# Přednáška 3.10.2023

1. Úvod

Připomenutí: Riemannův, Newtonův integrál, geometrický význam plochy pod grafem.

Ne všechny funkce jsou ”integrovatelné”, ne všechny množiny ”měřitelné”.

*úplnost* : Na prostoru Riemannovsky integrovatelných funkcí na untervalu *I* definujme skalární součin vztahem *f, g* := *I f g*. Indukovaný metrický prostor není úplný.

∫⟨ ⟩ ·

*spočetná aditivita*: V teorii pravděpodobnosti potřebujeme, aby pravděpodob- nostní míra byla spočetňe aditivní, tedy aby pro po dvou disjunktní náhodné jevy *A*1*, A*2*, . . .* platilo Pr( *i Ai*) = *i* Pr(*Ai*). Toto by pro míru definovanou pomocí Riemannova integrálu neplatilo.

S Σ

Obecná konstrukce: nejprve míra (množinová funkce), z ní je odvozen in- tegrál (aproximace po částech konstantními funkcemi).

Vlastnosti, které chceme po ”míře”:

(1) *µ*(∅) = 0, *µ*(*A*) ≥ 0 ∀*A*,

S Σ

* 1. *µ*( *n An*) = *n µ*(*An*) pro po dvou disjunktní množiny *A*1*, A*2*, . . .*.

Problém - které množiny jsou ”měřitelné”, neboli D*µ* =?

Věta 1.1. *Neexistuje µ* : P(R) → [0*,* ∞] *splňující (1), (2) a*

* 1. *µ*(*I*) = *délka*(*I*) *pro každý interval I,*

*(4) µ*(*A* + *x*) = *µ*(*A*)*, A* ⊂ R*, x* ∈ R*.*

Důkaz: Předpokládejme pro spor, že takové zobrazení *µ* existuje. Uvažujme ekvivalenci na R

*x* ∼ *y* ⇐⇒ *x* − *y* ∈ Q*.*

Množina *A* ⊂ [0*,* 1] necht’ obsahuje právě jeden prvek z každé třídy ekvivalence

∼ (používáme axiom výběru!). Bud’ dále Q ∩ [−1*,* 1] = {*q*1*, q*2*, . . .* } očíslování racionálních čísel v intervalu [−1*,* 1]. Nyní platí:

S

(a) ∞*i*=1(*A* + *qi*) ⊃ [0*,* 1] (protože pro každý *x* ∈ [0*,* 1] existuje *a* ∈ *A* takové, že *x* − *a* ∈ Q ∩ [−1*,* 1], tedy *x* − *a* = *qi* pro ňejaké *i*, čili *x* ∈ *A* + *qi*),

S

(b) ∞*i*=1(*A* + *qi*) ⊂ [−1*,* 2],

(c) množiny *A* + *qi* jsou po dvou disjunktní (*i* = 1*,* 2*, . . .* ) (kdyby ne, pak by

*A* obsahovala dva ekvivalentní prvky).

Z (2), (4) a (c) plyne, že *µ*(S∞*i*=1(*A* + *qi*)) = ∞ jakmileS*µ*(*A*) *>* 0, což by bylo

v rozporu s (b). Mus´ı tedy by´t *µ*(*A*) = 0. Pak ale i *µ*(

∞*i*=1(*A* + *qi*)) = 0, coˇz

podle (a) a (3) znamen´a 0 *> µ*([0*,* 1]) = 1, tedy spor. □

# Prostor s mírou

Bud’ *X* libovolná neprázdná množina. Symbolem (*X*) = *A* : *A X* značíme potenční množinu množiny *X*.

P { ⊂ }

Definice 2.1. A ⊂ P(*X*) je *σ-algebra* na *X*, jestliže

1. ∅*, X* ∈ A;
2. *A* ∈ A =⇒ *X* \ *A* ∈ A;

S

1. *Ai* ∈ A, *i* ∈ N =⇒ *i Ai* ∈ A.

A ⊂ P(*X*) je *algebra*, splňuje-li (1), (2) a (iii’) *A, B* ∈ A =⇒ *A* ∪ *B* ∈ A.

Pozn.: Algebra je uzavřená na konečné množinové operace (průnik, sjedno- cení, rozdíl), *σ*-algebra na spočetné množinové operace.

## Příklady:

* {∅*, X*}, P(*X*) jsou *σ*-algebry na *X*.
* A = {∅*,* {1}*,* {2*,* 3}*,* {1*,* 2*,* 3}} je *σ*-algebra na *X* = {1*,* 2*,* 3}.

• = *A* N : *A* konečná nebo N *A* konečná je algebra na N, ale není to *σ*-algebra.

A { ⊂ \ }

Věta 2.1. *Bud’te* A*α* : T*α* ∈ *I σ-algebry na množiňe X, přitom I je libovolná*

*indexov´a mnoˇzina. Pak*

*α*∈*I* A*α je σ-algebra na X.*

Důkaz: Plyne jednoduše z definice. □

Důsledek 2.2. *Pro libovolný množinový systém* S ⊂ P(*X*) *existuje nejmeňsí*

*σ-algebra σ*S *obsahující* S*.*

Důkaz: Položme

*σ*S := \{A ⊂ P(*X*) : S ⊂ A*,* A je *σ*-algebra}*.*

□

Definice 2.2. Bud’ (*X, ρ*) metrický prostor a G systém všech otevřených pod- množin *X*. Pak B(*X*) := *σ*G nazýváme *borelovskou σ-algebrou* na *X*.

Příklad: Následující množinové systémy spadají do borelovské *σ*-algebry:

* F - systém uzavřených množin
* G*δ* - spočetné průniky otevřených množin
* F*σ* - spočetná sjednocení uzavřených množin
* G*δσ* - spočetná sjednocení množin z G*δ*
* *. . .*

Pozn.: Je obtížné popsat třídu borelovských množin konstruktivňe (je třeba transfinitní indukce).

Pozn.: Ne všechny množiny jsou borelovské. Platí dokonce

card B(R) = c *<* 2c = card P(R)*,* tedy neborelovských podmnožin R je více než borelovských.

Definice 2.3. (*X,* A) je *měřitelný prostor*, jestliže *X* je neprázdná množina a

A je *σ*-algebra na *X*.

*µ* je *míra* na (*X,* A), jestliže *µ* : A → [0*,* ∞] splňuje

(a) *µ*(∅) = 0,

S Σ∈ A ∈ ⇒

(b) *Ai* po dvou disjunktní (*i* N) = *µ*( *i Ai*) = *i µ*(*Ai*) (*σ*- aditivita).

Trojici (*X,* A*, µ*) nazýváme *prostor s mírou*.

Pozn.: Z vlastnosti (b) a z nezápornosti plyne monotonie míry: *A, B* ∈ A,

*A* ⊂ *B* =⇒ *µ*(*A*) ≤ *µ*(*B*).

## Příklady:

* *µ*(*A*) = 0 ∀*A* ∈ P(*X*) - nulová míra (*µ* = 0)
* pro *x* ∈ *X* pevný položme

(

*δ* (*A*) = 0 *x* ̸∈ *A, .*

*x*

1 *x* ∈ *A.*

*δx* se nazývá *Diracova míra* v bodě *x*.

* Míra

(

*µ*(*A*) = card (*A*) *A* ⊂ *X* konečná*,*

∞ *A* ⊂ *X* nekonečná*.*

se nazývá *aritmetická míra* na *X*.

Věta 2.3 (Spojitost míry). *Bud’* (*X,* A*, µ*) *prostor s mírou, Ai* ∈ A*, i* ∈ N*.*

*1. A*1 ⊂ *A*2 ⊂ · · · =⇒ *µ*(*Ai*) ↗ *µ*(S*i Ai*)*,*

*2. µ*(*A*1) *<* ∞*, A*1 ⊃ *A*2 ⊃ · · · =⇒ *µ*(*Ai*) ↘ *µ*(T*i Ai*)*.*

**Důkaz:** 1. Nechť *Ai* ∈ A, *Ai* ↗ *A*. Pak *A* = *A*1 ∪ (*A*2 \ *A*1) ∪ (*A*Σ3 \ *A*2) ∪ *. . .*

*Aj*−1). Zároveň

*i* → ∞.

*µ*(*Ai*) = *µ*(*A*1) + Σ*i*

*µ*(*Aj* \ *Aj*−1), takže *µ*(*Ai*) ↗ *µ*(*A*),

2. Necht’ *Ai* ∈ A, *Ai* ↘ *A*, *µ*(*A*1) *<* ∞. Položme *Bi* := *A*1 \ *Ai*, *i* ∈ N. Zřejmě platí *Bi* ↗ *B* := *A*1 \ *A*, tedy *µ*(*A*1) − *µ*(*Ai*) = *µ*(*Bi*) ↗ *µ*(*B*) = *µ*(*A*1) − *µ*(*A*), a odečtením výrazu *µ*(*A*1) *<* ∞ dostaneme *µ*(*Ai*) ↘ *µ*(*A*). □

*j*=2

je disjunktn´ı rozklad na mˇeˇriteln´e mnoˇziny, tedy *µ*(*A*) = *µ*(*A*1) +

∞*j*=2 *µ*(*Aj* \

# Přednáška 10.10.2023

Definice 2.4. Bud’ (*X, , µ*) prostor s mírou. Rěkneme, že *N X* je *nulová množina*, jestliže existuje *A* taková, že *µ*(*A*) = 0 a *N A*. Symbolem značíme systém všech nulových množin. dále značíme

∈ A ⊂ N

A ⊂

A0 := *σ*(A ∪ N)

*zúplňenou σ-algebru* A vzhledem k míře *µ*.

Pozn: je *σ-ideál*, tedy systém množin uzavřený na podmnožiny a spočetná sjednocení.

N

Věta 2.4 (Zúplňení míry). *Je dán prostor s mírou* (*X,* A*, µ*)*. Pak platí:*

1. 0 = *B X* : *A , B A (symbolem značíme symetrickou diferenci množin).*

A { ⊂ ∃ ∈ A △ ∈ N} △

1. *Míru µ lze jednoznačňe rozšířit na prostor* (*X,* A0) *(značíme opět µ).*
2. *V prostoru* (*X,* A0*, µ*) *jsou všechny nulové množiny měřitelné.*

Důkaz: 1. Označme A0 := {*B* ⊂ *X* : ∃*A* ∈ A*, B*△*A* ∈ N}. Ukážeme nejprve, že A0 je *σ*-algebra. Zřejmě platí ∅*, X* ∈ A0. Je-li *B* ∈ A0, pak *A*△*B* ∈ N pro ňejakou *A* ∈ A, a tedy také *X* \ *B* ∈ A0, protože (*X* \ *B*)△(*X* \ *A*) = *B*△*A* ∈ N a *X* \ *A* ∈ A.SDále, jsou-li *Bi* ∈ A0,S*i* ∈ N, paSk *Bi*△*Ai* S∈ N pro ňejaké *Ai* ∈ A,

tedy *σ*-algebra. Pak ale ze zřejmé inkluze A ∪ N ⊂ A0 plyne A0 = *σ*(A ∪ N) ⊂

*σ*A0 = A0. Opačná inkluze je snadná: je-li *B* ∈ A0, pak *B*△*A* ∈ N pro ňejakou

a tedy tak´e

*i Bi* ∈ A0, protoˇze (

*i Bi*)△(

*i Ai*) ⊂

*i*(*Bi*△*Ai*) ∈ N. A0 je

*A* ∈ A, tedy *B* = *A* ∪ (*B* \ *A*) \ (*A* \ *B*), přitom *B* \ *A* i *A* \ *B* leží v N, tedy nutňe *B* ∈ A0.

1. Je-li *B* 0 a *A* taková, že *B A* , položíme *µ*(*B*) := *µ*(*A*).

∈ A ∈ A △ ∈ N

Nejprve musíme ukázat, že toto rozšíření je korektní, tedy že nezávisí na volbě

*A*. Je-li *A*′ jiná množina s vlastností *B A*′ , pak z inkluzí *A A*′ (*A B*) (*B A*′) a *A*′ *A* (*A*′ *B*) (*B A*) plyne *µ*(*A A*′) = *µ*(*A*′ *A*) = 0, a tedy *µ*(*A*) = *µ*(*A*′). Definice je tedy korektní. Ukážeme, že takto dodefinovaná množinová funkce *µ* je *σ*-aditivní. Bud’ (*Bi*) posloupnost po dvou disjunktních

S

∪ \ ∈ N \ ⊂ \ ∪ \ ∈ N \ \

∈ A △ ∈ N \ ⊂ \

mnoˇzin z A0, oznaˇcme *B* := ∞*i*=1 *Bi*, a bud’te *Ai* ∈ A takov´e, ˇze S*Bi*△*Ai* ∈ N.

(*Ci*) je posloupnost po dvou disjunktních množin z A, tedy *µ*(*C*) = ∞*i*=1 *µ*(*Ci*). Protože množiny *Ci*△*Bi* a *C*△*B* jsoΣu nulové, platí *µ*(*Bi*) = *µ*(*Ci*), *i* ∈ N, a

Σ

Poloˇzme *C*1 := *A*1, *Ci* := *Ai* \ (*A*1 ∪ · · · ∪ *Ai*−1), *i* = 2*,* 3 *. . .* , *C* :=

∞*i*=1 *Ci*. Pak

*µ*(*B*) = *µ*(*C*), a tedy tak´e *µ*(*B*) =

aditivn´ı na A0, a je to tedy m´ıra.

*i*∞=1 *µ*(*Bi*). T´ım je dok´az´ano, ˇze *µ* je *σ*-

1. Bud’ *M* ⊂ *X* nulová v (*X,* A0*, µ*). Ukážeme, že *M* ∈ N (tedy že *M* je nulová i v původním prostoru (*X,* A*, µ*)), a tedy *M* ∈ A0. K množiňe *M* existuje *B* ∈ A0, *M* ⊂ *B*, *µ*(*B*) = 0. Z definice rozšířené míry *µ* dále existuje *A* ∈ A taková, že *µ*(*A*) = 0 a *B* \ *A* ∈ N, tedy existuje *N* ∈ A taková, že *µ*(*N* ) = 0 a *B* \ *A* ⊂ *N* . Pak ale *M* ⊂ *B* ⊂ *A* ∪ *N* ∈ A a *µ*(*A* ∪ *N* ) = 0, tedy *M* ∈ N. □

Definice 2.5. (i) *µ* je *borelovská míra* na metrickém prostoru *X*, je-li to míra na (*X,* B(*X*)).

1. Míra *µ* na (*X,* A) je *konečná*, jestliže *µ*(*X*) *<* ∞.
2. Míra *µ* na (*X,* A) je *σ-konečná*, jestliže existují *En* ∈ A takové, že *X* =

S

*n En* a *µ*(*En*) *<* ∞ pro každé *n* ∈ N.

Věta 2.5 (Lebesgueova míra). *Existuje právě jedna borelovská míra λn na* R*n*

*taková, že pro všechna* −∞ *< ai < bi <* ∞*, i* = 1*, . . . , n, platí*

*λn*([*a*1*, b*1] × · · · × [*an, bn*]) = (*b*1 − *a*1) · *. . .* · (*bn* − *an*)*.*

*Lebesgueova míra je regulrární v následujícím smyslu. Necht’* B*n značí zúplňenou borelovskou σ-algebru* B*n* := B(R*n*)*. Pak pro každou E* ∈ B*n a pro každé ε >* 0 *existují otevřená množina G a uzavřená množina F takové, že F* ⊂ *E* ⊂ *G a λn*(*G* \ *F* ) *< ε.*

0

0

[Důkaz bude v navazující přednášce.]

## Poznámky:

1. Lebesgueova míra je zřejmě *σ*-konečná.
2. Platí B*n* ⊊ B*n* ⊊ P(R*n*) (bez důkazu).

0

# Měřitelné funkce

Věta 3.1. *Uvažujme zobrazení f* : *X* → *Y .*

1. *Je-li* B *σ-algebra na Y , pak f* −1B := {*f* −1(*B*) : *B* ∈ B} *je σ-algebra na*

*X.*

1. *Pro libovolný množinový systém* S ⊂ P(*Y* ) *platí σ*(*f* −1S) = *f* −1(*σ*S)*.*

Důkaz: (i) se snadno dokáže s využitím faktu, že vzor množiny komutuje s množSinovými operacemi. Konkrétňe platí *X*\*f* −1(*B*) = *f* −1(*Y* \*B*) a *i f* −1(*Bi*) =

S

S

*f* −1(

*i Bi*), kdykoliv *B, B*1*, B*2*,* · · · ⊂ *Y* .

