

第 1 回 演習問題 (2021/04/15)

演習問題 1 放射性物質の量は時間がたつと減少していくことが知られている。時刻 t での放射性粒子 (原子) の数を $N(t)$ と表すと、 $N(t)$ の時間変化率はその時刻での粒子数 $N(t)$ に比例することが実験的に確かめられている。

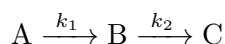
- (1) 比例定数を λ ($\lambda > 0$, 崩壊定数と呼ばれる) として、 $N(t)$ に関する微分方程式を立てよ。
- (2) (1) で導出した微分方程式を解け。ただし、時刻 $t = 0$ での粒子数を N_0 とする。
- (3) 粒子数が半分になるのに要する時間 τ を求めよ。

演習問題 2 微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 2 \sin x,$$

の一般解を求めよ。また、初期条件が $y(0) = 1$ のときの解を求めよ。

演習問題 3 化学反応



を考える。ただし、 k_1, k_2 は各過程における速度定数である。A, B, C の時刻 t での濃度をそれぞれ $[A]_t, [B]_t, [C]_t$ とすると、反応速度式 (微分方程式) は

$$\begin{aligned}\frac{d[A]_t}{dt} &= -k_1[A]_t, \\ \frac{d[B]_t}{dt} &= k_1[A]_t - k_2[B]_t, \\ \frac{d[C]_t}{dt} &= k_2[B]_t,\end{aligned}$$

で表される。初期濃度を $[A]_0, [B]_0, [C]_0$ として上記の微分方程式を解いて、A, B, C の濃度の時間変化を求めよ。

演習問題 4 バネにつながれた質量 m のおもりの運動 $x(t)$ を考える。おもりの平衡位置を $x = 0$, バネ定数を k とすると、このおもりの運動は次の微分方程式に従うとする。

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx.$$

いま、このおもりとバネを丸ごと粘性のある流体の中に入れる。すると、おもりが動く方向とは逆向きに力 (粘性力) が働く。おもりの動く速さがあまり大きくないときは、その力はおもりの速度に比例する。ここでは比例定数を Γ (> 0) と表すことにする。

- (1) 流体の中でのおもりの運動方程式を立てよ。
- (2) $\omega = \sqrt{k/m}$, $\gamma = \Gamma/(2m)$ において、次のそれぞれの場合での (1) で立てた微分方程式の解を求めよ。ただし、 $x(0) = 1$, $dx/dt|_{t=0} = 0$ とする。
 - (i) $\gamma < \omega$, (ii) $\gamma = \omega$, (iii) $\gamma > \omega$
- (3) (i), (ii), (iii) における解 $x(t)$ を時間 t に対してプロットしてみて、その形について考察せよ。プロットは手書きで大まかに書いても良いし、Excel や Gnuplot を使っても良い。