吴恩达 DeepLearning.ai 课程提炼笔记（1-2）神经网络和深度学习 --- 神经网络基础

以下为在Coursera上吴恩达老师的DeepLearning.ai课程项目中，第一部分《神经网络和深度学习》第二周课程部分关键点的笔记。笔记并不包含全部小视频课程的记录，如需学习笔记中舍弃的内容请至 Coursera 或者 网易云课堂。同时在阅读以下笔记之前，强烈建议先学习吴恩达老师的视频课程。

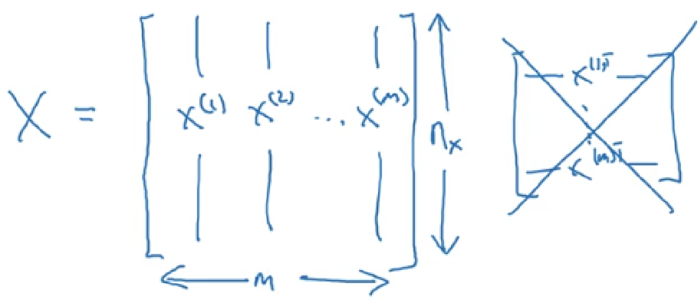
---

1. 二分类问题

对于二分类问题，大牛给出了一个小的Notation。

- 样本：(x, y) ，训练样本包含 m 个；
- 其中 $x \in R^{n_x}$ ，表示样本x 包含 n_x个特征；
- $y \in 0, 1$ ，目标值属于0、1分类；
- 训练数据：$\{(x^{(1)}, y^{(1)}), (x^{(2)}, y^{(2)}), \cdots, (x^{(m)}, y^{(m)})\}$

输入神经网络时样本数据的形状：



$X.shape = (n_x, m)$

目标数据的形状：

$Y = [y_{(1)}, y_{(2)}, \cdots, y_{(m)}]$

$Y.shape = (1, m)$

2. logistic Regression

逻辑回归中，预测值：

$$\hat{h} = P(y = 1|x)$$

其表示为1的概率，取值范围在 $[0, 1]$ 之间。 引入Sigmoid函数，预测值：

$$\hat{y} = Sigmoid(w^T x + b) = \sigma(w^T x + b)$$

其中

$$Sigmoid(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

注意点：函数的一阶导数可以用其自身表示，

$$\sigma'(z) = \sigma(z)(1 - \sigma(z))$$

这里可以解释梯度消失的问题，当 $z = 0$ 时，导数最大，但是导数最大为 $\sigma'(0) = \sigma(0)(1 - \sigma(0)) = 0.5(1 - 0.5) = 0.25$ ，这里导数仅为原函数值的0.25倍。 参数梯度下降公式的不断更新， $\sigma'(z)$ 会变得越来越小，每次迭代参数更新的步伐越来越小，最终接近于0，产生梯度消失的现象。

3. logistic回归 损失函数

Loss function

一般经验来说，使用平方错误（squared error）来衡量Loss Function：

$$L(\hat{y}, y) = \frac{1}{2}(\hat{y} - y)^2$$

但是，对于logistic regression 来说，一般不适用平方错误来作为Loss Function，这是因为上面的平方错误损失函数一般是非凸函数（non-convex），其在使用低度下降算法的时候，容易得到局部最优解，而不是全局最优解。因此要选择凸函数。

逻辑回归的Loss Function：

$$L(\hat{y}, y) = -(y \log \hat{y} + (1 - y) \log(1 - \hat{y}))$$

- 当 $y = 1$ 时， $L(\hat{y}, y) = -\log \hat{y}$ 。如果 $\hat{y}$ 越接近1， $L(\hat{y}, y) \approx 0$ ，表示预测效果越好；如果 $\hat{y}$ 越接近0， $L(\hat{y}, y) \approx +\infty$ ，表示预测效果越差；
- 当 $y = 0$ 时， $L(\hat{y}, y) = -\log(1 - \hat{y})$ 。如果 $\hat{y}$ 越接近0， $L(\hat{y}, y) \approx 0$ ，表示预测效果越好；如果 $\hat{y}$ 越接近1， $L(\hat{y}, y) \approx +\infty$ ，表示预测效果越差；
- 我们的目标是最小化样本点的损失Loss Function，损失函数是针对单个样本点的。

