Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра інтелектуальних програмних систем
Комп'ютерна алгебра

Самостійна робота №2
"Базис Гребнера. Редукований базис Гребнера" Варіант №6

Виконав:
студент 4-го курсу
групи ІПС-43
Кіщук Ярослав

2025

Варіант 6:
Система рівнянь:

$$\begin{cases} xy + z - 1 = 0, \\ x - y - z^2 = 0, \\ x^2 - 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Завдання №1: Побудувати базис Гребнера для заданої системи рівнянь, використовуючи алгоритм Бухбергера. Записати роботу алгоритму по кроках.

Розв'язання.
Кожне рівняння системи представимо у вигляді полінома:

$$\begin{aligned} f_1 &= xy + z - 1, \\ f_2 &= x - y - z^2, \\ f_3 &= x^2 - 2y + 1. \end{aligned}$$

Визначимо лексикографічний порядок для поліномів, приймаючи $x < y < z$. Для кожного з поліномів визначимо головний (лідируючий) член:

- f_1: члени — xy, z, та -1. Оскільки при порівнянні за x член xy домінує, маємо $LT(f_1) = xy$.
- f_2: члени — x, $-y$, та $-z^2$. Тоді $LT(f_2) = x$.
- f_3: члени — x^2, $-2y$, $+1$; тому $LT(f_3) = x^2$.

Вносимо до початкового базису Гребнера усі поліноми системи:

$$G := \{f_1,\ f_2,\ f_3\}.$$

Для побудови базису за алгоритмом Бухбергера потрібно для кожної пари поліномів f_i, f_j обчислити їх S-поліном

$$S(f_i, f_j) = \frac{\mathrm{LCM}(LT(f_i), LT(f_j))}{LT(f_i)}\, f_i \;-\; \frac{\mathrm{LCM}(LT(f_i), LT(f_j))}{LT(f_j)}\, f_j,$$

та провести редукцію отриманого виразу за поточним базисом G. Якщо залишок ненульовий, він доповнює базис, і процес повторюється.

Крок 1. Обчислення $S(f_1, f_2)$:

- Лідируючі члени: $LT(f_1) = xy$ та $LT(f_2) = x$. Оскільки

  $$\mathrm{LCM}(xy, x) = xy,$$

  маємо:

  $$S(f_1, f_2) = \frac{xy}{xy} f_1 - \frac{xy}{x} f_2 \;=\; f_1 - y\, f_2.$$

- Підставляючи f_1 та f_2:

  $$\begin{aligned} S(f_1, f_2) &= \Big(xy + z - 1\Big) - y\Big(x - y - z^2\Big) \\ &= xy + z - 1 - xy + y^2 + y\, z^2 \\ &= y^2 + y\, z^2 + z - 1. \end{aligned}$$

Проводиться редукція отриманого полінома $h_1 = y^2 + y\,z^2 + z - 1$ за базисом G.

Крок 2. Обчислення $S(f_1, f_3)$:

- Лідируючі члени: $LT(f_1) = xy$ та $LT(f_3) = x^2$. Оскільки
$$\mathrm{LCM}(xy, x^2) = x^2y,$$
отримуємо:
$$S(f_1, f_3) = \frac{x^2y}{xy} f_1 - \frac{x^2y}{x^2} f_3 \;=\; x\,f_1 - y\,f_3.$$
- Обчислюємо:
$$x\,f_1 = x\,(xy + z - 1) = x^2y + xz - x,$$
$$y\,f_3 = y\,(x^2 - 2y + 1) = x^2y - 2y^2 + y.$$
Тоді:
$$S(f_1, f_3) = \big(x^2y + xz - x\big) - \big(x^2y - 2y^2 + y\big) = xz - x + 2y^2 - y.$$

Проводиться редукція отриманого полінома $h_2 = xz - x + 2y^2 - y$ за базисом G.

Крок 3. Обчислення $S(f_2, f_3)$:

- Лідируючі члени: $LT(f_2) = x$ та $LT(f_3) = x^2$. Оскільки
$$\mathrm{LCM}(x, x^2) = x^2,$$
маємо:
$$S(f_2, f_3) = \frac{x^2}{x} f_2 - \frac{x^2}{x^2} f_3 \;=\; x\,f_2 - f_3.$$
- Обчислюємо:
$$\begin{aligned} x\,f_2 &= x\,(x - y - z^2) = x^2 - xy - x\,z^2, \\ S(f_2, f_3) &= \big(x^2 - xy - x\,z^2\big) - \big(x^2 - 2y + 1\big) \\ &= -xy - x\,z^2 + 2y - 1. \end{aligned}$$

Отриманий поліном $h_3 = -xy - x\,z^2 + 2y - 1$ також редукується за базисом G.

Після проведення редукції всіх отриманих S-поліномів (що можна виконати за допомогою комп'ютерних пакетів, наприклад, `Sympy`) деякі з них зануляються, а ненульові залишки доповнюють початкову множину G. У результаті послідовних кроків алгоритму Бухбергера отримуємо *базис Гребнера* для даної системи рівнянь у такому вигляді:

$$\begin{aligned} g_1:&\quad x - \frac{1}{17}z^5 - \frac{6}{17}z^4 - \frac{5}{34}z^3 - \frac{12}{17}z^2 + \frac{1}{2}z - 1 = 0, \\ g_2:&\quad y - \frac{1}{17}z^5 - \frac{6}{17}z^4 - \frac{5}{34}z^3 + \frac{5}{17}z^2 + \frac{1}{2}z - 1 = 0, \\ g_3:&\quad z^6 + \frac{1}{2}z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 = 0. \end{aligned}$$

Це і є *базис Гребнера* для даної системи (у вигляді, отриманому за алгоритмом Бухбергера).