S ⊂ S S ⊂ S S

(ii). Zřejmě *f* −1 *f* −1(*σ* ), a tedy *σ*(*f* −1 ) *σ*(*f* −1(*σ* )) = *f* −1(*σ* ),

protože *f* −1(*σ* ) je *σ*-algebra podle části (i). Pro důkaz opačné inkluze označme

množinový systém

A := {*B* ⊂ *Y* : *f* −1(*B*) ∈ *σ*(*f* −1S)}*.*

Je snadné ověřit, že A je *σ*-algebra. Dále zřejmě S ⊂ A, a tedy také *σ*S ⊂ A, tudíž *f* −1(*σ*S) ⊂ *f* −1A ⊂ *σ*(*f* −1S), kde poslední inkluze plyne přímo z definice systému A. □

Definice 3.1. Bud’te (*X,* ) a (*Y,* ) měřitelné prostory. Zobrazení *f* : *X Y* je *měřitelné* (vzhledem k *,* ), jestliže *f* −1 . Píšeme pak *f* : (*X,* ) (*Y,* ). Je-li ňekterý z prostorů *X, Y* metrickým prostorem, pak za příslušnou *σ*-algebru bereme borelovskou *σ*-algebru. Měřitelné zobrazení mezi dvěma me- trickými prostory nazýváme *borelovsky měřitelné* nebo stručňe *borelovské*.

B

A B B ⊂ A A →

A B →

## Pozn.:

1. Složení dvou měřitelných zobrazení je zřejmě měřitelné.
2. Jsou-li (*X,* A) a (*Y,* B) měřitelné prostory a S ⊂ B libovolný generátor *σ*-algebry B (tzn. platí-li *σ*S = B), pak *f* : *X* → *Y* je měřitelné právě tehdy, když *f* −1S ⊂ A. (Plyne z Věty 3.1.)
3. Je-li (*X,* A) měřitelný prostor a *Y* metrický prostor, pak zobrazení *f* : *X* → *Y* je měřitelné právě tehdy, když *f* −1(*G*) ∈ A pro každou otevřenou množinu *G* ⊂ *Y* .

Tvrzení 3.2. *Každé spojité zobrazení mezi dvěma metrickými prostory je bo- relovsky měřitelné.*

Důkaz: Plyne přímo z předchozí poznámky a z faktu, že *f* je spojité právě tehdy, když vzory otevřených množin jsou otevřené. □

Věta 3.3. *Borelovská σ-algebra* B*n* := B(R*n*) *je generovaná*

1. *otevřenými kvádry (tj. množinami* (*a*1*, b*1) × · · · × (*an, bn*)*,* −∞ *< ai < bi <* ∞*, i* = 1*, . . . , n;*

*2. systémem* S = {(−∞*, a*1) × *. . .* × (−∞*, an*) : *a*1*, . . . , an* ∈ R}*.*

*Speciálňe,* B1 = *σ*{(−∞*, a*) : *a* ∈ R}*.*

Důkaz: 1. Plyne přímo z faktu, že každou otevřenou množinu *G* R*n* lze vyjádřit jako spočetné sjednocení otevřených kvádrů. Skutečňe, označíme-li symbolem systém všech otevřených kvádrů v R*n* s racionálními krajními body, pak lze psát

⊂

Q

[

*G* = {*I* ∈ Q : *I* ⊂ *G*}*.*

K ověření vlastnosti 2. stačí ukázat, že každý otevřený kvádr leží v *σ* . Ověříme tuto vlastnost v R2 (případ obecné dimenze je zcela analogický). Pro otevřený kvádr *I* = (*a*1*, b*1) × (*a*2*, b*2) můžeme psát

S

*I* = ((−∞*, b*1) × (−∞*, b*2)) \ ((−∞*, a*1] × (−∞*, b*2)) \ ((−∞*, b*1) × (−∞*, a*2])*,*

přitom

∞

\ 1

(−∞*, a*1] × (−∞*, b*2) = (−∞*, a*1 + *i*− ) × (−∞*, b*2) ∈ *σ*S*,*

*i*=1

a analogicky pro (−∞*, b*1) × (−∞*, a*2]. □

Pozn.: Jako generátor *n* lze vzít rovňež uzavřené či polouzavřené kvádry. Navíc stačí vzít pouze kvádry s racionálními koncovými body.

B

Důsledek 3.4. *Funkce f* : (*X,* A) → R *je měřitelná právě tehdy, když množina*

{*f < a*} := {*x* ∈ *X* : *f* (*x*) *< a*} ∈ A *pro všechna a* ∈ R *(případňe stačí pro všechna a* ∈ Q*).*

Věta 3.5. *1. Jsou-li f* : (*X,* A) → R*n a g* : (*X,* A) → R*m měřitelná zobra- zení, pak i* (*f, g*) : (*X,* A) → R*n*+*m je měřitelné.*

1. *Jsou-li f, g* : (*X,* A) → R*n měřitelná, jsou i f* + *g a f* − *g měřitelná.*
2. *Jsou-li f, g* : (*X,* A) → R *měřitelné funkce, jsou i f* · *g,* max{*f, g*} *a*

min{*f, g*} *měřitelné.*

Důkaz: 1. Každý otevřený kvádr *I* ⊂ R*n*+*m* je tvaru *I* = *U* × *V* , kde *U* ⊂ R*n*,

*V* ⊂ R*m* jsou otevřené kvádry. Pak platí

(*f, g*)−1(*U* × *V* ) = *f* −1(*U* ) ∩ *g*−1(*V* ) ∈ A*,*

a tedy (*f, g*) je měřitelné podle Věty 3.3.

2. Měřitelnost *f* + *g* plyne z toho, že součet funkcí můžeme psát jako složení

*f* + *g* = + ◦ (*f, g*)*,*

kde + : (*x, y*) *x*+*y* je operace sčítání v R*n* a (*f, g*)(*x*) = (*f* (*x*)*, g*(*x*)) je spojení zobrazení z prvního tvrzení. Měřitelnost složení pak plyne z měřitelnosti obou komponent. Měřitelnost zbývajících zobrazení (funkcí) se ukáže analogicky. □

›→

# Přednáška 17.10.2023

Důsledek 3.6. *Jsou-li f, g* : (*X,* A) → R *měřitelné funkce, pak leží množiny*

{*f* ≤ *g*}*,* {*f < g*} *a* {*f* = *g*} *v σ-algebře* A*.*

Budeme značit R∗ := R *,* , ∗ := *σ*( 1 *,* ). ∗ je rovňež generována intervaly, např.

∪ {−∞ ∞} B B ∪ {{−∞} {∞}} B

B∗ = *σ*{[−∞*, b*] : *b* ∈ R∗}*,*

a předchozí tvrzení pro reálné měřitelné funkce platí i pro “numerické” měřitelné funkce s hodnotami v R∗.

Věta 3.7. *Bud’te fn* : (*X,* A) → R∗ *měřitelné, n* ∈ N*. Pak jsou funkce* sup*n fn,*

inf*n fn,* lim sup*n*→∞ *fn a* lim inf*n*→∞ *fn rovňež měřitelné.*

Důkaz: Označme *g* := sup*n fn*. Pak pro libovolné *b* ∈ R∗ platí

∞

\1

*g*− ([−∞*, b*]) = {*fn* ≤ *b*} ∈ A*,*

*n*=1

tedy *g* je měřitelná, nebot’ intervaly [−∞*, b*]: *b* ∈ R∗ generují B∗. Dále označme

*h* := lim sup*n*→∞ *fn*. Pak pro libovolné *b* ∈ R∗ platí

*h*−1([−∞*, b*]) = {*x* ∈ *X* : (∀*ε >* 0)(∃*n*0)(∀*n* ≥ *n*0) : *fn*(*x*) ≤ *b* + *ε*}

= \ [

∞

∞

∞

\ {*fn*

1

≤ *b* + *k* } ∈ A*,*

*k*=1 *n*0 =1 *n*=*n*0

tedy i *h* je měřitelná. Případ infima a liminf je analogický. □

Pozn.: Z předchozí věty plyne, že limita měřitelných funkcí je měřitelná, po- kud existuje.

Definice 3.2. Funkce *s* : *X* [0*,* ) je *jednoduchá*, jestliže *s*(*X*) je konečná množina.

→ ∞

Věta 3.8. *Je-li f* : (*X,* A) → [0*,* ∞] *měřitelná, existují funkce sn* : (*X,* A) →

[0*,* ∞) *jednoduché měřitelné takové, že sn* ↗ *f (n* → ∞*).*

Důkaz: Položme

*s* (*x*) := max *k*

*n* 2*n*

*k*

: 2*n*

≤ *f* (*x*)*, k* = 0*,* 1*, . . . , n*2*n , x* ∈ *X.*

Funkce *sn* jsou zřejmě nezáporné a nabývají jen konečňe mnoha hodnot. Ověříme měřitelnost. Z definice platí

kdykoliv *k*−1

2*n*

*k*

{*sn < a*} = {*f <* 2*n* } ∈ A

*< a* ≤ *k* , 1 ≤ *k* ≤ *n*2*n*, *n* ∈ N, a {*sn*

2*n*

*< a*} = ∅ pro *a* ≤ 0 a

{*sn < a*} = *X* pro *a > n*. Tedy *sn* jsou měřitelné.

Není těžké ověřit, že *sn* tvoří neklesající posloupnost a že *sn* ↗ *f* . □

# Abstraktní Lebesgueův integrál

Pro podmnožinu *E X* značíme symbolem *χE indikátorovou funkci* množiny

⊂

*E*, tedy

(

*χ* (*x*) = 1*, x* ∈ *E .*

*E*

0*, x* ̸∈ *E.*

Pozn.: Každá jednoduchá funkce má jednoznačné vyjádření v tzv. *kanonickém tvaru*:

Σ

*k*

*s* = *αjχEj ,*

*j*=1

kde {*α*1*, . . . , αk*} jsou všechny různé hodnoty funkce *s*; pak *X* = *E*1 ∪ · · · ∪ *Ek*

je rozklad prostoru *X*. Je-li *s* měřitelná, jsou *Ei* ∈ A.

Definice 4.1. Bud’ (*X,* A*, µ*) prostor s mírou.

1. Je-li *s* : (*X,* A) → [0*,* ∞) jednoduchá měřitelná v kanonickém tvaru *s* =

Σ

*k j*=1

*αjχEj* , klademe

*sdµ* =

∫

*X*

*s*(*x*) *dµ*(*x*) :=

*X*

∫

Σ*j*=1

*αjµ*(*Ej*)*.*

(Je-li ňekteré *αj* = 0, klademe *αjµ*(*Ej*) = 0, tedy používáme konvenci 0 · ∞ = 0.)

*k*

1. Je-li *f* : (*X,* A) → [0*,* ∞] měřitelná, klademe

∫ *f dµ* := sup ∫ *sdµ* : 0 ≤ *s* ≤ *f, s* jedn. měř. *.*

*X*

*X*

1. Je-li *f* : (*X,* A) → R∗ měřitelná, klademe

∫ *f dµ* := ∫ *f* + *dµ* − ∫

*X*

*X*

*f* − *dµ,*

má-li rozdíl smysl. (Zde *f* +*, f* − značí kladnou, resp. zápornou část funkce

*X*

*f* .)

## Pozn.:

1. Je-li *f* měřitelná a *E* ∈ A, značíme

∫ *f dµ* := ∫ (*f* · *χE*) *dµ.*

*E*

*X*

∫ ∫

Místo *X f dµ* píšeme také pouze *f dµ*.

1. Je-li *f* měřitelná taková, že *f* + *dµ* = *f* − *dµ* = , pak *f dµ* není definován. Rˇíkáme proto, že (abstraktní) Lebesgueův integrál je *absolutňe*

∫ ∫ ∞ ∫

*konvergentní* (na rozdíl od Newtonova integrálu).

Cvičení: Je-li *s* = Σ*l*

*j*=1

*βjχFj*

ňejaké (ne nutňe kanonické) vyjádření jedno-

duché měřitelné funkce *s*, pak také platí

*sdµ* =

*l*

∫

*X*

Σ*j*=1

*βjµ*(*Fj*)*.*

Tvrzení 4.1 (Monotonie∫integrálu).∫ *Pro f, g* : (*X,* A) → R∗ *měřitelné s vlast-*

*nost´ı* 0 ≤ *f* ≤ *g plat´ı* 0 ≤

*X f dµ* ≤

*X g dµ.*

Věta 4.2 (Leviho věta). *Jsou-li fn nezáporné měřitelné funkce na X takové, že fn* ↗ *f, platí X fn dµ* ↗ *f dµ (n* → ∞*).*

∫ ∫

je neklesající podle př∫edchozího tvrzení). Zřejmě platí nerovnost *a* ≤ *f dµ*.

**Důkaz:** Oznaˇcme *an* := ∫ *fn dµ* ∈ [0*,* ∞], *a* := lim*n*→∞ *an* (posloupnos∫t (*an*)

Uk´aˇzeme, ˇze tak´e *a* ≥

*f dµ*.

Je-li *a* = ∞, n∫erovnost zˇrejmˇe plat´ı. Pˇredpokl´adejme tedy d´ale, ˇze *a <* ∞.

Ukážeme, ž∫e *a* ≥ *sdµ* pro každou jednoduchou měřitelnou funkci *s* ≤ *f* . Pak

bude i *a* ≥

*f dµ* podle definice integr´alu.

≤ ≤

Bud’ tedy 0 *s f* jednoduchá měřitelná funkce. Zvolme 0 *< τ <* 1 a

označme

*En* := {*x* ∈ *X* : *fn*(*x*) ≥ *τs*(*x*)}*.*

S∈ A ⊂ ∈

Zřejmě *En* , *En En*+1, *n* N, a *n En* = *X*. Podle věty o spojitosti míry platí

*µ*(*A* ∩ *En*) ↗ *µ*(*A*)*, A* ∈ A*.*

Zapišme *s* ve tvaru *s* = Σ*k αjχA* , kde *X* = *A*1 ∪ · · · ∪ *Ak* je rozklad prostoru

*j*=1

*j*

*X*. Pak platí

∫ *fn dµ* ≥ ∫

≥ ∫

*X*

*En*

Σ

*k*

*j*=1

= *τ*

*fn dµ*

*En*

(*τs*) *dµ* = ∫ (*τsχEn* ) *dµ*

Σ ∫

*k*

*αjµ*(*Aj* ∩ *En*) → *τ*

*j*=1

*αjµ*(*Aj*) = *τ*

*sdµ, n* → ∞*,*

a tedy

*a* = lim

*n*→∞

∫ *fn dµ* ≥ *τ* ∫ *sdµ.*

Protože nerovnost platí pro libovolné *τ* (0*,* 1), platí i *a sdµ*, a důkaz je hotov. □

∫∈ ≥

Věta 4.3 (Fatouovo lemma). *Pro funkce fn nezáporné měřitelné na X platí*

∫ lim inf *fn dµ* ≤ lim inf ∫

*n*→∞

*n*→∞

*X*

*fn dµ.*

*X*

Důkaz: Označme *gn*(*x*) := inf{*fk*(*x*) : *k* ≥ *n*}, *x* ∈ *X*. Funkce *gn* jsou

mˇeˇriteln´e (Vˇeta 3.7∫) a plat´ı *gn*∫↗ *g* := lim inf*n*→∞ *fn* (z definice lim in∫f). Podle

Leviho věty platí

∫

□*fn dµ*, *n* ∈ N, a limitn´ım pˇrechodem dostaneme

*g dµ* ≤ lim inf*n*→∞

*fn dµ*.

*gn dµ* ↗

*g dµ*. Dále zřejmě ∫*gn* ≤ *fn*, a tedy

*g*∫*n dµ* ≤

# Přednáška 24.10.2023

Definice 4.2. Bud’ (*X, , µ*) prostor s mírou. Rěkneme, že vlastnost *V* (*x*) mají (*µ*-)*skoro všechny* body *x X* (zkráceňe *s.v.*), jestliže *x X* : *V* (*x*) je (*µ*-

∈ { ∈ ¬ }

A

)nulová množina.

Tvrzení 4.4. *Necht’ f, g jsou měřitelné funkce na X takové, že f* = *g s.v. Pak platí*

∫ *f dµ* = ∫ *g dµ, má-li jedna strana smysl.*

Důkaz: Předpokládejme nejprve, že *f* i *g* jsou nezáporné funkce. Je-li *s* ≤ *f* libovolná měřitelná jednoduchá funkce, pak *s*′ := *sχ*{*f*=*g*} je rovňež jednoduchá měřitelná a splňuje *s*′ *g* a *sdµ* = *s*′ *dµ*. Musí tedy být *f dµ g dµ*. Obrácená nerovnost plyne ze symetrie. Bez předpokladu nezápornosti ukážeme rovnost integrálu z kladných a záporných částí (platí totiž zřejmě také *f* + = *g*+

∫ ∫ ∫ ∫≤ ≤

s.v. a *f* − = *g*− s.v.). □

Pozn.: Pro účely integrálu stačí, aby funkce byla definována skoro všude.

## Cvičení:

1. Necht’ je prostor (*X,* A*, µ*) *úplný*. Pak z rovnosti *f* = *g* s.v. plyne

*f* je měřitelná ⇐⇒ *g* je měřitelná.

