

Вектор Шепли

как экономика и теория игр используются в машинном обучении

д.т.н. Шилин Кирилл Юрьевич

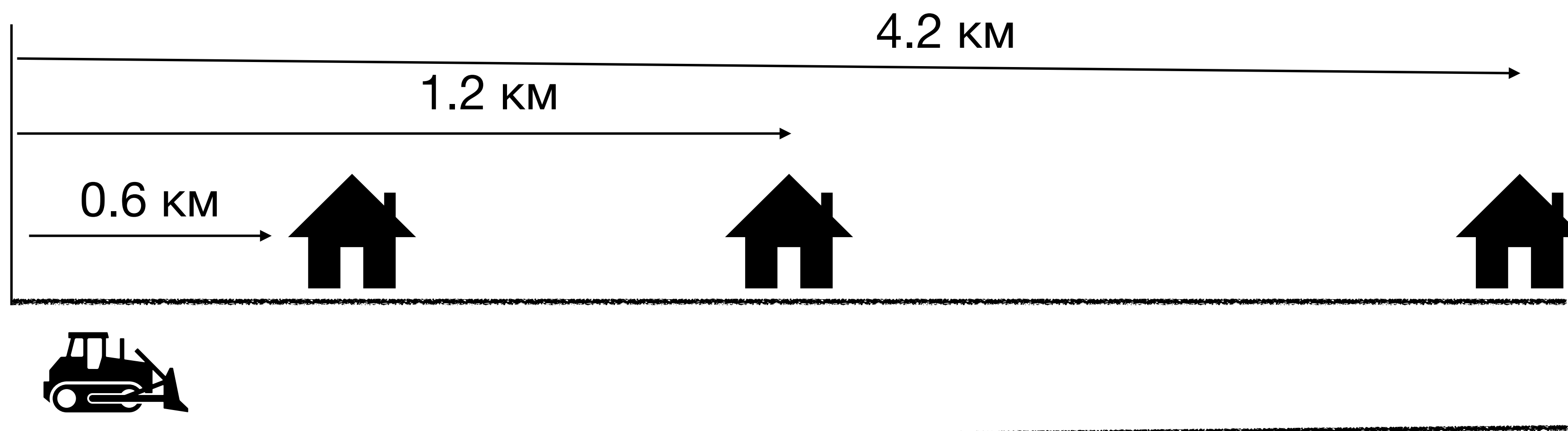
Постановка задачи

- как справедливо оценить вклад каждого члена команды в доходе компании
- как разделить остаток денег между инвесторам при банкротстве компании

Как же определить вклад конкретного участника при кооперативном участии?

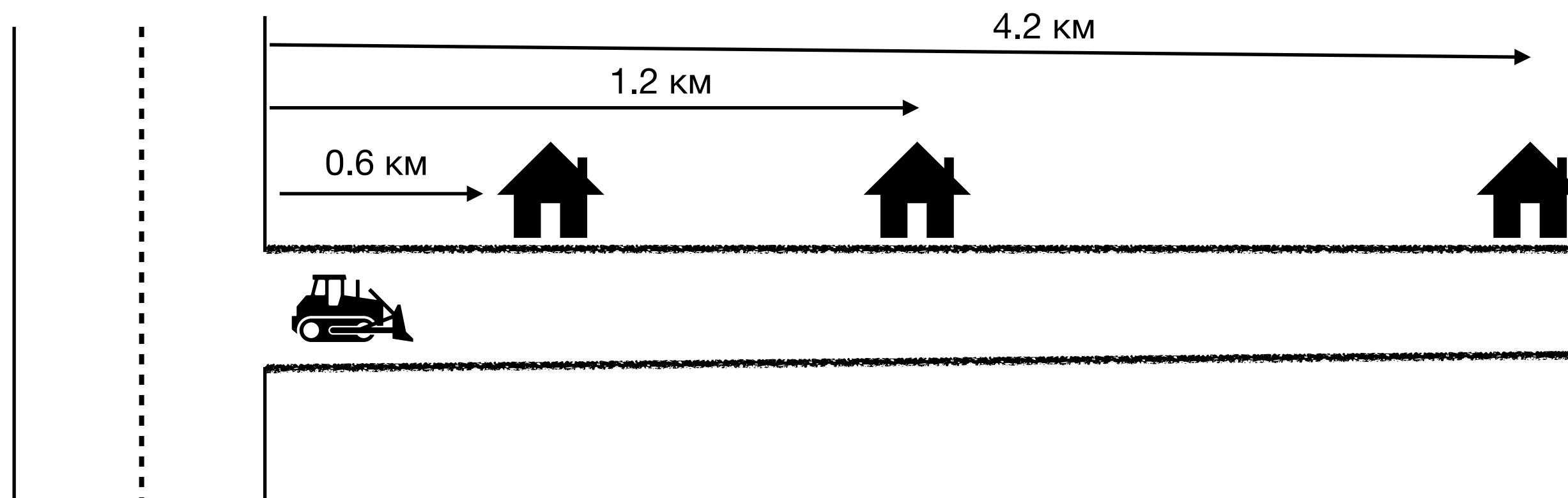
для машинного обучения: какой вклад конкретный признак вносит в итоговый прогноз модели машинного обучения?

