第 3 章

ラプラス解析入門

前章でフーリエ変換を学んだ．簡単に振り返っておくと，周期関数 $f(x)$ を三角関数のセットで表現するのがフーリエ級数展開，そして周期無限大の極限をとったものがフーリエ変換なのだった．フーリエ変換には，実空間 (x) 上での畳み込み積分がフーリエ空間 (k) 上では単純な 2 つの関数の積になるなど，理論展開や数値解析を行う上で有用な性質を持つ．一方で，物理や化学で現れる時刻 t の関数 $f(t)$ の多くは $t > 0$ で定義されるものであり，区間 $-\infty \sim \infty$ の積分で表されるフーリエ変換ではこれらを扱うのは不便である．本章で学ぶラプラス (Laplace) 変換は，フーリエ変換と似たような性質を持ちつつ $t = 0 \sim \infty$ の区間で定義された関数を扱うのに長けた応用数学的な手法である．これを数学的に厳格な立場から学んでいこうとすると，(化学系としては) いささか高度な数学知識が要求されるが，化学工学を始めとする様々な工学分野で広く使われるようになった結果，現在ではラプラス変換の道具としての使い方がかなり整備されており，理論の詳細にこだわらなければ，極めて簡単に様々な微分方程式を初等的な式変形によって解くことができる．本章では，その道具としてのラプラス変換の使い方に重きをおいて解説していくことにする．

3.1　ラプラス変換・逆変換

3.1.1　ラプラス変換

天下り的ではあるが，まずラプラス変換の定義について述べておく．$t > 0$ で区分的に連続な関数 $f(t)$ と**複素数** s に対し，

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f\left(t\right)\right] = \int_0^\infty dt\, f\left(t\right) e^{-st}, \tag{3.1.1}$$

で定義される $f(t)$ から $F(s)$ への変換 $\mathcal{L}$ のことをラプラス変換と呼ぶ．加えて，変換された後の関数 $F(s)$ のこともラプラス変換と呼ぶのが一般的である．複素数 s がとりうる値には制限があるのだが，それは例題を通して言及していくことにする．

例題 1 関数

$$f(t) = 1, \tag{3.1.2}$$

のラプラス変換を求めよ.

ラプラス変換の定義に則ると,

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty dt\, e^{-st} = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty} e^{-st} + \frac{1}{s}, \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

である. s は複素数なので実数 α, β を用いて,

$$s = \alpha + i\beta, \tag{3.1.4}$$

と表せる. 今後しばしば $\mathrm{Re}(s)$, $\mathrm{Im}(s)$ なる記号を用いるが, これらはそれぞれ複素数 s の実部, 虚部を表す. つまり今回の場合では,

$$\mathrm{Re}(s) = \alpha, \tag{3.1.5}$$

$$\mathrm{Im}(s) = \beta, \tag{3.1.6}$$

である. Eq. (3.1.3) の第 1 項は,

$$\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty} e^{-st} = \frac{1}{s}\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}e^{-i\beta t}, \tag{3.1.7}$$

と表せるので, 極限が特定の値に収束するためには,

$$\mathrm{Re}(s) = \alpha > 0, \tag{3.1.8}$$

とする必要がある. この条件を満たす場合, 極限は 0 に収束するので, ラプラス変換は

$$F(s) = \frac{1}{s}, \quad (\mathrm{Re}(s) > 0) \tag{3.1.9}$$

である.

この例題で見たように，任意の s について，ラプラス変換が存在するわけではなく，とりうる s の範囲は $f(t)$ に依存する．

ラプラス変換の存在について議論するために，まず指数位数 (exponential order) なるものを導入する．$f(t)$ が指数 α 位の関数であるとは，定数 M, α に対して $f(t)$ が

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad (0 < t < \infty) \tag{3.1.10}$$

を満たすことをいう．そして，$f(t)$ が区分的に連続で指数 α 位の関数であるならば，$\mathrm{Re}(s) > \alpha$ を満たす任意の s に対し，ラプラス変換が存在する．これは，次の不等式を考えることで示せる．

