Моделі руху матеріальної точки.

Орбітальна динаміка екзопланет і зона життя за моделлю Kopparapu

Семінар з курсу «Моделювання динамічних систем»

Кіщук Ярослав Ярославович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Мотивація: екзопланети й зона життя

- За останні десятиліття відкрито тисячі екзопланет (дані астрономічних оглядів, зокрема місій *Kepler*, *TESS* тощо).
- Ключове фізичне питання:
  - які з цих планет можуть мати умови для існування рідкої води на поверхні?
- Концепція **життєпридатної зони** (Habitable Zone, HZ):
  - інтервал відстаней від зорі, де потік випромінювання дозволяє існування рідкої води,
  - HZ залежить від світності L та ефективної температури T_{eff} зорі.
- Для аналізу екзопланет потрібні:
  - модель орбітальної динаміки (рух планети як матеріальної точки),
  - модель енергетичного балансу, яка задає межі зони життя.

Математична постановка й мета

- **Модель руху:**
  - планета моделюється як матеріальна точка маси m,
  - що рухається в центральному ньютонівському полі тяжіння маси M (зоря),
  - двохтільна задача $\Rightarrow$ конічні орбіти (кола, еліпси, тощо).
- **Орбітальні параметри:**
  - велика піввісь a, ексцентриситет e, період P,
  - ці параметри визначають траєкторію $r(t)$ та положення $(x(t), y(t))$ у часі.
- **Модель зони життя Kopparapu:**
  - за заданими L та T_{eff} зорі обчислюється інтервал $[d_{\text{in}}, d_{\text{out}}]$,
  - тобто радіуси внутрішньої та зовнішньої меж життєпридатної зони.
- **Мета доповіді:**
  - побудувати строгий ланцюжок
    $$ext\frac{1}{r^2} \implies \text{орбітальні елементи } (a, e, P) \implies r(t) \implies d_{\text{in}} \le r(t) \le d_{\text{out}},$$
  - і показати, як ці моделі використовуються для аналізу екзопланетних систем.

Двохтільна задача в ньютонівському формалізмі

- Розглядаємо систему:
  - зоря маси M (домінує гравітаційно),
  - планета маси m ($m \ll M$), яку моделюємо як матеріальну точку.

- Закон всесвітнього тяжіння Ньютона:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G\,\frac{Mm}{r^3}\,\mathbf{r}, \qquad r = \|\mathbf{r}\|.$$

- Другий закон Ньютона для планети:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \implies \ddot{\mathbf{r}} = -G\,\frac{M}{r^3}\,\mathbf{r}.$$

- Властивості задачі:
  - поле центральне $\Rightarrow$ момент імпульсу зберігається;
  - траєкторія лежить в деякій фіксованій площині;
  - система редукується до задачі про рух у площині.

Полярні координати та інтеграли руху

- Вводимо полярні координати в площині орбіти:

$$\mathbf{r}(t) = \big(r(t)\cos\theta(t),\ r(t)\sin\theta(t)\big).$$

- Рівняння руху в полярних координатах мають вигляд:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}, \qquad r^2\dot{\theta} = h = \text{const}.$$

- Інтеграл кутового моменту:
  - $h = r^2\dot{\theta}$ — кутовий момент на одиницю маси,
  - $h = \text{const} \Rightarrow$ друга формула Кеплера (рівність секторних площ за рівні проміжки часу).
- Інтеграл енергії:

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{GMm}{r} = \text{const}.$$

Лагранжевий формалізм для центрального поля

- Кінетична та потенціальна енергії:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right), \qquad V(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

- Лагранжіан системи:

$$L(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}) = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{GMm}{r}.$$

- Рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \qquad q_i \in \{r,\theta\}.$$

- Для координати θ:

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0 \implies mr^2\dot{\theta} = \text{const},$$

  що відтворює збереження кутового моменту.
- Для координати r отримуємо те саме радіальне рівняння, що й з формалізму Ньютона.