Простая задача кооперативной игры: строительство дороги



Пусть 100 метров стоит 1 рубль, тогда вся дорога - 42 рублей

Платим поровну



Вариант 1

Разделим платежи поровну: $42 / 3 = 14$

первый переплатит за лишние 800 метров
второй переплатит за лишние 200 метров
третий недоплатит за 2800 метров

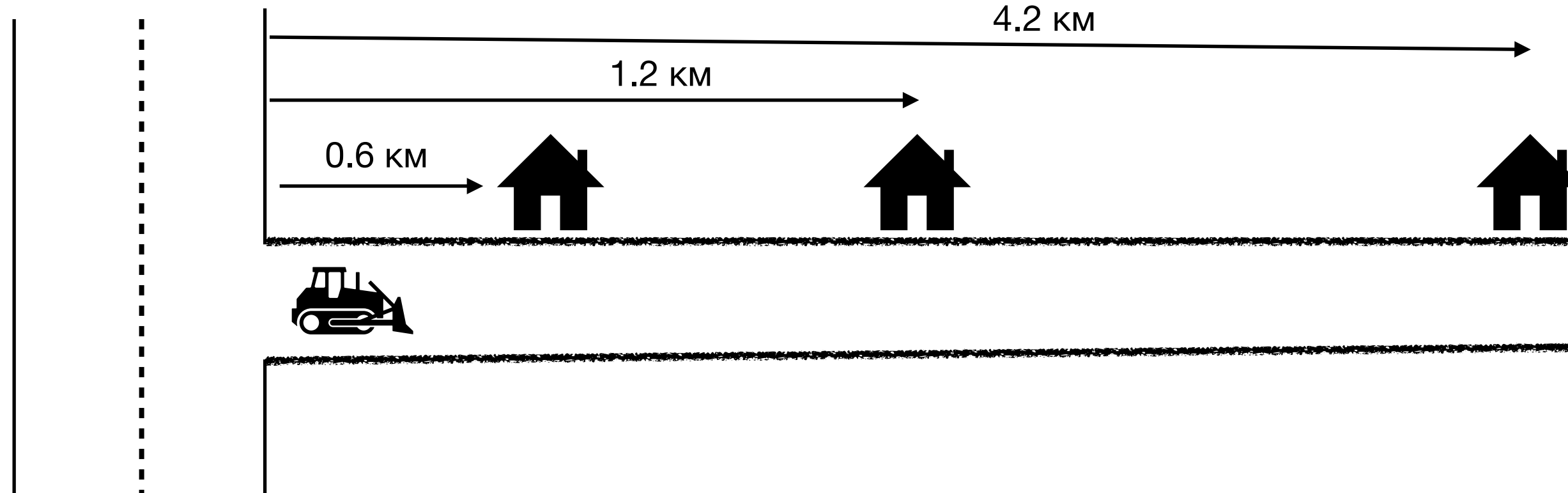
Вариант 2

платим за свой участок

первый переплатит за 600 метров
второй переплатит за 600 метров
третий недоплатит за 3000 метров

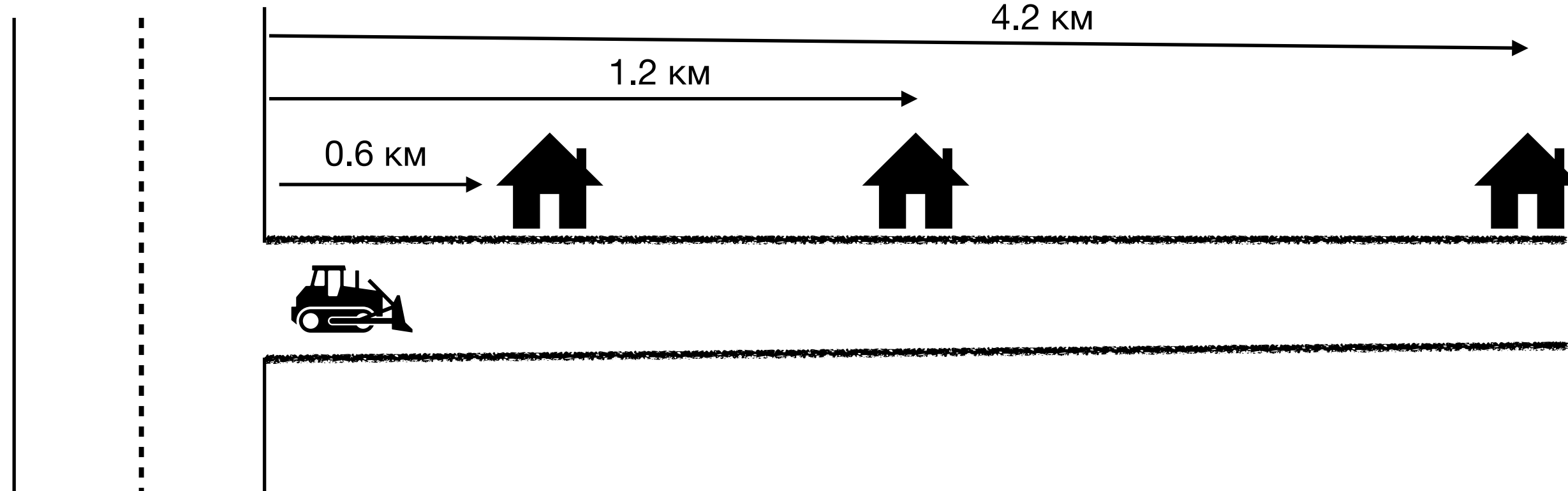
второй и третий ездят по участку первого,
Третий по участку первого и второго.

