# 第 4 回 演習問題 (2021/05/27)

**演習問題 1**　次の関数 $f(x)$ について，フーリエ変換 $F(k)$ を求めよ．

(1)

$$f(x) = e^{-a|x|} \quad (a > 0)$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon} & |x| \leq \dfrac{\epsilon}{2} \\ 0 & |x| > \dfrac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

ただし，$\epsilon > 0$ とする．

(3)

$$f(x) = \cos k_0 x$$

(4)

$$f(x) = e^{-a|x|} \cos k_0 x \quad (a > 0)$$

(5)

$$f(x) = x^2 e^{-ax^2} \quad (a > 0)$$

ヒント：$x^2 e^{-ax^2}$ の微分を考えてみよ．

**演習問題 2**　以下の問いに答えよ．

(1)　フーリエ変換可能な偶関数 $h(x)$, $c(x)$ と関数 $\rho(x)$ $(\neq 0)$ からなる方程式を考える．ただし，$h(x)$ が未知関数で，$c(x)$，$\rho(x)$ が既知関数とする．いま，次式で定義される関数

$$X(x, x') = \rho(x)\,\delta(x - x') + \rho(x)\,h(x - x')\,\rho(x'),$$
$$Y(x, x') = \frac{1}{\rho(x)}\delta(x - x') - c(x - x'),$$

が次の関係式を満たすとする．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx''\, X(x, x'')Y(x'', x') = \delta(x - x').$$

このとき，次式が成り立つことを示せ．

$$h(x - x') = c(x - x') + \int_{-\infty}^{\infty} dx''\, c(x - x'')\rho(x'')h(x'' - x').$$

(2)　$\rho(x)$ が定数 $(\rho(x) = \rho)$ のとき，(1) で導いた式のフーリエ変換を求め，それを $H(k)$ $(\equiv \mathcal{F}[h(x)])$ について解け．ただし，$C(k) = \mathcal{F}[c(x)]$ を用いて良い．

訂正　演習問題 2 の条件式 (赤字) を訂正しました．講義時のプリントでは積分変数が $x$ になっていたのですが，正しくは，上で示しているように $x''$ です．申し訳ありませんでした．

さらに，$X(x, x')$ の式に誤りがあったので修正しました．何度も申し訳ありません．こちらの不手際が何度もありましたし，この問題 (1) は例題とし，次のページに解答を掲載します．

$\boxed{\text{演習問題 2 (1) の解答}}$

畳み込みで表された条件式に，$X(x,x')$, $Y(x,x')$ の表式を代入すると，左辺は

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx'' \, \{\rho(x)\delta(x-x'') + \rho(x)h(x-x'')\rho(x'')\} \left\{ \frac{1}{\rho(x'')}\delta(x''-x') - c\,(x''-x') \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx'' \frac{\rho(x)}{\rho\,(x'')}\delta(x-x'')\delta(x''-x') \cdots ① \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dx''\rho(x)\delta(x-x'')c(x''-x') \cdots ② \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx''\,\rho(x)h(x-x'')\delta(x''-x') \cdots ③ \\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dx''\,\rho(x)h(x-x'')\rho(x'')c(x''-x') \cdots ④
\end{aligned}
$$

となる．それぞれの項を計算すると，

$$
\begin{aligned}
① &= \delta(x-x') \\
② &= -\rho(x)c(x-x') \\
③ &= \rho(x)h(x-x') \\
④ &= -\rho(x)\int_{-\infty}^{\infty} dx''\,h(x-x'')\rho(x'')c(x''-x')
\end{aligned}
$$

従って，条件式は

$$
\begin{aligned}
h(x-x') &= c(x-x') + \int_{-\infty}^{\infty} dx''\,h(x-x'')\rho(x'')c(x''-x') \\
&= c(x-x') + \int_{-\infty}^{\infty} dx''\,c(x'-x'')\rho(x'')h(x''-x)
\end{aligned}
$$

と表せる．$x$, $x'$ を入れ替えた式は，

$$
h(x'-x) = c(x'-x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx''\,c(x-x'')\rho(x'')h(x''-x')
$$

であり，$h(x)$ と $c(x)$ は偶関数なので，最終的に

$$
h(x-x') = c(x-x') + \int_{-\infty}^{\infty} dx''\,c(x-x'')\rho(x'')h(x''-x')
$$

を得る．