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^\infty dt, f(t)e^{-st}\right| &\leq \int_0^\infty dt\ \left|e^{-st}\right| |f(t)| \\
&= \int_0^\infty dt\, e^{-\mathrm{Re}(s)t} |f(t)| \\
&\leq \int_0^\infty dt\, e^{-\mathrm{Re}(s)t} M e^{\alpha t} \\
&= \left[-\frac{M}{\mathrm{Re}(s)-\alpha} e^{-(\mathrm{Re}(s)-\alpha)t}\right]_0^\infty .
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

$\mathrm{Re}(s) - \alpha > 0$ であるから，最後の行は有限の値に収束する．従って，

$$\int_0^\infty dt\, f(t)e^{-st}, \tag{3.1.12}$$

も収束する．つまり，確かにラプラス変換が存在する．

ラプラス変換には，$\mathrm{Re}(s) > \alpha$ ではラプラス変換が存在するが，$\mathrm{Re}(s) < \alpha$ では存在しないような定数 α が存在する．この α のことを収束座標と呼び，複素平面上の $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ の領域を収束半平面と呼ぶ．

例題 2　次の関数 $f(t)$ のラプラス変換 $F(s)$ を求めよ.

(1)　$f(t) = a$

(2)　$f(t) = t^n$

(3)　$f(t) = \sin(at)$

(4)　$f(t) = \cos(at)$

(1)

$$F(s) = \int_0^\infty dt\, ae^{-st} = a\int_0^\infty dt\, e^{-st} = \frac{a}{s} \tag{3.1.13}$$

(2)

$$F(s) = \int_0^\infty dt\, t^n e^{-st} \tag{3.1.14}$$

上式で $st = u$ とおくと,

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s}\int_0^\infty du\, \left(\frac{u}{s}\right)^n e^{-u} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty du\, u^n e^{-u} \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

ただし, $\Gamma(n)$ はガンマ関数と呼ばれ,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty du\, u^{n-1} e^{-u} \tag{3.1.16}$$

で定義される. n が整数のとき,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \tag{3.1.17}$$

であることから, 階乗を一般化したものと言える.

(3)

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty dt\, e^{at} e^{-st} = \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{s-a} \end{aligned} \tag{3.1.18}$$

(4)

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty dt\, \sin(at) e^{-st} = \int_0^\infty dt\, \frac{e^{iat} - e^{-iat}}{2i} e^{-st} \\ &= \frac{1}{2i}\int_0^\infty dt\, \left(e^{-(s-ia)t} - e^{-(s+ia)t}\right) \\ &= \frac{a}{s^2 + a^2} \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

(5)　(4) とほとんど同じなので, 答えだけ記す.

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2} \tag{3.1.20}$$

3.1.2 ラプラス変換が持つ性質

冒頭で述べたように，ラプラス変換はフーリエ変換とよく似た性質を持つ．ここではそれを紹介する．ただし，以下では関数 $f(t)$ (指数 α 位, $t < 0$ でゼロ) のラプラス変換をそれぞれ $F(s)$ とする．また，$\mathrm{Re}(s) > \alpha$ とする．

- 線形性
$$\mathcal{L}\left[af(t) + bg(t)\right] = aF(s) + bG(s). \tag{3.1.21}$$

- 移動性
$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\Theta(t-a)\right] = e^{-as}F(s), \tag{3.1.22}$$
$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right] = F(s-a), \tag{3.1.23}$$
ただし，$a > 0$ である．$\Theta(t)$ はヘヴィサイドの階段 (step) 関数と呼ばれるものであり，次式で定義される．
$$\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}. \tag{3.1.24}$$

- 拡大性
$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = F(as), \quad a > 0. \tag{3.1.25}$$

- 導関数のラプラス変換
$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0). \tag{3.1.26}$$
n 階導関数 $f^{(n)}(t)$ のラプラス変換は
$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \tag{3.1.27}$$
である．ラプラス変換をすることで微分演算子が消えるので，微分方程式を解くのに有効な公式である．

- 積分のラプラス変換
$$\mathcal{L}\left[\int_0^t d\tau\, f(\tau)\right] = \frac{1}{s}F(s). \tag{3.1.28}$$
ラプラス変換をすることで積分が消えるので，積分方程式 (方程式の中に積分が含まれる) を解くのに有効な公式である．