1. Při zúplňení prostoru s mírou se integrály definované v původním prostoru nemění.

Definice 4.3. Označme

L∗(*µ*) := *f* : (*X,* A) → R∗ měř. : ∫ *f dµ* je definován *,*

L (*µ*) := *f* ∈ L (*µ*) : ∫ |*f* | *dµ <* ∞ *.*

1 ∗

Věta 4.5 (Linearita integrálu). *Jsou-li funkce f, g* ∈ L∗(*µ*) *a α* ∈ R*, pak platí*

∫ *αf dµ* = *α* ∫ *f dµ,* ∫ (*f* + *g*) *dµ* = ∫ *f dµ* + ∫ *g dµ,*

*má-li pravá strana smysl.*

Pozn.: Z předpokladu existence *f dµ* + *g dµ* plyne, že nemůže nastat, aby jedna z funkcí nabývala hodnoty a druhá hodnoty na množiňe kladné míry. Součet *f* + *g* je tedy definovám skoro všude.

∫ ∫

∞ −∞

Důsledek 4.6. *Zobecňený Lebesgueův integrál je tedy lineární funkcionál na vektorovém prostoru* L1(*µ*)*.*

Důkaz: (i) Je-li *f* ∗(*µ*) a *α* R pak i *αf* ∗(*µ*) a (*αf* ) *dµ* = *α f dµ*

∫ ∫∈ L ∈ ∈ L

(cvičení).

* 1. Bud’te *f, g* nezáporné jednoduché měřitelné, v kanonickém vyjádření

*f* = Σ*k αiχE* , *g* = Σ*l βjχF* . Pak jejich součet můžeme zapsat jako

Σ Σ

*i*=1

*i*

*j*=1

*j*

*k*

*l*

*f* + *g* = (*αi* + *βj*)*χEi*∩*Fj ,*

*i*=1 *j*=1

což je zřejmě opět jednoduchá měřitelná funkce. Její vyjádření výše nemusí být kanonický tvar, ale sloučíme-li dvojice indexů (*i, j*), pro ňež je *αi* + *βj* stejné, dostaneme kanonický tvar, a zřejmě podle definice je tedy

∫ (*f* + *g*) *dµ* = Σ Σ(*αi* + *βj*)*µ*(*Ei* ∩ *Fj*)*.*

*k*

*l*

*i*=1 *j*=1

Z aditivity míry dostaneme *µ*(*Ei*) = Σ*l µ*(*Ei* ∩ *Fj*), *i* = 1*, . . . , k*, a podobňe

*j*=1

*i*=1

*µ*(*Fj*) = Σ*k µ*(*Ei* ∩ *Fj*), *j* = 1*, . . . , l*, a proto také podle definice

*k*

*l*

∫ *f dµ* + ∫ *g dµ* = Σ Σ(*αi* + *βj*)*µ*(*Ei* ∩ *Fj*) = ∫ (*f* + *g*) *dµ.*

*i*=1 *j*=1

* 1. Jsou li *f, g* nezáporné měřitelné, pak podle Věty 3.8 existují jednoduché

∫ ∫

∫ *tn dµ* ↗ *g dµ* podle Leviho věty. Ze stejného důvodu platí i (*sn* + *tn*) *dµ* ↗

∫ ∫ ∫

∫mˇeˇriteln´e f∫unkce *sn*, *tn* takov´e, ˇze *sn* ↗ *f* a *tn* ↗ *g*, tedy *sn*∫ *dµ* ↗ *f dµ* a

(*f* +*g*) *dµ*. V´ıme jiˇz, ˇze

(*sn* +*tn*) *dµ* =

*sn dµ*+

*tn dµ*, a limitn´ım pˇrechodem

(*n* → ∞) dostaneme požadovanou rovnost.

* 1. Bud’te nyní *f, g* ∈ L∗(*µ*) libovolné. Platí

*f* + *g* = (*f* + *g*)+ − (*f* + *g*)− = (*f* + − *f* −) + (*g*+ − *g*−)*,*

tedy (*f* + *g*)+ + *f* − + *g*− = (*f* + *g*)− + *f* + + *g*+. Všechny zde vystupující funkce jsou nezáporné, tudíž platí

∫ (*f* + *g*)+ *dµ* + ∫ *f* − *dµ* + ∫ *g*− *dµ* = ∫ (*f* + *g*)− *dµ* + ∫ *f* + *dµ* + ∫ *g*+ *dµ.*

Ab∫y mˇel souˇcet integr∫´alů ∫ *f dµ* + ∫ *g*∫*dµ* smysl, mus´ı by´t bud’ ∫ *f* + *dµ <* ∞

a *g*+ *dµ <* ∞, nebo *f* − *dµ <* ∞ a *g*− *dµ <* ∞. Uvažu∫jme druhou z uve-

deny´ch variant. Pak z nerovnosti (*f* + *g*)− ≤ *f* − + *g*− plyne

(*f* − + *g*−) *dµ <* ∞

a odečtením všech integrálů ze záporných části ve výše uvedené rovnosti do- staneme požadovaný vztah (*f* + *g*) *dµ* = *f dµ* + *g dµ*. V případě platnosti první varianty odečteme naopak integrály z kladných částí. □

∫ ∫ ∫

Důsledek 4.7. *Pro nezáporné měřitelné funkce fn na X platí*

∞

∫ Σ

*fn*

*n*=1

*dµ* = ∞

*n*=1

! Σ

∫ *fn*

*dµ.*

Důkaz: Podle předchozí věty platí

*n*

∫ Σ

*k*=1

*fn*!

*dµ* =

*k*Σ=1 ∫

*fk dµ, n* ∈ N*.*

Limitním přechodem a s využitím Leviho věty dostaneme tvrzení. □

*n*

Tvrzení 4.8. *f* ∈ L1(*µ*) =⇒ ∫ *f dµ* ≤ ∫ |*f* | *dµ.*

. .

Důkaz: Podle trojúhelníkové nerovnosti a definice integrálu platí

.∫ *f dµ*. = .∫ *f* + *dµ* − ∫ *f* − *dµ*. ≤ ∫ *f* + *dµ* + ∫ *f* − *dµ* = ∫ |*f* | *dµ.*

□

## Cvičení:

1. *f, g* ∈ L1(*µ*) =⇒ max{*f, g*}*,* min{*f, g*} ∈ L1(*µ*).

2. Je-li funkce *f* měřitelná a |*f* | ≤ *g* pro ňejakou funkci *g* ∈ L1(*µ*), pak i

*f* ∈ L1(*µ*).

Věta 4.9 (Zobecňen∫á Leviho věta). *Bud*∫*’te funkce f*∫*n měřitelné na X (n* ∈ N*)*

*takov´e, ˇze fn* ↗ *f a*

*f*1 *dµ >* −∞*. Pak*

*fn dµ* ↗

*f dµ.*

**Důkaz:** Je-li ∫ *f*1 *dµ* = ∞, tvrzen´ı zˇrejmˇe plat´ı. Ne∫cht’ tedy ∫ *f*1 *dµ* ∫∈ R.

Protože 0 ≤ *fn* − *f*1 ↗ *f* − *f*1, podle Lev∫iho věty pl∫atí (*fn* − *f*1) *dµ* ↗

*f*1) *dµ*, a z aditivity integr´alu dostaneme

*fn dµ* ↗

*f dµ*. □

(*f* −

D∫ ůsledek ∫4.10. *Jsou-li funkce fn měřitelné, fn* ↘ *f a* ∫ *f*1 *dµ <* ∞*, pak*

*fn dµ* ↘

*f dµ.*

*Důkaz.* Použijte zobecňenou Leviho větu pro funkce −*fn* ↗ −*f* .

Věta 4.11 (Lebesgueova; o konvergentní majorantě). *Bud’* (*X,* A*, µ*) *prostor s mírou a fn, f měřitelné funkce takové, že fn* → *f s.v. Necht’ dále existuje f*∫*unkce g* ∈∫L1(*µ*) *taková, že* |*fn*| ≤ *g s.v. pro všechna n* ∈ N*. Pak f* ∈ L1(*µ*) *a*

*fn dµ* →

*f dµ.*

*Důkaz.* Předefinujeme-li funkce *fn, f* na množiňe

∞

[

{*x* : *fn*(*x*) ̸→ *f* (*x*)} ∪ {*x* : |*fn*(*x*)| *> g*(*x*)}

*n*=1

nulové míry, budou předpoklady věty platit pro všechna *x* ∈ *X*. Označme

*gn* := inf{*fn, fn*+1*, . . .* }*, hn* := sup{*fn, fn*+1*, . . .* }*, n* ∈ N*.*

Zřejmě platí

−*g* ≤ *gn* ≤ *fn* ≤ *hn* ≤ *g, n* ∈ N*,*

tedy *f* ∈ L∫ 1(*µ*), a *gn*∫ ↗ *f* , *h*∫*n* ↘ *f* , *n* →∫ ∞, tedy podl∫e zobecňen∫é Leviho

∫

∫

*hn dµ*, plat´ı tak´e

*fn dµ* →

*f dµ* podle vˇety o dvou str´aˇzn´ıc´ıch.

věty platí *gn dµ* →∫ *f dµ* a *hn dµ* → *f dµ*. Protože *gn dµ* ≤ *fn dµ* ≤

Důsledek 4.12. *Jsou-li fi měřitelné,* Σ∞*i*=1 *fi konverguje s.v., a g* ∈ L1(*µ*)

Σ Σ

∞

*takov´a, ˇze* |

*n i*=1

*fi*| ≤ *g s.v. pro vˇsechna n, pak*

*fi* ∈ L1(*µ*) *a*

*i*=1

∫ Σ∞ *f* ! *dµ* = Σ∞ ∫ *f dµ.*

*i*=1

*i*=1

*i*

*i*

# Přednáška 31.10.2023

1. Integrály závislé na parametru

V následujícím textu budeme pracovat s funkcemi *f* : *T X* R. Symbo- lem *f* ( *, x*) a *f* (*t,* ) budeme rozumět vždy funkci jedné proměnné (znázorňené tečkou) při pevné hodnotě (parametru) druhé proměnné.

· ·

× →

Věta 5.1 (Lebesgueova; o spojité závislosti integrálu na parametru). *Bud’te* (*X, , µ*) *prostor s mírou, T metrický prostor a f* : *T X* R *funkce. Necht’ dále*

A × →

1. *f* (*t,* ·) *je měřitelná pro každé t* ∈ *T,*
2. *f* (·*, x*) *je spojitá na T pro s.v. x* ∈ *X,*
3. *existuje g* ∈ L1(*µ*) *taková, že* |*f* (*t,* ·)| ≤ *g s.v. pro všechna t* ∈ *T. Pak f* (*t,* ·) ∈ L1(*µ*) *pro všechna t* ∈ *T a funkce*

*F* : *t* ›→ ∫ *f* (*t, x*) *dµ*(*x*)

*je spojitá na T.*

*Důkaz.* Z předpokladu |*f* (*t,* ·)| ≤ *g* s.v. zřejmě plyne *f* (*t,* ·) ∈ L1(*µ*), *t* ∈ *T* . Označme *N* ⊂ *X* množinu nulové míry takovou, že *f* (·*, x*) je spojitá na *T* pro všechna *x* ∈ *X* \*N* . Zvolíme-li libovolnou posloupnost *tj* → *t* v *T* a libovolný *x* ∈ *X* \ *N* , platí podle Heineho věty lim*j*→∞ *f* (*tj, x*) = *f* (*t, x*). Podle Lebesgueovy

věty (o konvergentní majorantě) platí lim*j*→∞ *F* (*tj*) = *F* (*t*). Toto platí pro

každou posloupnost *tj t T* , a tedy *F* je spojitá na *T* , opět podle Heineho

→ ∈

věty.

Věta 5.2 (Záměna integrálu a derivace). *Bud’te* (*X,* A*, µ*) *prostor s mírou,*

*I* ⊂ R *otevřený interval a f* : *I* × *X* → R *funkce. Necht’ dále*

1. *f* (*t,* ·) *je měřitelná pro každé t* ∈ *I,*
2. *existuje N* ∈ A*, µ*(*N* ) = 0*, taková, že pro všechna x* ∈ *X* \*N a pro všechna*

*t* ∈ *I existuje vlastní derivace d f* (*t, x*)*,*

*dt*

1. *existuje g* ∈ L1(*µ*) *taková, že pro všechna t* ∈ *I,* | *d f* (*t, x*)| ≤ *g*(*x*) *pro s.v.*

*dt*

*x* ∈ *X,*

1. *existuje t*0 ∈ *I takové, že f* (*t*0*,* ·) ∈ L1(*µ*)*. Pak f* (*t,* ·) ∈ L1(*µ*) *pro všechna t* ∈ *I, funkce*

*F* : *t* ›→ ∫ *f* (*t, x*) *dµ*(*x*)

*je diferencovatelná na I a platí*

∫ ∈

*F* ′(*t*) = *d f* (*t, x*) *dµ*(*x*)*, t I.*

*dt*

*Důkaz.* Pro libovolné *a, b* ∈ *I*, *a < b*, a *x* ∈ *X* \ *N* existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě *cx* ∈ (*a, b*) takové, že

*f* (*b, x*) − *f* (*a, x*) = *d f* (*c*

*, x*)*.*

*b* − *a*

*dt x*

Z předpokladu (iii) plyne, že funkce *x* ›→ *d f* (*cx, x*) leží v prostoru L1(*µ*). Zvolíme-li za jeden z bodů *a, b* bod *t*0, dostaneme *f* (*t,* ·) ∈ L1(*µ*) pro všechna

*dt*

*t* ∈ *I*. Uvažujme nyní libovolnou posloupnost *tj* → *t* ∈ *I*, *I* ∋ *tj t*. Platí

lim

*F* (*tj*) − *F* (*t*) = lim ∫ *f* (*tj, x*) − *f* (*t, x*) *dµ*(*x*) = ∫ *d f* (*t, x*) *dµ*(*x*);

*j*→∞

*tj* − *t*

*j*→∞

*tj* − *t dt*

poslední rovnost plyne z Lebesgueovy věty o konvergentní majorantě a z definice derivace. Protože uvedená ∫rovnost platí pro libovolnou posloupnost *tj* → *t* ∈ *I*,

*dt*

*tj* ̸= *t*, dost´av´ame *F* ′(*t*) =

*d f* (*t, x*) *dµ*(*x*), *t* ∈ *I*.

# Lebesgueova míra na přímce

Věta 6.1. *Je-li f* 0 *měřitelná funkce na prostoru s mírou* (*X, , µ*) *a platí-li*

∫ ≥ A

*f dµ* = 0*, je f* = 0 *s.v.*

*Důkaz.* Označme *An* := {*x* ∈ *X* : *f* (*x*) ≥ 1 }. Zřejmě *An* ∈ A, *χA* ≤ *nf* , a

S∞

∞*n*=1 *µ*(*An*) = 0.

tedy *µ*(*An*) =

∫ *χA*Σ*n dµ* ≤ *n* ∫

*n*

*f dµ* = 0, *n* ∈ N. Protože {*f >* 0} =

*n*

*n*=1 *An*,

Důsledek: Jsou-li *f, g* ∈ L1(*µ*), *f* ≤ *g* a ∫ *f dµ* = ∫ *g dµ*, pak *f* = *g* s.v.

∫

plat´ı *µ*({*f >* 0}) ≤

Důsledek 6.2. *Necht’ pro funkci f* ∈ L1(*µ*) *platí množinu E* ∈ A*. Pak f* = 0 *s.v.*

∫ ∫

*E f dµ* = 0 *pro každou*

*Důkaz.* Zvolme nejprve *E*+ := {*f >* 0}. Pak podle předpokladu platí *f* + *dµ* =

*f dµ* = 0, a protože *f* + ≥ 0, je *f* + = 0 s.v. podle Věty 6.1. Podobňe volbou

*E*+

*E*− := {*f <* 0} odvodíme, že *f* − = 0 s.v. Pak ale musí být *f* = 0 s.v.

Značení: Budeme uvažovat restrikci (zúplňené) Lebesgueovy míry *λ*1 na ome- zený otevřený interval (*a, b*). Budeme značit 1(*a, b*) příslušný prostor integro- vatelných funkcí a *b f dλ*1 Lebesgueův integrál z funkce *f* ∈ L1(*a, b*). Dále symbolem R[*a, b*] značíme množinu všech omezených funkcí na [*a, b*], pro ňež

∫ *b*existuje Riemannův integr´al (R) *f* .

L

*a*

∫

*a*

Věta 6.3 (Vztah Lebesgueova a Riemannova integrálu). *Je-li f* [*a, b*]*, pak*

∈ R

*f* ∈ L1(*a, b*) *a* (R) ∫ *b f* = ∫ *b f dλ*1*.*

*a*

*a*

*Důkaz.* Protože *f* [*a, b*], existuje posloupnost ( *n*) zjemňujících se dělení intervalu [*a, b*] taková, že

∈ R D

*b*

∫

s(*f,* D*n*) ↗ (R)

*f* ↙ *S* (*f,* D*n*)*, n* → ∞

(s(*f,* D*n*) a *S* (*f,* D*n*) značí dolní a horní Riemannův součet *f* přes dělení D*n*).

