

Моделі руху матеріальної точки. Орбітальна динаміка екзопланет і зона життя за моделлю Korragari

Семінар з курсу «Моделювання динамічних систем»

Кіщук Ярослав Ярославович

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Мотивація: екзопланети й зона життя

- За останні десятиліття відкрито тисячі екзопланет (дані астрономічних оглядів, зокрема місій *Kepler*, *TESS* тощо).
- Ключове фізичне питання:
 - які з цих планет можуть мати умови для існування рідкої води на поверхні?
- Концепція **життєпридатної зони** (Habitable Zone, HZ):
 - інтервал відстаней від зорі, де потік випромінювання дозволяє існування рідкої води,
 - HZ залежить від світності L та ефективної температури T_{eff} зорі.
- Для аналізу екзопланет потрібні:
 - модель орбітальної динаміки (рух планети як матеріальної точки),
 - модель енергетичного балансу, яка задає межі зони життя.

Математична постановка й мета

- **Модель руху:**

- планета моделюється як матеріальна точка маси m ,
- що рухається в центральному ньютонівському полі тяжіння маси M (зоря),
- двохтільна задача \Rightarrow конічні орбіти (кола, еліпси, тощо).

- **Орбітальні параметри:**

- велика піввісь a , ексцентриситет e , період P ,
- ці параметри визначають траєкторію $r(t)$ та положення $(x(t), y(t))$ у часі.

- **Модель зони життя Koppararu:**

- за заданими L та T_{eff} зорі обчислюється інтервал $[d_{\text{in}}, d_{\text{out}}]$,
- тобто радіуси внутрішньої та зовнішньої меж життє придатної зони.

- **Мета доповіді:**

- побудувати строгий ланцюжок

динаміка точки в полі $\frac{1}{r^2} \Rightarrow$ орбітальні елементи $(a, e, P) \Rightarrow r(t) \Rightarrow$

- і показати, як ці моделі використовуються для аналізу екзопланетних систем

Двохтільна задача в ньютонівському формалізмі

- Розглядаємо систему:
 - зоря маси M (домінує гравітаційно),
 - планета маси m ($m \ll M$), яку моделюємо як матеріальну точку.
- Закон всесвітнього тяжіння Ньютона:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}, \quad r = \|\mathbf{r}\|.$$

- Другий закон Ньютона для планети:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \implies \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r}.$$

- Властивості задачі:
 - поле центральне \Rightarrow момент імпульсу зберігається;
 - траєкторія лежить в деякій фіксованій площині;
 - система редукується до задачі про рух у площині.

Полярні координати та інтеграли руху

- Вводимо полярні координати в площині орбіти:

$$\mathbf{r}(t) = (r(t) \cos \theta(t), r(t) \sin \theta(t)).$$

- Рівняння руху в полярних координатах мають вигляд:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}, \quad r^2\dot{\theta} = h = \text{const.}$$

- Інтеграл кутового моменту:

- $h = r^2\dot{\theta}$ — кутовий момент на одиницю маси,
- $h = \text{const} \Rightarrow$ друга формула Кеплера (рівність секторних площ за рівні проміжки часу).

- Інтеграл енергії:

$$E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} = \text{const.}$$

Лагранжевий формалізм для центрального поля

- Кінетична та потенціальна енергії:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \quad V(r) = -\frac{GMm}{r}.$$

- Лагранжіан системи:

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = T - V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{GMm}{r}.$$

- Рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad q_i \in \{r, \theta\}.$$

- Для координати θ :

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \implies mr^2\dot{\theta} = \text{const},$$

що відтворює збереження кутового моменту.

- Для координати r отримуємо те саме радіальне рівняння, що й з формалізму Ньютона.

Орбіти як конічні перерізи та закони Кеплера

- З інтегралів руху (енергія E , момент h) випливає, що траєкторія в центральному полі $\propto 1/r^2$ є конічним перерізом.
- **Еліптична орбіта** (зв'язаний рух, $E < 0$):

$$r(\nu) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu},$$

де

- a — велика піввісь еліпса,
- e — ексцентриситет ($0 \leq e < 1$),
- ν — істинна аномалія (кут положення відносноperiцентра).

