



Примеры решения задач.

- 1 Выполнено ли равенство для любых множеств A , B и C ?

$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \Delta C.$$

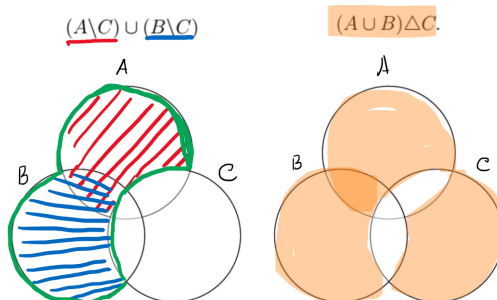
Если равенство верно, то докажите его. Если не выполнено, то приведите контрпример.

Решение. Равенство не выполнено. В качестве контрпримера подходят, например, множества $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$. Для таких множеств элемент 4 множества C содержится в множестве, соответствующей правой части равенства, но не лежит в левой части равенства.

Действительно, $4 \in C$ и $4 \notin (A \cup B) \implies 4 \in (A \cup B) \Delta C$.

Но $4 \notin (A \setminus C)$ и $4 \notin (B \setminus C) \implies 4 \notin (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Комментарий к решению. Понять, как может выглядеть контрпример, можно построив диаграммы Эйлера-Венна.



- 2 Для какого из названий животных ложно высказывание: «Заканчивается на согласную букву \wedge (В слове 7 букв $\rightarrow \neg$ (Третья буква согласная))»?

- 1) верблюд 2) страус 3) кенгуру 4) леопард

Решение. Упростим высказывание. Для этого выведем вспомогательную формулу

$$a \rightarrow \neg b = \neg(a \wedge b). \quad (*)$$

Формула (*) следует из таблицы истинности:

a	b	$a \rightarrow \neg b$	$\neg(a \wedge b)$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

Обозначим высказывания

a =«Заканчивается на согласную букву»,

b =«В слове 7 букв»,

c =«Третья буква согласная».

Получаем формулу $a \wedge (b \rightarrow \neg c)$. Из (*) следует:

$$a \wedge (b \rightarrow \neg c) = a \wedge \neg(b \wedge c).$$

Нам необходимо указать те слова, для которых это высказывание ложно. Высказывание $a \wedge \neg(b \wedge \neg c)$ ложно когда его отрицание $\neg(a \wedge \neg(b \wedge \neg c))$ истинно. Используя законы де Моргана (были на занятии)

$$\neg(a \wedge \neg(b \wedge \neg c)) = \neg a \vee \neg\neg(b \wedge \neg c) = \neg a \vee (b \wedge \neg c).$$

Иными словами, подходят те слова, для которых верно или $\neg a$, или $(b \wedge \neg c)$.

Поскольку $\neg a = \neg$ «Заканчивается на согласную букву» = «Заканчивается на гласную букву», то осталось найти те слова, у которых последняя буква гласная, или те, в которых 7 букв и третья согласная.

Таковыми являются 1) верблюд и 3) кенгуру.

Ответ: 1) верблюд и 3) кенгуру.

3 Пусть $A = \{x \mid x = k^2, k \in \mathbb{Z}\}$ (множество всех целых чисел), $B = \{12, 0, 4, 2, 6, 8, 10\}$, $C = \{3, 1, 9, 7, 5, 11\}$. Для каких $x \in A$ предикат « $\neg(x \in B) \rightarrow (x \in C)$ » обращается в истину?

Решение. Упорядочим множество $B = \{12, 0, 4, 2, 6, 8, 10\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ и $C = \{3, 1, 9, 7, 5, 11\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$. Нетрудно заметить, что B – множество четных чисел в промежутке от 0 до 12, а C – множество нечетных чисел в промежутке от 0 до 12.

Теперь упростим предикат « $\neg(x \in B) \rightarrow (x \in C)$ » = $\neg b(x) \rightarrow c(x)$, где $b(x)$ и $c(x)$ обозначают предикаты $(x \in B)$ и $(x \in C)$.

Согласно формуле (*) из предыдущего задания и законам де Моргана

$$\neg b(x) \rightarrow c(x) = \neg(\neg b(x) \wedge \neg c(x)) = b(x) \vee c(x).$$

Как известно (было на занятии), предикату $b(x) \vee c(x)$ соответствует множество $B \cup C$. Таким образом, осталось найти элементы из A , которые удовлетворяют предикату (вопрос задачи), т.е. лежат в $B \cup C$. Иными словами, найти множество $A \cap (B \cup C)$.

Множество A — полные квадраты (числа, которые являются квадратами целого числа: $0, 1, 4, 9, 16, \dots$). Множество $B \cup C$ — объединение четных и нечетных чисел в промежутке от 0 до 12, т.е. все натуральные числа от 0 до 12. Получаем, что предикату удовлетворяют в точности все квадраты, не превосходящие 12, а именно $0, 1, 4, 9$.

Ответ: $0, 1, 4, 9$.