Je-li D*n* = {*a* = *x*(*n*)

0

1

*kn*

*< x*(*n*)

*<* · · · *< x*(*n*)

= *b*}, zaved’me funkce *sn, Sn*

předpisem

*sn*(*x*) = inf

*f, Sn*(*x*) = sup

*f, x* ∈ (*x*(*n*) *, x*(*n*)]*, i* = 1*, . . . , kn,*

[*x*(*n*) *,x*(*n*)]

(*n*) (*n*)

*i*−1 *i*

*i−*1 *i*

[*xi−*1 *,xi* ]

a *sn*(*x*) = *Sn*(*x*) = 0 pro ostatní hodnoty *x* ∈ R. Pak zřejmě platí

∫

∫

s(*f,* D*n*) =

*b*

*sn dλ*1*, S* (*f, n*) =

D

*a*

*b*

*Sn dλ*1*.*

*a*

Funkce *f* je dle předpokladu omezená, tedy |*f* | ≤ *M* pro ňejaké *M* ∈ R. Platí

−*M* ≤ *s*1 ≤ *s*2 ≤ · · · ≤ *f* ≤ · · · ≤ *S*2 ≤ *S*1 ≤ *M.*

Označme *f*1 := lim*n*→∞ *sn*, *f*2 := lim*n*→∞ *Sn* (monot´onní omezená posloupnost vždy konverguje). Pak platí

−*M* ≤ *sn* ↗ *f*1 ≤ *f* ≤ *f*2 ↙ *Sn* ≤ *M.*

a podle zobecňené Leviho věty tedy

*b*

∫

*sn dλ*1

→

*a*

*b*

*f*1 *dλ*1*,*

∫

*a*

*b*

*Sn dλ*1

∫

→

*a*

*b*

*f*2 *dλ*1*.*

∫

*a*

Podle předpokladu ale také

*b*

∫

*sn dλ*1 = s(*f,* D*n*) ↗ (R)

*a*

*b*

*f* ↙ *S* (*f,* D*n*) =

∫

*a*

*b*

*Sn dλ*1*,*

∫

*a*

takže ∫ *b f dλ*1 = ∫ *b f dλ*1 = (R) ∫ *b f* . Podle důsledku Věty 6.1 je *f*

∫

1

2

1

*a*

*a*

*a*

1

1

2

= *f*2 s.v.,

*a*

a zřejmě tedy také *f* = *f* s.v. (nebot’ *f* ≤ *f* ≤ *f* ), a tedy také ∫ *b f dλ*1 =

*a*

1

1. *b f* . Měřitelnost *f* plyne z měřitelnosti *f*

mírou.

Věta 6.4. *Bud’ f* : [*a, b*] → R *omezená. Pak*

= lim *sn*

a z úplnosti prostoru s

*f* ∈ R[*a, b*] ⇐⇒ *f je spojitá λ*1*-s.v. na* [*a, b*]*.*

[Bez důkazu; bude v navazující přednášce]

Uvažujme nyní obecný otevřený podinterval (*a, b*) ⊂ R. Je-li *f* : (*a, b*) → R, symbolem (N) *f* značíme *Newtonův* integrál z funkce *f* (pokud konverguje, tedy existuje konečný):

*a*

∫ *b*

*b*

∫

(N)

*f* = *F* (*b*−) − *F* (*a*+)

Věta 6.5 (Vztah Lebesgueova a Newtonova integrálu). *Necht’ f je nezáporná spojitá funkce na intervalu* (*a, b*)*. Potom* (N) ∫ *b f konverguje právě tehdy, když*

*a*

∫ *f dλ konverguje.*

*b* 1

*a*

*Důkaz.* Uvažujme monot´onní posloupnosti *ai a*, *bi b*, *i* , *a < ai < bi < b*. Necht’ *F* je primitivní funkce k funkci *f* na intervalu (*a, b*). Pak pro každé *i* ∈ N,

↘ ↗ → ∞

∫

∫

∫

(N)

*bi bi*

*f* = *F* (*bi*) *F* (*ai*) = (R) *f* =

−

*ai ai*

*bi*

*f dλ*1

*ai*

podle definice Newtonova integrálu, rovnosti Riemannova a Newtonova integrálu a Věty 6.3. Podle Leviho věty platí

lim

∫ *bi*

*f dλ*1 = lim

*b*

(*f* · *χ*(*a ,b* )) *dλ*1 =

∫

*i i*

*b*

*f dλ*1*.*

∫

*i*→∞ *ai i*→∞ *a a*

Zároveň z definice Newtonova integrálu je

∫ *bi* ∫ *b*

lim (N)

*i*→∞

*f* = (N)

*f,*

*ai*

*a*

právě tehdy, když posledňe uvedený Newtonův integrál konverguje. Tím je ekvi- valence i rovnost dokázána.

Důsledek 6.6. *Bud’ f spojitá funkce na intervalu* (*a, b*)*.*

* 1. *Jestliže konverguje* ∫ *b f dλ*1*, konverguje i* (N) ∫ *b f, a to absolutňe.*

*a*

*a*

* 1. *Jestliže* (N) ∫ *b f konverguje absolutňe, pak konverguje i* ∫ *b f dλ*1*.*

*a*

*a*

* 1. *Jestliže* (N) ∫ *b f konverguje neabsolutňe, pak* ∫ *b f dλ*1 *nemá smysl.*

*a*

*a*

# Přednáška 7.11.2023

1. Věta o jednoznačnosti míry

Definice 7.1. Rěkneme, že D ⊂ P(*X*) je *Dynkinův systém*, jestliže

1. *X* ∈ D,
2. *D* ∈ D =⇒ *X* \ *D* ∈ D,
3. *Dn* ∈ D, *Dn* po dvou disjunktní =⇒ S*n Dn* ∈ D.

## Pozn.:

1. Dynkinův systém je uzavřen i na vlastní množinové rozdíly: Jsou-li *A, B* ∈ D, *A* ⊂ *B*, pak i *B* \ *A* ∈ D.
2. Každá *σ*-algebra je zřejmě Dynkinův systém, ale ne naopak.

Tvrzení 7.1. (a) *Průnik libovolného systému Dynkinových systémů je opět Dynkinův systém.*

1. *Pro každý množinový systém* S ⊂ P(*X*) *existuje nejmeňsí Dynkinův sys- tém, obsahující* S*:*

*δ*S := \{D ⊂ P(*X*) *Dynkinův syst.,* S ⊂ D}*.*

Věta 7.2. *Necht’ je množinový systém* S ⊂ P(*X*) *uzavřen na konečné průniky. Pak δ*S = *σ*S*.*

Důkaz: Ukážeme, že *δ* je uzavřen na konečné průniky. Z toho již vyplyne, že *δ* je *σ*-algebra, a tedy *δ* = *σ* . (Skutečňe, není těžké ověřit, že každý Dynkinův systém, který je uzavřený na konečné průniky, již je *σ*-algebrou.)

S S S

S

Položme

D := {*D* ∈ *δ*S : *D* ∩ *S* ∈ *δ*S pro každou *S* ∈ S}*.*

Z předpokladu věty víme, že S ⊂ D. Ukážeme, že D je Dynkinův systém. (i)

Zřejmě *X* ∈ D. (ii) Je-li *D* ∈ D a *S* ∈ S, pak

(*X* \ *D*) ∩ *S* = *S* \ (*S* ∩ *D*) ∈ *δ*S*,*

tedy *X* \ *D* ∈ D. (iii) Jsou-li *Dn* ∈ D po dvou disjunktní a *S* ∈ S, pak

([ *Dn*) ∩ *S* = [(*Dn* ∩ *S*) ∈ *δ*S*,*

*n*

*n*

tedy S*n Dn* ∈ D. D je tedy Dynkinův systém a musí se tudíž shodovat se *δ*S.

Dále položme

E := {*E* ∈ *δ*S : *E* ∩ *D* ∈ *δ*S pro každou *D* ∈ *δ*S}*.*

Z dokázané rovnosti = *δ* plyne . je rovňež Dynkinův systém (to se dokáže stejňe, jako pro systém ). Platí tedy také = *δ* , což znamená, že *δ* je uzavřen na konečné průniky, a důkaz je hotov. □

D E S S

D S S ⊂ E E

Věta 7.3 (Věta o jednoznačnosti míry). *Necht’ je množinový systém* S ⊂ P(*X*) *uzavřen na konečné průniky a µ, ν necht’ jsou dvě míry na σ*S *takové, že µ*(*S*) = *ν*(*S*) *pro každou S* ∈ S*. Necht’ dále existují množiny An* ∈ S *(n* ∈ N*) takové, že An* ↗ *X a µ*(*An*) *<* ∞*, n* ∈ N*. Pak µ* = *ν na σ*S*.*

Důkaz: (1) Předpokládejme, nejprve, že *µ* je konečná. Množina

D := {*A* ∈ *σ*S : *µ*(*A*) = *ν*(*A*)}

je Dynkinův systém (vlastnost (i) plyne z *µ*(*X*) = lim*n µ*(*An*) = lim*n ν*(*An*) =

*ν*(*X*), vlastnosti (ii) a (iii) pak ze (spočetné) aditivity míry). Protože

S ⊂ D

podle předpokladu, musí být = *δ* . Podle Věty 7.2 je ovšem *δ* = *σ* , a tedy

D S S S

*µ* a *ν* se shodují na *σ* .

S

* 1. Je-li *µ* nekonečná, položíme

D*n* := {*A* ∈ *σ*S : *µ*(*A* ∩ *An*) = *ν*(*A* ∩ *An*)}*, n* ∈ N*.*

Stejňe jako v části (1) se ověří, že D*n* je Dynkinův systém obsahující S, a tedy

D*n* = *σ*S, *n* ∈ N. Ze spojitosti míry pak pro libovolnou *A* ∈ *σ*S dostaneme

*µ*(*A*) = lim *µ*(*A* ∩ *An*) = lim *ν*(*A* ∩ *An*) = *ν*(*A*)*,*

*n*

*n*

čímž je důkaz ukončen. □

Příklad: Je-li *µ* míra na (R1*,* 1) taková, že *µ*(*I*) = délka(*I*) pro každý ome- zený interval *I*, pak nutňe *µ* = *λ*1.

B

# Součin měr a Fubiniova věta

Mějme dva prostory (*X,* A*, µ*), (*Y,* B*, ν*) se *σ*-konečnými měrami.

Definice 8.1. *Měřitelným obdélníkem* rozumíme množinu *A* × *B* ⊂ *X* × *Y* , kde

*A* ∈ A a *B* ∈ B. *σ*-algebru

A ⊗ B := *σ*{*A* × *B* : *A* ∈ A*, B* ∈ B}

nazýváme *součinovou σ-algebrou* na prostoru *X* × *Y* .

Pro množinu *E* ∈ A ⊗ B značíme

*Ex* := {*y* ∈ *Y* : (*x, y*) ∈ *E*}*, x* ∈ *X,*

*Ey* := {*x* ∈ *X* : (*x, y*) ∈ *E*}*, y* ∈ *Y*

řezy množiny *E*.

Tvrzení 8.1. *Necht’ E* ∈ A ⊗ B*. Pak*

1. *Ex* ∈ B *pro všechna x* ∈ *X,*
2. *funkce x* ›→ *ν*(*Ex*) *je měřitelná na* (*X,* A)*.*

Důkaz: 1. Pro libovolné *x X* je *E* : *Ex* zřejmě *σ*-algebra obsahující všechny měřitelné obdélníky, tedy musí splývat se součinovou *σ*- algebrou.

∈ { ∈ A ⊗ B ∈ B}

2. Zvolme pevňe libovolnou množinu *B*0 ∈ B s mírou *ν*(*B*0) *<* ∞. Označme

D := {*E* ∈ A ⊗ B : *x* ›→ *ν*(*Ex* ∩ *B*0) je měřitelná}*.*

Zřejmě obsahuje všechny měřitelné obdélníky, a snadno se ověří, že je Dyn- kinův systém. tedy obsahuje *δ*-obal všech měřitelných obdélníků, a protože měřitelné obdélníky jsou uzavřené na konečné průniky, jejich *δ*-obal je totožný se *σ*-obalem, a tedy D = A ⊗ B. Protože *ν* je *σ*-konečná, existují množiny *Bn* ∈ B, *ν*(*Bn*) *<* ∞, *Bn* ↗ *Y* , *n* → ∞. Pak pro libovolnou *E* ∈ A ⊗ B platí *ν*(*Ex*) = lim*n ν*(*Ex Bn*), a tedy funkce *x ν*(*Ex*) je měřitelná (jako limita měřitelných funkcí). □

D

D D

∩ ›→→∞

Věta 8.2 (Existence a jednoznačnost součinové míry). *Existuje právě jedna míra µ* ⊗ *ν na* (*X* × *Y,* A ⊗ B) *s vlastností*

(*µ* ⊗ *ν*)(*A* × *B*) = *µ*(*A*) · *ν*(*B*)*, A* ∈ A*, B* ∈ B

*(klademe* 0 · ∞ = 0*).*

Důkaz: Pro *E* ∈ A ⊗ B položme

(*µ* ⊗ *ν*)(*E*) := ∫ *ν*(*Ex*) *dµ*(*x*)*.* (1)

Nejprve ukážeme, že *µ* ⊗ *ν* je míra na (*X* × *Y,* A ⊗ B). Zřejmě (*µ* ⊗ *ν*)(∅) = 0.

Jsou-li *En* ∈ A ⊗ B po dvou disjunktní, platí

(*µ* ⊗ *ν*)([ *En*) = ∫ *ν*(([ *En*)*x*) *dµ*(*x*) = ∫ *ν*([(*En*)*x*) *dµ*(*x*)

*n*

*n*

*n*

*n*

*n*

= ∫ Σ *ν*((*En*)*x*) *dµ*(*x*) = Σ(*µ* ⊗ *ν*)(*En*)

(využili jsme faktu, že řezy disjunktních množin jsou opět disjunktní). Tedy

*µ ν* je míra.

⊗

Z definice je zřejmé, že pro měřitelný obdélník *A B* je (*µ ν*)(*A B*) =

× ⊗ ×

*µ*(*A*)*ν*(*B*).

Zbývá ukázat jednoznačnost. Použijeme Větu 7.3. Systém všech měřitelných obdélníků je uzavřen na konečné průniky a součinová míra je na měřitelných obdélnících jednoznačňe určena. Protože *µ* a *ν* jsou *σ*-konečné míry, existují množiny *An* ∈ A, *µ*(*An*) *<* ∞, *An* ↗ *X*, a *Bn* ∈ B, *ν*(*Bn*) *<* ∞, *Bn* ↗ *Y* , *n* → ∞. Měřitelné obdélníky *Cn* := *An* × *Bn* pak splňují (*µ* ⊗ *ν*)(*Cn*) *<* ∞ a *Cn* ↗ *X* × *Y* , předpoklady Věty 7.3 jsou tedy splňeny. □

Definice 8.2 (Obraz míry). Bud’ *φ* : (*E,* E) → (*F,* F) měřitelné zobrazení a *µ*

míra na (*E,* E). Pak množinová funkce

*µφ*−1 : *B* ›→ *µ*(*φ*−1(*B*))*, B* ∈ F*,*

je míra na (*F,* F) a nazýváme ji *obrazem míry µ* při zobrazení *φ*.

# Přednáška 14.11.2023

Tvrzení 8.3 (Symetrie součinové míry). *Platí ν* ⊗ *µ* = (*µ* ⊗ *ν*)*τ* −1*, kde τ* :

*X* × *Y* → *Y* × *X je záměna souřadnic, tedy τ* : (*x, y*) ›→ (*y, x*)*.*

*Důkaz.* Nejprve ověříme, že *τ* −1( ) = . Toto snadno plyne z Věty 3.1 (ii), nebot’ *τ* −1(*σ* ) = *σ*(*τ* −1 ), kde značí systém všech měřitelných obdélníků v *Y X*.

×

S S S

B⊗A A⊗B

Míry *ν µ* a (*µ ν*)*τ* −1 se shodují na měřitelných obdélnících, tedy se rovnají podle předchozí věty.

⊗ ⊗

Důsledek 8.4. *Platí*

(*µ* ⊗ *ν*)(*E*) = ∫ *µ*(*Ey*) *dν*(*y*)*, E* ∈ A ⊗ B*.*

*Důkaz.* Platí

(*µ* ⊗ *ν*)(*E*) = (*ν* ⊗ *µ*)(*τ E*) = ∫ *µ*((*τ E*)*y*) *dν*(*y*) = ∫ *µ*(*Ey*) *dν*(*y*)*,*

využili jsme předchozího tvrzení a vztahu (1).

Věta 8.5 (Fubiniova věta). *Pro každou funkci f* ∈ L∗(*µ* ⊗ *ν*) *platí:*

∫ *f d*(*µ* ⊗ *ν*) = ∫ ∫ *f* (*x, y*) *dν*(*y*) *dµ*(*x*) = ∫ ∫ *f* (*x, y*) *dµ*(*x*) *dν*(*y*)*.*

*Důkaz.* 1. Je-li *f* charakteristickou funkcí množiny ze součinové *σ*-algebry, plyne rovnost z (1) a Důsledku 8.4.

