Константа Кемені і час до досягнення рівноваги

За мотивами Peter Doyle (2005) та Bini-Hunter-Latouche-Meini-Taylor (2018)

Ярослав Кіщук

КНУ, Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

November 27, 2025

План доповіді

1. Вступ
2. Фон: скінченні ергодичні марковські ланцюги
3. Константа Кемені
4. Підхід Дойла: час до рівноваги
    - Інтерпретація
    - Heuristic argument
    - Алгебраїчний доказ
5. Підхід Bini-Hunter-Latouche-Meini-Taylor
    - Hitting times та відвідування станів
    - Deviation matrix
6. Узагальнення та застосування

Мотивація

- Розглядаємо скінченний ергодичний марковський ланцюг з матрицею переходів P та стаціонарним розподілом π.
- Константу Кемені K задається простою формулою як зважена сума середніх часів першого потрапляння, але має нетривіальну властивість: **вона не залежить від початкового стану**.
- У підручниках (напр., Grinstead-Snell) це подається як «загадка» або вправа з обіцянкою призу за інтуїтивне пояснення; стаття Doyle (2005) пропонує інтерпретацію як *час до рівноваги*.
- Нова робота Bini-Hunter-Latouche-Meini-Taylor (2018) дає альтернативну, більш «фізичну» інтерпретацію через числа відвідувань та deviation matrix.
- **Мета доповіді:** побудувати єдину логічну картину навколо Константу Кемені, поєднавши:
  - інтуїтивний підхід Doyle (очікуваний час до рівноваги),
  - «counting visits» та deviation matrix у Bini et al.,
  - стандартні матричні факти про марковські ланцюги.

Постановка задачі

- Нехай маємо скінченний ергодичний марковський ланцюг з:
  - матрицею переходів $P = (p_{ij})$,
  - стаціонарним розподілом $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$, $\pi P = \pi$,
  - часами першого потрапляння T_j та середніми значеннями $m_{ij} = \mathbb{E}_i[T_j]$.
- Визначаємо **Константу Кемені** як

$$K = \sum_j \pi_j \, m_{ij},$$

  де індекс i — початковий стан ланцюга.
- Класичний факт: величина K **не залежить від вибору початкового стану** i.
- **Основні питання доповіді:**
  - Чому сума $\sum_j \pi_j m_{ij}$ взагалі не залежить від i?
  - Як інтерпретувати K як *час досягнення рівноваги*?
  - Як пов'язати K з deviation matrix та кількістю відвідувань станів?
  - Як ці інтерпретації узагальнюються на безперервний час та ширші класи процесів?

Марковський ланцюг і стаціонарний розподіл

- Розглядаємо дискретний у часі марковський ланцюг $(X_n)_{n\geq 0}$ зі скінченним простором станів
$$S = \{1, 2, \ldots, n\}.$$
- Його динаміка задається **матрицею переходів**
$$P = (p_{ij})_{i,j\in S}, \qquad p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i),$$
де кожний рядок є ймовірнісним: $\sum_j p_{ij} = 1$.
- **Властивість Маркова:**
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1}, \ldots, X_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}.$$
- **Ергодичність** (у нашому контексті): ланцюг є
  - *незвідним* (irreducible): з будь-якого стану можна досягти будь-який інший,
  - *аперіодичним* (aperiodic): немає жорсткого циклічного періоду.

Це гарантує існування єдиного стаціонарного розподілу і збіжність до нього.

Стаціонарний розподіл та матриця рівноваги

- **Стаціонарний розподіл** $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ — це ймовірнісний вектор, що задовольняє
$$\pi P = \pi, \qquad \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1, \qquad \pi_i > 0.$$

- Для ергодичного ланцюга стаціонарний розподіл є *єдиним*, і розподіл станів збігається до нього незалежно від старту:
$$\lim_{n\to\infty} e_i^\top P^n = \pi \quad \text{для будь-якого початкового стану } i,$$
де e_i — i-тий базисний вектор.

- Введемо **матрицю рівноваги**
$$\Pi = 1\,\pi,$$
де $1 = (1, \dots, 1)^\top$. Усі рядки Π однакові й дорівнюють π.

