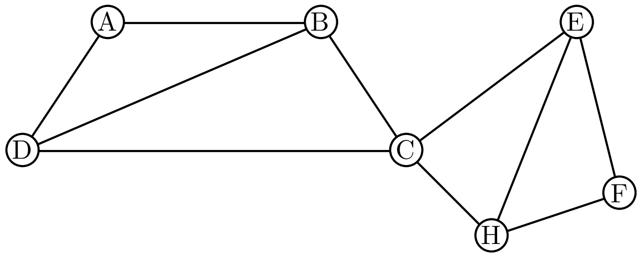
Дискретная математика: неориентированные графы.

31 января 2021

Домашнее задание №3.

Кирилл Сетдеков

Всюду ниже рассматриваются только графы **без петель** и **кратных ребер**.



$\boxed{1}$ Граф G изображен на рисунке выше.

а) Найдите максимальную длину простого цикла в графе G. Укажите все различные простые циклы максимальной длины.

Ответ: Максимальная длина простого цикла = 4. Цикл из вершин (A, B, C, D, A) **и** (C, E, F, H, C)**. Каждому циклу соответствует 8 путей (начинающиеся в каждой из 4 вершин по часовой стрелке и против часовой стрелки), всего 16 путей**

б) Верно ли, что если в графе G удалить любое ребро, то из любой его вершины можно будет добраться до любой? При положительном ответе приведите обоснование, при отрицательном — укажите ребро, которое можно удалить, и вершины, между которыми не будет пути.

Решение:

Заметим, что в этом графе есть 4 цикла длиной 3 состоящие из 3 вершин: $(A, B, D, A), (B, C, D, B), (C, E, H, C), (E, F, H, E)$. Каждое из ребер графа принадлежит к одному из этих циклов. Исходный граф G - имеет одну компоненту связности и можно найти путь между любой парой вершин.

Предположим, что мы удалили случайное ребро. Это ребро принадлежало одному из циклов, указанных выше. Рассмотрим все пары вершин $\{ v, u \}$. Так как мы могли построить путь от каждой вершины к каждой, $\forall v, u \in G, v \sim u$ Для каждого возможного пути после удаления случайного ребра верно или:

1) Путь от v к u не содержал удаленное ребро. Следовательно эта пара вершин достижима друг от друга $v \sim u$

2) Путь от v к u содержал удаленное ребро $\{ r_1, r_2 \}$. Тогда для цикла, который содержал вершины r_1, r_2 пройдем в другую сторону по циклю и построим путь от r_1 до r_2. Заменим таким образом часть удаленного пути. Следовательно эта пара вершин также достижима друг от друга $v \sim u$

Мы получили из 1) и 2) что $\forall v, u \in G, v \sim u$, что означает что граф остался связным.

Ответ: Да

в) Какое минимальное количество рёбер необходимо удалить из графа G, чтобы он стал несвязным?

Решение:

В прошлом пункте мы показали, что для 1 ребра - граф останется связным. Для случая 2 ребра можно привести пример: удалим ребро $\{ B, C \}$ и $\{ D, C \}$. В графе останется 2 компоненты связности.

Ответ: 2 ребра

$\boxed{2}$ В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги в другие города этого государства. Сколько всего дорог в государстве?

Решение:
Предположим, что мы нарисовали граф дорог, где каждый город - вершина, а дорога - ребро. Число вершин $|V| = 100$, а степень каждой вершины $= 4$. Следовательно сумма степеней всех вершин:

$$\sum_{v_i \in V} deg(v_i) = 4 \times 100 = 400 = 2|E|$$

где $|E|$ - число ребер.

$$400 = 2|E|$$

$$|E| = 200$$

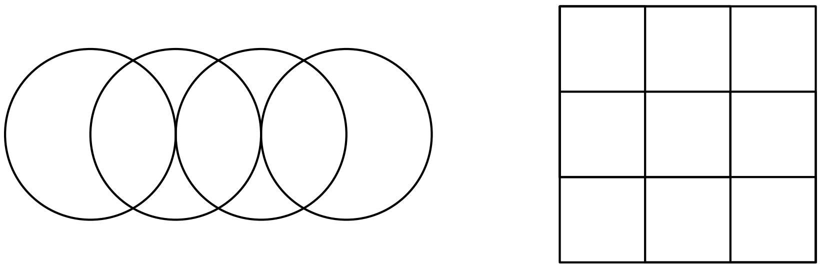
Так как дороги - ребра, то число дорог равно числу ребер.

