第 1 回 演習問題 (2021/04/15) 解答例

演習問題 1　放射性物質の量は時間がたつと減少していくことが知られている．時刻 t での放射性粒子 (原子) の数を $N(t)$ と表すと，$N(t)$ の時間変化率はその時刻での粒子数 $N(t)$ に比例することが実験的に確かめられている．

(1)　比例定数を λ ($\lambda > 0$，崩壊定数と呼ばれる) として，$N(t)$ に関する微分方程式を立てよ．

(2)　(1) で導出した微分方程式を解け．ただし，時刻 $t = 0$ での粒子数を N_0 とする．

(3)　粒子数が半分になるのに要する時間 τ を求めよ．

---

(1)

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \tag{1.1}$$

(2)

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \tag{1.2}$$

(3) τ が満たすべき方程式は

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda \tau} \tag{1.3}$$

である．これを τ について解くと，

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \log 2 \tag{1.4}$$

演習問題 2　微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 2\sin x,$$

の一般解を求めよ．また，初期条件が $y(0) = 1$ のときの解を求めよ．

両辺に，e^{2x} をかけて，

$$\begin{aligned} e^{2x}\frac{dy}{dx} + 2e^{2x}y &= 2e^{2x}\sin x, \\ \to \frac{d}{dx}\left(e^{2x}y\right) &= 2e^{2x}\sin x. \end{aligned} \tag{2.1}$$

両辺を x で積分すると，

$$e^{2x}y = 2\int dx\, e^{2x}\sin x + C. \tag{2.2}$$

右辺の積分について考える．まず，オイラーの公式より，sin 関数は

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \tag{2.3}$$

なので，被積分関数を

$$2e^{2x}\sin x = -i\left(e^{(2+i)x} - e^{(2-i)x}\right). \tag{2.4}$$

のように表した上で，積分を実行すると，

$$\begin{aligned} 2\int dx\, e^{2x}\sin x &= -i\left(\int dx\, e^{(2+i)x} - \int dx\, e^{(2-i)x}\right) \\ &= -i\left(\frac{1}{2+i}e^{(2+i)x} - \frac{1}{2-i}e^{(2-i)x}\right) \\ &= \frac{2}{5}\left(2\sin x - \cos x\right)e^{2x}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

となる．従って，

$$\begin{aligned} e^{2x}y &= \frac{2}{5}\left(2\sin x - \cos x\right)e^{2x} + C, \\ \to y &= \frac{2}{5}\left(2\sin x - \cos x\right) + Ce^{-2x}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

また，$y(0) = 1$ のとき，$C = \dfrac{7}{5}$ なので，

$$y = \frac{2}{5}\left(2\sin x - \cos x\right) + \frac{7}{5}e^{-2x}. \tag{2.7}$$

演習問題 3　化学反応

$$\mathrm{A} \xrightarrow{k_1} \mathrm{B} \xrightarrow{k_2} \mathrm{C}$$

を考える．ただし，k_1，k_2 は各過程における速度定数である．A, B, C の時刻 t での濃度をそれぞれ $[\mathrm{A}]_t$，$[\mathrm{B}]_t$，$[\mathrm{C}]_t$ とすると，反応速度式 (微分方程式) は

$$\begin{aligned}
\frac{d[\mathrm{A}]_t}{dt} &= -k_1[\mathrm{A}]_t, \\
\frac{d[\mathrm{B}]_t}{dt} &= k_1[\mathrm{A}]_t - k_2[\mathrm{B}]_t, \\
\frac{d[\mathrm{C}]_t}{dt} &= k_2[\mathrm{B}]_t,
\end{aligned}$$

で表される．初期濃度を $[\mathrm{A}]_0$，$[\mathrm{B}]_0$，$[\mathrm{C}]_0$ として上記の微分方程式を解いて，A, B, C の濃度の時間変化を求めよ．

A に関する反応速度式は直ちに解くことが出来て，

$$[\mathrm{A}]_t = [\mathrm{A}]_0 e^{-k_1 t}. \tag{3.1}$$

これを B に関する反応速度式に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{d[\mathrm{B}]_t}{dt} = k_1[\mathrm{A}]_0 e^{-k_1 t} - k_2[\mathrm{B}]_t, \\
&\to \frac{d[\mathrm{B}]_t}{dt} + k_2[\mathrm{B}]_t = k_1[\mathrm{A}]_0 e^{-k_1 t}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

両辺に $e^{k_2 t}$ をかけると，

$$\frac{d}{dt}\left(e^{k_2 t}[\mathrm{B}]_t\right) = k_1[\mathrm{A}]_0 e^{(k_2-k_1)t}, \tag{3.3}$$

となるので，両辺を t で積分すると，

$$\begin{aligned}
&e^{k_2 t}[\mathrm{B}]_t = \frac{k_1}{k_2-k_1}[\mathrm{A}]_0 e^{(k_2-k_1)t} + C, \\
&\to [\mathrm{B}]_t = \frac{k_1}{k_2-k_1}[\mathrm{A}]_0 e^{-k_1 t} + Ce^{-k_2 t}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

B の初期濃度は $[\mathrm{B}]_0$ なので，任意定数 C は

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{B}]_0 = \frac{k_1}{k_2-k_1}[\mathrm{A}]_0 + C, \\
&\to C = [\mathrm{B}]_0 - \frac{k_1}{k_2-k_1}[\mathrm{A}]_0,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

となる．従って，

$$[\mathrm{B}]_t = \frac{k_1}{k_2-k_1}[\mathrm{A}]_0\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right) + [\mathrm{B}]_0 e^{-k_2 t}. \tag{3.6}$$

$[\mathrm{C}]_t$ については，

$$\frac{d}{dt}\left([\mathrm{A}]_t + [\mathrm{B}]_t + [\mathrm{C}]_t\right) = 0 \tag{3.7}$$

つまり，

$$[\mathrm{A}]_t + [\mathrm{B}]_t + [\mathrm{C}]_t = [\mathrm{A}]_0 + [\mathrm{B}]_0 + [\mathrm{C}]_0, \tag{3.8}$$

であることから，

$$[\mathrm{C}]_t = [\mathrm{A}]_0 + [\mathrm{B}]_0 + [\mathrm{C}]_0 - [\mathrm{A}]_t - [\mathrm{B}]_t \tag{3.9}$$

と求めることができる．

演習問題 4　バネにつながれた質量 m のおもりの運動 $x(t)$ を考える．おもりの平衡位置を $x=0$，バネ定数を k とすると，このおもりの運動は次の微分方程式に従うとする．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

いま，このおもりとバネを丸ごと粘性のある流体の中に入れる．すると，おもりが動く方向とは逆向きに力 (粘性力) が働く．おもりの動く速さがあまり大きくないときは，その力はおもりの速度に比例する．ここでは比例定数を $\Gamma\ (>0)$ と表すことにする．

(1)　流体の中でのおもりの運動方程式を立てよ．

(2)　$\omega=\sqrt{k/m}$, $\gamma=\Gamma/(2m)$ とおいて，次のそれぞれの場合での (1) で立てた微分方程式の解を求めよ．ただし，$x(0)=1$, $dx/dt|_{t=0}=0$ とする．
(i) $\gamma<\omega$, (ii) $\gamma=\omega$, (iii) $\gamma>\omega$

(3)　(i), (ii), (iii) における解 $x(t)$ を時間 t に対してプロットしてみて，その形について考察せよ．プロットは手書きで大まかに書いても良いし，Excel や Gnuplot を使っても良い．