Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра інтелектуальних програмних систем
Комп'ютерна алгебра

Самостійна робота №1
"Метод Кронекера"

Виконав:
студент 4-го курсу
групи ІПС-43
Кіщук Ярослав

2025

Вступ

Метод Кронекера є **потужним** алгоритмом для розкладу цілих многочленів на незвідні множники над $\mathbb{Z}$. Основна ідея методу полягає в тому, що якщо маємо цілий многочлен

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

то, якщо існує нетривіальний дільник $g(x)$ степеня m (зазвичай $1 \le m \le \lfloor n/2 \rfloor$), можна записати

$$P(x) = g(x)\,Q(x),$$

де $Q(x)$ — частка ділення, що також має цілих коефіцієнтів.

Оскільки коефіцієнти $g(x)$ є цілими, то для будь-якого цілого значення x виконуються наступні співвідношення: значення $g(x)$ є цілим числом і, за умови, що $g(x)$ є дільником $P(x)$, число $g(x)$ ділить $P(x)$. Тобто, для певного набору цілих точок

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_m,$$

значення $g(x_i)$ мають належати множинам цілих дільників чисел $P(x_i)$.

Для того, щоб відновити шуканий многочлен $g(x)$, використовується **інтерполяція Лагранжа**. Якщо задано значення $g(x_i)$ при $m+1$ різних точках, то однозначно визначається многочлен ступеня m, що проходить через ці точки. Формула Лагранжа має вигляд:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{m} g(x_i) \prod_{\substack{0 \le j \le m \\ j \ne i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Зазвичай для спрощення розрахунків вибирають

$$x_i = i, \quad i = 0, 1, \ldots, m,$$

тоді формула набуває вигляду

$$g(x) = \sum_{i=0}^{m} g(i) \prod_{\substack{0 \le j \le m \\ j \ne i}} \frac{x - j}{i - j}.$$

Таким чином, перебираючи можливі значення $g(i)$ (які обмежені множинами дільників чисел $P(i)$), можна побудувати всі кандидатські многочлени $g(x)$ ступеня m. Для кожного кандидата перевіряється, чи ділить він вихідний многочлен $P(x)$ без остачі. Якщо остача при діленні дорівнює нулю, то отриманий кандидат є дійсним дільником.

Отже, метод Кронекера поєднує класичні методи теорії чисел (аналіз дільників) з інтерполяційними підходами (застосуванням формули Лагранжа), що дозволяє ефективно знаходити розклад вихідного многочлена на незвідні множники.

Таким чином, розглянутий метод дає можливість отримати розклад

$$P(x) = g(x)\,Q(x)$$

з гарантованою цілим числовим розкладом як для дільника $g(x)$, так і для частки $Q(x)$, що є надзвичайно корисним у комп'ютерній алгебрі.

Завдання №8

Дано: Розкласти поліном

$$P(x) \;=\; 16x^4 \;+\; 76x^3 \;+\; 68x^2 \;-\; 76x \;-\; 84$$

на множники методом Кронекера.

Розв'язання

Крок 1. *Визначення степеня та перевірка можливих лінійних дільників.*
Степінь $P(x)$ дорівнює $n = 4$. За методом Кронекера припускаємо існування нетривіального дільника степеня $m \leq \lfloor n/2 \rfloor = 2$. Спочатку перевіримо, чи має $P(x)$ лінійні дільники (тобто чи існує цілий корінь). Для цього шукаємо i, що задовольняє $P(i) = 0$ серед дільників вільного члена -84, зокрема $i = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm7, \pm12, \pm14, \pm21, \pm28, \pm42, \pm84$ тощо.

Спробуємо найпростіше: $P(1) = 16 + 76 + 68 - 76 - 84 = 0$. Отже, $x = 1$ є коренем, а отже $(x - 1)$ — лінійний дільник.

Крок 2. *Ділення на лінійний множник* $(x - 1)$.
Виконуємо ділення (методом полігонів або синтетичного поділу). При $x = 1$ остача 0. Результуюча частка має вигляд:

$$\frac{P(x)}{x-1} \;=\; 16x^3 + 92x^2 + 160x + 84.$$

Тоді

$$P(x) \;=\; (x-1)\big(16x^3 + 92x^2 + 160x + 84\big).$$

Крок 3. *Подальша факторизація куба.*
Помітимо, що $16x^3 + 92x^2 + 160x + 84$ має спільний множник 4:

$$16x^3 + 92x^2 + 160x + 84 \;=\; 4\,(4x^3 + 23x^2 + 40x + 21).$$

Таким чином,

$$P(x) \;=\; 4\,(x-1)\,(4x^3 + 23x^2 + 40x + 21).$$

Далі перевіримо, чи має $4x^3 + 23x^2 + 40x + 21$ цілий корінь. Спробуємо $x = -1$:

$$4(-1)^3 + 23(-1)^2 + 40(-1) + 21 \;=\; -4 + 23 - 40 + 21 \;=\; 0.$$

Отже, $(x + 1)$ — дільник. Ділимо й одержуємо:

$$\frac{4x^3 + 23x^2 + 40x + 21}{x + 1} \;=\; 4x^2 + 19x + 21.$$

Тоді

$$4x^3 + 23x^2 + 40x + 21 \;=\; (x + 1)\,(4x^2 + 19x + 21).$$

Крок 4. *Розклад квадратичного множника.*
Факторизуємо $4x^2 + 19x + 21$. Шукаємо пари чисел, добуток яких $4 \cdot 21 = 84$, а сума 19. Такі числа 12 і 7. У підсумку

$$4x^2 + 19x + 21 \;=\; (x + 3)\,(4x + 7).$$

Крок 5. *Підсумковий розклад.*
Об'єднуючи всі знайдені множники, дістаємо:

$$P(x) \;=\; 4\,(x - 1)\,(x + 1)\,(x + 3)\,(4x + 7).$$

Відповідь (№8):

$$\boxed{16x^4 + 76x^3 + 68x^2 - 76x - 84 \;=\; 4\,(x - 1)\,(x + 1)\,(x + 3)\,(4x + 7).}$$

