第 4 回 演習問題 (2021/05/27) 略解とヒント

最終更新日：2021/07/04

演習問題 1　次の関数 $f(x)$ について，フーリエ変換 $F(k)$ を求めよ．

(1)

$$f(x) = e^{-a|x|} \quad (a > 0)$$

(2)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon} & |x| \leq \dfrac{\epsilon}{2} \\ 0 & |x| > \dfrac{\epsilon}{2} \end{cases}$$

ただし，$\epsilon > 0$ とする．

(3)

$$f(x) = \cos k_0 x$$

(4)

$$f(x) = e^{-a|x|} \cos k_0 x \quad (a > 0)$$

(5)

$$f(x) = x^2 e^{-ax^2} \quad (a > 0)$$

ヒント：$x^2 e^{-ax^2}$ の微分を考えてみよ．

---

(1)

$$F(k) = \frac{2a}{k^2 + a^2}$$

(2)

$$F(k) = \frac{\sin(\epsilon k/2)}{(\epsilon k/2)}$$

(3)

$$F(k) = \pi \left(\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0)\right)$$

(4)

$$F(k) = \frac{a}{(k - k_0)^2 + a^2} + \frac{a}{(k + k_0)^2 + a^2}$$

(5)

$$F(k) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-k^2/4a} \frac{2a - k^2}{4a^2}$$

演習問題 2　以下の問いに答えよ．

(1)　フーリエ変換可能な偶関数 $h\,(x)$, $c\,(x)$ と関数 $\rho\,(x)$ $(\neq 0)$ からなる方程式を考える．ただし，$h\,(x)$ が未知関数で，$c(x)$, $\rho\,(x)$ が既知関数とする．いま，次式で定義される関数

$$
\begin{aligned}
X\,(x,x') &= \rho\,(x)\,\delta\,(x-x') + \rho\,(x)\,h\,(x-x')\,\rho\,(x')\,,\\
Y\,(x,x') &= \frac{1}{\rho\,(x)}\delta\,(x-x') - c\,(x-x')\,,
\end{aligned}
$$

が次の関係式を満たすとする．

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx''\, X(x,x'')Y(x'',x') = \delta\,(x-x')\,.
$$

このとき，次式が成り立つことを示せ．

$$
h\,(x-x') = c\,(x-x') + \int_{-\infty}^{\infty} dx''\, c(x-x'')\rho(x'')h\,(x''-x')\,.
$$

(2)　$\rho(x)$ が定数 $(\rho(x)=\rho)$ のとき，(1) で導いた式のフーリエ変換を求め，それを $H(k)$ $(\equiv \mathcal{F}\,[h(x)])$ について解け．ただし，$C(k) = \mathcal{F}\,[c(x)]$ を用いて良い．

---

(1)　畳み込みで表された条件式に，$X\,(x,x')$, $Y\,(x,x')$ の表式を代入すると，左辺は

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dx''\ \{\rho(x)\delta(x-x'') + \rho(x)h(x-x'')\rho(x'')\}\left\{\frac{1}{\rho(x'')}\delta(x''-x') - c\,(x''-x')\right\}\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx''\,\frac{\rho(x)}{\rho\,(x'')}\delta(x-x'')\delta(x''-x')\ \cdots①\\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dx''\rho(x)\delta(x-x'')c(x''-x')\cdots②\\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dx''\,\rho(x)h(x-x'')\delta(x''-x')\ \cdots③\\
&\quad - \int_{-\infty}^{\infty} dx''\,\rho(x)h(x-x'')\rho(x'')c(x''-x')\ \cdots④
\end{aligned}
$$

となる．それぞれの項を計算すると，

$$
\begin{aligned}
① &= \delta(x-x')\\
② &= -\rho(x)c(x-x')\\
③ &= \rho(x)h(x-x')\\
④ &= -\rho(x)\int_{-\infty}^{\infty} dx''\,h(x-x'')\rho(x'')c(x''-x')
\end{aligned}
$$

従って，条件式は

$$
\begin{aligned}
h(x-x') &= c(x-x') + \int_{-\infty}^{\infty} dx''\,h(x-x'')\rho(x'')c(x''-x')\\
&= c(x-x') + \int_{-\infty}^{\infty} dx''\,c(x'-x'')\rho(x'')h(x''-x)
\end{aligned}
$$

と表せる．x, x' を入れ替えた式は，

$$
h(x'-x) = c(x'-x) + \int_{-\infty}^{\infty} dx''\,c(x-x'')\rho(x'')h(x''-x')
$$

であり，$h(x)$ と $c(x)$ は偶関数なので，最終的に

$$h(x-x') = c(x-x') + \int_{-\infty}^{\infty} dx''\, c(x-x'')\rho(x'')h(x''-x')$$

を得る．

(2)

$$H\left(k\right) = \frac{C\left(k\right)}{1-\rho C\left(k\right)}$$

この問題は正答率 50% くらいでした．畳み込み積分のフーリエ変換をただ $C(k)H(k)$ としている人がいましたが，正しく式変形すれば，これ以外の因子が現れるはずです．