Cost function

全部训练数据集的Loss function总和的平均值即为训练集的代价函数（Cost function）。

$$J(w, b) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} L(\hat{y}^{(i)}, y^{(i)}) = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \left[y^{(i)} \log \hat{y}^{(i)} + (1 - y^{(i)}) \log(1 - \hat{y}^{(i)}) \right]$$

- Cost function是待求系数w和b的函数；

- 我们的目标就是迭代计算出最佳的w和b的值，最小化Cost function，让其尽可能地接近于0。

4. 梯度下降

用梯度下降法（Gradient Descent）算法来最小化Cost function，以计算出合适的w和b的值。

每次迭代更新的修正表达式：

$$w := w - \alpha \frac{\partial J(w,b)}{\partial w}$$

$$b := b - \alpha \frac{\partial J(w,b)}{\partial b}$$

在程序代码中，我们通常使用dw来表示 $\frac{\partial J(w,b)}{\partial w}$ ，用db来表示 $\frac{\partial J(w,b)}{\partial b}$ 。

5. 逻辑回归中的梯度下降法

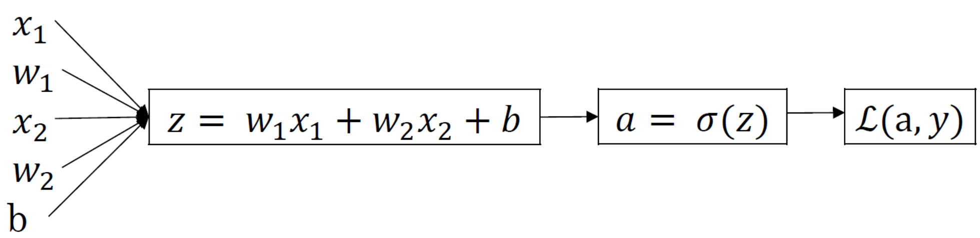
对单个样本而言，逻辑回归Loss function表达式：

$$z = w^T x + b$$

$$\hat{y} = a = \sigma(z)$$

$$L(a, y) = -(y \log(a) + (1 - y) \log(1 - a))$$

反向传播过程：



前面过程的da、dz求导：

$$da = \frac{\partial L}{\partial a} = -\frac{y}{a} + \frac{1-y}{1-a}$$

$$dz = \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial L}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial z} = (-\frac{y}{a} + \frac{1-y}{1-a}) \cdot a(1-a) = a - y$$

再对 w_1、w_2 和b进行求导：

$$dw_1 = \frac{\partial L}{\partial w_1} = \frac{\partial L}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial w_1} = x_1 \cdot dz = x_1(a - y)$$

$$db = \frac{\partial L}{\partial b} = \frac{\partial L}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial b} = 1 \cdot dz = a - y$$

梯度下降法：

$$w_1 := w_1 - \alpha dw_1$$

$w_2 := w_2 - \alpha dw_2$

$b := b - \alpha db$

6. m个样本的梯度下降

对m个样本来说，其Cost function表达式如下：

$z^{(i)} = w^T x^{(i)} + b$

$\hat{y}^{(i)} = a^{(i)} = \sigma(z^{(i)})$

$J(w,b) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} L(\hat{y}^{(i)}, y^{(i)}) = -\frac{1}{m}$
$\sum_{i=1}^{m}\left[y^{(i)}\log \hat{y}^{(i)} + (1-y^{(i)})\log(1-\hat{y}^{(i)})\right]$