Ответ: 200 дорог

$\boxed{3}$ Можно ли нарисовать картинки на рисунке ниже, не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу?

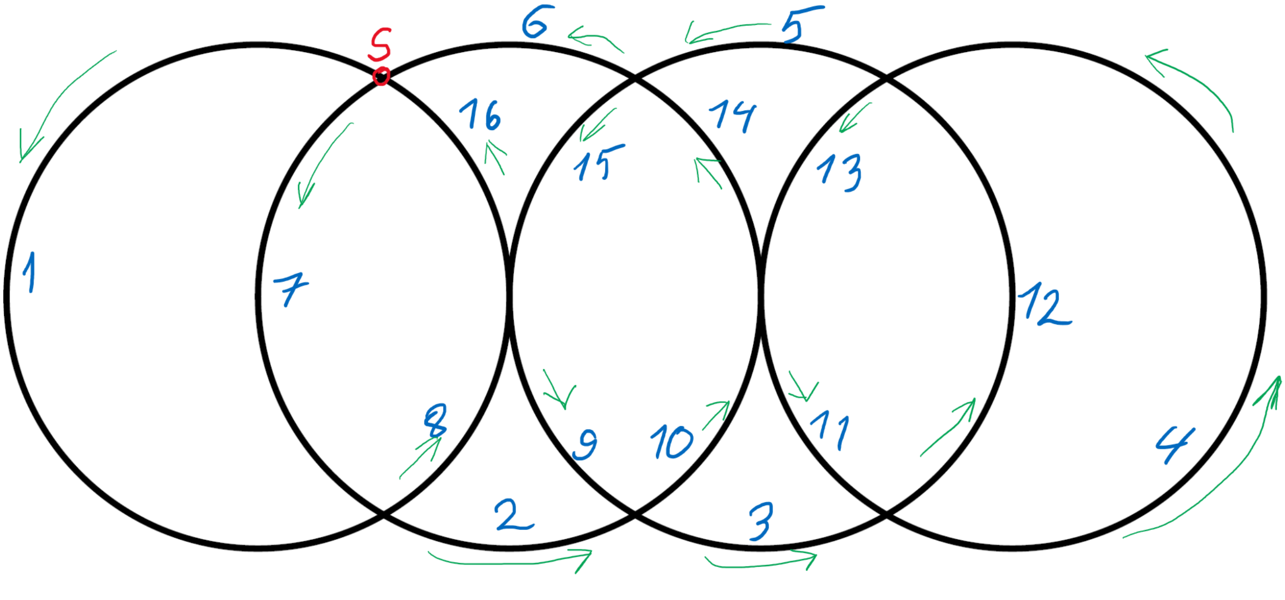
Если можно, то покажите, как это сделать.

Если нельзя, то докажите, что это сделать невозможно.



а) б)

а) Решение:
Начнем с точки S. Обозначим каждую кривую между точками пересечения числом. Из точки S обведем фигуру по периметру, проходя по кривым в таком порядке $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6$. После этого проведем линию по кривым $7 \to 8 \to 9 \to 10 \to 11 \to 12$. Далее вернемся в точку S пройдя по кривым $13 \to 14 \to 15 \to 16$



Ответ: Можно, решение приведено на рисунке выше.

б) Решение:
Воспользуемся теоремой о существовании эйлерова цикла.