Составим коалицию



один участник	два участника	три участника
$D_1 = 6$	$D_1D_2 = 12$	$D_1D_2D_3 = 42$
$D_2 = 12$	$D_1D_3 = 42$	
$D_3 = 42$	$D_2D_3 = 42$	

Составим коалиции



один участник	два участника	три участника
Д1 = 6	Д1Д2 = 12	Д1Д2Д3 = 42
Д2 = 12	Д1Д3 = 42	
Д3 = 42	Д2Д3 = 42	

	Дом 1	Дом 2	Дом 3
1-2-3	6	6	30
1-3-2	6	0	36
2-1-3	0	12	30
2-3-1	0	12	30
3-1-2	0	0	42
3-2-1	0	0	42
Сред	2	5	35

Аксиомы

1. Аксиома эффективности.

Мы не потратим на строительство дороги больше, чем стоимость большой коалиции.

2. Аксиома справедливости (или симметричности).

Одинаковы игроки должны платить одинаково или иметь одинаковый выигрыш.

В нашей игре такого игрока нет, но если бы был, например еще один дом с другой стороны дороги от дома 1, то справедливо бы запросить с этих двух домов одинаковый вклад.

3. Аксиома болвана. Бесплезный игрок (болван) не платит.

В нашей игре такого игрока нет, но если бы был, например еще один дом прямо у шоссе, то он ничего не должен платить за дорогу, абсолютно для него бесполезную.

4. Аксиома линейности.

Если кратно растет стоимость расходов каждого участника, то так же кратно растет стоимость всех расходов.

Оказывается, если верить в 4 данные аксиомы, то существует единственное распределение выигрыша между игроками. Данное утверждение не очевидно и было доказано в теореме Шепли (названа в честь экономиста и математика Ллойда Шепли), а правило дележа (наш вектор) называется вектор Шепли.

Формальные формулы

1. Формула вычисления вектора Шепли, в которой каждый игрок получает математическое ожидание своего вклада в соответствующей упорядоченной коалиции

$$\Phi(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in T} x_{\tau},$$

где n - количество игроков, T - множество упорядочений множества игроков N , x_{τ} - распределение выигрыша, в котором игрок, стоящий на месте i в упорядочении τ , получает свой вклад в коалицию K_i (точка Вебера).

2. Более распространенная формула, без вычисления точек Вебера и требующая оценки вклада игроков

$$\Phi(v)_i = \sum_{i \in K} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} (v(K) - v(K \setminus i)),$$

где n - количество игроков, k - количество участников коалиции K , вкладом i -го по счету игрока назовем величину $v(K) - v(K \setminus i)$, где v - характеристическая функция кооперативной игры.

Задача о банкротстве

Фирма банкрот должна трём должникам 100, 200 и 300 миллионов рублей. Однако на счетах банкрота всего 200 миллионов рублей.

Как поделить деньги банкрота между кредиторами?

	Инвестор 1	Инвестор 2	Инвестор 3
1-2-3			
1-3-2			
2-1-3			
2-3-1			
3-1-2			
3-2-1			
Сред			
Возврат			

