Дискретная математика: множества и логика

13 января 2021

Факультет компьютерных наук

Математическое доказательство

Утверждение в математике — то, что можно либо доказать, либо опровергнуть.

Доказательство в математике — цепочка логических умозаключений, показывающая, что при условии истинности не которого набора аксиом и правил вывода утверждение верно.

Аксиома — утверждение, которое принимается на веру без доказательства.

Пример 1.1. $0.(9) = 1$.

Кванторы и обозначения

- Квантор всеобщности — $\forall$.
- Квантор существования — $\exists$.
- Импликация (логическое следствие) — $\Longrightarrow$.
- Равносильность — $\Longleftrightarrow$.

Пример 1.2. $\forall$ натурального n число $n^2 + n + 41$ является простым.

Пример 1.3. $\exists$ положительные целые $x,\ y,\ z$ такие, что $313(x^3 + y^3) = z^3$.

Пример 1.4. $\forall$ натурального n выполнено

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Пример 1.5.* $\forall$ натурального n выполнено

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2.$$

Математическая индукция

Математическая индукция — способ доказательства утверждения, зависящего от натурального параметра.

Описание метода:

Предположим, что требуется доказать каждое из утверждений $P_0, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots$

Допустим, что

- **(База индукции)** Установлено, что P_0 верно.
- **(Шаг индукции)** Для любого n доказано, что если верно P_n, то верно P_{n+1}.

Тогда все утверждения верны.

Пример 1.6. $\forall$ натурального n выполнено равенство

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Язык теории множеств

Множество — совокупность элементов. Порядок элементов не важен. Элементы входят без повторений.

Пример 1.7. Множество цифр $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Пример 1.8. Множество натуральных чисел
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, множество целых чисел
$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$.

Обозначения:

- $a \in A$ — принадлежность элемента a множеству A;
- $A \subseteq B$ — множество A является подмножеством B (любой элемент множества A также является элементом множества B);
- $A = B$ — множества состоят из одинаковых наборов элементов;
- $\varnothing$ — пустое множество.

Задание множества и операции

Способы задания множества:

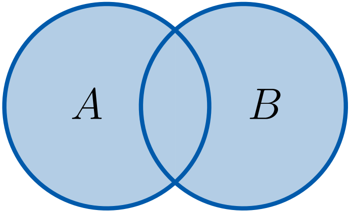
- Перечисление $M = \{1, 2, 3, 4\}$;
- Описание условия $N = \{x \mid x = 2y + 1,\ y \in \mathbb{Z}\}$.

Операции с множествами:

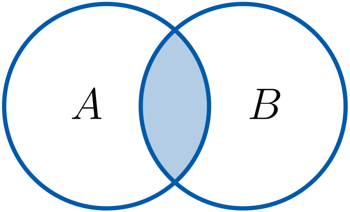
- **объединение** $A \cup B$ состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств;
- **пересечение** $A \cap B$ состоит из элементов, которые принадлежат обоим множествам;
- **разность** $A \setminus B$ состоит из элементов, которые принадлежат A, но не принадлежат B;
- **симметрическая разность** $A \triangle B$ состоит из элементов, принадлежащих ровно одному из множеств.

Диаграммы Эйлера-Венна

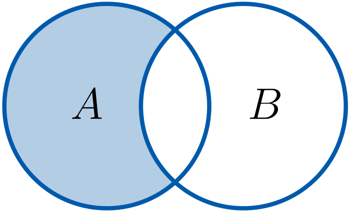
$A \cup B$



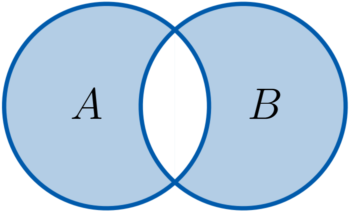
$A \cap B$



$A \setminus B$



$A \triangle B$



Пример 1.9. Убедимся, что

а) $A \subseteq B$ и $B \subseteq A \iff A = B$;

б) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$;

в) $(B \setminus A) \cup (A \setminus B) = A \triangle B$.

Высказывания и предикаты

Высказывание — утверждение, являющееся либо истиной, либо ложью.

Предикат — предложение, истинность которого можно проверить, подставив в него значения переменных.

Пример 1.10. $a(x) =$ «число x больше 5» — предикат.

$c =$«любую карту можно покрасить в четыре цвета так, чтобы соседние участки были различных цветов» — высказывание.

Пример 1.11. «Данное высказывание ложно».

Истинно ли это высказывание или нет?

Логические операции с высказываниями

С высказываниями и предикатами можно совершать операции:

Обозначение	Значение	Название
$a \wedge b$	«a и b»	конъюнкция
$a \vee b$	«a или b»	дизъюнкция
$a \to b$	«из a следует b»	импликация
$\neg a$	«не a»	отрицание
$a \equiv b$ $(a \leftrightarrow b)$	«a равносильно b»	эквивалентность
$a \oplus b$	«либо a, либо b»	исключающее ИЛИ

Пример 1.12. Верно ли, что все живые сейчас тиранозавры умеют вышивать крестиком?

Пример 1.13. Для целых чисел «x больше 5» $\wedge$ «x меньше 7» эквивалентно «$x = 6$».

Таблица истинности

Будем полагать $a = 1$, если высказывание a истинно, и $a = 0$ в противном случае.

Как определены логические операции?

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \to b$	$a \equiv b$	$a \oplus b$
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0

Таблица истинности

Пример 1.14. Докажем следующие законы:

1) $1 \wedge a = a$; **2)** $0 \wedge a = 0$; **3)** $0 \vee a = a$; **4)** $1 \vee a = 1$
5) $\neg(\neg a) = a$; **6)** $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$; **7)** $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$
8) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$; **9)** $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Связь между языками логики и множеств

Пусть $a(x)$ — предикат «число x больше 5», $b(x)$ — «число x меньше 7». Пусть $A = \{x \mid x > 5\}$, $B = \{x \mid x < 7\}$. Тогда предикат «$x \in A$» эквивалентен предикату $a(x)$, а «$x \in B$» эквивалентен $b(x)$.

Более того, предикат «$x \in A \cup B$» эквивалентен $a(x) \vee b(x)$, а «$x \in A \cap B$» эквивалентно $a(x) \wedge b(x)$.

Пример 1.15. Выразим с помощью предикатов $a(x)$ и $b(x)$ и логических связок предикат «$x \in A \setminus B$».

Пример 1.16. Докажем равенство $B \setminus (A \setminus B) = B$.

Семинарская часть

1.1 Пусть в некой деревне живёт брадобрей, который бреет всех жителей деревни, которые не бреются сами, и только их.

Бреет ли брадобрей сам себя?

1.2* Докажите, что $\forall$ натурального n выполнено

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

1.3 Докажем, что все лошади в мире одного цвета.

1.4 x, y, z – целые числа, для которых истинен предикат

$$\neg(x = y) \wedge ((y < x) \to (2z > x)) \wedge ((x < y) \to (x > 2z))$$

Чему равно x, если $z = 7,\ y = 16$?

Семинарская часть

$\boxed{1.5}$ Для какого слова *ложно* высказывание «Первая буква слова гласная $\to$ (Вторая буква слова гласная $\vee$ Последняя буква слова гласная)»?

1) Жара **2)** Орда **3)** Огород **4)** Парад

$\boxed{1.6}$ Докажите, что $a \to b = \neg a \vee b$

$\boxed{1.7}$ Докажите, что для любых множеств A, B, C выполняются равенства

а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; **б)** $B \cup (A \setminus B) = A \cup B$;

в) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

г) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.