В графе G = (V,E) существует эйлеров цикл $\Leftrightarrow$ все вершины имеют четную степень.

Если эйлеров цикл не существует $\Rightarrow$ нельзя построить путь, который пройдет по каждому ребру 1 раз и вернется в исходную вершину $\Rightarrow$ нельзя нарисовать картинки на рисунке ниже, не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу

Представим что на картинке изображен граф, где 16 вершин, находящихся на пересечении вертикальных и горизонтальных линий.

Запишем их степени в матрицу, где положение числа соответствует положению вершины:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Среди вершин есть такие, где $deg(v) = 3 \Rightarrow$ в графе, который мы представили не существует эйлеров цикл $\Rightarrow$ нельзя нарисовать картинки на рисунке ниже, не отрывая карандаша от бумаги и проходя по каждой линии по одному разу

Ответ: Нельзя

$\boxed{4}$ В дереве на 2020 вершинах ровно три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?

Решение:

В нашем дереве $|V| = 2020$. Так как это дерево, в нем $|E| = |V| - 1 = 2019$ ребер. Сумма степеней вершин для графа

$$\sum_{v_i \in V} deg(v_i) = 2|E| = 4038$$

Согласно условию - $N(deg(v_i) = 1) = 3$ число вершин со степенью 1. Для дерева с 3 листьями, максимальная степень вершин меньше или равна 3.

Начнем решать задачу, предположив, что в дереве есть вершины со степенью 1, 2 и 3.

Обозначим как x и y число вершин со степенью 3 и 2.

$$N(deg(v_i) = 3) = x; N(deg(v_i) = 2) = y$$

. Составим систему уравнений.

$$\begin{cases} 3 + 2y + 3x = 4038 \\ x + y + 3 = 2020 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 3x = 4035 \\ y = 2017 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2017 - x) + 3x = 4035 \\ y = 2017 - x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4034 - 2x + 3x = 4035 \\ y = 2017 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2016 \end{cases}$$

Мы получили 1 вершину со степенью 3 и 2016 вершин со степенью 2.

Предположим, что есть вершины со степенью

Ответ: Одна вершина

$\boxed{5}$ У некоторого графа на 6 вершинах ровно 11 ребер. Докажите, что этот граф связен.

Решение:

Известно, что для графа с n вершинами, максимально число ребер для несвязного графа $= \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Для нашего графа $n = |V| = 6$:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

Такой несвязный граф будет состоять из двух компонент связности, в одной 1 вершина и 0 ребер, во второй - 5 вершин и 10 ребер. Во второй половине графа - компонента связности является полной так как в ней все вершины соединены между собой.

Предположим, что мы взяли несвязный граф с 10 ребрами и 6 вершинами, описанный в абзаце выше и смогли добавить еще одно ребро и получить граф, который не связен. Возможно 1 из трех вариантов:

1) Мы добавили ребро между компонентами связности - мы получили граф с одной компонентой связности - противоречие с предположением

2) Мы добавили ребро в компоненту связности из 1 вершины - так как мы рассматриваем граф без петель - мы не смогли добавить в эту компоненту ребро - противоречие с предположением

3) Мы добавили ребро в компоненту связности из 5 вершины - эта компонента связности уже полный граф - мы не смогли добавить в эту компоненту ребро - противоречие с предположением

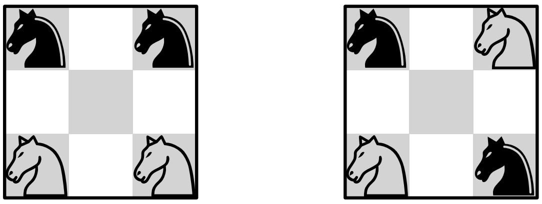
Следовательно предположение "мы взяли несвязный граф с 10 ребрами и 6 вершинами и смогли добавить еще одно ребро и получить граф, который не связен"не верно $\Rightarrow$ граф из 6 вершин и 10 ребер - связан

Ответ: Граф связан

$\boxed{\mathbf{6}}$ Можно ли за несколько ходов (по шахматным правилам и не выходя за пределы доски 3×3) поставить коней так, чтобы из расположения на левой картинке получилось расположение коней на правой?