- **Третій закон Кеплера** (для $m \ll M$):

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3,$$

де P — сидеричний період обертання.

- Узагальнення:
 - $E = 0 \Rightarrow$ параболічна траєкторія ($e = 1$),
 - $E > 0 \Rightarrow$ гіперболічна траєкторія ($e > 1$).

Орбітальні елементи як вхідні дані

- Для еліптичної орбіти планети навколо зорі (двохтільна задача) як вхідні дані зручно використовувати:
 - велику піввісь a ,
 - ексцентриситет e ,
 - період обертання P ,
 - початкову фазу (напр., середню аномалію M_0 у момент $t = 0$).
- **Задача:**
 - за заданим часом t знайти поточне положення планети на орбіті:
$$r(t), \quad \theta(t) \quad \text{або} \quad (x(t), y(t)).$$
- Стандартний ланцюжок перетворень:

$$t \Rightarrow M(t) \Rightarrow E(t) \Rightarrow \nu(t) \Rightarrow r(t) \Rightarrow (x(t), y(t)).$$

Середня аномалія $M(t)$

- Середня аномалія M визначається як кут, який зростає рівномірно з часом:

$$M(t) = n t + M_0, \quad n = \frac{2\pi}{P}.$$

- n — середній рух (середня кутова швидкість), M_0 — значення M при $t = 0$.
- Геометричний зміст:
 - M — кутова координата уявної точки, що рухається рівномірно по колу радіуса a з періодом P .
 - Для реальної планети рух по еліпсу нерівномірний, але M використовується як параметр часу.
- Далі: $M(t)$ входить до рівняння Кеплера, яке пов'язує M з ексцентричною аномалією E .

Рівняння Кеплера і ексцентрична аномалія E

- **Ексцентрична аномалія E** — допоміжний кут, який параметризує положення точки на еліпсі.
- Для еліптичної орбіти ($0 \leq e < 1$) виконується **рівняння Кеплера**:

$$M = E - e \sin E.$$

- Це трансцендентне рівняння:
 - немає виразу $E(M)$ в елементарних функціях;
 - для заданих M і e потрібно чисельно знайти корінь $f(E) = E - e \sin E - M = 0$.
- **Чисельне розв'язання:**
 - на практиці часто використовують ітераційні методи, зокрема метод Ньютона–Рафсона для рівняння $f(E) = 0$;
 - за малих e як початкове наближення беруть $E_0 \approx M$, ітерації швидко збігаються.

Перехід від E до істинної аномалії ν та радіуса r

- **Істинна аномалія ν** — фактичний кут положення планети відносно перицентра орбіти.
- Знайшовши E , обчислюємо ν за класичною формулою:

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}.$$

- Потім обчислюємо радіус-вектор:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \nu} \quad (\text{еквівалентно, } r = a(1 - e \cos E)).$$

- Таким чином, для кожного моменту часу t маємо:

$$t \Rightarrow M(t) \Rightarrow E(t) \Rightarrow \nu(t) \Rightarrow r(t).$$

Координати (x, y) в площині орбіти

- Оберемо систему координат так, щоб:
 - зоря маси M знаходилася в початку координат $(0, 0)$,
 - перицентр орбіти лежав на додатній осі Ox .
- Тоді полярні координати $(r(t), \nu(t))$ переходят у декартові за стандартними формулами:

$$x(t) = r(t) \cos \nu(t), \quad y(t) = r(t) \sin \nu(t).$$

• Результат:

- для кожного часу t ми маємо однозначно визначене положення планети $(x(t), y(t))$ на площині орбіти;
- далі ці координати можуть бути використані для візуалізації орбіти та аналізу того, чи потрапляє планета в життє придатну зону.
- (За потреби можна додати повороти/нахил орбіти для переходу до 3D, але базова 2D-модель вже повністю визначена.)

