

第3回 演習問題 (2021/05/20) 略解とヒント

最終更新日：2021/07/04

この回の演習の問題はどれも、皆さんよく出来ていました。計算間違いはあるものの、基本的な方針から誤っている人はほとんどいませんでしたので、この回は略解のみを示します。(もし、略解に誤りがある場合は適宜修正します)

演習問題 1 次の関数 $f(x)$ について、フーリエ級数展開を実行せよ。

(1) 周期 1 の関数

$$f(x) = x \quad (-1/2 \leq x < 1/2)$$

(2) 周期 2π の関数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} & -\pi \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

(3) 周期 2π の関数

$$f(x) = x^2 \quad (-\pi \leq x < \pi)$$

(1)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(2\pi n x)$$

(2)

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} (1 + (-1)^{n+1}) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} (2(-1)^{n+1} + 1) \sin(nx)$$

(3)

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$$

演習問題 2 以下の問いに答えよ.

(1) 周期 2 の関数

$$f(x) = x + 1, \quad (-1 \leq x < 1)$$

をフーリエ級数展開せよ.

(2) 関数

$$f(x) = x, \quad (0 \leq x < 1)$$

のフーリエ正弦級数, 余弦級数を求めよ.

(1)

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n} \sin(\pi n x)$$

(2) 正弦級数の場合は,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n(-1)^{n+1}}{\pi} \sin(n\pi x)$$

余弦級数の場合は,

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\pi x)$$

演習問題 3 以下の問いに答えよ.

(1) 次式で定義される

$$\delta(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-itu}$$

と任意の $f(u)$ に対して次式が成り立つことを示せ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} du \delta(u) f(u) = f(0).$$

(2) (1) で定義された $\delta(u)$ はディラックのデルタ関数と呼ばれるものであり, これから皆さんと長い付き合いになる. デルタ関数について調べて, その性質を (分かる範囲で良いので) まとめてみよ.

テキストにまとめがあるので, 省略します.