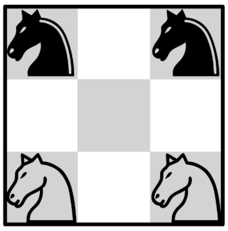
Если можно, то укажите последовательность шагов.

Если нельзя, то докажите, что это сделать невозможно.

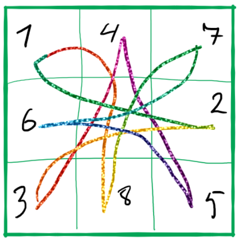


Решение:

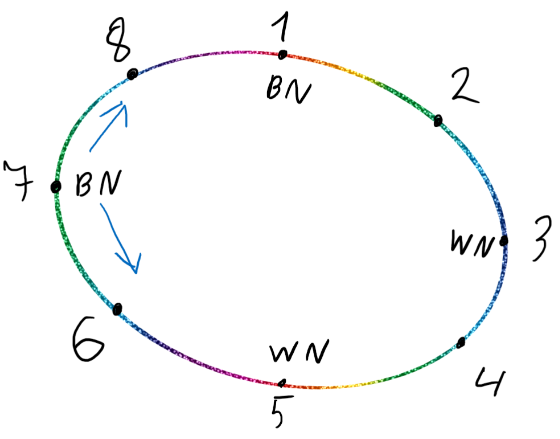
1)



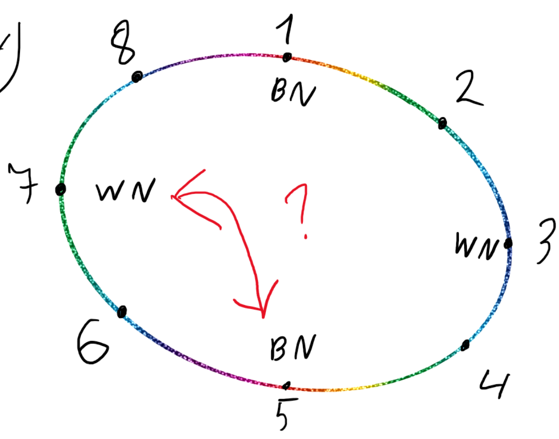
2)



3)



4)



Еще раз посмотрим на исходное положение коней 1). Предположим, что у нас есть только один конь в верхнем левом углу доски. На 2) нарисуем все возможные положения, которые он может занять, ходя конем. Всего 8 позиций, после чего он приходит на исходную точку.

Нарисуем круговой маршрут, который может пройти черный конь из верхнего левого угла и отметим номера позиций на 3). Отметим на этом маршруте белых коней как WN, а черных как BN.

Заметим, что у каждого коня в исходном положении - только 2 возможных хода (например из 7 позиции в 8 или 6).

Нарисуем на круговом маршруте финальное положение коней, которое спрашивается в задании. Это график 4). Он отличается от исходного 3) тем, что конь в положении 7 и 5 поменяны местами.

Так как кони перемещаясь из конфигурации 3) по круговому маршруту не могут занимать вдвоем 1 положение и не могут перемещаться только на 1 соседнюю позицию, для них всегда будет сохранятся соотношение:

а) Для каждого BN спереди и сзади по ходу движения есть 1 BN и 1 WN

б) Для каждого WN спереди и сзади по ходу движения есть 1 BN и 1 WN

При этом а) и б) будут верны как бы мы не перемещали коней.

В требуемой позиции:

в) для каждого WN - спереди и сзади есть 2 BN

г) для каждого BN - спереди и сзади есть 2 WN.

в) и г) противоречат а) и б) $\Rightarrow$ нельзя перейти от одной позиции к другой

Ответ: Нельзя, доказательство выше