Поняття життєпридатної зони

- **Життєпридатна зона** (Habitable Zone, HZ) — інтервал відстаней від зорі, в якому на поверхні планети земного типу може існувати рідка вода.
- На рівні енергетики:
 - потік зіркового випромінювання на орбіті планети має лежати в деякому діапазоні,
 - занадто великий потік \Rightarrow вода випаровується (перегрів, «парникова Венера»),
 - занадто малий потік \Rightarrow вода замерзає (глобальне заледеніння).
- Математично HZ задається інтервалом радіусів:

$$[d_{\text{in}}, d_{\text{out}}]$$

навколо зорі, де d_{in} — внутрішня межа HZ, d_{out} — зовнішня межа.

- Положення HZ залежить від:
 - світності зорі L ,
 - ефективної температури T_{eff} ,
 - (у більш точній моделі) від маси та атмосфери планети.

Ефективний потік $S_{\text{eff}}(T_*)$

- Koppararu et al. вводять **ефективний потік** S_{eff} :
 - безрозмірна величина,
 - $S_{\text{eff}} = 1$ відповідає середньому потоку на орбіті Землі.
- Дляожної межі HZ (inner, outer) S_{eff} задається як поліном від

$$T^* = T_{\text{eff}} - 5780 \text{ K}.$$

- Поліноміальна апроксимація Koppararu:

$$S_{\text{eff}}(T_*) = S_{\text{eff},\odot} + aT^* + b(T^*)^2 + c(T^*)^3 + d(T^*)^4,$$

де

- $S_{\text{eff},\odot}$, a , b , c , d — табличні коефіцієнти,
- різні набори коефіцієнтів для:
 - внутрішньої межі (наприклад, «runaway greenhouse»),
 - зовнішньої межі (наприклад, «maximum greenhouse»),
 - різних мас планети (0.1 , 1 , $5 M_\oplus$).
- Таким чином, S_{eff} — функція температури зорі T_{eff} , яка враховує спектральний розподіл випромінювання.

Перехід від S_{eff} до відстані d

- Потік випромінювання від зорі світності L на відстані d :

$$F(d) = \frac{L}{4\pi d^2}.$$

- Нормування до сонячного випадку (Земля):

$$S_{\text{eff}} = \frac{F(d)}{F_{\oplus}} = \frac{L/L_{\odot}}{d^2},$$

якщо d вимірюємо в астрономічних одиницях.

- Звідси отримуємо формулу для відстані:

$$d = \sqrt{\frac{L/L_{\odot}}{S_{\text{eff}}}}.$$

- Для меж HZ:

$$d_{\text{in}} = \sqrt{\frac{L/L_{\odot}}{S_{\text{eff}}^{(\text{inner})}(T_*)}},$$

Фізичний зміст d_{in} та d_{out}

- **Внутрішня межа d_{in} (runaway greenhouse):**
 - за $d < d_{\text{in}}$ потік занадто великий,
 - температура поверхні зростає, океани випаровуються, парниковий ефект самопідсилюється,
 - врешті-решт вода повністю переходить у газову фазу та може бути втрачена.
- **Зовнішня межа d_{out} (maximum greenhouse):**
 - за $d > d_{\text{out}}$ потік занадто малий,
 - навіть максимальний парниковий ефект (насичена CO_2 атмосфера) не здатен утримати температуру вище 0°C ,
 - планета переходить у стан глобального заледеніння.
- **Підсумок:**
 - інтервал $[d_{\text{in}}, d_{\text{out}}]$ задає необхідну (але не достатню) умову для існування рідкої води;
 - надалі ми будемо порівнювати орбіту $r(t)$ планети з цим інтервалом.

Орбіта $r(t)$ та інтервал $[d_{\text{in}}, d_{\text{out}}]$

- Для еліптичної орбіти маємо

$$r(t) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu(t)},$$

де $\nu(t)$ — істинна аномалія, знайдена через $M(t)$ та $E(t)$.

- Життє придатна зона зорі задається інтервалом радіусів:

$$[d_{\text{in}}, d_{\text{out}}],$$

де $d_{\text{in}}, d_{\text{out}}$ обчислені за моделлю Kopparari.