1. Pro jednoduchou měřitelnou funkci *s* = Σ*k*

*i*=1

*k*

*αiχEi*

máme

∫ *sd*(*µ* ⊗ *ν*) =

= ∫

Σ*i*=1

*αi* ∫

*ν*((*Ei*)*x*) *dµ*(*x*)

Σ*i*=1

*k*

*αiν*((*Ei*)*x*) *dµ*(*x*)

= ∫ (∫ *s*(*x, y*) *dν*(*y*)) *dµ*(*x*)*.*

Z uvedeného výpočtu rovňež plyne, že funkce *x s*(*x, y*) *dν*(*y*) je měřitelná. Druhá rovnost se odvodí analogicky.

∫›→

1. Bud’ *f* 0 měřitelná a *sn f* jednoduché měřitelné funkce. Pak podle Leviho věty

≥ ↗

∫ *sn*(*x, y*) *dν*(*y*) ↗ ∫ *f* (*x, y*) *dν*(*y*)*, x* ∈ *X.*

Protože integrály na levé straňe jsou měřitelnými funkcemi proměnné *x*, i integrál na pravé straňe je měřitelnou funkcí v *x* a opětovným použitím Leviho věty dostaneme

∫ ∫ *sn*(*x, y*) *dν*(*y*) *dµ*(*x*) ↗ ∫ ∫ *f* (*x, y*) *dν*(*y*) *dµ*(*x*)*.*

Podle již dokázané části 2 se integrál na levé straňe shoduje s

∫ *sn d*(*µ* ⊗ *ν*) ↗ ∫ *f d*(*µ* ⊗ *ν*)*,*

čímž dostáváme první z obou dokazovaných rovností (a druhá opět plyne analogicky).

1. Je-li *f* = *f* + *f* − ∗(*µ ν*), ověříme rovnost snadno pomocí příslušných rovností pro *f* + a *f* −.

— ∈ L ⊗

Příklad: Uvažujme *X* = *Y* = Z, A = B = P(Z), *µ* = *ν* je aritmetická míra. Definujme funkci *f* : Z × Z → R následovňe:

*f* (*z*1*, z*2) =

1 pokud *z*2 = *z*1 ≥ 0 nebo *z*2 = *z*1 − 1 ≤ −1*,*

−1 pokud *z*2 = *z*1 *<* 0 nebo *z*2 = *z*1 − 1 *>* −1*,*

Platí

0 jinak*.*

∫ ∫ *f* (*z*1*, z*2)*dµ*(*z*1) *dµ*(*z*2) = Σ Σ *f* (*z*1*, z*2) = 0*,*

ale

*z*2 *z*1

∫ ∫ *f* (*z*1*, z*2)*dµ*(*z*2) *dµ*(*z*1) = Σ Σ *f* (*z*1*, z*2) = 2*,*

přitom ovšem *f* ̸∈ L∗(*µ* ⊗ *µ*).

*z*1 *z*2

Pozn.: Prostor se součinovou mírou (*X* ×*Y,* A⊗B*, µ*⊗*ν*) nemusí být úplný, ani když prostory (*X,* A*, µ*) a (*Y,* B*, ν*) jsou úplné. Zúplňený prostor se součinovou mírou značíme (*X* × *Y,* A⊗ˆB*, µ*⊗ˆ*ν*).

Příklad: Uvažujme prostor se zúplňenou Lebesgueovou mírou (R*,* B0*, λ*). Je- li *A* ⊂ R neměřitelná množina (viz úvodní přednáška), pak *A* × {0} neleží v B0 ⊗ B0, ale je nulová, protože *A* × {0} ⊂ R × {0} a (*λ* ⊗ *λ*)(R × {0}) = 0.

Důsledek 8.6 (Fubiniova věta pro zúplňenou součinovou míru). *Bud’te* (*X,* A*, µ*) *a* (*Y,* B*, ν*) *dva úplné prostory se σ-konečnými měrami. Pak pro každou funkci f* ∈ L∗(*µ*⊗ˆ*ν*) *platí:*

∫ *f d*(*µ*⊗ˆ*ν*) = ∫ ∫ *f* (*x, y*) *dν*(*y*) *dµ*(*x*) = ∫ ∫ *f* (*x, y*) *dµ*(*x*) *dν*(*y*)*.*

*Důkaz.* Rovnost nejprve dokážeme pro případ *f* = *χE*, kde *E* ∈ A⊗ˆB. Podle Věty 2.4 existuje *F* ∈ A ⊗ B taková, že *E*△*F* je nulová, tedy

∫ *f d*(*µ*⊗ˆ*ν*) = (*µ*⊗ˆ*ν*)(*E*) = (*µ* ⊗ *ν*)(*F* )*.*

Podle Fubiniovy věty platí (*µ* ⊗ *ν*)(*F* ) = ∫ *ν*(*Fx*) *dµ*(*x*). Ukážeme-li, že

∫ *ν*(*Ex*) *dµ*(*x*) = ∫ *ν*(*Fx*) *dµ*(*x*)*,*

dokážeme tím první z dvou dokazovaných rovností věty pro případ *f* = *χE* (druhá rovnost plyne analogicky.) K tomu stačí ukázat, že *ν*(*Ex*) = *ν*(*Fx*) *µ*-s.v. Z definice nulové množiny víme, že existuje *N* ∈ A ⊗ B taková, že *E*△*F* ⊂ *N* a (*µ* ⊗ *ν*)(*N* ) = 0. Ze vztahu (1) plyne *ν*(*Nx*) = 0 *µ*-s.v. Dále zřejmě platí

*Ex*△*Fx* = (*E*△*F* )*x* ⊂ *Nx,*

tedy také *ν*(*Ex Fx*) = 0 *µ*-s.v., a tudíž *ν*(*Ex*) = *ν*(*Fx*) *µ*-s.v.

△

Dále lze postupňe ukázat platnost rovnosti pro jednoduché měřitelné funkce, nezáporné měřitelné funkce a funkce z L∗(*µ*⊗ˆ*ν*), stejňe jako v důkazu Věty 8.5.

Věta 8.7 (Součin Lebesgueových měr). *Pro p, q* ∈ N *platí:*

1. B*p*+*q* = B*p* ⊗ B*q,*
2. *λp*+*q* = *λp* ⊗ *λq.*

*Důkaz.* (i). Každý otevřený (*p* + *q*)-kvádr je kartézským součinem otevřeného *p*-kvádru a otevřeného *q*-kvádru. Necht’ *k* značí systém všech otevřených *k*- kvádrů. Pak platí

Q

B = *σ*{*U* × *V* : *U* ∈ Q *, V* ∈ Q } ⊂ *σ*{*A* × *B* : *A* ∈ B *, B* ∈ B } = B ⊗ B *.*

*p*+*q p q p q p q*

Pro druhou inkluzi stačí ukázat, že *A B p*+*q* kdykoliv *A p* a *B q*. Označme

× ∈ B ∈ B ∈ B

*p*+*q q*

*p*

D1 := {*A* ∈ B : *A* × *V* ∈ B kdykoliv *V* ∈ Q }*.*

Zřejmě *p* 1 a snadno lze ukázat, že 1 je *σ*-algebra. Platí tedy 1 = *p*. Dále označme

Q ⊂ D D D B

D2 := {*B* ∈ B*q* : *A* × *B* ∈ B*p*+*q* kdykoliv *A* ∈ B*p*}*.*

Platí Q*q* ⊂ D2 (protože D1 = B*p*) a D2 je opět *σ*-algebra, tudíž D2 = B*q* . *σ*- algebra B*p*+*q* tedy obsahuje všechny měřitelné obdélníky v R*p* ×R*q* , a musí tedy obsahovat i B*p* ⊗ B*q* .

(ii). Míry *λp*+*q* a *λp* ⊗ *λq* se shodují na otevřených kvádrech z Q*p*+*q* . Systém Q*p*+*q* je uzavřen na konečné průniky, generuje B*p*+*q* a existuje posloupnost otevřených kvádrů *Qi* ↗ R*p*+*q* konečné míry, tedy *λp*+*q* a *λp* ⊗ *λq* se shodují i na B*p*+*q* podle Věty 7.3.

V dalším budeme symbolem L∗(R*k*) zkráceňe značit prostor L∗(R*k,* B*k, λk*).

0

Důsledek 8.8 (Fubiniova věta v R*p*+*q* ). *Pro každou funkci f* ∈ L∗(R*p*+*q* ) *platí*

∫ *f* (*x, y*) *d*(*x, y*) = ∫ ∫ *f* (*x, y*) *dy dx* = ∫ ∫ *f* (*x, y*) *dx dy,*

*kde píšeme stručňe dx* := *dλp*(*x*)*, dy* := *dλq*(*y*)*, d*(*x, y*) := *dλp*+*q*(*x, y*)*.*

Důsledek 8.9. *Pro množinu A* ∈ B*p*+*q platí*

*λp*+*q*(*A*) = ∫

*π*1 *A*

*λq*(*Ax*) *dx* = ∫

*π*2 *A*

*λp*(*Ay*) *dy,*

*kde π*1 : (*x, y*) ›→ *x a π*2 : (*x, y*) ›→ *y jsou projekce.*

Důsledek 8.10. *Pro funkci f* ∈ L∗(R*p*+*q* ) *a množinu A* ∈ B*p*+*q platí*

∫ *f* (*x, y*) *d*(*x, y*) = ∫

*A*

*π*1 *A*

∫*Ax*

*f* (*x, y*) *dy dx* = ∫

*π*2 *A*

∫*Ay*

*f* (*x, y*) *dx dy.*

Příklad: Pro jednotkovou kouli *B*1 = *x*2 + *y*2 + *z*2 1 v R3 dostáváme podle Důsledku 8.9

{ ≤ }

*λ*3(*B*1) =

1 4

*π*(1 *z*2) *dz* = *π.*

∫

−

−1 3

# Přednáška 21.11.2023

1. Věta o substituci

Připomenutí: Pro funkci *f* : (*α, β*) → R a diferencovatelnou surjektivní mo- not´onní funkci *φ* : (*a, b*) → (*α, β*) platí

∫

∫

*b*

*f* (*φ*(*x*))|*φ*′(*x*)| *dx* =

*a*

*β*

*f* (*y*) *dy,*

*α*

má-li jedna strana smysl jako Newtonův integrál.

Tvrzení 9.1 (Lebesgueova míra je translačňe invariantní). *Pro každou B* ∈ B*n*

*a z* ∈ R*n platí*

*λn*(*B* + *z*) = *λn*(*B*)*.*

*Důkaz.* Plyne z věty o jednoznačnosti míry, nebot’ *λn* a míra *µ*(*B*) := *λn*(*B* +*z*),

*B* ∈ B*n*, se shodují na otevřených kvádrech.

Věta 9.2. *Bud’ L* : R*n* → R*n regulární lineární zobrazení a A* ∈ B*n. Pak*

*L*(*A*) ∈ B*n a platí λn*(*L*(*A*)) = | det *L*|*λn*(*A*)*.*

*Důkaz.* Každé lineární zobrazení mezi konečňerozměrnými prostory je spojité. Protože *L* je regulární, existuje (spojité) inverzní zobrazení *L*−1, a tedy *L*(*A*) = (*L*−1)−1(*A*) *n*.

∈ B

Podle známé věty z lineární algebry lze každé regulární lineární zobrazení *L* : R*n* R*n* vyjádřit jako složení konečňe mnoha “elementárních” lineárních zobrazení jednoho ze tří typů:

→

(i) *L*1 : (*x*1*, . . . , xi, . . . , xj, . . . , xn*) (*x*1*, . . . , xj, . . . , xi, . . . , xn*) (tedy *L*1

›→

prohazuje *i*-tou a *j*-tou souřadnici vektoru);

(ii) *L*2 : (*x*1*, . . . , xn*) (*x*1*, . . . , xn*−1*, xn* + *bx*1) (*b* R) (*L*2 přičte k *n*-té souřadnici *b*-násobek první souřadnice);

›→ ∈

1. *L*3 : (*x*1*, . . . , xn*) (*x*1*, . . . , xn*−1*, axn*) (*a* = 0) (*L*3 vynásobí *n*-tou souřadnici nenulovým faktorem *a*).

›→ ̸

Protože složené lineární zobrazení odpovídá součinu příslušných matic, a deter- minant součinu je součinem determinantu jednotlivých matic, stačí dokazovanou identitu ukázat pro případy *L* = *L*1*, L*2 a *L*3.

Míry *λnL*1 a *λn* se shodují na systému otevřených kvádrů. Podle věty o

jednoznačnosti míry se tedy shodují i na borelovské *σ*-algebře, a máme tedy

*λn*(*L*1(*A*)) = *λn*(*A*) = det *L*1 *λn*(*A*), *A n*.

| | ∈ B

Podle Fubiniovy věty platí

1

*λn*(*L*2(*A*)) = ∫

*πn−*1

(*L*2 (*A*))

*λ*1 (*L*2(*A*))(*x ,...,x*

*n−*1

) *d*(*x*1*, . . . , xn*−1)*,*

kde *πn*−1 : (*x*1*, . . . , xn*) ›→ (*x*1*, . . . , xn*−1). Pro řez množiny *L*2(*A*) pak z tvaru

*L*2 dostáváme

(*L*2(*A*))(*x*1 *,...,xn−*1 ) = *A*(*x*1 *,...,xn−*1 ) + *bx*1*,*

a protože *λ*1 je translačňe invariantní a *πn*−1(*L*2(*A*)) = *πn*−1(*A*), máme

*λn*(*L*2(*A*)) = ∫

*πn−*1

(*A*)

*λ*1 *A*(*x ,...,x*

*n−*1

) *d*(*x*1*, . . . , xn*−1) = *λn*(*A*)*.*

Jelikož det *L*2 = 1, ověřili jsme tím rovnost pro *L*2.

1

| |

Míry *λn* a *µ*(*A*) := *a* −1*λn*(*L*3(*A*)) se shodují na systému otevřených kvádrů, proto se shodují podle věty o jednoznačnosti i na borelovských množinách. Platí tedy *λn*(*L*3(*A*)) = |*a*|*λn*(*A*) = | det *L*3|*λn*(*A*). Tím je důkaz ukončen.

| |

Důsledek 9.3 (Lebesgueova míra je izometricky invariantní). *Je-li S* : R*n* → R*n izometrie (tzn.* ∥*S*(*x*) − *S*(*y*)∥ = ∥*x* − *y*∥*, x, y* ∈ R*n), pak λn*(*S*(*A*)) = *λn*(*A*)*, A* ∈ B*n.*

*Důkaz.* Podle věty z Geometrie 1 lze každou izometrii v R*n* zapsat ve tvaru

*S* : *x* ›→ *b* + *R*(*x*)*, x* ∈ R*n,*

kde *b* R*n* (“posunutí”) a *R* je ortogonální lineární zobrazení (tzn. *RT R* = *I*). Protože det *R* = 1 a *λn* je translačňe invariantní, dostáváme *λn*(*S*(*A*)) = *λn*(*A*) z Tvrzení 9.2.

| |

∈

## Pozn.:

1. Je-li *W* R*n* afinní podprostor dimenze meňsí než *n*, platí *λn*(*W* ) = 0. (Plyne snadno z Fubiniovy věty.)

⊂

1. Vzorec z Věty 9.2 platí i bez předpokladu regularity zobrazení *L*.

Důsledek 9.4 (Homogenita Lebesgueovy míry).

*λn*(*rA*) = |*r*|*nλn*(*A*)*, r* ∈ R*, A* ∈ B*n.*

Definice 9.1. Necht’ *U* ⊂ R*n* je otevřená a *f* : *U* → R*n* zobrazení třídy *C*1. Pak J *f* (*x*) := det *Df* (*x*) je *Jakobián funkce f v bodě x*, *x* ∈ *U* .

Definice 9.2. Necht’ *U* ⊂ R*n* je otevřená. Zobrazení *f* : *U* → R*n* je *difeomor- fismus*, je-li prosté, třídy *C*1 a platí-li J *f* (*x*) ̸= 0, *x* ∈ *U* .

Pozn.: Z věty o inverzním zobrazení plyne, že je-li *f* : *U* R*n* difeomorfismus, je obraz *f* (*U* ) otevřená množina a *f* −1 je třídy *C*1 na *f* (*U* ).

→

Věta 9.5 (Věta o substituci). *Bud’ U* ⊂ R*n otevřená, φ* : *U* → R*n difeomorfis- mus a f* : *φ*(*U* ) → R *Lebesgueovsky měřitelná funkce. Pak*

∫ *f* (*φ*(*x*)) |J *φ*(*x*)| *dx* = ∫

*U*

*φ*(*U* )

*f* (*y*) *dy,*

*má-li jedna strana smysl.*

Důkaz bude v navazující přednášce.