Орбіти як конічні перерізи та закони Кеплера

- З інтегралів руху (енергія E, момент h) випливає, що траєкторія в центральному полі $\propto 1/r^2$ є конічним перерізом.
- **Еліптична орбіта** (зв'язаний рух, $E < 0$):

$$r(\nu) = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\nu},$$

  де
  - a — велика піввісь еліпса,
  - e — ексцентриситет ($0 \le e < 1$),
  - ν — істинна аномалія (кут положення відносно перицентра).
- **Третій закон Кеплера** (для $m \ll M$):

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3,$$

  де P — сидеричний період обертання.
- Узагальнення:
  - $E = 0 \Rightarrow$ параболічна траєкторія ($e = 1$),
  - $E > 0 \Rightarrow$ гіперболічна траєкторія ($e > 1$).

Орбітальні елементи як вхідні дані

- Для еліптичної орбіти планети навколо зорі (двохтільна задача) як вхідні дані зручно використовувати:
  - велику піввісь a,
  - ексцентриситет e,
  - період обертання P,
  - початкову фазу (напр., середню аномалію M_0 у момент $t = 0$).
- **Задача:**
  - за заданим часом t знайти *поточне положення планети* на орбіті:

$$r(t), \quad \theta(t) \quad \text{або} \quad (x(t), y(t)).$$

- Стандартний ланцюжок перетворень:

$$t \implies M(t) \implies E(t) \implies \nu(t) \implies r(t) \implies (x(t), y(t)).$$

Середня аномалія $M(t)$

- **Середня аномалія** M визначається як кут, який зростає рівномірно з часом:

$$M(t) = n\,t + M_0, \qquad n = \frac{2\pi}{P}.$$

- n — **середній рух** (середня кутова швидкість), M_0 — значення M при $t = 0$.
- Геометричний зміст:
    - M — кутова координата *уявної* точки, що рухається **рівномірно по колу** радіуса a з періодом P.
    - Для реальної планети рух по еліпсу нерівномірний, але M використовується як параметр часу.
- Далі: $M(t)$ входить до **рівняння Кеплера**, яке пов'язує M з ексцентричною аномалією E.

Рівняння Кеплера і ексцентрична аномалія E

- **Ексцентрична аномалія** E — допоміжний кут, який параметризує положення точки на еліпсі.
- Для еліптичної орбіти ($0 \le e < 1$) виконується **рівняння Кеплера**:

$$M = E - e \sin E.$$

- Це трансцендентне рівняння:
  - немає виразу $E(M)$ в елементарних функціях;
  - для заданих M і e потрібно чисельно знайти корінь $f(E) = E - e \sin E - M = 0$.
- **Чисельне розв'язання:**
  - на практиці часто використовують ітераційні методи, зокрема метод Ньютона–Рафсона для рівняння $f(E) = 0$;
  - за малих e як початкове наближення беруть $E_0 \approx M$, ітерації швидко збігаються.

Перехід від E до істинної аномалії ν та радіуса r

- **Істинна аномалія** ν — фактичний кут положення планети відносно перицентра орбіти.
- Знайшовши E, обчислюємо ν за класичною формулою:

$$\tan\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\tan\frac{E}{2}.$$

- Потім обчислюємо радіус-вектор:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\nu} \quad (\text{еквівалентно,}\ \ r = a(1-e\cos E)).$$

- Таким чином, для кожного моменту часу t маємо:

$$t \Rightarrow M(t) \Rightarrow E(t) \Rightarrow \nu(t) \Rightarrow r(t).$$

Координати (x, y) в площині орбіти

- Оберемо систему координат так, щоб:
  - зоря маси M знаходилася в початку координат $(0, 0)$,
  - перицентр орбіти лежав на додатній осі Ox.
- Тоді полярні координати $(r(t), \nu(t))$ переходять у декартові за стандартними формулами:

$$x(t) = r(t)\cos\nu(t), \qquad y(t) = r(t)\sin\nu(t).$$

- **Результат:**
  - для кожного часу t ми маємо однозначно визначене положення планети $(x(t), y(t))$ на площині орбіти;
  - далі ці координати можуть бути використані для візуалізації орбіти та аналізу того, чи потрапляє планета в життєпридатну зону.
- (За потреби можна додати повороти/нахил орбіти для переходу до 3D, але базова 2D-модель вже повністю визначена.)