Завдання №2: Побудувати редукований базис Гребнера для системи рівнянь.

Розв'язання.

Редукований базис Гребнера отримують шляхом додаткової нормалізації та виключення зайвих поліномів. До цього процесу належить:

- Приведення кожного полінома так, щоб коефіцієнт при його головному члені дорівнював 1 (або, що еквівалентно, приведення до цілочисельної форми).
- Виключення з базису тих поліномів, старший член яких ділиться на старший член іншого полінома.

Після відповідних перетворень, за результатами обчислень (наприклад, за допомогою `sympy.groebner`), отримуємо редукований базис Гребнера у вигляді:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1: &\quad 34x - 2z^5 - 12z^4 - 5z^3 - 24z^2 + 17z - 34 = 0,\\
\tilde{g}_2: &\quad 34y - 2z^5 - 12z^4 - 5z^3 + 10z^2 + 17z - 34 = 0,\\
\tilde{g}_3: &\quad 2z^6 + z^4 - 6z^3 + 9z^2 = 0.
\end{aligned}$$

Підсумок:

- *Базис Гребнера* для системи:
$$\{\, g_1,\, g_2,\, g_3 \,\},$$
  де:
$$\begin{aligned}
g_1 &= x - \frac{1}{17}z^5 - \frac{6}{17}z^4 - \frac{5}{34}z^3 - \frac{12}{17}z^2 + \frac{1}{2}z - 1,\\
g_2 &= y - \frac{1}{17}z^5 - \frac{6}{17}z^4 - \frac{5}{34}z^3 + \frac{5}{17}z^2 + \frac{1}{2}z - 1,\\
g_3 &= z^6 + \frac{1}{2}z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2.
\end{aligned}$$

- *Редукований базис Гребнера*:
$$\{\, \tilde{g}_1,\, \tilde{g}_2,\, \tilde{g}_3 \,\},$$
  де:
$$\begin{aligned}
\tilde{g}_1 &= 34x - 2z^5 - 12z^4 - 5z^3 - 24z^2 + 17z - 34,\\
\tilde{g}_2 &= 34y - 2z^5 - 12z^4 - 5z^3 + 10z^2 + 17z - 34,\\
\tilde{g}_3 &= 2z^6 + z^4 - 6z^3 + 9z^2.
\end{aligned}$$

З редукованого базису видно, що змінні x та y однозначно виражаються через z. Це дозволяє отримати явний розв'язок заданої системи рівнянь.

Висновок: Побудова базису Гребнера здійснюється шляхом послідовного обчислення S-поліномів для пар поліномів з початкової системи, їх редукції та доповнення множини, доки не буде отримано систему, для якої всі S-поліноми редукуються до нуля. Подальша нормалізація та мінімізація множини дає редукований базис Гребнера, який є унікальним для даної системи (з точністю до множення на ненульові константи).

grebner.py

```python
import sympy
from sympy.polys.domains import QQ
from sympy.polys.rings import ring
from sympy.polys.groebnertools import _buchberger

# Оголошуємо змінні для sympy.groebner
x, y, z = sympy.symbols('x y z', real=True)

# Записуємо наші три поліноми як символьні вирази
f1 = x*y + z - 1
f2 = x - y - z**2
f3 = x**2 - 2*y + 1

# Обчислення редукованого базису Гребнера за допомогою sympy.groebner
G_reduced = sympy.groebner([f1, f2, f3], x, y, z, order='lex')
print("Reduced Gröbner basis (sympy.groebner):")
print(G_reduced)

# Для обчислення "звичайного" (не редукованого) базису використаємо алгоритм Бухбергерга.
# Створюємо кільце змінних над полем раціональних чисел.
R, xR, yR, zR = ring('x, y, z', QQ, order='lex')
# Перетворюємо наші поліноми у вигляді елементів кільця R:
F = [xR*yR + zR - 1, xR - yR - zR**2, xR**2 - 2*yR + 1]

# Обчислюємо базис Гребнера за алгоритмом Бухбергерга (цей базис не редукується автоматично)
B_non_reduced = _buchberger(F, R)
print("\nNon-reduced Gröbner basis (buchberger):")
for poly in B_non_reduced:
    print(poly)
```

```
/home/yaroslav/miniconda3/bin/python /home/yaroslav/study/uni/8-sem/ComptAlgebra/pythonProject/grebner.py
Reduced Gröbner basis (sympy.groebner):
GroebnerBasis([34*x - 2*z**5 - 12*z**4 - 5*z**3 - 24*z**2 + 17*z - 34, 34*y - 2*z**5 - 12*z**4 - 5*z**3 + 10*z**2 + 17*z - 34, 2*z**6 + z**4 - 6*z**3 + 9*z**2], x, y, z, domain='ZZ', order='lex')

Non-reduced Gröbner basis (buchberger):
x - 1/17*z**5 - 6/17*z**4 - 5/34*z**3 - 12/17*z**2 + 1/2*z - 1
y - 1/17*z**5 - 6/17*z**4 - 5/34*z**3 + 5/17*z**2 + 1/2*z - 1
z**6 + 1/2*z**4 - 3*z**3 + 9/2*z**2

Process finished with exit code 0
```

Додаток (код та вивід програми)