第 1 回 演習問題 (2021/04/15) 略解とヒント

演習問題 1　放射性物質の量は時間がたつと減少していくことが知られている．時刻 t での放射性粒子 (原子) の数を $N(t)$ と表すと，$N(t)$ の時間変化率はその時刻での粒子数 $N(t)$ に比例することが実験的に確かめられている．

(1)　比例定数を λ ($\lambda > 0$，崩壊定数と呼ばれる) として，$N(t)$ に関する微分方程式を立てよ．

(2)　(1) で導出した微分方程式を解け．ただし，時刻 $t = 0$ での粒子数を N_0 とする．

(3)　粒子数が半分になるのに要する時間 τ を求めよ．

この問題については，ほぼ全員正解でしたので，略解のみを示します．

(1)　$\dfrac{dN}{dt} = -\lambda N$

(2)　$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

(3)　$\tau = \dfrac{1}{\lambda} \log 2$

演習問題 2　微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 2\sin x,$$

の一般解を求めよ．また，初期条件が $y(0) = 1$ のときの解を求めよ．

ほぼ全員正解でしたので，略解のみを示します．

$$y = \frac{2}{5}\left(2\sin x - \cos x\right) + \frac{7}{5}e^{-2x}.$$

演習問題 3　化学反応

$$\mathrm{A} \xrightarrow{k_1} \mathrm{B} \xrightarrow{k_2} \mathrm{C}$$

を考える．ただし，k_1，k_2 は各過程における速度定数である．A, B, C の時刻 t での濃度をそれぞれ $[\mathrm{A}]_t$，$[\mathrm{B}]_t$，$[\mathrm{C}]_t$ とすると，反応速度式 (微分方程式) は

$$\frac{d[\mathrm{A}]_t}{dt} = -k_1[\mathrm{A}]_t,$$
$$\frac{d[\mathrm{B}]_t}{dt} = k_1[\mathrm{A}]_t - k_2[\mathrm{B}]_t,$$
$$\frac{d[\mathrm{C}]_t}{dt} = k_2[\mathrm{B}]_t,$$

で表される．初期濃度を $[\mathrm{A}]_0$，$[\mathrm{B}]_0$，$[\mathrm{C}]_0$ として上記の微分方程式を解いて，A, B, C の濃度の時間変化を求めよ．

これもほぼ全員出来ていました.

A, B, C の時間変化は次式のように与えられます.

$$[\mathrm{A}]_t = [\mathrm{A}]_0 e^{-k_1 t}$$
$$[\mathrm{B}]_t = \frac{k_1}{k_2 - k_1}[\mathrm{A}]_0 \left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) + [\mathrm{B}]_0 e^{-k_2 t}$$
$$[\mathrm{C}]_t = [\mathrm{A}]_0 \left(1 - \frac{k_2}{k_2 - k_1}e^{-k_1 t} + \frac{k_1}{k_2 - k_1}e^{-k_2 t}\right) + [\mathrm{B}]_0 \left(1 - e^{-k_2 t}\right) + [\mathrm{C}]_0$$

$[\mathrm{C}]_t$ については,

$$\frac{d}{dt}\left([\mathrm{A}]_t + [\mathrm{B}]_t + [\mathrm{C}]_t\right) = 0$$

つまり,

$$[\mathrm{A}]_t + [\mathrm{B}]_t + [\mathrm{C}]_t = [\mathrm{A}]_0 + [\mathrm{B}]_0 + [\mathrm{C}]_0,$$

が成り立つので,

$$[\mathrm{C}]_t = [\mathrm{A}]_0 + [\mathrm{B}]_0 + [\mathrm{C}]_0 - [\mathrm{A}]_t - [\mathrm{B}]_t$$

という関係式から求めることができます.

演習問題 4　バネにつながれた質量 m のおもりの運動 $x(t)$ を考える．おもりの平衡位置を $x=0$，バネ定数を k とすると，このおもりの運動は次の微分方程式に従うとする．

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx.$$

いま，このおもりとバネを丸ごと粘性のある流体の中に入れる．すると，おもりが動く方向とは逆向きに力 (粘性力) が働く．おもりの動く速さがあまり大きくないときは，その力はおもりの速度に比例する．ここでは比例定数を Γ (>0) と表すことにする．

(1)　流体の中でのおもりの運動方程式を立てよ．

(2)　$\omega=\sqrt{k/m}$, $\gamma=\Gamma/(2m)$ とおいて，次のそれぞれの場合での (1) で立てた微分方程式の解を求めよ．ただし，$x(0)=1$, $dx/dt|_{t=0}=0$ とする．

(i) $\gamma<\omega$, (ii) $\gamma=\omega$, (iii) $\gamma>\omega$

(3)　(i), (ii), (iii) における解 $x(t)$ を時間 t に対してプロットしてみて，その形について考察せよ．プロットは手書きで大まかに書いても良いし，Excel や Gnuplot を使っても良い．

---

(1)　$m\dfrac{d^2}{dt^2}x(t)=-kx(t)-\Gamma\dfrac{d}{dt}x(t)$

(2)　(i) $\gamma<\omega$ のとき，

$$x\left(t\right)=e^{-\gamma t}\left(\cos\tilde{\omega}t+\frac{\gamma}{\tilde{\omega}}\sin\tilde{\omega}t\right)$$

ただし，

$$\tilde{\omega}=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$$

(ii) $\gamma=\omega$ のとき，

$$x\left(t\right)=e^{-\gamma t}+\gamma te^{-\gamma t}$$

(iii) $\gamma>\omega$ のとき，

$$x\left(t\right)=-\frac{\gamma_2}{\gamma_1-\gamma_2}e^{-\gamma_1 t}+\frac{\gamma_1}{\gamma_1-\gamma_2}e^{-\gamma_2 t}$$

ただし，

$$\lambda_1=\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2},\ \lambda_2=\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}$$

(3)　(2) で解の形を具体的に求めることが出来たわけですから，γ や ω に具体的な値を入れてみて，Excel でプロットしてみましょう．どの条件のときに，減衰は最も早くなるのでしょうか？