- Для ергодичного ланцюга маємо $\lim_{n\to\infty} P^n = \Pi$, тобто довгостроковий розподіл не залежить від початкового стану.

Матриці та часи першого потрапляння

- Для стану $j \in S$ **час першого потрапляння** (hitting time)
$$T_j = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\}.$$
- **Середній час першого потрапляння** з i до j:
$$m_{ij} = \mathbb{E}_i[T_j], \qquad i \neq j,$$
а за домовленістю $m_{ii} = 0$.
- Збираємо їх у **матрицю середніх часів першого потрапляння**
$$M = (m_{ij})_{i,j \in S}.$$
- Для кожного стану i розглянемо **час першого повернення**
$$T_i^+ = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}, \qquad r_i = \mathbb{E}_i[T_i^+] \text{ (mean recurrence time).}$$
Класичний факт: для ергодичного ланцюга $r_i = 1/\pi_i$.
- Введемо також діагональну матрицю $R = \mathrm{diag}(r_1, \ldots, r_n)$, яка просто містить середні часи повернення r_i на діагоналі.

Визначення Константи Кемені

- Нехай $M = (m_{ij})$ — матриця середніх часів першого потрапляння:

$$m_{ij} = \mathbb{E}_i[T_j], \quad i \neq j, \qquad m_{ii} = 0.$$

- Нехай $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — стаціонарний розподіл, $\pi P = \pi$.
- Фіксуємо початковий стан i і визначаємо

$$K_i \;=\; \sum_{j=1}^{n} \pi_j \, m_{ij}.$$

- **Твердження (Кемені):** величина K_i *не залежить від вибору* i.
- Отже, можна говорити про **Константи Кемені**

$$K \;=\; \sum_{j} \pi_j \, m_{ij},$$

маючи на увазі, що будь-який початковий стан дає одне й те саме значення.

Еквівалентна інтерпретація

- Нехай випадковий «цільовий» стан J обирається незалежно від ланцюга за розподілом π:
$$\mathbb{P}(J = j) = \pi_j.$$
- Тоді час досягнення цієї випадкової цілі
$$T_J = \text{час першого потрапляння в стан } J$$
має сподівання
$$\mathbb{E}_i[T_J] \;=\; \sum_j \pi_j \, \mathbb{E}_i[T_j] \;=\; \sum_j \pi_j \, m_{ij} \;=\; K.$$
- **Отже:** K — це *очікуваний час досягнення випадково обраного стану*, де «ціль» вибирається за стаціонарним розподілом.
- У подальшому ми інтерпретуватимемо це як **час досягнення рівноваги** (підхід Doyle) та пов'яжемо з deviation matrix (підхід Bini et al.).

Деякі базові властивості

- Для скінченного ергодичного марковського ланцюга K завжди скінченна і додатна.
- K **інваріантна до перенумерації станів**: вона залежить лише від структури P, а не від того, як ми позначаємо стани.
- Існує зв'язок із **фундаментальною матрицею**

$$Z = (I - P + \Pi)^{-1},$$

де I — одинична матриця, P — матриця переходів, $\Pi = 1\,\pi$ — матриця стаціонарного розподілу. А саме (для нашої конвенції $m_{ii} = 0$):

$$K = \mathrm{tr}(Z) - 1.$$

- Також K має **спектральне представлення**:

$$K = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{1 - \lambda_k},$$

де $\lambda_1 = 1 > \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ — власні значення P.

Інтерпретація через час до рівноваги

- Нагадаємо:
$$K_i = \sum_j \pi_j m_{ij}, \quad m_{ij} = \mathbb{E}_i[T_j].$$
- Нехай випадковий «цільовий» стан J обирається за розподілом π, незалежно від ланцюга:
$$\mathbb{P}(J = j) = \pi_j.$$
- Тоді час досягнення цієї цілі
$$T_J = T_J(i)$$
має матсподівання
$$\mathbb{E}_i[T_J] = \sum_j \pi_j \mathbb{E}_i[T_j] = \sum_j \pi_j m_{ij} = K_i.$$
- **Інтерпретація (Doyle):** K_i — це *очікуваний час до «рівноваги»*, якщо рівновага моделюється випадковим станом, обраним за стаціонарним розподілом π.