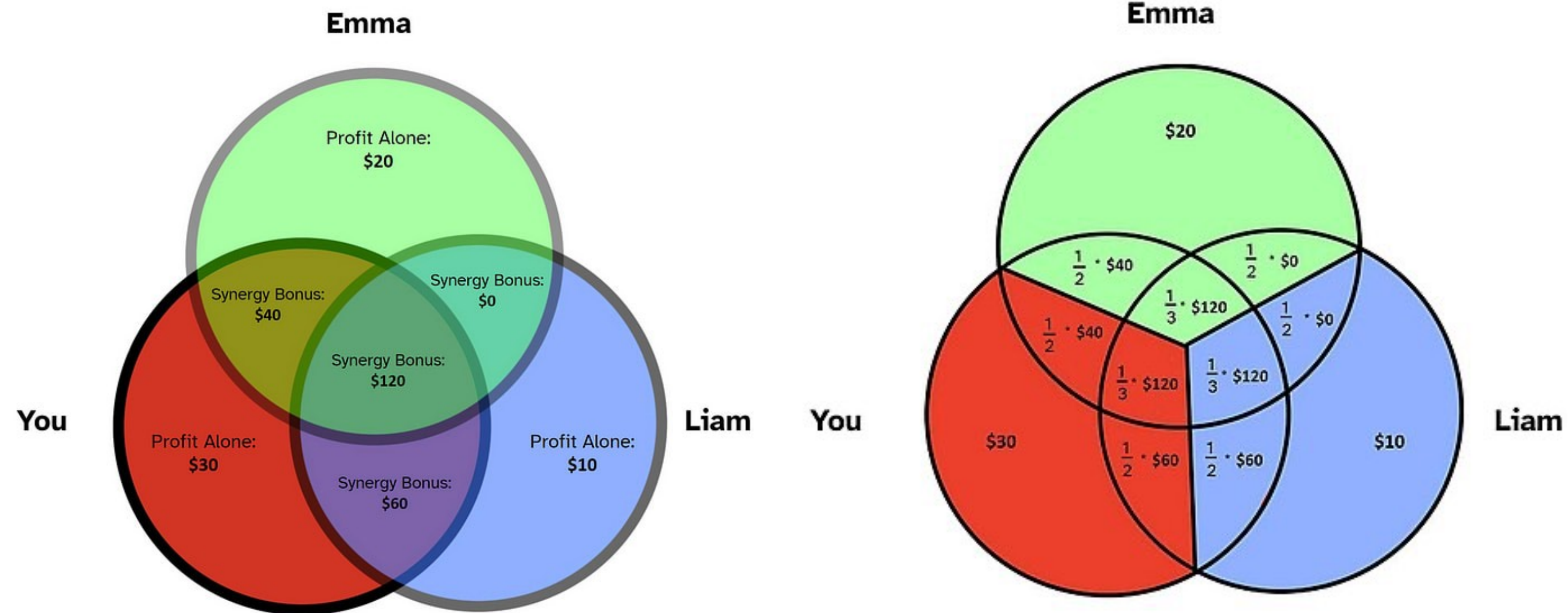
Задача о банкротстве

Фирма банкрот должна трём должникам 100, 200 и 300 миллионов рублей. Однако на счетах банкрота всего 200 миллионов рублей.

Как поделить деньги банкрота между кредиторами?

	Инвестор 1	Инвестор 2	Инвестор 3
1-2-3	100	200	300
1-3-2	100	0	500
2-1-3	0	300	300
2-3-1	0	300	300
3-1-2	0	0	600
3-2-1	0	0	600
Сред	33 1/3	133 1/3	433 1/3
Возврат	11 1/9	44 4/9	144 4/9