Důsledek 9.6. *Je-li navíc B* ⊂ *φ*(*U* ) *Lebesgueovsky měřitelná množina, platí*

∫*φ−*1 (*B*)

*f* (*φ*(*x*)) |J *φ*(*x*)| *dx* = ∫

*B*

*f* (*y*) *dy,*

*má-li jedna strana smysl.*

## Příklady:

1. Zobrazení *φ* : (*r, t*) ›→ (*r* cos *t, r* sin *t*) je difeomorfismus na *U* = (0*,* ∞) ×

(−*π, π*), J *φ*(*r, t*) = *r* a platí *λ*2(R2 \ *φ*(*U* )) = 0, proto

*λ*2(*B*) = ∫

0

*φ−*1 (*B*)

*r d*(*r, t*)*, B* ∈ B2*.*

1. Zobrazení *ψ* : (*r, s, t*) ›→ (*r* cos *s* cos *t, r* sin *s* cos *t, r* sin *t*) je difeomorfismus

na *U* = (0*,* ∞) × (−*π, π*) × (− *π , π* ), J *ψ*(*r, s, t*) = *r*2 cos *t* a platí *λ*3(R3 \

*ψ*(*U* )) = 0, proto

*λ*3(*B*) = ∫

2

*ψ−*1 (*B*)

2

*r*2 cos *t d*(*r, s, t*)*, B* ∈ B3*.*

0

# Přednáška 28.11.2023

1. Prostory *Lp*

Definice 10.1. Bud’ (*X, , µ*) prostor s mírou a funkce *f* : (*X,* ) R∗ měři- telná. Definujeme

A A →

∥*f* ∥*p* := ∫ |*f* |*p dµ ,* 1 ≤ *p <* ∞*,*

1

*p*

∥*f* ∥∞ := inf{*α* ≥ 0 : *µ*{*x* ∈ *X* : |*f* (*x*) *> α*} = 0}}*,*

L*p*(*X,* A*, µ*) := {*f* : (*X,* A) → (R∗*,* B∗) : ∥*f* ∥*p <* ∞}*,* 1 ≤ *p* ≤ ∞*.*

(Cˇasto budeme psát stručňe pouze L*p*(*µ*) nebo L*p*(*X*).)

Cvičení: V případě konečné množiny *X* ukažte, že

lim ∥*f* ∥*p* = ∥*f* ∥∞*.*

*p*→∞

Pozn.: Platí |*f* | ≤ ∥*f* ∥∞ *µ*-skoro všude.

Tvrzení 10.1 (H¨olderova nerovnost). *Necht’ f* ∈ L*p*(*µ*)*, g* ∈ L*q* (*µ*)*,* 1 ≤ *p, q* ≤

∞*,* 1 + 1 = 1*. Pak f* · *g* ∈ L1(*µ*) *a platí*

*p q*

∥*f* · *g*∥1 ≤ ∥*f* ∥*p* ∥*g*∥*q.*

*Důkaz.* Uvažujme nejprve případ *p* = 1, *q* = ∞. Pak

∥*fg*∥1 = ∫ |*f* (*x*)*g*(*x*)| *dµ*(*x*) ≤ ∥*g*∥∞ ∫ |*f* (*x*)| *dµ*(*x*) = ∥*f* ∥1∥*g*∥∞*.*

Dále předpokládejme, že 1 *< p, g <* . K důkazu nerovnosti použijeme pomocné lemma:

∞

Lemma 10.2 (Youngovo lemma). *Je-li a, b* ≥ 0 *a p, q >* 1 *takové, že* 1 + 1 = 1*,*

*pak*

*ab* ≤

*p q*

*ap bq*

+ *.*

*p q*

*Důkaz.* Necht’ *ab >* 0 jinak je nerovnost zřejmá). Protože logaritmus je konkávní funkce, platí

log

*ap bq*

+

*p q*

1 *p*

≥ *p* log *a*

1

+ log *bq q*

= log *a* + log *b* = log(*ab*)*.*

Z toho již plyne dokazovaná rovnost, nebot’ logaritmus je rostoucí funkce.

*Dokončení důkazu H¨olderovy nerovnosti.* Je-li *f p* = 0 nebo *g q* = 0, musí být *f g* = 0 s.v. a nerovnost zřejmě platí. Necht’ dále *f p >* 0 a *g q >* 0. Podle Youngovy nerovnosti platí

· ∥ ∥ ∥ ∥

∥ ∥ ∥ ∥

|*f* (*x*)|

∥*f* ∥*p*

|*g*(*x*)|

∥*g*∥*q*

·

≤

|*f* (*x*)|*p*

*p*∥*f* ∥*p*

*p*

|*g*(*x*)|*q*

*q*

*q*∥ *q , x* ∈ *X,g*∥

+

a zintegrováním dostaneme

∫ |*f* · *g*| *dµ*

∥*f* ∥*p* ∥*g*∥*q*

∥*f* ∥ ∥*g*∥ ≤ *p*∥*f* ∥*p* + *q*∥*g*∥*q* = 1*,*

*p*

*q*

*p q p q*

což je H¨olderova nerovnost.

Věta 10.3 (Minkowského nerovnost). *Jsou-li* 1 ≤ *p* ≤ ∞ *a f, g* ∈ L*p*(*µ*)*, pak také f* + *g* ∈ L*p*(*µ*) *a platí*

∥*f* + *g*∥*p* ≤ ∥*f* ∥*p* + ∥*g*∥*p.*

*Důkaz.* Je-li *p* = 1, nerovnost snadno plyne z trojúhelníkové nerovnosti |*f* +*g*| ≤

|*f* | + |*g*| zintegrováním. Je-li *p* = ∞, platí podle definice |*f* | ≤ ∥*f* ∥∞ s.v. a

|*g*| ≤ ∥*g*∥∞ s.v., tedy

|*f* + *g*| ≤ |*f* | + |*g*| ≤ ∥*f* ∥∞ + ∥*g*∥∞ s.v.*,* z čehož plyne ∥*f* + *g*∥∞ ≤ ∥*f* ∥∞ + ∥*g*∥∞.

Necht’ nyní 1 *< p <* ∞. Funkce *x* ›→ *xp* je konvexní na (0*,* ∞), tudíž

. *f* + *g* . |*f* | + |*g*| *p* |*f* |*p* + |*g*|*p*

*p*

≤

. 2 . ≤ 2 2 *,*

z čehož zintegrováním dostaneme

∥*f* + *g*∥*p* ≤ 2*p*−1(∥*f* ∥*p* + ∥*g*∥*p*) *<* ∞*.*

*p p p*

Tedy *f* + *g* ∈ L*p*(*µ*).

Položme *q* :=  *p* (platí tedy 1 + 1 = 1). Funkce |*f* + *g*|*p*−1 leží v L*q* (*µ*) a

*p* 1 *p q*

podle H¨olderovy nerovnosti platí

−

∫ (|*f* | · |*f* + *g*|*p*−1) *dµ* ≤ ∥*f* ∥*p*∥|*f* + *g*|*p*−1∥*q,*

∫ (|*g*| · |*f* + *g*|*p*−1) *dµ* ≤ ∥*g*∥*p*∥|*f* + *g*|*p*−1∥*q.*

Sečtením obou nerovností a s využitím identity

∥|*f* + *g*|*p*−1∥*q* = ∥*f* + *g*∥*p*−1

*p*

dostaneme

∫ |*f* + *g*|*p dµ* ≤ ∫ (|*f* | + |*g*|)|*f* + *g*|*p*−1 *dµ* ≤ (∥*f* ∥*p* + ∥*g*∥*p*)∥*f* + *g*∥*p*−1*,*

*p*

což je Minkowského nerovnost.

Pozn.: L*p*(*µ*) je tedy vektorový prostor a ∥ · ∥*p* je *seminorma* (tedy splňuje vlastnosti normy, s tou výjimkou, že z ∥*f* ∥*p* = 0 neplyne *f* = 0).

Definice 10.2. Necht’ 1 ≤ *p* ≤ ∞. Na množiňe L*p*(*µ*) definujeme ekvivalenci

*f* ∼ *g* ⇐⇒ *f* = *g µ* − skoro všude*.*

Dále klademe

*Lp*(*µ*) := L*p*(*µ*) |∼

(faktorprostor, formálňe množina tříd ekvivalence ∼).

Tvrzení 10.4. *Pro* 1 ≤ *p* ≤ ∞ *a f, g* ∈ L*p*(*µ*) *platí*

∥*f* − *g*∥*p* = 0 ⇐⇒ *f* ∼ *g.*

Důkaz: Plyne z Věty 6.1.

Důsledek: (*Lp*(*µ*)*,* ∥ · ∥*p*) je normovaný lineární prostor.

Věta 10.5. *Prostor Lp*(*µ*) *je úplný.*

[Důkaz: přednáška MA3]

# Konvergence posloupností funkcí

Pro reálné funkce *fn, f* definované na neprázdné množiňe *X* značíme symbolem

*fn* → *f bodovou* konvergenci *fn* k *f* (tedy pro každé *x* ∈ *X* platí *fn*(*x*) → *f* (*x*)).

Definice 11.1. Rěkneme, že funkce *fn* konvergují *stejnoměrňe* k funkci *f* na

množiňe *X* (značíme *fn* ⇒ *f* ), jestliže

(∀*ε >* 0)(∃*n*0 ∈ N)(∀*n* ≥ *n*0)(∀*x* ∈ *X*) : |*fn*(*x*) − *f* (*x*)| *< ε.*

Pozn.: Stejnoměrná konvergence implikuje bodovou konvergenci, ale ne nao- pak. Například funkce *xn* konvergují k nule bodově na (0*,* 1), ale ne stejnoměrňe.

Je-li speciálňe (*X,* A*, µ*) prostor s mírou, máme navíc konvergenci *skoro všude*

(*fn*

→ *f* s.v.) a *Lp-konvergenci* (*f*

*Lp*

*n* → *f* ⇐⇒ ∥*fn*

— *f* ∥*p*

→ 0), 1 ≤ *p* ≤ ∞.

Definice 11.2. Bud’ (*X, , µ*) prostor s mírou a *fn, f* : (*X,* ) R měřitelné funkce, *n* N. Rěkneme, že *funkce fn konvergují k funkci f podle míry µ* (píšeme

∈

A A →

*µ*

*fn* → *f* ), jestliže

*ε >* 0 : lim

∀

*n*→∞

*µ*{*x* ∈ *X* : |*fn*(*x*) − *f* (*x*)| ≥ *ε*} = 0*.*

Věta 11.1. *Pro* 1 ≤ *p* ≤ ∞ *a fn, f* ∈ *Lp*(*µ*) *platí:*

*f Lp µ*

*n* → *f* =⇒ *fn* → *f.*

Tvrzení 11.2 (Cěbyševova nerovnost). *Necht’* 1 *p < , f Lp*(*µ*) *a c >* 0*. Pak*

≤ ∞ ∈

*p .*

*Důkaz.* Platí

*p .*

*µ*{*x* ∈ *X* : |*f* (*x*)| ≥ *c*} ≤

∥*f* ∥*p*

*cp*

*µ*{|*f* | ≥ *c*} =

∫{|*f* |≥*c*}

1 *dµ* ≤

∫{|*f* |≥*c*}

|*f* | *p*

*c*

*dµ* ≤

∫ |*f* | *p*

*c*

*dµ* =

∥*f* ∥*p*

*cp*

*Důkaz Věty 11.1.* Je-li *p* = ∞ a *ε >* 0, pak existuje *n*0 takové, že ∥*fn* −*f* ∥∞ *< ε*, a tedy *µ*{|*fn* − *f* | ≥ *ε*} = 0, pro *n > n*0.

Je-li *p <* ∞, plyne tvrzení přímo z Cěbyševovy nerovnosti.

# Přednáška 5.12.2023

Věta 11.3 (Jegorov). *Necht’ µ*(*X*) *<* ∞*, fn, f jsou reálné měřitelné funkce na X, fn* → *f µ-s.v., a ε >* 0*. Pak existuje E* ∈ A *taková, že µ*(*E*) *< ε a fn* ⇒ *f na X* \ *E.*

*Důkaz.* Existuje množina *N* nulové míry taková, že *fn*(*x*) *f* (*x*), *x X N* . Položme

→ ∈ \

*Am,k* := {*x* ∈ *X* : |*fn*(*x*) − *f* (*x*)| *<* 1 pro každé *n* ≥ *m*}*, m, k* ∈ N*.*

*k*

Pak pro každé *k* platí *A*1*,k* ⊂ *A*2*,k* ⊂ *. . .* a z definice konvergence platí

\

(*X* \ *Am,k*) ⊂ *N.*

*m*

Podle věty o spojitosti míry a díky konečnosti *µ* tedy existuje *m*(*k*) takové, že *µ*(*X* \ *Am*(*k*)*,k*) *< ε*2−*k*. Položme *E* := ∞*k*=1(*X* \ *Am*(*k*)*,k*). Zřejmě *µ*(*E*) *< ε*. Necht’ *x* ∈ *X* \ *E*. Pak *x* ∈ *Am*(*k*)*,k* pro všechna *k*, a tedy |*fn*(*x*) − *f* (*x*)| *<*

S

1

*k* kdykoliv *n* ≥ *m*(*k*). Tím je dokázána stejnoměrná konvergence *fn* k *f* na

*X* \ *E*.

Důsledek 11.4. *Jestliže µ*(*X*) *< a fn, f jsou reálné měřitelné funkce na X*

∞

*µ*

*takové, že fn* → *f µ-s.v., pak fn* → *f.*

*Důkaz.* Pro *ε, δ >* 0 platí

*µ*{|*fn* − *f* | ≥ *δ*} = *µ*({|*fn* − *f* | ≥ *δ*} ∩ *E*) + *µ*({|*fn* − *f* | ≥ *δ*} \ *E*)*,*

kde *E* je množina z Jegorovovy věty. První sčítanec je pak meňsí než *ε* a druhý je roven nule pro dostatečňe velká *n*.

Pozn.: Funkce *fn* = *χ*[*n,*∞) konvergují bodově k nule, ale nikoliv podle míry

*λ*1. Předpoklad konečnosti míry je tedy v Jegorovově větě nutný.

*µ*

Cvičení: Jestliže *fn* → *f* na prostoru s konečnou mírou *µ*, pak existuje vy-

braná podposloupnost (*fnj* ) taková, že *fnj* → *f µ*-s.v.

Věta 11.5. *Necht’ µ*(*X*) *<* ∞ *a* 1 ≤ *p < q* ≤ ∞*. Pak Lq*(*µ*) ⊂ *Lp*(*µ*) *a pro*

*fn, f* ∈ *Lq*(*µ*) *platí:*

*f Lq Lp*

*n* → *f* =⇒ *fn* → *f.*

*Důkaz.* Je-li *f* ∈ *Lq*, platí

∫ |*f* |*p* = ∫

|*f* |≤1

|*f* |*p* + ∫

|*f* |*>*1

|*f* |*p* ≤ *µ*(*X*) + ∫ |*f* |*q <* ∞*,*

tedy *f* ∈ *Lp*. Necht’ dále *f*

*Lq*

*n* → *f* a *ε >* 0. Pro *δ >* 0 je

∫ |*fn* − *f* |*p* = ∫

|*fn*−*f* |≤*δ*

|*fn* − *f* |*p* + ∫

|*fn*−*f* |*>δ*

|*fn* − *f* |*p* ≤ *δpµ*(*X*) + *δp*−*q* ∫ |*fn* − *f* |*q.*

Zvolme *δ >* 0 tak malé, aby *δpµ*(*X*) *< ε* . K tomuto *δ* pak existuje *n*0 takové,

*n*

2

*n*0. Pak je

*n*

0

že *δp*−*q* ∫ |*f* − *f* |*q < ε* pro všechna *n* ≥2 ∫ |*f* − *f* |*p < ε* pro *n* ≥ *n* ,

a tím je *f*

*Lp*

*n* → *f* dokázáno.

Příklad: *f* (*x*) = *x*− 2 leží v *L*1(0*,* 1), ale nikoliv v *L*2(0*,* 1). Funkce *f* (*x*) = *x*−1

1

leží v *L*2(1*,* ∞), ale nikoliv v *L*1(1*,* ∞).

# 12 Radon-Nikodymova věta

Tvrzení 12.1. *Bud’* (*X, , µ*) *prostor s mírou a f* 0 *měřitelná funkce na X. Pak předpis*

A ≥

*ν* : *A* ›→ ∫ *f dµ, A* ∈ A*,*

*A*

*definuje míru na* (*X,* A) *a pro každou měřitelnou funkci g na X platí*

∫ *g dν* = ∫ *g* · *f dµ,*

*má-li jedna strana smysl.*

*Důkaz.* Zřejmě *ν*( ) = 0 a *ν* 0. Ukážeme *σ*-aditivitu. Jsou-li *An* po dvou disjunktní, je

∅ ≥ ∈ A

*ν*([ *An*) = ∫ (*f* · *χ*S*n An* ) *dµ* = ∫ Σ(*f* · *χAn* ) *dµ* = Σ ∫

∫ ∫ ·

*An*

*n*

*n*

*n*

*f dµ* = Σ *ν*(*An*)*.*

*n*

Rovnost *g dν* = *g f dµ* platí z definice, pokud *g* je charakteristickou funkcí měřitelné množiny. Standardním způsobem platnost rovnosti rozšíříme postupňe pro jednoduché měřitelné funkce, nezáporné měřitelné a nakonec pro měřitelné, pro ňež integrál existuje.

