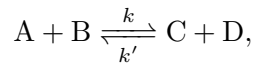


第2回 演習問題 (2021/04/22)

演習問題 1 化学反応



を考える。ただし、 k, k' はそれぞれ 2 次, 1 次反応の速度定数であり、A, B, C, D の初期濃度を $a, 2a, 0, 0$ とする。

- (1) C の時刻 t での濃度を $x(t)$ と表すとき、 $x(t)$ に関する微分方程式を立てよ。
- (2) $k' = 2k$ のとき、(1) で導出した微分方程式を解け。

演習問題 2 以下の問いに答えよ。

- (1) 非線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^\alpha, \quad (\alpha \neq 0, 1),$$

は $u = y^{1-\alpha}$ と変数変換することにより、線形方程式に帰着することを示せ。

- (2) 微分方程式

$$3x \frac{dy}{dx} + y = xy^5,$$

を解け。

演習問題 3 以下の問いに答えよ。

- (1) 微分方程式

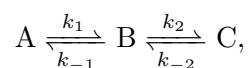
$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

の特殊解が既に一つ求まっており、それを y_0 とすると、変数変換 $u = y - y_0$ により、与えられた微分方程式は

$$\frac{du}{dx} = p(x)u + q(x)u^2,$$

の形に帰着することを示せ。

演習問題 4 化学反応



を考える。A, B, C の時刻 t での濃度をそれぞれ $x(t), y(t), z(t)$ 、初期濃度を x_0, y_0, z_0 とする。

- (1) $x(t), y(t), z(t)$ に対する反応速度式 (微分方程式) を立てよ。
- (2) (1) で立てた微分方程式のうち、 $x(t)$ に関する方程式を解け。必要に応じて追加で定数を導入しても良い。ただし、その定義は書いておくこと。

演習問題 5 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

を考える^{*1}。ただし、 $0 < \gamma < \omega_0$ とする。

- (1) 一般解を求めよ。
- (2) 初期条件を $x(0) = 0, dx(t)/dt|_{t=0} = 0$ として、 $x(t)$ の概形を描いてみよ。また t が十分に大きいときの $x(t)$ を求めよ。

演習問題 6 (べき級数解法)

講義では省略したべき級数解法について、雰囲気だけでも掴んでおこう。例えば、次の微分方程式を考える。

$$\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

既に知っているように、一般解は $y = Ce^x$ である。ここでは一般解をべき級数解法を用いて導いてみる。

どのような y が方程式の解になっているか全く見当がつかないとする (実際にはついているとしても)。そこで、どんな形であっても対応できるように、 y をべき級数の形で表しておくことにする。

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

これを与えられた微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} - y &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)a_{n+1} - a_n\} x^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

となる。これが x の値によらず成り立つためには、全ての x^n についての係数 (下線部) がゼロでなければならない。つまり、

$$\begin{aligned} (n+1)a_{n+1} - a_n &= 0, \\ \rightarrow a_{n+1} &= \frac{1}{n+1} a_n, \end{aligned}$$

という漸化式が得られ、一般項を求めると、

$$a_n = \frac{1}{n!} a_0,$$

である。従って、微分方程式の解が、

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = a_0 e^x$$

となることを示せた。

上記の例を参考にして、微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

を解いてみよう。

^{*1} この方程式の斉次形が何者かは第 1 回の演習問題 4 を参照すること。粘性流体の中でバネに繋がれたおもりに、外力 $f_0 \cos \omega t$ が加えられた状態に対応するのが今回の微分方程式である。