Вклад игроков через диаграммы Венна

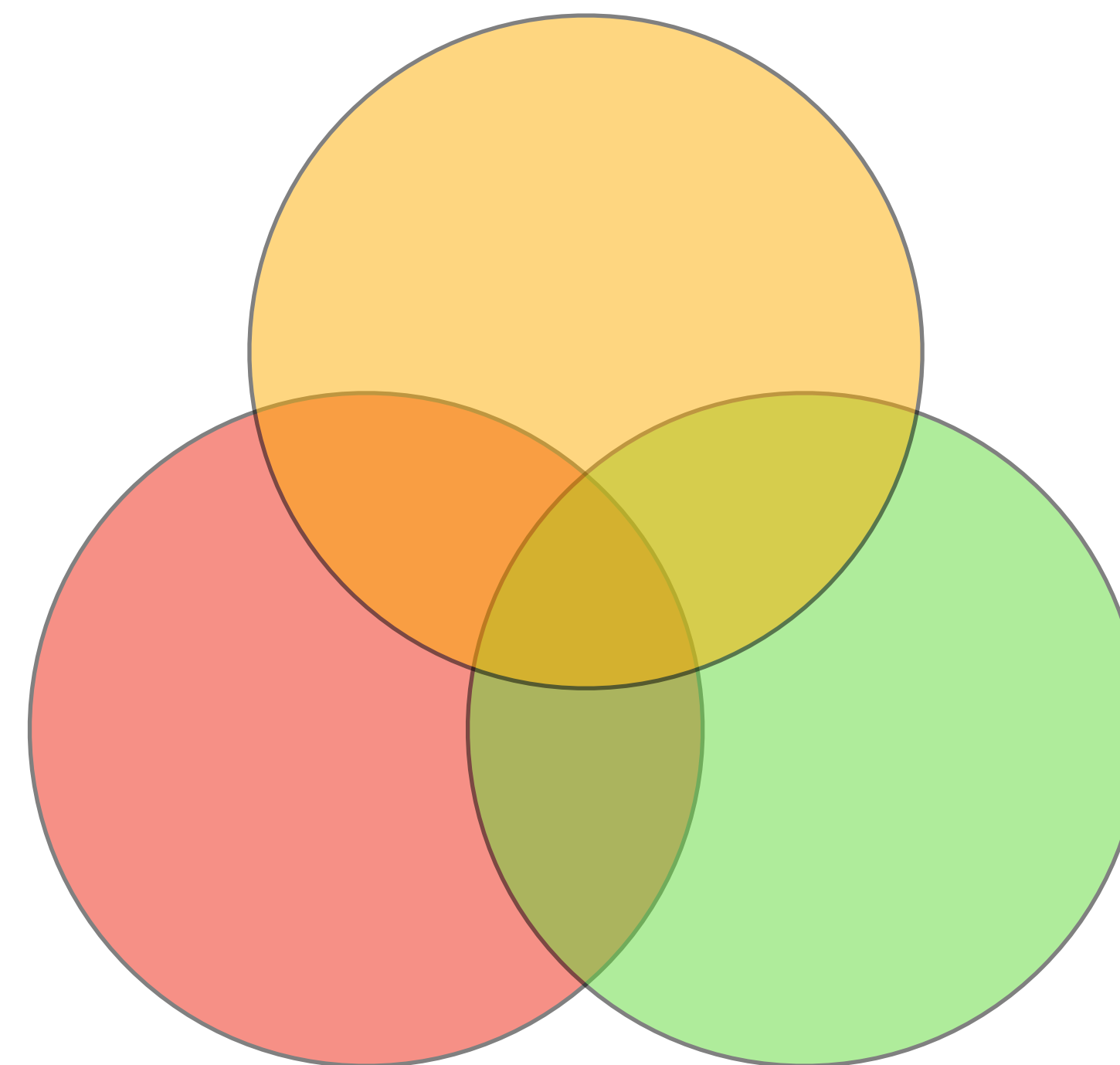
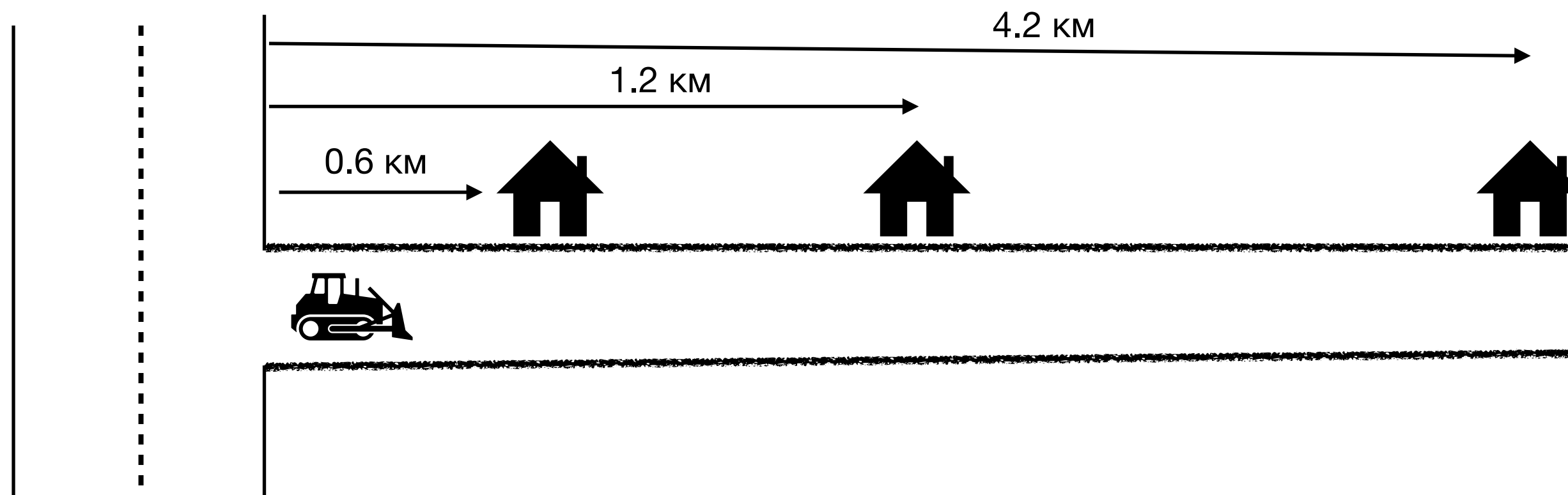