Pozn.: Zřejmě platí: *µ*(*A*) = 0 =⇒ *ν*(*A*) = 0, *A* ∈ A.

Definice 12.1. Bud’te *µ, ν* dvě míry na (*X,* A). Rěkneme, že míra *ν* je *absolutňe spojitá* vzhledem k míře *µ* (píšeme *ν* ≪ *µ*), jestliže

*µ*(*A*) = 0 =⇒ *ν*(*A*) = 0*, A* ∈ A*.*

Věta 12.2 (Radon-Nikodym). *Bud’te µ, ν dvě σ-konečné míry na* (*X,* A) *ta- kové, že ν* ≪ *µ. Pak existuje nezáporná měřitelná funkce f na X taková, že*

∫

*ν*(*A*) =

*A*

*f dµ, A* ∈ A*.*

Definice 12.2. Funkci *f* z předchozí věty nazýváme (Radon-Nikodymovou)

*hustotou* míry *ν* vyhledem k *µ* a píšeme

*dν*

*f* (*x*) = *dµ* (*x*)*, x* ∈ *X.*

Věta 12.3 (Radon-Nikodym, speciální případ). *Bud’te µ, ν dvě konečné míry na* (*X,* A) *takové, že ν*(*A*) ≤ *µ*(*A*)*, A* ∈ A*. Pak existuje měřitelna´ funkce f na X splňující* 0 ≤ *f* ≤ 1 *µ-s.v. a*

∫

*ν*(*A*) =

*A*

*Důkaz.* Označme funkcionál

*f dµ, A* ∈ A*.*

J *g* := ∫ *g*2 *dµ* − 2 ∫ *g dν, g* ∈ *L*2(*µ*)*.*

(Funkcionál je dobře definován, protože *L*2(*µ*) ⊂ *L*1(*µ*) ⊂ *L*1(*ν*).) Dále označme

*c* := inf{J *g* : *g* ∈ *L*2(*µ*)}. Platí

J *g* ≥ ∫ *g*2 *dµ* − 2 ∫ |*g*| *dµ* = ∫ (|*g*| − 1)2 *dµ* − *µ*(*X*) ≥ −*µ*(*X*)*,*

tedy *c µ*(*X*) *>* . Bud’ (*fn*) *L*2(*µ*) posloupnost taková, že *fn c*. Ukážeme, že (*fn*) je cauchyovská v *L*2(*µ*).

≥ − −∞ ⊂ J →

Pro libovolné *g, h* ∈ *L*2(*µ*) platí

J *g* + J *h* = ∫ (*g*2 + *h*2) *dµ* − 2 ∫ (*g* + *h*) *dν,*

−2J ( *g*+*h* ) = − ∫ (*g*+*h*)2 *dµ* + 2 ∫ (*g* + *h*) *dν,*

2

2

sečtením pak dostaneme

J *g* + J *h* − 2J ( *g*+*h* ) = 1 ∫ (*g* − *h*)2 *dµ* = 1 ∥*g* − *h*∥2*.*

2 2 2 2

Z toho plyne, že

∥*fm* − *fn*∥2

2

= 2 J *fm* + J *fn* − 2J ( *fm*+*fn* )

≤ 2 (J *fm* + J *fn* − 2*c*) → 0*, m, n* → ∞*,*

2

tedy (*fn*) je cauchyovská v *L*2(*µ*).

∫ ∫

Dále platí *f* 2 *dµ* → *f* 2 *dµ* (protože norma je vždy spojitá), a

*n*

∫ *fn dν* − ∫ *f dν* ≤ ∫ |*fn* − *f* | *dν* ≤ ∫ |*fn* − *f* | *dµ* → 0*,* protože *fn* → *f* i v *L*1(*µ*). Platí tedy J *fn* → *f* , takže J *f* = *c*.

. .

Bud’te nyní *A* ∈ A a *t* ∈ R libovolné. Protože J *f* ≤ J (*f* + *tχA*), platí

0 ≤ J (*f* + *tχA*) − J *f* = ∫ ((*f* + *tχA*)2 − *f* 2) *dµ* − 2 ∫ *tχA dν*

= ∫ *f* · 2*tχA dµ* + *t*2*µ*(*A*) − 2*tν*(*A*)

= 2*t* ∫ *f dµ* − *ν*(*A*) + *t*2*µ*(*A*)*.*

*A*

V posledním řádku je kvadratický polynom v *t*, který nabývá minima v *t* = 0, tedy jeho lineární člen musí být roven nule, neboli

∫

*ν*(*A*) = *f dµ.*

*A*

*f* je tedy hustotou *dν* . Zbývá ukázat, že 0 ≤ *f* ≤ 1 *µ*-s.v. Platí

*dµ*

0 ≤ ∫ (*f* − 1)+ *dµ* = ∫

{*f>*1}

(*f* − 1) *dµ* = ∫

{*f>*1}

*f dµ* − ∫

{*f>*1}

1 *dµ*

= *ν*({*f >* 1}) − *µ*({*f >* 1}) ≤ 0*,*

tedy (*f* − 1)+ = 0 *µ*-s.v., neboli *f* ≤ 1 *µ*-s.v. Podobňe platí

0 ≤ ∫ *f* − *dµ* = − ∫

{*f<*0}

*f dµ* = −*ν*({*f <* 0}) ≤ 0*,*

tedy *f* − = 0 *µ*-s.v., což znamená, že *f* ≥ 0 *µ*-s.v.

# Přednáška 12.12.2023

*Důkaz Radon-Nikodymovy věty.* Necht’ nejprve *µ, ν* jsou konečné míry na (*X,* A), *ν* ≪ *µ*. Použijeme Větu 12.3 pro míry *ν* ≤ *µ* + *ν*. Existuje tedy měřitelná funkce *h*, 0 ≤ *h* ≤ 1, taková, že

∫

∫

∫

a tedy

*ν*(*A*) = *h d*(*µ* + *ν*) = *h dµ* +

*A A A*

*h dν, A* ∈ A*,*

∫ (1 − *h*) *dν* = ∫

*A*

*A*

*h dµ, A* ∈ A*.*

Standardním postupem snadno odvodíme, že pro každou nezápornou měřitelnou funkci *g* platí

∫ *g*(1 − *h*) *dν* = ∫ *gh dµ.*

Specielňe dostaneme

*ν*{*h* = 1} = *h d*(*µ* + *ν*) = *µ*{*h* = 1} + *ν*{*h* = 1}*,*

∫

{*h*=1}

tedy *µ h* = 1 = 0, a protože *ν µ*, také *ν h* = 1 = 0. Platí tedy *h <* 1 (*µ* + *ν*)-s.v.

{ } ≪ { }

Volbou *g* :=  1 *χA* ve výše uvedené rovnosti dostaneme

1−*h*

*ν*(*A*) = ∫ *h dµ, A* ∈ A*,*

1 − *h*

*A*

S

tedy *f* = *h*

1−*h*

*dµ*

je hledaná hustota *dν* .

Jsou-li *µ, ν σ*-konečné, existuje rozklad *X* = *i Ei* na měřitelné množiny s

*µ*(*Ei*) *<* ∞, *ν*(*Ei*) *<* ∞, *i* ∈ N. Pro konečné restrikce *ν*|*Ei* ≪ *µ*|*Ei* najdeme

hustoty *fi* na *Ei*, a výslednou hustotu sestrojíme jako

*f* (*x*) := *fi*(*x*)*, x* ∈ *Ei, i* = 1*,* 2*, . . . .*

Pozn.: Hustota *f* = *dν* je určena jednoznačňe modulo ekvivalence ∼ (viz

*dµ*

Důsledek 6.2).

Definice 12.3. Rěkneme, že dvě míry *µ, ν* na témže měřitelném prostoru (*X,* A) jsou *vzájemňe singulární*, nebo také *ortogonální* (píšeme *µ* ⊥ *ν*), jestliže existuje množina *S* ∈ A taková, že *µ*(*S*) = 0 a *ν*(*X* \ *S*) = 0.

## Příklady:

1. Je-li *x* ̸= *y*, pak pro Diracovy míry platí *δx* ⊥ *δy*.
2. *λ*1 ⊥ *δx* pro každý *x* ∈ R.
3. *λ*1 ⊥ *µ*, kde *µ* je aritmetická míra na množiňe celých čísel.

Věta 12.4 (Rozklad míry na absolutňe spojitou a singulární část). *Bud’te µ, ν dvě σ-konečné míry na témže měřitelném prostoru. Pak existuje rozklad ν* = *νa* +*νs na míry νa, νs takový, že νa µ a νs µ. Míry νa a νs jsou jednoznačňe určeny.*

≪ ⊥

Pozn.: Míra *νa* se nazývá *absolutňe spojitá část* a míra *νs singulární část* míry

*ν* vzhledem k *µ*.

*Důkaz.* Bud’ *fµ* :=  *dµ* Radon-Nikodýmova hustota. Označme *A* := {*fµ >* 0} a *B* := {*fµ* = 0}; zřejmě *X* = *A* ∪ *B* je rozklad. Dále položme

*d*(*µ*+*ν*)

*νa*(·) := *ν*(· ∩ *A*)*, νs*(·) := *ν*(· ∩ *B*)*.*

Zřejmě *ν* = *νa* + *νs*. Dále platí *νs*(*A*) = 0 a *µ*(*B*) = 0, tedy *νs µ*. A pokud

⊥

*µ*(*E*) = 0 pro ňejakou měřitelnou množinu *E*, pak

∫

0 = *µ*(*E*) = *fµ d*(*µ* + *ν*)*,*

*E*

tedy *fµ* = 0 *ν*-s.v. na *E*, což znamená, *ν*(*E* ∩ *A*) = 0 (podle definice *A*), tedy

*νa*(*E*) = 0. Je tedy *νa* ≪ *µ*.

Ukážeme ještě jednoznačnost rozkladu. Necht’ *ν* = *νa*′ + *νs*′ je jiný rozklad takový, že *νa*′ ≪ *µ* a *νs*′ ⊥ *µ*. Ukážeme, že

*νs*′ (*A*) = 0 = *νa*′ (*B*)*.* (2)

Z toho pak plyne pro každou *E* ∈ A

*νs*′ (*E*) = *νs*′ (*E* ∩ *B*) = *νs*′ (*E* ∩ *B*) + *νa*′ (*E* ∩ *B*) = *ν*(*E* ∩ *B*) = *νs*(*E*)*, νa*′ (*E*) = *νa*′ (*E* ∩ *A*) = *νa*′ (*E* ∩ *A*) + *νs*′ (*E* ∩ *A*) = *ν*(*E* ∩ *A*) = *νa*(*E*)*.*

Stačí tedy ověřit (2). Protože *νs*′ ⊥ *µ*, existuje měřitelná množina *S* taková, že

*µ*(*S*) = 0 a *νs*′ (*X* \ *S*) = 0. Pak

0 = *µ*(*S* ∩ *A*) = ∫

*S*∩*A*

*fµ d*(*µ* + *ν*)*.*

Protože *fµ >* 0 na *A*, musí být (*µ* + *ν*)(*S* ∩ *A*) = 0, tedy i *ν*(*S* ∩ *A*) = 0 a *νs*′ (*S* ∩ *A*) = 0, tudíž *νs*′ (*A*) = *νs*′ (*A* ∩ *S*) + *νs*′ (*A* \ *S*) = 0. Dále (z definice *B*) platí *µ*(*B*) = 0 a *νa*′ ≪ *µ*, tedy i *νa*′ (*B*) = 0. Tím je (2) ověřeno a důkaz ukončen.

# Věta o rozšíření míry

Definice 13.1. Nezáporná množinová funkce *µ* : A → [0*,* ∞] definovaná na *algebře* množin A ⊂ P(*X*) je *konečňe aditivní*, jestliže *µ*(*A* ∪ *B*) = *µ*(*A*) + *µ*(*B*), kdykoliv *A, B* ∈ A a *A* ∩ *B* = ∅.

Pozn.: Konečňe aditivní množinová funkce je zřejmě monot´onní (tedy *A* ⊂

*B* =⇒ *µ*(*A*) ≤ *µ*(*B*)).

Příklad: Množinová funkce

(

*µ*(*A*) := 0*, A* ⊂ N konečná*,*

∞*, A* ⊂ N nekonečná

je konečňe aditivní množinová funkce na P(N), která není *σ*-aditivní.

Definice 13.2. Necht’ *X* ≠ ∅ a A je algebra podmnožin *X*. Rěkneme, že funkce

*µ*˜ : A → [0*,* ∞] je *pramíra*, jestliže

(i) *µ*˜(∅) = 0,

(ii) pro libovolné množiny *Ai* ∈ A po dvou disjunktní a takové, že i S∞*i*=1 *Ai* ∈

A, platí

[ *A*

Σ

!

∞

*µ*˜ *i*

*i*=1

∞

= *µ*˜(*Ai*)*.*

*i*=1

Pozn.: Vlastnost (ii) budeme nazývat *σ*-aditivitou, stejňe jako u míry. Rozdíl je v tom, že na algebře musíme navíc předpokládat, že i spočetné sjednocení množin leží v algebře.

Věta 13.1 (Hahn-Kolmogorovova věta o rozšíření míry). *Bud’ µ*˜ *pramíra na algebře* A *podmnožin množiny X. Pak existuje míra µ na σ*A *taková, že µ*˜ = *µ na* A*. Je-li µ*˜ *σ-konečná, je µ jednoznačňe určena.*

[Bez důkazu (bude v navazující přednášce)]

Tvrzení 13.2. *Bud’ µ*˜ : A → [0*,* ∞) konečná*, konečňe aditivní funkce na algebře*

A *splňující µ*˜(∅) = 0*. Pak µ*˜ *je σ-aditivní právě tehdy, když*

*Ai* ∈ A*, Ai* ↘ ∅ =⇒ *µ*˜(*Ai*) → 0*.* (3)

Pozn: Vlastnosti (3) se říká spojitost *µ*˜ v prázdné množiňe.

S

*Důkaz.* =⇒: Necht’ *µ*˜ je *σ*-aditivní a *Ai* ∈ A, *Ai* ↘ ∅. Pak *A*1 = *i*∞=1(*Ai* \ *Ai*+1) a množiny *Ai* \ *Ai*+1 jsou po dvou disjunktní, tedy

∞

Σ

*µ*˜(*A*1) = *µ*˜(*Ai* \ *Ai*+1) *<* ∞*.*

*i*=1

Rovňež platí *An* = S∞*i*=*n*(*Ai* \ *Ai*+1), tedy

∞

*µ*˜(*An*) = *µ*˜(*Ai* \ *Ai*+1) → 0*, n* → ∞*.*

Σ

*i*=*n*

S

⇐=: Necht’ nyní platí (3), *Bi* ∈ A jsou po dvou disjunktní a *A* := ∞*i*=1 *Bi* ∈

. Pro množiny *An* := *A* (*B*1 *Bn*) platí *An* , tedy *µ*˜(*An*) 0. Z

A \ ∪ · · · ∪ ↘ ∅ →

konečné aditivity *µ*˜ máme

*n*

Σ

*µ*˜(*A*) − *µ*˜(*An*) = *µ*˜(*A* \ *An*) = *µ*˜(*Bi*)*,*

*i*=1

a limitním přechodem *n* → ∞ dostaneme *µ*˜(*A*) = Σ∞*i*=1 *µ*˜(*Bi*).

# Přednáška 19.12.2023

## Příklad:

1. Označme symbolem A0 systém podmnožin R obsahující prázdnou množinu a všechna konečná sjednocení intervalů typu (*a, b*] a (*a,* ∞), *a* ∈ [−∞*,* ∞), *b* ∈ R. Lze snadno nahlédnout, že A0 je algebra, a definujme množinovou

funkci *λ*˜ na A0 jako součet délek příslušných (disjunktních) intervalů.

Lze ukázat, že *λ*˜ je *σ*-aditivní množinová funkce, tedy pramíra, a jejím

rozšířením na *σ*A0 = B(R) je Lebesgueova míra *λ*1.

1. Na algebře A0 z předchozího příkladu uvažujme množinovou funkci

(

*µ*˜(*A*) := 0*, A* = ∅*,*

∞*, A* ̸= ∅*.*

*µ*˜ je zřejmě pramíra, nemá ale jednoznačné rozšíření na *σ*A0. Jedním

možným rozšířením je míra definovaná steným předpisem jako *µ*˜ (tedy

0 pro prázdnou množinu a pro všechny neprázdné množiny), jiným rozšířením je aritmetická míra, nebo její libovolný kladný násobek.

