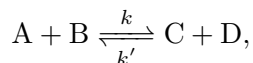


第2回 演習問題 (2021/04/22) 略解とヒント

最終更新日：2021/07/14

演習問題 1 化学反応



を考える。ただし、 k, k' はそれぞれ 2 次, 1 次反応の速度定数であり、A, B, C, D の初期濃度を $a, 2a, 0, 0$ とする。

- (1) C の時刻 t での濃度を $x(t)$ と表すとき、 $x(t)$ に関する微分方程式を立てよ。
- (2) $k' = 2k$ のとき、(1) で導出した微分方程式を解け。

-
- (1) これは問題文が良くなかったです。 k' も 2 次の反応速度定数としている解答が多かったです*1。1 次, 2 次どちらで扱っても正解ということにします。 k' を 1 次の速度定数とした場合は、

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(2a-x) - k'x$$

2 次の速度定数とした場合は、

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(2a-x) - k'x^2$$

- (2) k' を 1 次の速度定数とした場合を示します。

$$x = \frac{\alpha\beta(e^{k\beta t} - e^{k\alpha t})}{\beta e^{k\beta t} - \alpha e^{k\alpha t}}$$

ただし、

$$\alpha = \frac{3a+2-\sqrt{a^2+12a+4}}{2}$$
$$\beta = \frac{3a+2+\sqrt{a^2+12a+4}}{2}$$

です。

- (1) で立てた微分方程式の右辺は x に関する 2 次の多項式なので、その根を求めれば因数分解の形で表せます。そうすると、例題 6 と似たような式変形が可能になります。

訂正 2021.07.14

α と β の式が微妙に間違っていたので訂正しました。

*1 白状すると、 k' を 2 次の速度定数と書いて出題したつもりだったのですが、うっかりしていました... ただ、いずれにしても難易度はほとんど変わりません。問題設定として化学的に気持ち悪いところはあるのですが、 k' を 1 次の速度定数とした場合を考えることにします。

演習問題 2 以下の問いに答えよ.

- (1) 非線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^\alpha, \quad (\alpha \neq 0, 1),$$

は $u = y^{1-\alpha}$ と変数変換することにより, 線形方程式に帰着することを示せ.

- (2) 微分方程式

$$3x \frac{dy}{dx} + y = xy^5,$$

を解け.

- (1) ベルヌーイ型の微分方程式などのキーワードで調べてみてください.

- (2)

$$y(x) = \frac{1}{(c_1 x^{4/3} + 4x)^{1/4}}$$

c_1 は任意定数です. (1) で示したように, 与えられた微分方程式は線形微分方程式に直すことができますので, テキストで扱ってきた解法が使えます.

演習問題 3 以下の問いに答えよ.

(1) 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

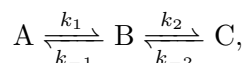
の特殊解が既に一つ求まっており, それを y_0 とすると, 変数変換 $u = y - y_0$ により, 与えれた微分方程式は

$$\frac{du}{dx} = p(x)u + q(x)u^2,$$

の形に帰着することを示せ.

リッカチ (リッカティ) 型の微分方程式で調べてみてください.

演習問題 4 化学反応



を考える. A, B, C の時刻 t での濃度をそれぞれ $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, 初期濃度を x_0 , y_0 , z_0 とする.

- (1) $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ に対する反応速度式 (微分方程式) を立てよ.
 - (2) (1) で立てた微分方程式のうち, $x(t)$ に関する方程式を解け. 必要に応じて追加で定数を導入しても良い. ただし, その定義は書いておくこと.
-