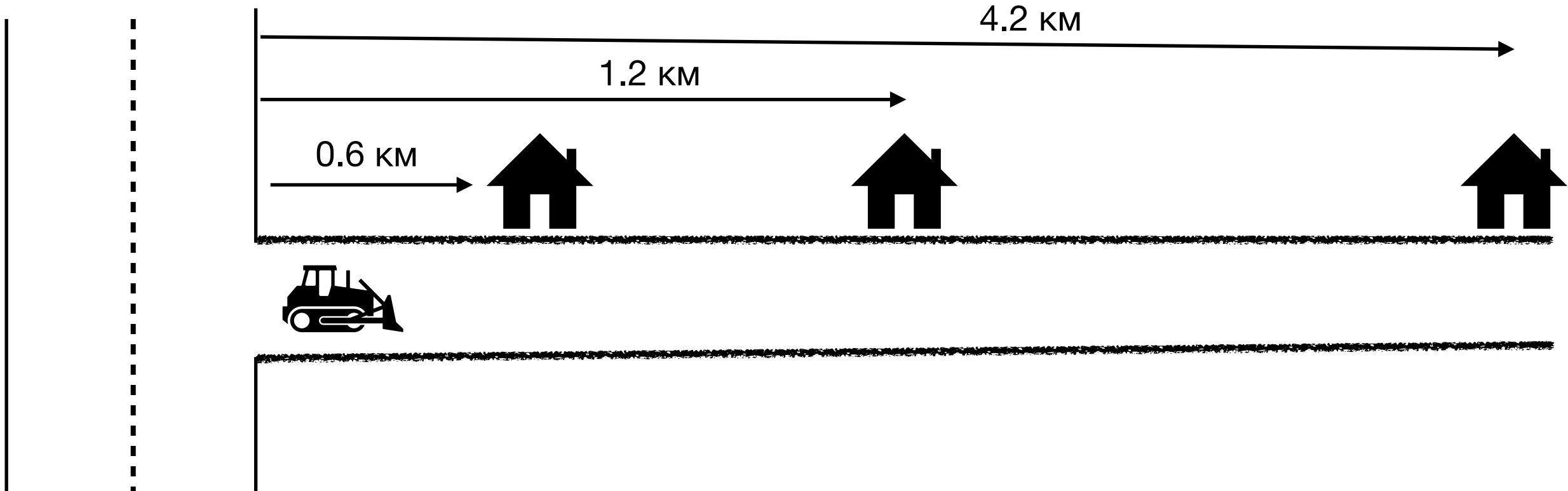
Team members	Sum of synergies	Total profits
Emma	\$20	\$20
You	\$30	\$30
Liam	\$10	\$10
Emma, You	\$20 + \$30 + \$40	\$90
You, Liam	\$30 + \$10 + \$60	\$100
Liam, Emma	\$10 + \$20 + \$0	\$30
Emma, You, Liam	\$20 + \$30 + \$10 + \$40 + \$60 + \$0 + \$120	\$280

$$\text{Emma's share} = 20 + \frac{1}{2} \cdot 40 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 120 = 80$$

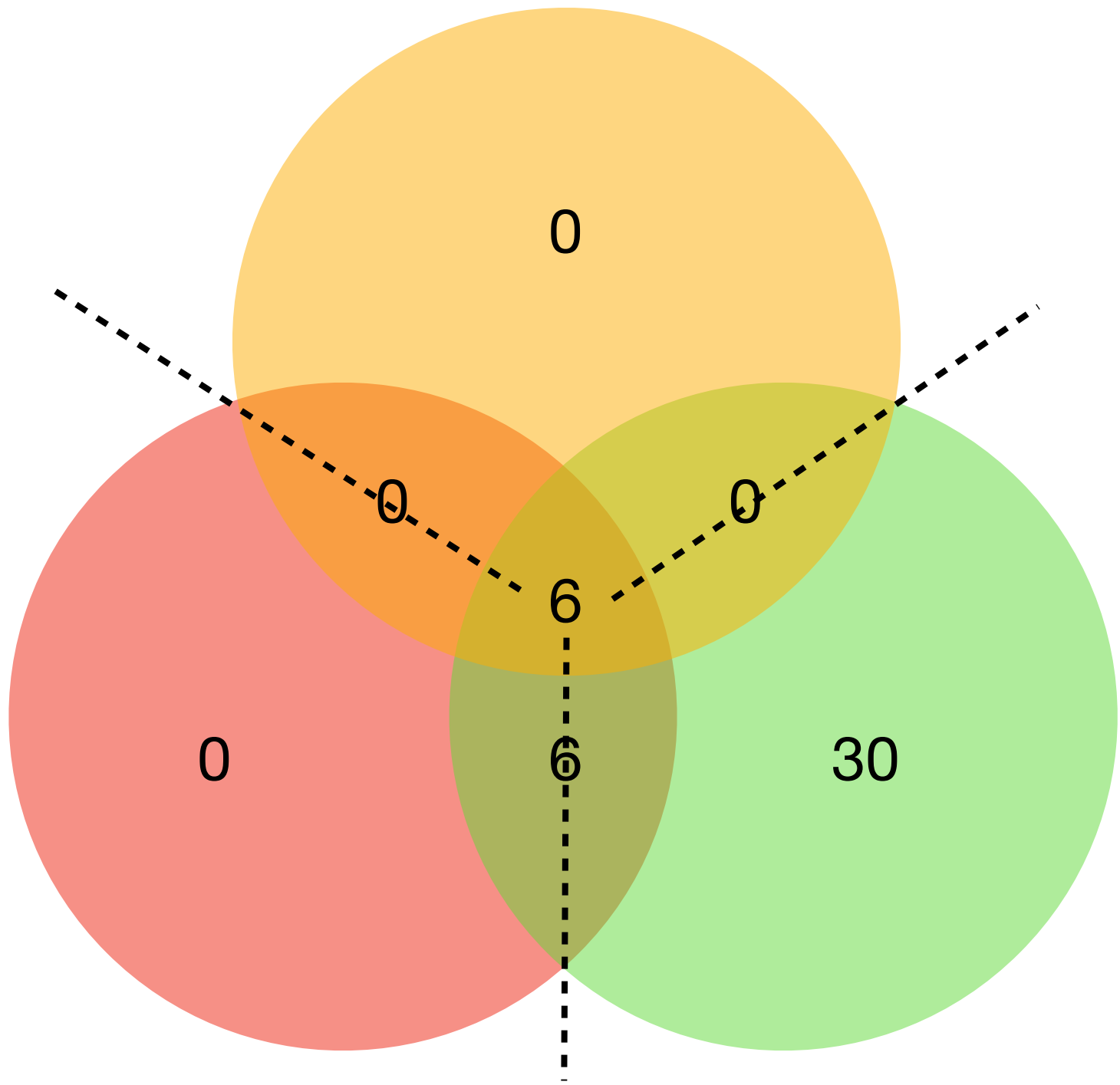
$$\text{Your share} = 30 + \frac{1}{2} \cdot 40 + \frac{1}{2} \cdot 60 + \frac{1}{3} \cdot 120 = 120$$