One-step аргумент та averaging property

- Інтуїтивно: зробимо один крок зі стану i, потрапляємо у стан k з імовірністю p_{ik}.
- Здається природним написати
$$K_i \stackrel{?}{=} 1 + \sum_k p_{ik} K_k,$$
де «1» — це перший крок, а далі очікування з нового стану.
- Але є тонкий момент: ми могли *вже* бути в рівновазі. Тоді робити ще один крок — «помилка».
- Помилка трапляється з імовірністю π_i, і вартість її в середньому дорівнює середньому часу повернення $r_i = 1/\pi_i$, тобто очікуваний штраф:
$$\pi_i \cdot r_i = \pi_i \cdot \frac{1}{\pi_i} = 1.$$
- Цей штраф «з'їдає» доданий нами $+1$, і в результаті залишається
$$K_i = \sum_k p_{ik} K_k.$$

Averaging property і принцип-максимуму

- Рівність
$$K_i = \sum_k p_{ik} K_k$$
означає, що K_i є **середньозваженим** значенням K_k по сусідніх станах (з вагами p_{ik}).

- Такі функції мають **властивість усереднення** (averaging property) і задовольняють **maximum principle**: не можуть мати «внутрішнього» максимуму/мінімуму, якщо не є константою.

- Для незвідного ланцюга це означає, що всі значення K_i мусять збігатися:
$$K_1 = K_2 = \cdots = K_n = K.$$

- Отже, інтуїтивний one-step аргумент пояснює, чому $\sum_j \pi_j m_{ij}$ не залежить від i.

Фундаментальне рівняння для матриці M

- Для $i \neq j$: рекурсія для середніх часів першого потрапляння

$$m_{ij} = 1 + \sum_k p_{ik} m_{kj}.$$

- У матричній формі (класичний результат Кемені–Снелла / Grinstead–Snell):

$$(I - P)M = C - R,$$

  де
  - $M = (m_{ij})$ — матриця середніх часів першого потрапляння,
  - C — матриця, всі елементи якої дорівнюють 1,
  - $R = \mathrm{diag}(r_1, \ldots, r_n)$, де $r_i = 1/\pi_i$ — середні часи повернення.
- Doyle пропонує розглядати це рівняння як **фундаментальне** для аналізу константи Кемені.

Вивід константності K з фундаментального рівняння

- Визначимо вектор

$$k = (K_1, \ldots, K_n)^\top, \quad K_i = \sum_j \pi_j m_{ij}.$$

Тоді у матричному вигляді

$$k = M\pi^\top.$$

- Домножимо фундаментальне рівняння справа на $\pi^\top$:

$$(I - P)M\pi^\top = (C - R)\pi^\top.$$

- Маємо $C\pi^\top = 1$ (бо $\sum_j \pi_j = 1$) і $R\pi^\top = 1$ (бо $r_i \pi_i = 1$), отже

$$(C - R)\pi^\top = 0.$$

- Тому

$$(I - P)k = 0 \quad \Rightarrow \quad Pk = k.$$

- Вектор k є **фіксованим стовпчиком** для P. Для ергодичного ланцюга такі стовпчики мусять бути константними, отже

$$K_1 = \cdots = K_n = K$$

Hitting times θ_j

- У Bini et al. зручно працювати з **hitting times**

$$\theta_j = \inf\{t \geq 0 : X_t = j\},$$

  тобто дозволяємо $\theta_j = 0$, якщо $X_0 = j$.

- Порівняння з нашими T_j:
  - якщо $X_0 \neq j$, то $\theta_j = T_j \geq 1$;
  - якщо $X_0 = j$, то $\theta_j = 0 < T_j$.

- Це дає альтернативну версію константи Кемені:

$$K' \;=\; \sum_j \pi_j \, \mathbb{E}_i[\theta_j],$$

  де $K' = K - 1$ (різниця лише в тому, як рахувати власний стан).

- Перевага такої форми: формули з θ_j добре переносяться на безперервний час і природно пов'язуються з deviation matrix.

