\partial u^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} x^2 - 2xy - 3y^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(0 - 2x - 6y\right) = -2$$

$$=$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} x^2 - 2xy - 3y^2\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x - 2y - 0\right) = -2$$

$u = x^{y^2}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} x^{y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{y^2 \cdot x^{y^2-1}}_{\text{произведение}}\right) = y^2\left(\frac{\partial}{\partial y} x^{y^2-1}\right) + x^{y^2-1}\left(\frac{\partial}{\partial y} y^2\right) =$$

$$= \langle u = y^2 - 1,\ \frac{\partial}{\partial u}(x^u) = x^u \ln(x) \rangle = x^{y^2-1} \ln(x)\, y^2 \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 - 1\right)\right)}_{=2y} + 2y\, x^{y^2-1} =$$

$$= 2x^{y^2-1} \ln(x)\, y^3 + 2yx^{y^2-1} = 2yx^{y^2-1}\left(y^2 \ln(x) + 1\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} x^{y^2}\right) = \langle u = y^2,\ \frac{\partial}{\partial u} x^u = x^u \ln(x), \text{цепное правило} \rangle = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{y^2} \ln(x) \left(\frac{\partial}{\partial y} y^2\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(2y\, x^{y^2} \ln(x)\right) = 2y\left(\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{x^{y^2} \ln x}_{\text{произведение}}\right) = 2y\left(\ln x \left(\frac{\partial}{\partial x} x^{y^2}\right) + x^{y^2} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} \ln x\right)}_{=\frac{1}{x}}\right) =$$

$$= 2y\left(y^2 \ln x\, x^{y^2-1} + x^{y^2-1}\right) = 2yx^{y^2-1}\left(y^2 \ln(x) + 1\right)$$

4. Найдите указанные производные

(a) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, если $u = x\ln(xy)$.

Решение:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} x \ln(xy) = x \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln(xy)\right) = < u = xy,\ \frac{\partial}{\partial u} \log u = \frac{1}{u} > =$$

$$= x \frac{\frac{\partial}{\partial y}(xy)}{xy} = \frac{x \cancel{x}}{\cancel{x} y} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

Ответ: 0

(b) $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, если $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

Решение:

$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \sin y + y^3 \cos x$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x \sin y - y^3 \sin x$

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6 \sin y - y^3 \cos x$

$\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = 6 \cos y - 3y^2 \cos x$

$\frac{\partial^5 u}{\partial x^3 \partial y^2} = -6 \sin y - 6y \cos x$

$\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} = -6 \cos y - 6 \cos x$

Ответ: $-6 \cos y - 6 \cos x$

(c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, если $u = f(x, xy, xyz)$, где $f(y_1, y_2, y_3) = y_1 + \ln(y_2 y_3) - y_1 y_2 y_3$.

Указание: можно пользоваться тем, что частные производные можно в любом порядке применять.

Решение:

$$u = x + \ln(x^2 y^2 z) - x^3 y^2 z$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x^2 y^2 z)\right) - y^2 z \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} x^3}_{3x^2} = < \text{цепное правило},\ u = x^2 y^2 z,\ \frac{\partial}{\partial u} \ln u = \frac{1}{u} > =$$

$$= 1 + \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y^2 z)}{x^2 y^2 z} - 3x^2 y^2 z = 1 + \frac{2 \cancel{x} \cancel{y^2} \cancel{z}}{x^{\cancel{2}} \cancel{y^2} \cancel{z}} - 3x^2 y^2 z = 1 + \frac{2}{x} - 3x^2 y^2 z$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(1 + \frac{2}{x} - 3x^2 y^2 z\right) = 0 + 0 - 6x^2 y z$$

Ответ: $-6x^2 yz$

5. Определите угол между градиентами функции $u = x^2 + y^2 - z^2$ в точках $A = (\varepsilon, 0, 0)$ и $B = (0, \varepsilon, 0)$.

Указание: угол между векторами v и u можно вычислить через скалярное произведение:

$$\cos\varphi = \frac{(u,v)}{|u|\cdot|v|}.$$

Решение:

Частные производные по каждой переменной x, y, z простые, весь градиент в точке будет выглядеть:

$$grad_a u = (2x(a), 2y(a), -2z(a))$$

Посчитаем значение в точках A и B.

$$grad_A u = (2\varepsilon, 0, 0)$$

$$grad_B u = (0, 2\varepsilon, 0)$$

$$(grad_A u, grad_B u) = 0 * 2\varepsilon + 2\varepsilon * 0 + 0 = 0$$
$$|grad_A u| = |grad_B u| = 2\varepsilon$$

$$\cos\varphi = \frac{0}{2\varepsilon \cdot 2\varepsilon} = 0$$

$\varphi = 90°$

Ответ: Угол между градиентами $90°$

6. Исследовать на экстремумы следующие функции:

   (a) $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ $(x > 0,\ y > 0)$.
   Решение:
   Выпишем градиент и матрицу Гессе

$$grad_a f = (y - \frac{50}{x^2}, x - \frac{20}{y^2})$$

$$H_a(f) = \begin{pmatrix} \frac{100}{x^3}(a) & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3}(a) \end{pmatrix}$$

   Потенциальные экстремумы - точки, где $grad_a f = 0$

$$\begin{cases} y - \frac{50}{x^2} = 0 \\ x - \frac{20}{y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{50}{x^2} \\ x - \frac{20}{(\frac{50}{x^2})^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{50}{x^2} \\ x - \frac{x^4}{125} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

   Рассмотрим $H_a(f)$ в точке $a = (5,2)$

$$H_a(f) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

   $\Delta_1 = 4/5 > 0; \Delta_2 = 4/5 * 5 - 1 * 1 = 3 > 0 \Rightarrow H_a(f)$ положительно определена и точка $(5,2)$ - глобальный минимум (так как это локальный минимум и на больших значениях x, y функция положительная и стремится к ∞.

(b) $f(x,y,z) = -x^2 - 5y^2 - 3z^2 + xy - 2xz + 2yz + 11x + 2y + 18z + 10.$

Выпишем градиент и матрицу Гессе

$$grad_a f = (-2x + y - 2z + 11, x - 10y + 2z + 2, -2x + 2y - 6z + 18)$$

$$H_a(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -10 & 2 \\ -2 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Потенциальные экстремумы - точки, где $grad_a f = 0$

$$\begin{cases} -2x + y - 2z = -11 \\ x - 10y + 2z = -2 \\ -2x + 2y - 6z = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y - 2z = -11 \\ -19/2y + z = -15/2 \\ -2x + 2y - 6z = -18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y - 2z = -11 \\ -19y + 2z = -15 \\ -2x + 2y - 6z = -18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + y - 2z = -11 \\ -19y + 2z = -15 \\ y - 4z = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y - 2z = -11 \\ -19y + 2z = -15 \\ -74/19z = -148/19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y - 2z = -11 \\ -19y + 2z = -15 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x + y - 2z = -11 \\ -19y = -19 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y - 2z = -11 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Рассмотрим $H_a(f)$ в точке $a = (4,1,2)$

$\Delta_1 = -2 < 0; \Delta_2 = 20 - 1 = 19 > 0; \Delta_3 = -2 * -10 * -6 + 1 * 2 * -2 - 2 * 1 * 2 + 2 * -10 * -2 - 1 * 1 * -6 + 2 * 2 * 2 = -74 < 0 \Rightarrow H_a(f)$ отрицательна определена и точка $(4,1,2)$ - глобальный максимум (так как это локальный максимум и на больших значениях x, y, z функция отрицательна и стремится к $-\infty$.