- 畳み込み積分のラプラス変換
$$\mathcal{L}\left[\int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau)\right] = F(s)G(s). \tag{3.1.29}$$
積分のラプラス変換と同様，積分方程式を解くのに有効である．畳み込み積分の定義がフーリエ変換の場合と少し異なることに注意すること．

3.1.2.1 線形性

ラプラス変換では次の関係性が成り立つ.

$$\mathcal{L}\left[af(t)+bg(t)\right]=aF(s)+bG(s). \tag{3.1.30}$$

これが成り立つのは積分の線形性があるからである．フーリエ変換の場合と同じなので，証明は省略する．

3.1.2.2 移動性

定数 $a>0$ に対し，次式が成り立つ.

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\Theta(t-a)\right]=e^{-as}F(s), \tag{3.1.31}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]=F(s-a). \tag{3.1.32}$$

第 1 式の左辺は,

$$\mathcal{L}\left[f(t-a)\Theta(t-a)\right]=\int_a^\infty dt\,f(t-a)e^{-st}, \tag{3.1.33}$$

であり，$\tau=t-a$ と変数変換することで,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[f(t-a)\Theta(t-a)\right]&=\int_0^\infty d\tau\,f(\tau)e^{-s(\tau+a)}\\&=e^{-sa}F(s),\end{aligned} \tag{3.1.34}$$

となるので，右辺と一致する．第 2 式の左辺は,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[e^{at}f(t)\right]&=\int_0^\infty dt\,e^{at}f(t)e^{-st}\\&=\int_0^\infty dt\,f(t)e^{-(s-a)t}\\&=F(s-a),\end{aligned} \tag{3.1.35}$$

となり，右辺と一致する．

3.1.2.3 拡大性

定数 $a>0$ に対し，次の関係性が成り立つ.

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=F(as). \tag{3.1.36}$$

左辺に対し $\tau=t/a$ と変数変換することで,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{1}{a}f\left(\frac{t}{a}\right)\right]&=\frac{1}{a}\int_0^\infty dt\,f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-st}\\&=\int_0^\infty d\tau\,f(\tau)e^{-sa\tau}\\&=F(sa),\end{aligned} \tag{3.1.37}$$

を得る．

3.1.2.4 導関数のラプラス変換

$f(t)$ の導関数のラプラス変換は次式のように表される．

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0). \tag{3.1.38}$$

左辺は部分積分により，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]&=\int_0^\infty dt\,\left(\frac{d}{dt}f(t)\right)e^{-st}\\&=\left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty+s\int_0^\infty dt\,f(t)e^{-st}\\&=\lim_{t\to\infty}f(t)e^{-st}-f(0)+sF(s),\end{aligned} \tag{3.1.39}$$

となる．$f(t)$ の指数位数 α は，

$$\mathrm{Re}(s)>\alpha, \tag{3.1.40}$$

とすると

$$\begin{aligned}\left|f(t)e^{-st}\right|&\le e^{-\mathrm{Re}(s)t}Me^{\alpha t}\\&=Me^{-(\mathrm{Re}(s)-\alpha)t}\\&\xrightarrow{t\to\infty}0,\end{aligned} \tag{3.1.41}$$

なので，第 1 項はゼロとなり，目的の式を得る．

この証明は n 階微分 $f^{(n)}(t)$ のラプラス変換の場合に容易に拡張することが出来る．ここではその結果のみを記すことにする (各自でやってみると良い)．

$$\mathcal{L}\left[f^{(n)}(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0). \tag{3.1.42}$$

3.1.2.5 積分のラプラス変換

積分のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t d\tau\,f(\tau)\right]=\frac{1}{s}F(s), \tag{3.1.43}$$

のように表すことができる．左辺を書き直すと，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\int_0^t d\tau\,f(\tau)\right]&=\int_0^\infty dt\,\left(\int_0^\infty d\tau\,f(\tau)\right)e^{-st}\\&=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t d\tau\,f(\tau)\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty dt\,f(t)e^{-st}\\&=-\frac{1}{s}\lim_{t\to\infty}e^{-st}\int_0^t d\tau\,f(\tau)+\frac{1}{s}F(s),\end{aligned} \tag{3.1.44}$$