Cost function 关于w和b的偏导数可以写成所有样本点偏导数和的平均形式：

$dw_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_1^{(i)}(a^{(i)} - y^{(i)})$

$db = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(a^{(i)} - y^{(i)})$

7. 向量化（Vectorization）

在深度学习的算法中，我们通常拥有大量的数据，在程序的编写过程中，应该尽最大可能的少使用loop循环语句，利用python可以实现矩阵运算，进而来提高程序的运行速度，避免for循环的使用。

逻辑回归向量化

- 输入矩阵X：(n_x, m)
- 权重矩阵w：$(n_x, 1)$
- 偏置b：为一个常数
- 输出矩阵Y：$(1, m)$

所有m个样本的线性输出Z可以用矩阵表示：

$Z = w^T X + b$

python代码：

```
db = 1/m*np.sum(dZ)
```

单次迭代梯度下降算法流程

```
Z = np.dot(w.T,X) + b
A = sigmoid(Z)
dZ = A-Y
dw = 1/m*np.dot(X,dZ.T)
db = 1/m*np.sum(dZ)
```

```
w = w - alpha*dw
b = b - alpha*db
```

8. python的notation

虽然在Python有广播的机制，但是在Python程序中，为了保证矩阵运算的正确性，可以使用reshape()函数来对矩阵设定所需要进行计算的维度，这是个好的习惯；

如果用下列语句来定义一个向量，则这条语句生成的a的维度为（5，），既不是行向量也不是列向量，称为秩（rank）为1的array，如果对a进行转置，则会得到a本身，这在计算中会给我们带来一些问题。

```
a = np.random.randn(5)
```

如果需要定义（5，1）或者（1，5）向量，要使用下面标准的语句：

```
a = np.random.randn(5,1)
b = np.random.randn(1,5)
```

可以使用assert语句对向量或数组的维度进行判断。assert会对内嵌语句进行判断，即判断a的维度是不是（5，1），如果不是，则程序在此处停止。使用assert语句也是一种很好的习惯，能够帮助我们及时检查、发现语句是否正确。

```
assert(a.shape == (5,1))
```

可以使用reshape函数对数组设定所需的维度

```
a.reshape((5,1))
```

8. logistic regression代价函数的解释

Cost function的由来

预测输出 $\hat{y}$ 的表达式：

$$\hat{y} = \sigma(w^T x + b)$$

其中，$\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ 。

$\hat{y}$ 可以看作预测输出为正类（+1）的概率：

$$\hat{y} = P(y = 1|x)$$

当 $y = 1$ 时，$P(y|x) = \hat{y}$；当 $y = 0$ 时，$P(y|x) = 1 - \hat{y}$ 。

将两种情况整合到一个式子中，可得：

$$P(y|x) = \hat{y}^y (1 - \hat{y})^{(1-y)}$$

对上式进行log处理（这里是因为log函数是单调函数，不会改变原函数的单调性）：

$$\log P(y|x) = \log\left[\hat{y}^y (1-\hat{y})^{(1-y)}\right] = y\log\hat{y} + (1-y)\log(1-\hat{y})$$

概率 $P(y|x)$ 越大越好，即判断正确的概率越大越好。这里对上式加上负号，则转化成了单个样本的Loss function，我们期望其值越小越好：

$$L(\hat{y}, y) = -(y\log\hat{y} + (1-y)\log(1-\hat{y}))$$

m个训练样本

假设样本之间是独立同分布的，我们总是希望训练样本判断正确的概率越大越好，则有：
$\max\prod_{i=1}^{m} P(y^{(i)}|x^{(i)})$

同样引入log函数，加负号，则可以得到Cost function：

$$J(w,b) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} L(\hat{y}^{(i)}, y^{(i)}) = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left[y^{(i)}\log\hat{y}^{(i)} + (1-y^{(i)})\log(1-\hat{y}^{(i)})\right]$$

编辑于 2017-11-08 08:52

深度学习（Deep Learning） 神经网络 吴恩达（Andrew Ng）