Підрахунок відвідувань $N_j(n)$

- Введемо кількість відвідувань стану j на проміжку $[0, n]$:

$$N_j(n) = \sum_{t=0}^{n} 1\{X_t = j\}.$$

- Ключова лема (Bini et al.): для всіх i, j

$$\frac{\mathbb{E}_i[\theta_j]}{\mathbb{E}_j[T_j]} \;=\; \lim_{n\to\infty} \big(\mathbb{E}_j[N_j(n)] - \mathbb{E}_i[N_j(n)]\big).$$

- Тобто:
  - якщо стартуємо з j, процес «відвідує j регулярно»;
  - якщо стартуємо з $i \neq j$, є *початкова затримка* довжини θ_j;
  - за цей час ми в середньому «втрачаємо» $\mathbb{E}_i[\theta_j]/\mathbb{E}_j[T_j]$ відвідувань j.
- Просумувавши по j з вагами π_j і переставивши суму з границею, Bini et al. отримують формулу, з якої видно, що K' не залежить від i.

Deviation matrix $\mathcal{D}$

- Для скінченного ергодичного ланцюга deviation matrix визначається як

$$\mathcal{D} \;=\; \sum_{n\geq 0} \left(P^n - \Pi\right),$$

де $\Pi = \mathbf{1}\,\pi$ — матриця стаціонарного розподілу.

- Елемент $\mathcal{D}_{ij}$ можна інтерпретувати як

$$\mathcal{D}_{ij} = \lim_{n\to\infty} \left(\mathbb{E}_i[N_j(n)] - \mathbb{E}_\pi[N_j(n)]\right),$$

тобто *кумулятивне відхилення* числа відвідувань j при старті з i від числа відвідувань у рівновазі.

- Матрично $\mathcal{D}$ задовольняє

$$(I - P)\,\mathcal{D} = I - \Pi,$$

і тісно пов'язана з груповою оберненою матрицею $(I - P)^{\#}$.

Вираз Константи Кемені через $\mathcal{D}$

- У Bini et al. показано, що діагональні елементи deviation matrix пов'язані з hitting times:
$$\mathcal{D}_{jj} = \pi_j \, \mathbb{E}_\pi[\theta_j].$$

- Тоді
$$\sum_j \mathcal{D}_{jj} \; = \; \sum_j \pi_j \, \mathbb{E}_\pi[\theta_j] \; = \; K',$$
тобто
$$K' = \mathrm{tr}(\mathcal{D}),$$
а отже, з урахуванням $K' = K - 1$,
$$K = \mathrm{tr}(\mathcal{D}) + 1.$$

- Таким чином, Константа Кемені може бути інтерпретована як **слід deviation matrix** (з точною поправкою, що залежить від вибору між T_j і θ_j).

Зв'язок з mixing time та спектром

- Константа Кемені відображає **типовий час, за який ланцюг «забуває» початковий стан** в середньому по цілях, зважених π.
- Через спектральне представлення

$$K = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{1 - \lambda_k}$$

видно, що K чутлива до **наближеності власних значень** λ_k до 1:
  - якщо $|\lambda_2|$ близьке до 1, ланцюг змішується повільно, K велика;
  - якщо всі λ_k далеко від 1, змішування швидке, K мала.
- Це пов'язує Константу Кемені з **mixing time**: вона виступає більш «глобальним» спектральним показником швидкості змішування, на відміну від звичних оцінок лише через λ_2.
- З точки зору застосувань:
  - у випадкових блуканнях на графах K відображає «типову» довжину шляху до рівноваги;
  - у марковських моделях (черги, надійність, Markov chain Monte Carlo) значення K дає

Безперервний час і нескінченні простори

- Ідеї, що стоять за Константою Кемені, переносяться і на **марковські процеси безперервного часу**, але про це у наступній серії.

Питання?

Дякую за увагу!

Декілька фактів зі статті Doyle:

- У задачі Grinstead–Snell про константу Кемені насправді було написано, що *“a prize was offered”*, а не *“a prize is offered”* – приз уже колись віддали.
- Laurie Snell надіслав Peter Doyle приз у \$50 поштою готівкою; перший лист так і не дійшов. Мораль: не надсилайте гроші готівкою поштою.