となる．ここで，$f(t)$ の指数位数 α に対し，$\mathrm{Re}(s) > \alpha$ なので，

$$\begin{aligned}\left|e^{-st}\int_0^t d\tau\, f(\tau)\right| &\le e^{-\mathrm{Re}(s)t}\int_0^t d\tau\, Me^{\alpha t}\\ &= e^{-\mathrm{Re}(s)t}\frac{M}{\alpha}\left(e^{-\alpha t}-1\right)\\ &= \frac{M}{\alpha}\left(e^{-(\mathrm{Re}(s)-\alpha)t}-e^{-\mathrm{Re}(s)t}\right)\\ &\xrightarrow{t\to\infty} 0,\end{aligned} \tag{3.1.45}$$

となる．従って，第 1 項の極限はゼロとなり，目的の式を得る．

3.1.2.6 畳み込み積分のラプラス変換

次式で定義される畳み込み積分 (フーリエ変換の場合と少し違うので注意)

$$\int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau), \tag{3.1.46}$$

のラプラス変換は

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t d\tau\, f(\tau)g(t-\tau)\right] = F(s)G(s), \tag{3.1.47}$$

のように，$f(s)$，$g(s)$ それぞれのラプラス変換の積で表される．ただし，$g(t)$ は $t<0$ でゼロで，$g(t)$ のラプラス変換を $G(s)$ とする．右辺は

$$\begin{aligned}F(s)G(s) &= \int_0^\infty ds\, e^{-sx}\int_0^\infty dy\, e^{-sy}f(x)g(y)\\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty dxdy\, e^{-s(x+y)}f(x)g(y),\end{aligned} \tag{3.1.48}$$

であるが，ここで $t=x+y$, $\tau=x$ と変数変換すると $dxdy=dtd\tau$ であるから，

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty dt\int_0^\infty d\tau\, f(\tau)g(t-\tau), \tag{3.1.49}$$

である．さらに，$g(t)$ は $t<0$ でゼロだから，

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty dt\int_0^t d\tau\, e^{-st}f(\tau)g(t-\tau), \tag{3.1.50}$$

となり，目的の式を得る．

3.1.3 ラプラス逆変換

フーリエ変換の場合と同様，ラプラス変換にも逆変換が存在する．ラプラス変換が $f(t)$ から $F(s)$ への変換であったのに対し，逆変換は $F(s)$ から $f(t)$ への変換

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right], \tag{3.1.51}$$

を指す．例えば，例題 1 で見たように，

$$f(t) = 1 \underset{\text{ラプラス逆変換}}{\overset{\text{ラプラス変換}}{\rightleftarrows}} F(s) = \frac{1}{s}, \tag{3.1.52}$$

である．なので，関数 $f_1(t)$，$f_2(t), \cdots$，$f_N(t)$ のラプラス変換 $F_1(s)$，$F_2(s), \cdots, F_N(s)$ が既知であった場合，ラプラス変換

$$F(s) = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) + \cdots + a_N F_N(s), \tag{3.1.53}$$

の逆変換 $f(t)$ は，ラプラス変換の線形性 Eq. (3.1.21) より

$$f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \cdots a_N f_N(t), \tag{3.1.54}$$

のように求めることができる．

ラプラス逆変換が積分表示でどのような形になるかを結果だけ示しておく．まず，絶対収束座標なるものを新たに導入する．積分

$$\int_0^\infty dt \left| e^{-st} f(t) \right|, \tag{3.1.55}$$

が，$\mathrm{Re}(s) > \beta$ で収束し，$\mathrm{Re}(s) < \beta$ で収束しないとする．このような β のことを絶対収束座標と呼ぶ．ラプラス逆変換は任意の $a > \beta$ に対して，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} dt\, F(s) e^{st}, \tag{3.1.56}$$

で表される．この積分はブロムウィッチ (Bromwich) 積分と呼ばれている．ブロムウィッチ積分を用いて逆変換を求めるには，複素関数論の知識が要求される．しかし，代表的な関数のラプラス変換・逆変換はラプラス解析の教科書に表 (ラプラス変換表) としてまとめられているので，それと紹介した公式を駆使することで，逆変換を計算できることが多い．[*1]．このテキストでも簡易版ではあるが，変換表を掲載しておく．