(1)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -k_1x + k_{-1}y \\ \frac{dy}{dt} &= k_1x - (k_{-1} + k_2)y + k_{-2}z \\ \frac{dz}{dt} &= k_2y - k_{-2}z\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{k_{-1}k_{-2}c_0}{\beta} + \left(x_0 - \frac{k_1x_0 - k_{-1}y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{k_{-1}k_{-2}c_0}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{k_{-1}k_{-2}c_0}{\beta} \right) e^{\lambda_1 t} \\ &\quad + \left(\frac{k_1x_0 - k_{-1}y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{k_{-1}k_{-2}c_0}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)} \right) e^{\lambda_2 t}\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}c_0 &= x_0 + y_0 + z_0 \\ \alpha &= \frac{k_1 + k_{-1} + k_2 + k_{-2}}{2} \\ \beta &= k_1k_2 + k_1k_{-2} + k_{-1}k_{-2} \\ \lambda_1 &= -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta} \\ \lambda_2 &= -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}\end{aligned}$$

皆さんの解答を見る感じ, (1) で導出した微分方程式のセットから $x(t)$ だけを含む微分方程式の形に持っていくのが難しかったようです. まず, 今回の反応系では, A, B, C の濃度の和は一定です*2.

$$x(t) + y(t) + z(t) = \text{一定} \equiv c_0$$

従って, z はすぐに消去することができます. 次に, x に関する微分方程式を t で微分してみてください. そうするとだいぶ見通しよく式変形できます. 次式が導出できれば, もう半分くらいこの問題は解けたようなものです.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_{-1} + k_2 + k_{-2}) \frac{dx}{dt} + (k_1k_2 + k_1k_{-2} + k_{-1}k_{-2})x = k_{-1}k_{-2}c_0 \quad (0.1)$$

*2 $\frac{d}{dt}(x + y + z)$ を考えてみましょう.

演習問題 5 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

を考える。ただし、 $0 < \gamma < \omega_0$ とする。

- (1) 一般解を求めよ。
 - (2) 初期条件を $x(0) = 0, dx(t)/dt|_{t=0} = 0$ として、 $x(t)$ の概形を描いてみよ。また t が十分に大きいときの $x(t)$ を求めよ。
-

(1)

$$x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 \cos \tilde{\omega} t + c_2 \sin \tilde{\omega} t) + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2} f_0 \cos \omega t + \frac{2\omega \gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2} f_0 \sin \omega t$$

ただし、

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

(2) t が十分に大きいとき、

$$x(t) = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \gamma^2} \{ (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\omega \gamma \sin \omega t \}$$

よく出来ていました。まずは、斉次方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

の一般解を求めておいて、与えられた非斉次方程式の特殊解を求めれば良いです。特殊解の形として、

$$x_s(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

を仮定してみるとうまくいきます。もちろん、与えられた方程式の右辺を複素数に拡張した上で特殊解を求めても大丈夫です。

訂正 2021.07.14

- (1) \sin が抜けていたので、修正しました。
- (2) $t \rightarrow \infty$ なのに余計な項が入っていたので、修正しました。

演習問題 6 (べき級数解法)

講義では省略したべき級数解法について、雰囲気だけでも掴んでおこう。例えば、次の微分方程式を考える。

$$\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

既に知っているように、一般解は $y = Ce^x$ である。ここでは一般解をべき級数解法を用いて導いてみる。

どのような y が方程式の解になっているか全く見当がつかないとする (実際にはついているとしても)。そこで、どんな形であっても対応できるように、 y をべき級数の形で表しておくことにする。

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

これを与えられた微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} - y &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)a_{n+1} - a_n\} x^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

となる。これが x の値によらず成り立つためには、全ての x^n についての係数 (下線部) がゼロでなければならない。つまり、

$$\begin{aligned} (n+1)a_{n+1} - a_n &= 0, \\ \rightarrow a_{n+1} &= \frac{1}{n+1} a_n, \end{aligned}$$

という漸化式が得られ、一般項を求めると、

$$a_n = \frac{1}{n!} a_0,$$

である。従って、微分方程式の解が、

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = a_0 e^x$$

となることを示せた。

上記の例を参考にして、微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0,$$

を解いてみよう。

これも、皆さんよく出来ていました。既に、

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

と解の形を知っているわけで、それをべき級数解法によっても導けるかを確認してもらうための問題でした。