Завдання №28

Дано: Розкласти поліном

$$P(x) \;=\; x^4 \;+\; 2x^3 \;-\; 72x^2 \;-\; 416x \;-\; 640$$

на множники методом Кронекера.

Розв'язання

Крок 1. *Визначення степеня та пошук лінійного дільника.*
Степінь $P(x)$ дорівнює 4, тому розглядаємо $m \leq 2$. Спершу перевіримо, чи існує корінь серед дільників вільного члена -640. Перевіримо $x = -4$:

$$(-4)^4 + 2(-4)^3 - 72(-4)^2 - 416(-4) - 640 = 256 - 128 - 72 \cdot 16 + 1664 - 640.$$

Обчислимо поетапно:

$$256-128 = 128, \quad 72{\cdot}16 = 1152, \quad 128-1152 = -1024, \quad -1024+1664 = 640, \quad 640-640 = 0.$$

Отже, $x = -4$ — корінь, звідси $(x+4)$ — лінійний дільник.

Крок 2. *Ділення на* $(x+4)$.
Застосовуємо синтетичний поділ або ділення в стовпчик. Маємо:

$$\frac{P(x)}{x+4} \;=\; x^3 - 2x^2 - 64x - 160.$$

Тобто

$$P(x) \;=\; (x+4)\,(x^3 - 2x^2 - 64x - 160).$$

Крок 3. *Подальша факторизація куба.*
Перевіримо, чи $(x+4)$ знову є дільником $x^3 - 2x^2 - 64x - 160$. Підставимо $x = -4$:

$$(-4)^3 - 2(-4)^2 - 64(-4) - 160 \;=\; -64 - 2 \cdot 16 + 256 - 160 = -64 - 32 + 256 - 160 = 0.$$

Отже, $(x+4)$ знову дільник. Ділимо далі:

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 64x - 160}{x+4} \;=\; x^2 - 6x - 40.$$

Таким чином

$$x^3 - 2x^2 - 64x - 160 \;=\; (x+4)\,(x^2 - 6x - 40).$$

Отже,

$$P(x) \;=\; (x+4)^2\,(x^2 - 6x - 40).$$

Крок 4. *Факторизація квадратного множника.*

Розглянемо $x^2 - 6x - 40$. Шукаємо дві цілі числа, добуток яких -40, а сума -6. Такі числа -10 та 4:

$$x^2 - 6x - 40 \;=\; (x - 10)\,(x + 4).$$

Отже, у нас знову виникає $(x + 4)$.

Крок 5. *Підсумковий розклад.*
З урахуванням отриманих множників дістаємо:

$$P(x) \;=\; (x + 4)^2\,(x + 4)\,(x - 10) \;=\; (x + 4)^3\,(x - 10).$$

Відповідь (№28):

$$\boxed{x^4 + 2x^3 - 72x^2 - 416x - 640 \;=\; (x + 4)^3\,(x - 10).}$$

Висновки

У межах кожного завдання, застосовуючи ідею методу Кронекера (пошук цілих коренів серед дільників вільного члена, подальша перевірка можливих кандидатів та повторне факторизування залишку), ми знайшли остаточний розклад на множники над $\mathbb{Z}$.

- **Завдання №8:**

$$16x^4 + 76x^3 + 68x^2 - 76x - 84 = 4\,(x - 1)\,(x + 1)\,(x + 3)\,(4x + 7).$$

- **Завдання №28:**

$$x^4 + 2x^3 - 72x^2 - 416x - 640 = (x + 4)^3\,(x - 10).$$

Отримані множники або лінійні, або незвідні квадрати (у першому прикладі вже розкладено на лінійні), тож подальша факторизація не потрібна. Завдання виконано.

Реалізація алгоритму за допомогою sympy підвердила правильність розв'язку:

```
/home/yaroslav/miniconda3/bin/python /home/yaroslav/study/
Многочлен P1:
    4       3       2
16⋅x  + 76⋅x  + 68⋅x  - 76⋅x - 84

Знайдені множники для P1 методом Кронекера:
1 - x
x + 1
x + 3
-16⋅x - 28

Перевірка: добуток множників:
    4       3       2
16⋅x  + 76⋅x  + 68⋅x  - 76⋅x - 84

Многочлен P2:
 4      3       2
x  + 2⋅x  - 72⋅x  - 416⋅x - 640

Знайдені множники для P2 методом Кронекера:
x + 4
x + 4
x + 4
x - 10

Перевірка: добуток множників:
 4      3       2
x  + 2⋅x  - 72⋅x  - 416⋅x - 640

Process finished with exit code 0
```