# Линейная алгебра: лекция 5

**13 апреля 2021**

Домашнее задание.
Кирилл Сетдеков

## Задачи:

1. Найдите жорданову нормальную форму (ЖНФ) следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Решение:**

Найдем собственные значения через $|A-\lambda E|=0$

$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$ = <разложим по 1 строке>= $-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 4 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$ =<разложи

по 2 столбцу 1 определитель и по 1 строке второй определитель> $= \lambda^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} +$

$\lambda \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \lambda^4+\lambda^2-3\lambda^2+1 = \lambda^4-2\lambda^2+1$

Характеристических многочлен $\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2$. Корнем будет являться $\lambda^2=1 \Rightarrow \lambda_1=-1, \lambda_2=1$

Каждый корень кратности 2, поэтому мы не знаем точно форму клетки, в которую каждый входит. Проверим для каждого корня число клеток 1x1, это позволит нам понять, образуют ли они клетки типа $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ если число=2 или вида $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ если число=0.

Проверим для $\lambda_1=-1$:

Нам нужно будет рассчитать 2 ранга:

Для того чтобы вставить $rk(A+E)^2$, посчитаем его.

$$(A+E)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Приведем эту матрицу к ступенчатому виду:

$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ поменяем I и II местами, поделим II и III на 2

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ II + 2 I, III + 3 I, IV - 2 I

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \text{III - 2 III, IV + II}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ В этой матрице 2 главных переменных. Ее ранг $= 2$.

Найдем ранг матрицы $A + E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ III - 3 I, IV + I $\to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \text{III - 4 II, IV + II}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \text{III - 2 IV}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ В этой матрице 3 главных переменных. Ее ранг $= 3$.

$N(-1,1) = rk(A+E)^0 + rk(A+E)^2 - 2rk(A+E) = 4 + 2 - 2*3 = 0$ Для этого корня число жардановых клеток размером 1 равно 0.

Проверим для $\lambda_2 = 1$: Нам нужно будет рассчитать 2 ранга:

Для того чтобы вставить $rk(A-E)^2$, посчитаем его.

$$(A-E)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \\ -6 & -8 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} I \leftrightarrow II$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ -6 & -8 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \text{II + 4 I, III + 6 I, IV + 2 I}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -8 \\ 0 & -8 & 4 & 16 \\ 0 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \text{III + 2 II, IV - 0.5 II}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ 2 главных переменных, Ранг этой матрицы 2.

Найдем ранг матрицы $A - E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ III + 3 I, IV - I

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \text{III + 4 II, IV - II}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \text{IV} + 0.5 \text{ III}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{3 главных переменных, ранг этой матрицы 3}$$

$N(1,1) = rk(A-E)^0 + rk(A-E)^2 - 2rk(A-E) = 4 + 2 - 2 * 3 = 0$ Для этого корня число жардановых клеток размером 1 равно 0.

Следовательно для каждого корня жарданова клетка будет иметь вид $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Расположим их по диагонали матрицы, подставив собственные значения и запишем ответ:

**Ответ: ЖНФ исходной матрицы:** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Найдите длины сторон и внутренние углы треугольника $ABC$ в пространстве $\mathbb{R}^5$ со стандартным скалярным произведением, если координаты вершин треугольника таковы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

**Решение:**
Сначала угол $A$. Найдем вектор сторон, которые его образуют, вычтя координаты точек. $AB = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Длина вектора равна $|v| = \sqrt{(v,v)}$. Длина $|AB| = \sqrt{36} = 6$, длина $|AC| = \sqrt{36} = 6$. Угол найдем через скалярное произведение, деленное на произведение длин векторов. $\cos A = \frac{(AB,AC)}{|AB||AC|} = \frac{18}{36} = 0.5$. $A = \arccos 0.5 = \pi/3 = 60°$

Аналогично найдем угол $B$. $BC = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $BA = -AB = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Длина $|BC| = \sqrt{36} = 6$, длина $|BA| = 6$. Угол найдем через $\cos B = \frac{(BA,BC)}{|BA||BC|} = \frac{18}{36} = 0.5$. $B = 60°$

Аналогично найдем угол $C$. $CA = -AC = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $CB = -BC = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Длина $|CA| = 6$, длина $|CB| = 6$. Угол найдем через $\cos C = \frac{(CA,CB)}{|CA||CB|} = \frac{18}{36} = 0.5$. $C = 60°$

**Ответ: Это правильный треугольник, у него равны стороны и углы: Угол $A = B = C = \pi/3 = 60°$. Стороны равны и имеют длину 6: $|AB| = |BC| =$**

$|AC| = 6$

3. Пусть в $\mathbb{R}^5$ задано стандартное скалярное произведение. И пусть

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 6 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Найдите расстояние от вектора $x$ до подпространства $U = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$, а также проекцию вектора $x$ на $U$.

**Решение:**

сначала найдем вектор нормали $v$, который ортогональный каждому и из векторов в $U$. Для этого нужно решить систему уравнений относительно координат этого вектора, такую, что скалярное произведение $(v, a_i) = 0$ для любого $i \in [1, 2, 3, 4]$.

$$\begin{cases} 7v_1 + 5v_2 + 1v_4 = 0 \\ -4v_1 + v_2 + 5v_3 + 6v_4 = 0 \\ -3v_1 - 2v_2 + 4v_3 - 4v_4 = 0 \\ 3v_1 + v_1 - 3v_5 = 0 \end{cases}$$