$$\text{Liam's share} = 10 + \frac{1}{2} \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 120 = 80$$

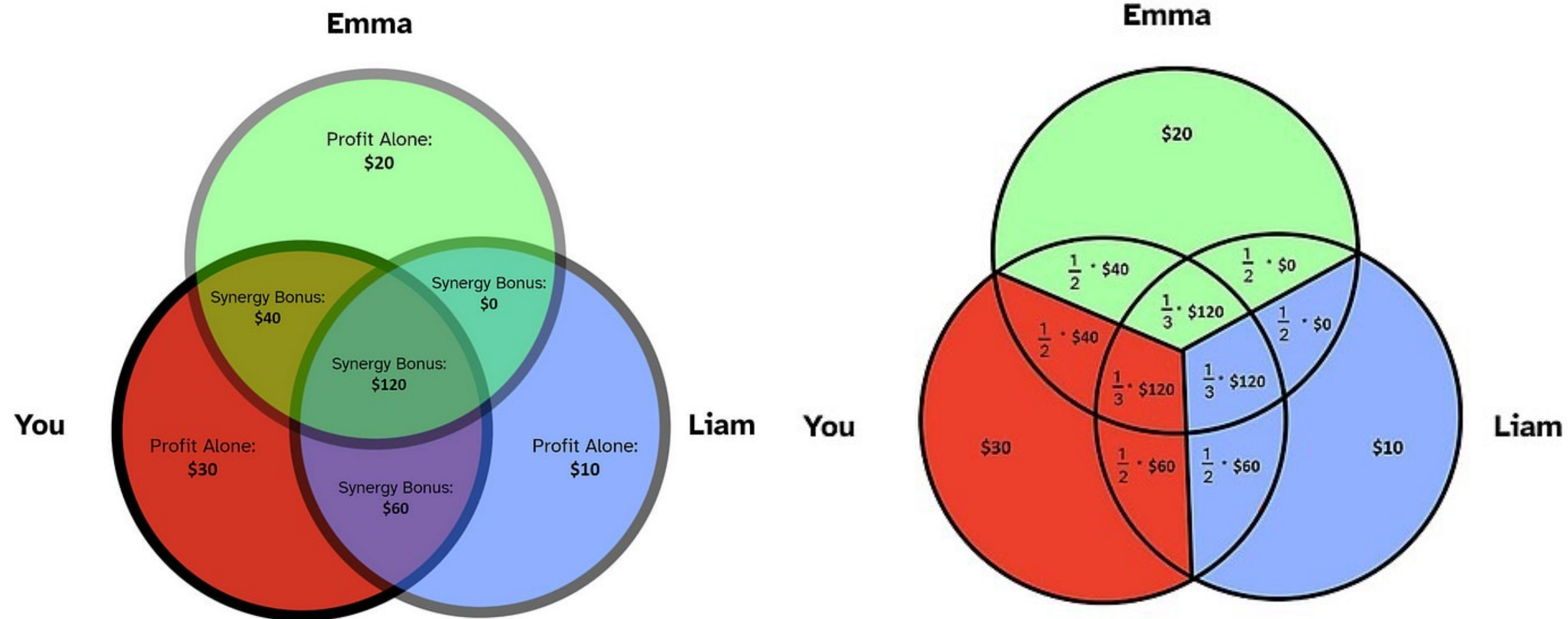




	Дом 1	Дом 2	Дом 3
1-2-3	6	6	30
1-3-2	6	0	36
2-1-3	0	12	30
2-3-1	0	12	30
3-1-2	0	0	42
3-2-1	0	0	42
Сред	2	5	35