Поняття життєпридатної зони

- **Життєпридатна зона** (Habitable Zone, HZ) — інтервал відстаней від зорі, в якому на поверхні планети земного типу *може* існувати рідка вода.
- На рівні енергетики:
  - потік зіркового випромінювання на орбіті планети має лежати в деякому діапазоні,
  - занадто великий потік $\Rightarrow$ вода випаровується (перегрів, «парникова Венера»),
  - занадто малий потік $\Rightarrow$ вода замерзає (глобальне заледеніння).
- Математично HZ задається інтервалом радіусів:

$$[d_{\mathrm{in}}, d_{\mathrm{out}}]$$

навколо зорі, де d_{in} — внутрішня межа HZ, d_{out} — зовнішня межа.

- Положення HZ залежить від:
  - світності зорі L,
  - ефективної температури T_{eff},
  - (у більш точній моделі) від маси та атмосфери планети.

Ефективний потік $S_{\text{eff}}(T_*)$

- Kopparapu et al. вводять **ефективний потік** S_{eff}:
  - безрозмірна величина,
  - $S_{\text{eff}} = 1$ відповідає середньому потоку на орбіті Землі.
- Для кожної межі HZ (inner, outer) S_{eff} задається як поліном від

$$T^* = T_{\text{eff}} - 5780\ \text{K}.$$

- **Поліноміальна апроксимація Kopparapu:**

$$S_{\text{eff}}(T_*) = S_{\text{eff},\odot} + aT^* + b(T^*)^2 + c(T^*)^3 + d(T^*)^4,$$

де
  - $S_{\text{eff},\odot}$, a, b, c, d — табличні коефіцієнти,
  - різні набори коефіцієнтів для:
    - внутрішньої межі (наприклад, «runaway greenhouse»),
    - зовнішньої межі (наприклад, «maximum greenhouse»),
    - різних мас планети (0.1, 1, 5 $M_\oplus$).
- Таким чином, S_{eff} — функція температури зорі T_{eff}, яка враховує спектральний розподіл випромінювання.

Перехід від S_{eff} до відстані d

- Потік випромінювання від зорі світності L на відстані d:

$$F(d) = \frac{L}{4\pi d^2}.$$

- Нормування до сонячного випадку (Земля):

$$S_{\text{eff}} = \frac{F(d)}{F_\oplus} = \frac{L/L_\odot}{d^2},$$

якщо d вимірюємо в астрономічних одиницях.

- Формула для відстані:

$$d = \sqrt{\frac{L/L_\odot}{S_{\text{eff}}}}.$$

- Межі HZ:

$$d_{\text{in}} = \sqrt{\frac{L/L_\odot}{S_{\text{eff}}^{(\text{inner})}(T_*)}}, \quad d_{\text{out}} = \sqrt{\frac{L/L_\odot}{S_{\text{eff}}^{(\text{outer})}(T_*)}}.$$

- Таким чином, для заданих L і T_{eff} ми аналітично отримуємо радіуси меж життєпридатної зони.

Фізичний зміст d_{in} та d_{out}

- **Внутрішня межа** d_{in} (runaway greenhouse):
    - за $d < d_{\text{in}}$ потік занадто великий,
    - температура поверхні зростає, океани випаровуються, парниковий ефект самопідсилюється,
    - врешті-решт вода повністю переходить у газову фазу та може бути втрачена.
- **Зовнішня межа** d_{out} (maximum greenhouse):
    - за $d > d_{\text{out}}$ потік занадто малий,
    - навіть максимальний парниковий ефект (насичена CO_2 атмосфера) не здатен утримати температуру вище 0°C,
    - планета переходить у стан глобального заледеніння.
- **Підсумок:**
    - інтервал $[d_{\text{in}}, d_{\text{out}}]$ задає необхідну (але не достатню) умову для існування рідкої води;
    - надалі ми будемо порівнювати орбіту $r(t)$ планети з цим інтервалом.

Орбіта $r(t)$ та інтервал $[d_{\text{in}}, d_{\text{out}}]$

- Для еліптичної орбіти маємо

$$r(t) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\nu(t)},$$

де $\nu(t)$ — істинна аномалія, знайдена через $M(t)$ та $E(t)$.