Запишем коэффициенты этой системы в матрицу и найдем решение методом Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{III - II, III переместить на 1 строку} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -10 & 0 \\ 7 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{II - 7 I, III } +4 \text{ I, IV - 3 I} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -10 & 0 \\ 0 & 26 & 7 & 71 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -34 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & 30 & -3 \end{pmatrix} \text{-IV - III} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -10 & 0 \\ 0 & 26 & 7 & 71 & 0 \\ 0 & -11 & 1 & -34 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{I } +3 \text{ IV, II -26 IV,III } +11 \text{ IV,} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 111 & -33 & -78 \\ 0 & 0 & -43 & 10 & 33 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{II поменяем IV} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -43 & 10 & 33 \\ 0 & 0 & 111 & -33 & -78 \end{pmatrix} \text{IV } +2 \text{ III} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -43 & 10 & 33 \\ 0 & 0 & 25 & -13 & -12 \end{pmatrix} \text{III*25, IV*43} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1075 & 250 & 825 \\ 0 & 0 & 1075 & -559 & -516 \end{pmatrix} \text{IV+ III} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-13&2&9\\0&1&-4&4&3\\0&0&-1075&250&825\\0&0&1075&-559&-516\end{pmatrix}\text{IV+ III}\rightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-13&2&9\\0&1&-4&4&3\\0&0&-1075&250&825\\0&0&0&-309&309\end{pmatrix}\text{IV:-309}\rightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-13&2&9\\0&1&-4&4&3\\0&0&-1075&250&825\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}\text{I-2*IV,II-4*IV,III-250*IV}\rightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-13&0&11\\0&1&-4&0&7\\0&0&-1075&0&1075\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}\text{III:-1075}\rightarrow$$
$$\begin{pmatrix}1&0&-13&0&11\\0&1&-4&0&7\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}\text{I+13 III, II+4 III}\rightarrow$$
$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-2\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&-1\end{pmatrix}$. Мы можем выписать ответ. $v=\begin{pmatrix}2t\\-3t\\t\\t\\t\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

Расстояние от вектора до подпространства будет длиной проекции x на v. Найдем проекцию x на v: $pr_vx=\frac{(x,v)}{(v,v)}v=\frac{32}{16}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-6\\2\\2\\2\end{pmatrix}$

$$\rho(x,U)=|pr_vx|=\sqrt{64}=8$$

$$pr_Ux=x-pr_vx=\begin{pmatrix}1\\-5\\6\\4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\-6\\2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\\2\\3\end{pmatrix}$$

**Ответ: расстояние от x до U:** $\rho(x,U)=8$ **и проекция x на U:** $pr_Ux=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\\2\\3\end{pmatrix}$

4. Применяя процесс ортогонализации Грама–Шмидта, постройте ортогональный базис линейной оболочки $\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ со стандартным скалярным произведением, где

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}3\\2\\8\\-7\end{pmatrix}$$

**Решение:**

Шаг 1) возьмем $u_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Шаг 2) $u_2 = a_2 - pr_{u_1} a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{-10}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Шаг 3) $u_3 = a_3 - pr_{u_1} a_3 - pr_{u_2} a_3 = a_3 - \frac{(a_3, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1 - \frac{(a_3, u_2)}{(u_2, u_2)} u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ -7 \end{pmatrix} - \frac{30}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} -$

$\frac{-26}{26} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

**Ответ: ортогональный базис линейной оболочки $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ равен:**

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

5. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задано стандартное скалярное произведение, рассмотрим три точки:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ и } P_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

а) Найдите такие векторы $v, p \in \mathbb{R}^3$, что гиперповерхность $L = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid (v, y) = (v, p)\}$ проходит через точки $P_1, P_2, P_3$.

**Решение:**

Запишем векторы, которые лежат между точками попарно.

$p_1 = P_1P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$p_2 = P_1P_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Найдем вектор $v$, который будет нормальный $p_1$ и $p_2$ Поступим аналогично заданию 3 и решим методом Гаусса

$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ I:-2 $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ II-5 II $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ из этих уравнений выразим координаты коллинеарных векторов, нормальных к поверхности.

$$v = \begin{pmatrix} 4t \\ -5t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Подставим, например $P_1 \rightarrow (v, y)$, получим $(v, y) = -16$. Мы хотим найти такой вектор сдвига, что $(v, p) = -16$. $(v, v) = 45 \Rightarrow p = -\frac{16}{45} v = \begin{pmatrix} -\frac{64}{45} \\ \frac{80}{45} \\ -\frac{32}{45} \end{pmatrix}$

**Ответ:** $p = \begin{pmatrix} -\frac{64}{45} \\ \frac{80}{45} \\ -\frac{32}{45} \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

б) Выясните, на каком расстоянии от гиперповерхности $L$ лежат векторы

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ и } w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

По одну ли сторону от гиперповерхности $L$ они лежат?

**Решение:**

Посчитаем скалярные произведения

$$(w_1, v) = -1 > -16 = (p, v)$$

$$(w_2, v) = -22 < -16 = (p, v)$$

Знак результаты находятся по разные стороны от -16 $\Rightarrow$ - эти векторы лежат по разные стороны от гиперплоскости

**Ответ: вектора $w_1, w_2$ лежат по разные стороны гиперплоскости из условия**

6. Методом наименьших квадратов найдите приближенное решение следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x - z = 1 \\ y + z = -1 \\ x - y + z = 0 \\ x - z = -1 \end{cases}$$

**Решение:**

Запишем эту систему уравнений в матричной форме $AX = b$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Приближенное решение будет равно

$$\widehat{X} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^T A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 5/9 & 1/18 \\ 1/9 & 1/18 & 11/36 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^T A\right)^{-1} A^T = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 & 4 \\ 6 & 22 & -14 & 2 \\ -3 & 13 & 13 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{X} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 & 4 \\ 6 & 22 & -14 & 2 \\ -3 & 13 & 13 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

**Ответ: Приближенное решение системы уравнений** $\widehat{x} = 0, \widehat{y} = -\frac{1}{2}, \widehat{z} = -\frac{1}{4}$