- Умова перебування планети в НЗ в момент часу t :**

$$d_{\text{in}} \leq r(t) \leq d_{\text{out}}.$$

- Таким чином, динамічна система

$$t \mapsto r(t)$$

поєднується з *статично* заданим інтервалом $[d_{\text{in}}, d_{\text{out}}]$,
утворюючи задачу про час перебування траєкторії всередині
заданого кільця.

Частка періоду в життєпридатній зоні

- Нехай P — період обертання планети по орбіті.
- Введемо **індикаторну функцію** перебування в НZ:

$$\chi_{\text{HZ}}(t) = \begin{cases} 1, & d_{\text{in}} \leq r(t) \leq d_{\text{out}}, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

- Частка періоду**, яку планета проводить у НZ:

$$\tau_{\text{HZ}} = \frac{1}{P} \int_0^P \chi_{\text{HZ}}(t) dt, \quad 0 \leq \tau_{\text{HZ}} \leq 1.$$

- Для майже кругової орбіти ($e \approx 0$):
 - якщо $a \in [d_{\text{in}}, d_{\text{out}}]$, то $\tau_{\text{HZ}} \approx 1$;
 - якщо a поза цим інтервалом, то $\tau_{\text{HZ}} \approx 0$.
- Для ексцентричної орбіти ($e > 0$):
 - можливі проміжні значення $0 < \tau_{\text{HZ}} < 1$;
 - планета частину орбіти проводить в НZ, частину — поза нею.

Обчислення τ_{HZ} через істинну аномалію ν

- Використаємо зв'язок між часом і кутом θ (або ν) з другого закону Кеплера:

$$r^2 \dot{\theta} = h = \text{const} \implies \frac{dt}{d\theta} = \frac{r^2(\theta)}{h}.$$

- Якщо ототожнити $\theta \equiv \nu$, тоді для одного періоду:

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{r^2(\nu)}{h} d\nu.$$

- Час, проведений у HZ:

$$\tau_{HZ} = \int_{\{\nu: d_{in} \leq r(\nu) \leq d_{out}\}} \frac{r^2(\nu)}{h} d\nu.$$

- Звідси

$$\tau_{HZ} = \frac{\tau_{HZ}}{P} = \frac{\int_{\{\nu: d_{in} \leq r(\nu) \leq d_{out}\}} r^2(\nu) d\nu}{\int_0^{2\pi} r^2(\nu) d\nu}.$$

Вплив параметрів e , L , T_{eff}

- **Ексцентриситет e :**

- при $e = 0$ радіус $r(t) \equiv a$ сталий;
- при збільшенні e :
 - $r_{\min} = a(1 - e)$ (periцентр),
 - $r_{\max} = a(1 + e)$ (апоцентр),
- чим більший e , тим ширший діапазон $r(t)$ і тим складніша структура входів/виходів у НЗ.

- **Світність L :**

- межі НЗ масштабуються як $d \propto \sqrt{L}$,
- для більш яскравої зорі НЗ зміщується на більші радіуси,
- для слабшої зорі — навпаки, ближче до зорі.

- **Ефективна температура T_{eff} :**

- впливає на $S_{\text{eff}}(T_*)$ в моделі Koppararu,
- змінює положення меж НЗ навіть при фіксованому L ,
- пов'язане зі спектральним типом зорі та спектральним розподілом випромінювання.

Приклад 1: майже кругова орбіта всередині НZ

- Орбіта з малим ексцентриситетом $e \approx 0$.
- Велика піввісь a вибрана так, що
$$d_{\text{in}} < a < d_{\text{out}}$$
- Тоді $r(t) \approx a$ для всіх t , і умова перебування в НZ виконується протягом усього періоду.
- **Частка періоду:** $\tau_{\text{HZ}} \approx 1$.

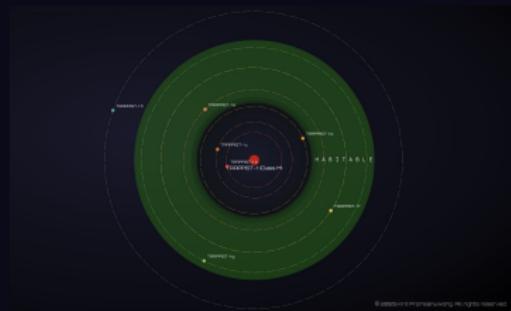


Рис. 1: Схематична орбіта всередині НZ.