- Життєпридатна зона зорі задається інтервалом радіусів:

$$[d_{\text{in}}, d_{\text{out}}],$$

де $d_{\text{in}}, d_{\text{out}}$ обчислені за моделлю Kopparapu.

- **Умова перебування планети в HZ** в момент часу t:

$$d_{\text{in}} \;\leq\; r(t) \;\leq\; d_{\text{out}}.$$

- Таким чином, динамічна система

$$t \mapsto r(t)$$

поєднується з *статично* заданим інтервалом $[d_{\text{in}}, d_{\text{out}}]$, утворюючи задачу про час перебування траєкторії всередині заданого кільця.

Частка періоду в життєпридатній зоні

- Нехай P — період обертання планети по орбіті.
- Введемо **індикаторну функцію** перебування в HZ:

$$\chi_{\text{HZ}}(t) = \begin{cases} 1, & d_{\text{in}} \leq r(t) \leq d_{\text{out}}, \\ 0, & \text{інакше}. \end{cases}$$

- **Частка періоду**, яку планета проводить у HZ:

$$\tau_{\text{HZ}} = \frac{1}{P} \int_0^P \chi_{\text{HZ}}(t)\, dt, \qquad 0 \leq \tau_{\text{HZ}} \leq 1.$$

- Для майже кругової орбіти ($e \approx 0$):
    - якщо $a \in [d_{\text{in}}, d_{\text{out}}]$, то $\tau_{\text{HZ}} \approx 1$;
    - якщо a поза цим інтервалом, то $\tau_{\text{HZ}} \approx 0$.
- Для ексцентричної орбіти ($e > 0$):
    - можливі проміжні значення $0 < \tau_{\text{HZ}} < 1$;
    - планета частину орбіти проводить в HZ, частину — поза нею.

Обчислення τ_{HZ} через істинну аномалію ν

- Використаємо зв'язок між часом і кутом θ (або ν) з другого закону Кеплера:

$$r^2\dot{\theta} = h = \mathrm{const} \implies \frac{dt}{d\theta} = \frac{r^2(\theta)}{h}.$$

- Якщо ототожнити $\theta \equiv \nu$, тоді для одного періоду:

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{r^2(\nu)}{h}\, d\nu.$$

- Час, проведений у HZ:

$$T_{\mathrm{HZ}} = \int_{\{\nu: d_{\mathrm{in}} \le r(\nu) \le d_{\mathrm{out}}\}} \frac{r^2(\nu)}{h}\, d\nu.$$

- Звідси

$$\tau_{\mathrm{HZ}} = \frac{T_{\mathrm{HZ}}}{P} = \frac{\displaystyle\int_{\{\nu: d_{\mathrm{in}} \le r(\nu) \le d_{\mathrm{out}}\}} r^2(\nu)\, d\nu}{\displaystyle\int_0^{2\pi} r^2(\nu)\, d\nu}.$$

- Це дає *строге інтегральне визначення* τ_{HZ} через відому функцію $r(\nu)$, де $r(\nu) = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\nu}$.

Вплив параметрів e, L, T_{eff}

- **Ексцентриситет e:**
  - при $e = 0$ радіус $r(t) \equiv a$ сталий;
  - при збільшенні e:
    - $r_{\min} = a(1 - e)$ (перицентр),
    - $r_{\max} = a(1 + e)$ (апоцентр),
  - чим більший e, тим ширший діапазон $r(t)$ і тим складніша структура входів/виходів у HZ.
- **Світність L:**
  - межі HZ масштабуються як $d \propto \sqrt{L}$,
  - для більш яскравої зорі HZ зміщується на більші радіуси,
  - для слабшої зорі — навпаки, ближче до зорі.
- **Ефективна температура T_{eff}:**
  - впливає на $S_{\text{eff}}(T_*)$ в моделі Kopparapu,
  - змінює положення меж HZ навіть при фіксованому L,
  - пов’язане зі спектральним типом зорі та спектральним розподілом випромінювання.

Приклад 1: майже кругова орбіта всередині HZ

- Орбіта з малим ексцентриситетом $e \approx 0$.
- Велика піввісь a вибрана так, що

$$d_{\text{in}} < a < d_{\text{out}}.$$

- Тоді $r(t) \approx a$ для всіх t, і умова перебування в HZ виконується протягом усього періоду.
- **Частка періоду:** $\tau_{\text{HZ}} \approx 1$.