[*1] と言いつつ，私の専門に関わるある理論 (Smoluchowski-Collins-Kimball) に登場する関数は，そのラプラス変換がとても複雑な形をしていて，未だに逆変換を自分の手で導出することをサボっている．もしかしたら，変換表と諸定理を使って導出出来るのかもしれないが，その気力が起きないくらいにゴチャゴチャしているので，試す気も起きなかった．ちなみに，導出自体はかなり昔に報告されているので，頑張れば出来るはずではある．

$f(t)$	$F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\dfrac{1}{s^n}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh\omega t$	$\dfrac{s}{s^2-\omega^2}$
$\sinh\omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$e^{bt}\sin at$	$\dfrac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$e^{bt}\cos at$	$\dfrac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{at}$	$\dfrac{1}{(s-a)^n}$
$t\cos at$	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$t\sin at$	$\dfrac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$
$\delta(t)$	1

例題 3 ラプラス逆変換

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{3.1.57}$$

を示せ.

まず,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{s^{n-1}}\right], \tag{3.1.58}$$

のように書き直してみる．すると，積分のラプラス変換 Eq. (3.1.28) が使えることに気づく.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \int_0^t d\tau_n\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n-1}}\right]. \tag{3.1.59}$$

これをもう一度繰り返すと,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] &= \int_0^t d\tau_n\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\frac{1}{s^{n-2}}\right]\\ &= \int_0^t d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^{n-2}}\right],\end{aligned} \tag{3.1.60}$$

となる．この操作を何度も繰り返すことで次式を得る.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] = \int_0^t d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1}\cdots\int_0^{\tau_3} d\tau_2\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]. \tag{3.1.61}$$

ここで，例題 1 や変換表が示すように,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1, \tag{3.1.62}$$

なので，結局,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^n}\right] &= \int_0^t d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1}\cdots\int_0^{\tau_3} d\tau_2\\ &= \frac{t^{n-1}}{(n-1)!},\end{aligned} \tag{3.1.63}$$

となる.

3.1.4 ラプラス逆変換の性質

- 微分のラプラス逆変換

  ラプラス変換の 1 階微分について次式が成り立つ.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}F(s)\right] = -tf(t). \tag{3.1.64}$$

  n 階導関数 $F^{(n)}(s)$ については,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F^{(n)}(s)\right] = (-t)^n f(t), \tag{3.1.65}$$

  が成り立つ.

  この公式によると, $F(s)$ をラプラス逆変換が既知の関数 $F_0(s)$ (ラプラス逆変換は $f_0(t)$) を用いて,

$$F(s) = \frac{d}{ds}F_0(s), \tag{3.1.66}$$

  と書き直すことで, 逆変換を $f(t) = -tf_0(t)$ と求めることが出来る.

  もちろん, これらの公式をラプラス変換の形で,

$$\mathcal{L}\left[-tf(t)\right] = \frac{d}{ds}F(s), \tag{3.1.67}$$

$$\mathcal{L}\left[(-t)^n f(t)\right] = F^{(n)}(s), \tag{3.1.68}$$

  と書いても良い.

- 積分のラプラス逆変換

  積分のラプラス逆変換は,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\int_s^\infty du\, F(u)\right] = \frac{f(t)}{t}, \tag{3.1.69}$$

  と表すことが出来る. 先ほどと同様,

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty du\, F(u), \tag{3.1.70}$$

  と表しても良い.

3.1.4.1 微分のラプラス逆変換

ここでは, ラプラス変換

$$\mathcal{L}\left[-tf(t)\right] = \frac{d}{ds}F(s), \tag{3.1.71}$$

を示す．右辺は，

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}F(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty dt\, f(t)e^{-st} \\ &= \int_0^\infty dt\, \frac{d}{ds}\left(f(t)e^{-st}\right) \\ &= \int_0^\infty dt\, (-t)f(t)e^{-st} \\ &= \mathcal{L}\left[(-t)f(t)\right], \end{aligned} \tag{3.1.72}$$

となるので[*2]，1 階微分に関するラプラス変換の公式が示せた．n 階微分についても全く同じ手続きで導出出来る．

3.1.4.2 積分のラプラス逆変換

ラプラス変換

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty du\, F(u), \tag{3.1.73}$$