Получили готовое решение для ML

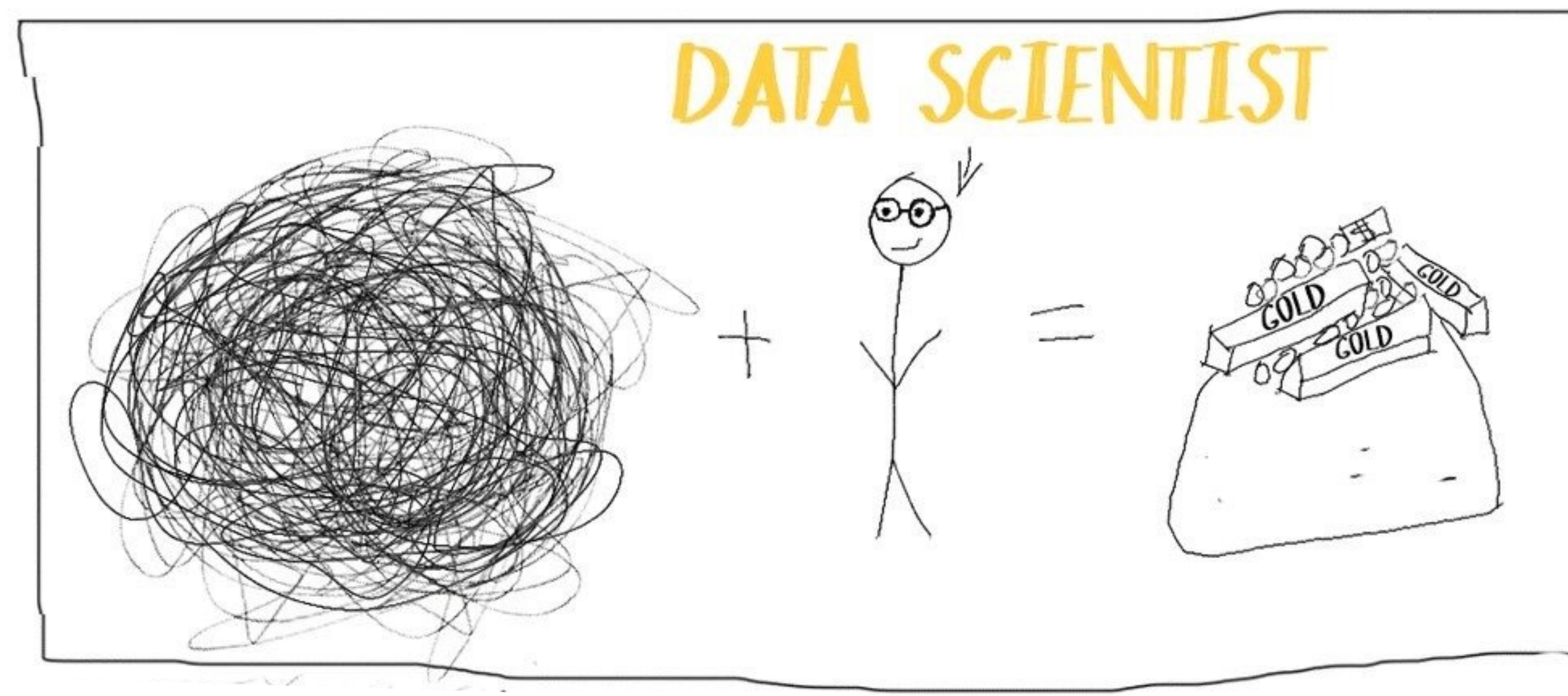


Team members	Sum of synergies	Total profits
Emma	\$20	\$20
You	\$30	\$30
Liam	\$10	\$10
Emma, You	\$20 + \$30 + \$40	\$90
You, Liam	\$30 + \$10 + \$60	\$100
Liam, Emma	\$10 + \$20 + \$0	\$30
Emma, You, Liam	\$20 + \$30 + \$10 + \$40 + \$60 + \$0 + \$120	\$280

$$\text{Emma's share} = 20 + \frac{1}{2} \cdot 40 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 120 = 80$$

$$\text{Your share} = 30 + \frac{1}{2} \cdot 40 + \frac{1}{2} \cdot 60 + \frac{1}{3} \cdot 120 = 120$$

$$\text{Liam's share} = 10 + \frac{1}{2} \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 120 = 80$$



покодим?

Наша цель:

1. Как признаки воздействуют на спрогнозированную величину — положительно или отрицательно?
2. В какой степени значения признаков воздействуют на спрогнозированное значение?
3. И что еще интересного мы сможем решить с помощью векторов Шепли