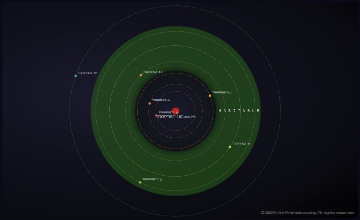

Рис. 1: Схематична орбіта всередині HZ.

Приклад 2: ексцентрична орбіта, що перетинає HZ

- Орбіта з помітним ексцентриситетом $e > 0$.
- Перицентр $r_{\min} < d_{\text{in}}$:
  - поблизу перицентра планета перебуває *всередині* внутрішньої межі (надто жарко).
- Апоцентр $r_{\max} > d_{\text{out}}$:
  - поблизу апоцентра планета *поза* HZ (надто холодно).
- Лише на частині орбіти виконується $d_{\text{in}} \le r(t) \le d_{\text{out}}$.
- **Частка періоду:** $0 < \tau_{\text{HZ}} < 1$.

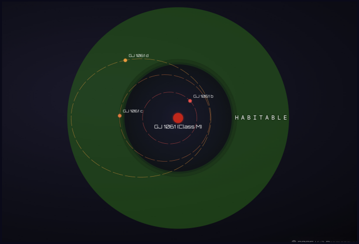

Рис. 2: Ексцентрична орбіта, що перетинає HZ.

Коментарі до прикладів

- Обидва приклади будуються на одних і тих самих формулах:

$$r(\nu) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\nu}, \qquad d_{\text{in}}, d_{\text{out}} \text{ з моделі Kopparapu.}$$

- Різниця полягає в:
  - значенні ексцентриситету e,
  - співвідношенні a з d_{in} та d_{out},
  - а також у відповідних значеннях τ_{HZ}.
- На практиці:
  - з орбітальних елементів (виміряних астрономічно) та параметрів зорі (світність, T_{eff}) можна *обчислити*, як багато часу планета проводить у життєпридатній зоні.

Підсумки

- **Динамічна модель**
  - Рух планети описано як рух матеріальної точки в центральному полі $1/r^2$.
  - Отримано конічні орбіти (еліпси) та закони Кеплера.
- **Від орбітальних елементів до координат**
  - Орбіта задається параметрами (a, e, P, M_0).
  - Побудовано ланцюжок:

$$t \Rightarrow M(t) \Rightarrow E(t) \Rightarrow \nu(t) \Rightarrow r(t) \Rightarrow (x(t), y(t)).$$

  - Рівняння Кеплера $M = E - e \sin E$ розв'язується чисельно.
- **Зона життя Kopparapu**
  - За L та T_{eff} зорі обчислено ефективний потік $S_{\text{eff}}(T_*)$ і межі $d_{\text{in}}, d_{\text{out}}$.
  - Критерій перебування планети в HZ: $d_{\text{in}} \leq r(t) \leq d_{\text{out}}$.
- **Головний висновок**
  - Поєднання орбітальної динаміки з моделлю HZ дозволяє кількісно оцінити частку періоду τ_{HZ}, яку екзопланета проводить у життєпридатній зоні своєї зорі.

Джерела та література

- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*. — М.: Наука, 1988. — (Теоретическая физика, т. 1).
- Гантмахер Ф.Р. *Лекции по аналитической механике*. — М.: Наука, 1966.
- Kasting J.F., Whitmire D.P., Reynolds R.T. *Habitable Zones around Main Sequence Stars*. — Icarus, 101, 108–128 (1993).
- Kopparapu R.K., Ramirez R., Kasting J.F. et al. *Habitable Zones around Main-Sequence Stars: New Estimates*. — Astrophysical Journal, 765, 131 (2013).
- Kopparapu R.K., Ramirez R.M., SchottelKotte J. et al. *Habitable Zones around Main-Sequence Stars: Dependence on Planetary Mass*. — Astrophysical Journal Letters, 787, L29 (2014).
- Онлайн-ресурси:
    - https://www.exoplanetvisualizer.com/,