∞

Příklad. Položme *X* := {0*,* 1}N (posloupnosti 0 − 1) a pro *n* ∈ N označme Π*n* : *X* → {0*,* 1}*n* projekci do prvních *n* souřadnic. Dále označme

∞

[ 1 *n*

A := Π−*n* (P{0*,* 1} )*.*

*n*=1

Systém A tvoří algebru a definujeme na ní množinovou funkci předpisem: Je-li

*A* ∈ A, pak *A* = Π*n*−1(*B*) pro ňejaké *n* ∈ N a *B* ⊂ {0*,* 1}*n*; klademe

card *B*

*µ*˜(*A*) := *.*

2*n*

*µ*˜ je korektňe definovaná konečňe aditivní množinová funkce.

Na množiňe *X* zavedeme metriku

∞

Σ |*x* − *y* |*i i* ∈

*d*(*x, y*) := *, x, y X.*

2*i*

*i*=1

Potřebujeme tyto znalosti z matematické analýzy (cvičení):

* 1. Konvergence posloupnosti v (*X, d*) je ekvivalentní konvergenci posloup- ností všech souřadnic.
  2. (*X, d*) je kompaktní metrický prostor.
  3. Každá množina *A* ∈ A je otevřená i uzavřená v (*X, d*).

Jsou-li *An* ∈ A takové, že *An* ↘ ∅, pak z kompaktnosti *An* plyne, že exis- tuje *n*0 takové, že *An* = pro *n > n*0. Pak ale jistě *µ*˜(*An*) 0, je tedy splňena podmínka (3) a tudíž *µ*˜ je pramíra. Podle Hahn-Kolmogorovovy věty tedy existuje její jednoznačné rozšíření na míru *µ* na := *σ* . Míra *µ* je pravděpodobnostní míra a má význam rozložení pravděpodobnosti pro posloup- nost nezávislých opakování pokusu hodu mincí.

∅ →

B A

# Distribuční funkce

Definice 14.1. Bud’ *µ* konečná borelovská míra na R. Pak

*Fµ*(*x*) := *µ*((−∞*, x*])*, x* ∈ R

je *distribuční funkce* míry *µ*.

Tvrzení 14.1. (1) *Fµ je neklesající,*

(2) *F* (−∞) := lim*x*→−∞ *Fµ*(*x*) = 0*, F* (∞) := lim*x*→∞ *Fµ*(*x*) *<* ∞*,*

* 1. *Fµ je zprava spojitá.*

Důkaz: Tvrzení snadno plyne z monotonie a spojitosti míry. □

Věta 14.2. *Necht’ funkce F* : R R *má vlastnosti (1), (2) a (3). Pak existuje právě jedna konečná borelovská míra µ na* R *taková, že Fµ* = *F.*

→

Důkaz: Bud’ A0 algebra generovaná intervaly (*a, b*], (*a,* ∞), *a* ∈ [−∞*,* ∞),

*b* ∈ R. KaždouSmnožinu *A* ∈ A0 můžeme vyjádřit jako disjunktní konečné

sjednocen´ı *A* =

*k i*=1

(*ai, bi*] a definujeme mnoˇzinovou funkci na A0 pˇredpisem

*k*

Σ

*µ*˜(*A*) := (*F* (*bi*) − *F* (*ai*))*.*

*i*=1

Snadno lze ověřit, že *µ*˜ je korektňe definovaná a konečňe aditivní na 0. Ukážeme, že *µ*˜ je pramíra. K tomu stačí ukázat spojitost v prázdné množiňe. Necht’ tedy *An* 0, *An* , a bud’ *ε >* 0 dáno. Protože *F* má konečné limity v a , existuje *M >* 0 takové, že

A

∈ A ↘ ∅ −∞ ∞

*ε F* (−*M* ) + (*F* (∞) − *F* (*M* )) *<* 2 *,*

a tedy omezené množiny *Bn* := *An* ∩ (−*M, M* ] ∈ A0 splňují

*ε µ*˜(*Bn*) ≥ *µ*˜(*An*) − 2 *.*

Vyjádřeme *Bn* ve tvaru disjunktního sjednocení *Bn* := S*kn* (*an, bn*] (zde *an, bn* ∈

*i*=1

*i*

*i*

*i*

*i*

S*kn* (*an* + *δn, bn*] plat´ı

R). Protoˇze *F* je zprava spojit´a, existuje *δn >* 0 takov´e, ˇze pro mnoˇzinu *Cn* :=

*i*=1 *i i*

*ε µ*˜(*Bn* \ *Cn*) *<* 2*n*+1 *.*

Množiny *Kn* := *C*1 ∩ · · · ∩ *Cn* jsou kompaktní a splňují

∞ ∞

*Kn* ↘ \ *Ci* ⊂ \ *Ai* = ∅*,*

*i*=1

*i*=1

tedy existuje *n*, pro ňež je *Kn* = ∅, a tedy i *C*1 ∩ · · · ∩ *Cn* = ∅. Pak platí

*µ*˜(*Bn*) =

*n*

*µ*˜ *Bn* \

[

*i*\=1

*Ci*!

= *µ*˜

*n*

*i*=1

[

(*Bn* \ *Ci*)!

≤ *µ*˜

*n*

*i*=1

(*Bi* \ *Ci*)!

≤ Σ *µ*˜(*B* \ *C* ) *<* Σ *ε < ε .*

*i*=1

*i*=1

*n*

*n*

*i*

*i*

2*i*+1

2

Celkem tedy máme *µ*˜(*An*) *< ε*, a protože *ε* bylo zvoleno libovolňe malé, dokázali jsme, že *µ*˜(*An*) ↘ 0. *µ*˜ je tedy konečná pramíra na A0 a podle Hahn-Kolmogo- rovovy věty existuje právě jedno rozšíření na míru *µ* na *σ*A0 = B(R). □

## Příklady:

1. *F* (*x*) = (0*, x < a,* je distribuční funkce Diracovy míry *δ* .

*a*

1 *x* ≥ *a,*

2. Jsou-li −∞ *< a*1 *< a*2 *<* · · · *< ak <* ∞ a *t*1*, . . . , tk >* 0, pak

0*, x < a*1*,*

*F* (*x*) =

*t*1 + · · · + *ti, x* ∈ [*ai, ai*+1)*, i* = 1*, . . . , k* − 1*, t*1 + · · · + *tk, x* ≥ *ak,*

je distribuční funkce míry *µ* = *t*1*δa*1 + · · · + *tkδak* .

3. Je-li *f* ∈ *L*1(*λ*), *f* ≥ 0, pak

∫

*F* (*x*) =

*x*

*f* (*t*) *dt, x* ∈ R*,*

−∞

∫

je distribuční funkce míry *µ*(*B*) = *B f* (*t*) *dt*, *B* ∈ B(R).

Definice 14.2. Konečná borelovská míry *µ* na R je

* *diskrétní*, jestliže existuje spočetná množina *S* ⊂ R taková, že *µ*(R\*S*) = 0;
* *neatomická*, jestliže *µ*({*x*}) = 0 pro každý *x* ∈ R.

## Cvičení:

1. Je-li *µ* zároveň diskrétní a neatomická, je nulová.

Σ Σ

1. Každá diskrétní míra je tvaru *µ* = *i*∞=1 *tiδai* pro ňejaké *ti* ≥ 0 a *ai* ∈ R,

*i ti <* ∞.

1. *µ* je neatomická ⇐⇒ *F* je spojitá.

# Přednáška 9.1.2024

Příklad: Cantorova funkce Položme *C*0 = [0*,* 1] a indukcí definujme množiny

1

*C* = *C*

*n*

3

*n*−1

∪ 2 1

*, n* = 1*,* 2*, . . .*

(platí *C*0 ⊃ *C*1 ⊃ *C*2 ⊃ *. . .* a *Cn* jsou neprázdné kompaktní). Množina

3 + 3 *Cn*−1

∞

\

*C* = *Cn*

*n*=1

se nazývá *Cantorovo diskontinuum*. Platí:

* *λ*1(*C*) = 0,
* Cˇíslo *x* ∈ [0*,*Σ1] patří do *C* právě tehdy, když je lze vyjádřit ve trojkovém

*j*=1 3*j*

*j*

rozvoji *x* =

∞

*xj*

s pomoc´ı ˇc´ıslic *x*

∈ {0*,* 2}, *j* = 1*,* 2*, . . .* .

Bud’ *C* ⊂ [0*,* 1] Cantorovo diskontinuum. *Cantorovu funkci FC* definujeme následovňe. Klademe *FC*(*x*) = 0 pro *x* ≤ 0 a *FC*(*x*) = 1 pro *x* ≥ 1. Dále *x* ∈ (0*,* 1) vyjádříme v trojkovém rozvoji

∞

Σ

*x* = *xj*

3*j*

(*xj*

∈ {0*,* 1*,* 2})*,*

*j*=1

označíme *n*(*x*) := inf{*j* ∈ N : *xj* = 1} a klademe

*n*(*x*)

Σ ∈

*F* (*x*) := min{*xj,* 1} *, x* (0*,* 1)*.*

*C j*

2

*j*=1

(Je třeba ověřit, že hodnota *FC*(*x*) je korektňe, tedy jednoznačňe určená, i když

*x* nemá jednoznačný rozvoj v trojkové soustavě!)

Funkce *FC* je spojitá, neklesající a je distribuční funkcí *Cantorovy míry µC*, která je neatomická, ale přitom je singulární vzhledem k Lebesgueově míře.

Σ

Ukažme nejprve monotonii *FC*. Bud’te 0 ≤ *x < y* ≤ 1, *x* = *j*∞=1 *xj*3−*j*,

0

*y* = Σ∞*j*=1

*yj*3−*j*, a necht’ *xj* = *yj* pro 1 ≤ *j < j*0 a *xj*

*< yj*0 . Pokud *xj* = *yj* = 1

pro ňekteré *j < j*0, pak zřejmě *FC*(*x*) = *FC*(*y*). Necht’ naopak *n*(*x*)*, n*(*y*) ≥ *j*0,

a označme *q* := Σ*j*0 −1 2−*j* min{1*, xj*}. Je-li *xj* = 0, a tedy *yj* = 1 nebo 2, pak

*j*=1

0

0

0

*FC*(*x*) ≤ *q* + Σ∞*j*=*j*0 +1 2− = *q* + 2 ≤ *FC*(*y*). Pokud *xj* = 1 a *yj*0 = 2, pak

*j* −*j*0

*FC*(*x*) = *q* + 2−*j*0 ≤ *FC*(*y*). Tím je ověřeno, že *FC* je neklesající.

∈

Nyní ukážeme spojitost *FC*. Pokud *x, y* [0*,* 1] náleží témuž triadickému

intervalu [*k*3−*j,* (*k* + 1)3−*j*], pak *FC*(*y*) *FC*(*x*) 2−*j*. Platí-li *x y* 3−*j* pak *x, y* patří do téhož nebo do dvou sousedních triadických intervalů délky 3−*j*, a tedy |*FC*(*y*) − *FC*(*x*)| ≤ 2−*j*+1. Tedy *F* je (stejnoměrňe) spojitá.

| − | ≤ | − | ≤

Konečňe ukážeme, že *µC*([0*,* 1] *C* = 0. Množinu [0*,* 1] *C* lze zapsat jako spočetné sjednocení otevřených triadických intervalů, které lze popsat v tria- dickém rozvoji jako množina posloupností, které mají (nutňe) na daném *j*-tém místě jedničku, a předtím pouze nuly a dvojky. Na takových intervalech je ale funkce *FC* z definice konstantní, tedy míra *FC* těchto intervalů, i jejich sjedno- cení, je nulová.

\ \

Pozn.: Každou konečnou borelovskou míru *µ* na R lze rozložit na součet

*µ* = *µa* + *µc* + *µd,*

kde *µa* ≪ *λ*, *µd* je diskrétní a *µc* neatomická s vlastností *µc* ⊥ *λ*.

Tvrzení 14.3. *Necht’ distribuční funkce F konečné míry µ má všude vlastní derivaci F* ′ =: *f. Pak µ* ≪ *λ a f* = *dµ .*

*dλ*

Důkaz: Označme D := {*B* ∈ B1 : *µ*(*B*) = ∫

*B*

*µ*((*a, b*]) = *F* (*b*) − *F* (*a*) =

*f* (*x*) *dx*}. Z vlastnosti

∫ *b*

*f* (*x*) *dx*

*a*

plyne, že obsahuje všechny intervaly typu (*a, b*]. Protože systém těchto inter- valů je uzavřen na konečné průniky a generuje borelovskou *σ*-algebru, a protože je Dynkinův systém, je = 1, a tedy *f* je Radon-Nikodymova hustota *µ*

D

D D B

vzhledem k *λ*1. □

## Pozn.:

1. Podmínka existence derivace distribuční funkce všude není nutná pro ab- solutní spojitost (vzhledem k *λ*). Např.

*F* (*x*) =

*x* 0 ≤ *x* ≤ 1

1 *x* ≥ 1



0 *x* ≤ 0

je distribuční funkcí absolutňe spojité míry *µ*(·) = *λ*(· ∩ (0*,* 1)).

1. Každá monot´onní funkce, a tedy i každá distribuční funkce, má derivaci v

*λ*-skoro všech bodech.

1. Lze ukázat, že nutnou a postačující podmínkou pro absolutní spojitost *µ* ≪ *λ* je *absolutní spojitost* distribuční funkce *F* : pro každé *ε >* 0 existuje *δ >* 0 takové, že pro všechna *n* ∈ N a *x*1 *< y*1 *<* · · · *< xn < yn* platí

*n*

Σ

(*yi* − *xi*) *< δ* =⇒

*i*=1

*n*

|*F* (*yi*) − *F* (*xi*)| *< ε.*

Σ

*i*=1

Definice 14.3 (Lebesgue-Stieltjesův integrál). Je-li *F* distribuční funkce konečné míry *µ* a *f* ∈ *L*1(*µ*), píšeme

∫ *f* (*x*) *dF* (*x*) := ∫ *f* (*x*) *dµ*(*x*)*.*

Je-li navíc *a < b*, značíme

*b*

∫

*f* (*x*) *dF* (*x*) :=

*a*

∫(*a,b*]

*f* (*x*) *dµ*(*x*)*.*

Věta 14.4 (Per partes pro Lebesgue-Stieltjesův integrál). *Jsou-li F, G dvě dis- tribuční funkce a a < b, platí*

*F* (*b*)*G*(*b*) − *F* (*a*)*G*(*a*) =

*kde F* (*x*−) := lim*y*→*x− F* (*y*)*.*

*b*

*F* (*x* ) *dG*(*x*) +

∫

−

*a*

*b*

*G*(*x*) *dF* (*x*)*,*

∫

*a*

Důkaz: S využitím Fubiniho věty dostaneme

(*F* (*b*) − *F* (*a*))(*G*(*b*) − *G*(*a*)) = ∫

(*a,b*]2

*d*(*µF* ⊗ *µG*)

∫ *b* ∫ *b*

=

*χ*{*x<y*} *dF* (*x*) *dG*(*y*) +

∫ *b* ∫ *b*

*χ*{*x*≥*y*} *dG*(*y*) *dF* (*x*)

*a a*

∫ *b* ∫

=

*dF* (*x*) *dG*(*y*) +

*a*

∫ *b* ∫ *x*

*a*

*dG*(*y*) *dF* (*x*)

*a* (*a,y*) *a a*

∫ *b* ∫ *b*

*a*

−

= (*F* (*y*−) − *F* (*a*)) *dG*(*y*) +

∫ *b* ∫ *b*

=

*F* (*x*−) *dG*(*x*) +

*G*(*x*) *dF* (*x*) − *F* (*a*)(*G*(*b*) − *G*(*a*)) − *G*(*a*)(*F* (*b*) − *F* (*a*))*,*

*a*

*a*

(*G*(*x*) *G*(*a*)) *dF* (*x*)

*a*

a odečtením dostaneme dokazovanou rovnost. □

## Příklady:

1. Mají-li *F* i *G* derivaci na R, dostaneme z věty 14.4 a tvrzení 14.3

∫

∫

[*FG*]*b* =

*a*

*b*

*F* (*x*)*G*′(*x*) *dx* +

*a*

*b*

*F* ′(*x*)*G*(*x*) *dx,*

*a*

což je klasický vzorec per partes.

1. Pro Cantorovu funkci *FC* platí symetrie *FC*(1 − *x*) = 1 − *FC*(*x*), *x* ∈ (0*,* 1),

z čehož snadno dostaneme ∫ 1 *F* (*x*) *dx* = 1 . Použitím vzorce per partes

0

2

*C*

pak dostaneme

∫

∫

1

1 = *xdFC*(*x*) +

0

2

1

*FC*(*x*) *dx,*

0

tedy ∫ 1 *xdF*

0

*C*

(*x*) = 1 .

Pozn.: Lebesgue-Stieltjesův integrál lze definovat i podle rozdílu dvou dis- tribučních funkcí, což jsou zprava spojité *funkce s konečnou variací*.