を示す．右辺は，

$$\begin{aligned}\int_s^\infty du\, F(u) &= \int_s^\infty du \int_0^\infty dt\, e^{-ut}f(t) \\ &= \int_0^\infty dt \int_s^\infty du\, e^{-ut}f(t) \\ &= \int_0^\infty dt\, f(t)\left[-\frac{e^{-ut}}{t}\right]_{u=s}^{u=\infty} \\ &= \int_0^\infty dt\, \frac{f(t)}{t}e^{-st} \\ &= \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right], \end{aligned} \tag{3.1.74}$$

と書き直せるので，目的の式が得られた．

[*2] ホントは微分と積分の順序を入れ替えれるかどうか示さなければならないのだが，細かいことは気にしないことにする．

例題 4 ラプラス逆変換

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right], \tag{3.1.75}$$

を求めよ.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right] = -\frac{1}{2a}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)\right]. \tag{3.1.76}$$

ラプラス変換表を見ると,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \sin(at), \tag{3.1.77}$$

なので, 微分のラプラス変換より,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right] &= -\frac{1}{2a}(-t)\sin(at) \\ &= \frac{t}{2a}\sin(at).\end{aligned} \tag{3.1.78}$$

例題 5 関数

$$f(t) = \frac{\sin(at)}{t}, \tag{3.1.79}$$

のラプラス変換を求めよ.

積分のラプラス逆変換 Eq. (3.1.70) を用いることで,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{\sin(at)}{t}\right] &= \int_s^\infty du\,\mathcal{L}\left[\sin(at)\right] \\ &= \int_s^\infty du\,\frac{a}{u^2+a^2} \\ &= \left[\tan^{-1}\frac{u}{a}\right]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{s}{a}.\end{aligned} \tag{3.1.80}$$

3.1.5 ラプラス変換を学ぶ動機：線形常微分方程式への応用

ここまで，ラプラス変換・逆変換の性質や計算方法について述べてきたが，肝心の「何に使えるのか？」については，あんまり触れていなかったので，ここで明らかにしておこう．このテキストでは，ラプラス変換を微分方程式の解法に応用することを目標にしている．まだ，技巧的なことについて解説すべきことがあるが，まずは簡単な線形常微分方程式を例にラプラス変換の有効性について見ていこう．

次の微分方程式を考えよう．

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + 4f = 0, \quad f(0) = f_0, \quad \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=0} = f_0'. \tag{3.1.81}$$

1 章で私たちはこの方程式の解き方を知っていて，実際に解いてみると，

$$f(t) = f_0\cos(2t) + \frac{f_0'}{2}\sin(2t), \tag{3.1.82}$$

となる．これをラプラス変換を用いて解いてみよう．まず，両辺をラプラス変換する．導関数のラプラス変換 Eq. (3.1.27) を用いると，

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f}{dt^2}\right] + 4\mathcal{L}\left[f\right] = 0, \\ &\to \left(s^2F(s) - sf_0 - f_0'\right) + 4F(s) = 0, \\ &\to (s^2+4)F(s) = sf_0 + f_0', \\ &\to F(s) = f_0\frac{s}{s^2+4} + f_0'\frac{1}{s^2+4}.\end{aligned} \tag{3.1.83}$$

このように，微分方程式にラプラス変換を施すと，初等的な代数方程式に変化する．これを解のラプラス変換 $F(s)$ について解くことは上で見たように簡単で，あとは逆変換するだけである．

$$f(t) = f_0\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right] + f_0'\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+4}\right]. \tag{3.1.84}$$

微分方程式が簡単な代数方程式になった分，皺寄せが逆変換にきているのだが，私たちはラプラス変換表を持っている．表を眺めて，式中に現れている逆変換がないか調べてみる，もしくは式変形によって表に載っている形に直せないかを検討する．今回は既に表に載っているので当てはめると，

$$f(t) = f_0 \cos(2t) + \frac{f_0'}{2} \sin(2t), \tag{3.1.85}$$

となり，確かに微分方程式の解になっている．

この例を見て分かるように，ラプラス変換を使った解法は最後の逆変換が実行出来るかどうかにかかっている．次節からは，ラプラス変換を変換表に載っている形に書き直す技巧について解説する．