Приклад 2: ексцентрична орбіта, що перетинає НZ

- Орбіта з помітним ексцентриситетом $e > 0$.
- Перицентр $r_{\min} < d_{\text{in}}$:
 - поблизу перицентра планета перебуває *всередині* внутрішньої межі (надто жарко).
- Апоцентр $r_{\max} > d_{\text{out}}$:
 - поблизу апоцентра планета *поза* НZ (надто холодно).
- Лише на частині орбіти виконується $d_{\text{in}} \leq r(t) \leq d_{\text{out}}$.
- **Частка періоду:** $0 < \tau_{\text{HZ}} < 1$.

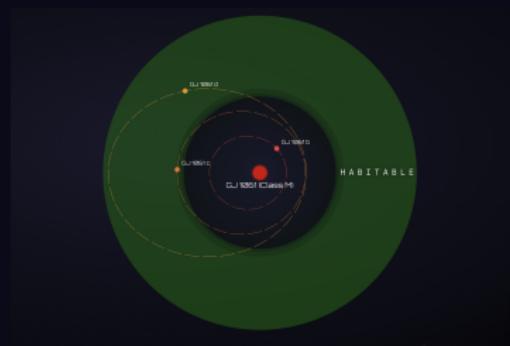


Рис. 2: Ексцентрична орбіта, що перетинає НZ.

Коментарі до прикладів

- Обидва приклади будується на одних і тих самих формулах:

$$r(\nu) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu}, \quad d_{\text{in}}, d_{\text{out}} \text{ з моделі Коррагару.}$$

- Різниця полягає в:
 - значенні ексцентриситету e ,
 - співвідношенні a з d_{in} та d_{out} ,
 - а також у відповідних значеннях τ_{Hz} .
- На практиці:
 - з орбітальних елементів (вимірюваних астрономічно) та параметрів зорі (світність, T_{eff}) можна *обчислити*, як багато часу планета проводить у життє придатній зоні.

Підсумки

- **Динамічна модель**

- Рух планети описано як рух матеріальної точки в центральному полі $1/r^2$.
- Отримано конічні орбіти (еліпси) та закони Кеплера.

- **Від орбітальних елементів до координат**

- Орбіта задається параметрами (a, e, P, M_0) .
- Побудовано ланцюжок:

$$t \Rightarrow M(t) \Rightarrow E(t) \Rightarrow \nu(t) \Rightarrow r(t) \Rightarrow (x(t), y(t)).$$

- Рівняння Кеплера $M = E - e \sin E$ розв'язується чисельно.

- **Зона життя Koppararu**

- За L та T_{eff} зорі обчислено ефективний потік $S_{\text{eff}}(T_*)$ і межі $d_{\text{in}}, d_{\text{out}}$.
- Критерій перебування планети в HZ: $d_{\text{in}} \leq r(t) \leq d_{\text{out}}$.

- **Головний висновок**

- Поєднання орбітальної динаміки з моделлю HZ дозволяє кількісно оцінити частку періоду τ_{HZ} , яку екзопланета проводить у життепридатній зоні своєї зорі.

Джерела та література

- Ландау Л.Д., Лицшиц Е.М. *Механика*. — М.: Наука, 1988. — (Теоретическая физика, т. 1).
- Гантмахер Ф.Р. *Лекции по аналитической механике*. — М.: Наука, 1966.
- Kasting J.F., Whitmire D.P., Reynolds R.T.
Habitable Zones around Main Sequence Stars. — Icarus, 101, 108–128 (1993).
- Kopparapu R.K., Ramirez R., Kasting J.F. et al.
Habitable Zones around Main-Sequence Stars: New Estimates. — Astrophysical Journal, 765, 131 (2013).
- Kopparapu R.K., Ramirez R.M., SchottelKotte J. et al.
Habitable Zones around Main-Sequence Stars: Dependence on Planetary Mass. — Astrophysical Journal Letters, 787, L29 (2014).
- Онлайн-ресурси:
 - <https://www.exoplanetvisualizer.com/>,