第 1 回 演習問題 (2021/04/15)

演習問題 1　放射性物質の量は時間がたつと減少していくことが知られている．時刻 t での放射性粒子 (原子) の数を $N(t)$ と表すと，$N(t)$ の時間変化率はその時刻での粒子数 $N(t)$ に比例することが実験的に確かめられている．

(1)　比例定数を λ ($\lambda > 0$，崩壊定数と呼ばれる) として，$N(t)$ に関する微分方程式を立てよ．

(2)　(1) で導出した微分方程式を解け．ただし，時刻 $t = 0$ での粒子数を N_0 とする．

(3)　粒子数が半分になるのに要する時間 τ を求めよ．

演習問題 2　微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 2\sin x,$$

の一般解を求めよ．また，初期条件が $y(0) = 1$ のときの解を求めよ．

演習問題 3　化学反応

$$\mathrm{A} \xrightarrow{k_1} \mathrm{B} \xrightarrow{k_2} \mathrm{C}$$

を考える．ただし，k_1，k_2 は各過程における速度定数である．A, B, C の時刻 t での濃度をそれぞれ $[\mathrm{A}]_t$，$[\mathrm{B}]_t$，$[\mathrm{C}]_t$ とすると，反応速度式 (微分方程式) は

$$\begin{aligned}
\frac{d[\mathrm{A}]_t}{dt} &= -k_1[\mathrm{A}]_t, \\
\frac{d[\mathrm{B}]_t}{dt} &= k_1[\mathrm{A}]_t - k_2[\mathrm{B}]_t, \\
\frac{d[\mathrm{C}]_t}{dt} &= k_2[\mathrm{B}],
\end{aligned}$$

で表される．初期濃度を $[\mathrm{A}]_0$，$[\mathrm{B}]_0$，$[\mathrm{C}]_0$ として上記の微分方程式を解いて，A, B, C の濃度の時間変化を求めよ．

演習問題 4　バネにつながれた質量 m のおもりの運動 $x(t)$ を考える．おもりの平衡位置を $x = 0$，バネ定数を k とすると，このおもりの運動は次の微分方程式に従うとする．

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

いま，このおもりとバネを丸ごと粘性のある流体の中に入れる．すると，おもりが動く方向とは逆向きに力 (粘性力) が働く．おもりの動く速さがあまり大きくないときは，その力はおもりの速度に比例する．ここでは比例定数を Γ (> 0) と表すことにする．

(1)　流体の中でのおもりの運動方程式を立てよ．

(2)　$\omega = \sqrt{k/m}$, $\gamma = \Gamma/(2m)$ とおいて，次のそれぞれの場合での (1) で立てた微分方程式の解を求めよ．ただし，$x(0) = 1$, $dx/dt|_{t=0} = 0$ とする．

　　(i) $\gamma < \omega$, (ii) $\gamma = \omega$, (iii) $\gamma > \omega$

(3)　(i), (ii), (iii) における解 $x(t)$ を時間 t に対してプロットしてみて，その形について考察せよ．プロットは手書きで大まかに書いても良いし，Excel や Gnuplot を使っても良い．