第 2 回 演習問題 (2021/04/22)

演習問題 1　化学反応

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \underset{k'}{\overset{k}{\rightleftharpoons}} \mathrm{C} + \mathrm{D},$$

を考える．ただし，$k,\ k'$ はそれぞれ 2 次，1 次反応の速度定数であり，A, B, C, D の初期濃度を $a,\ 2a,\ 0,\ 0$ とする．

(1)　C の時刻 t での濃度を $x(t)$ と表すとき，$x(t)$ に関する微分方程式を立てよ．

(2)　$k' = 2k$ のとき，(1) で導出した微分方程式を解け．

演習問題 2　以下の問いに答えよ．

(1)　非線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^{\alpha}, \quad (\alpha \neq 0, 1),$$

は $u = y^{1-\alpha}$ と変数変換することにより，線形方程式に帰着することを示せ．

(2)　微分方程式

$$3x\frac{dy}{dx} + y = xy^5,$$

を解け．

演習問題 3　以下の問いに答えよ．

(1)　微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x),$$

の特殊解が既に一つ求まっており，それを y_0 とすると，変数変換 $u = y - y_0$ により，与えれた微分方程式は

$$\frac{du}{dx} = p(x)u + q(x)u^2,$$

の形に帰着することを示せ．

演習問題 4　化学反応

$$\mathrm{A} \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} \mathrm{B} \underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} \mathrm{C},$$

を考える．A, B, C の時刻 t での濃度をそれぞれ $x\,(t)$，$y\,(t)$，$z\,(t)$, 初期濃度を $x_0,\ y_0,\ z_0$ とする．

(1)　$x(t),\ y(t),\ z(t)$ に対する反応速度式 (微分方程式) を立てよ．

(2)　(1) で立てた微分方程式のうち，$x(t)$ に関する方程式を解け．必要に応じて追加で定数を導入しても良い．ただし，その定義は書いておくこと．

演習問題 5　微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\omega t,$$

を考える[*1]．ただし，$0 < \gamma < \omega_0$ とする．

(1)　一般解を求めよ．

(2)　初期条件を $x(0) = 0, dx(t)/dt|_{t=0} = 0$ として，$x(t)$ の概形を描いてみよ．また t が十分に大きいときの $x(t)$ を求めよ．

演習問題 6　(べき級数解法)

講義では省略したべき級数解法について，雰囲気だけでも掴んでおこう．例えば，次の微分方程式を考える．

$$\frac{dy}{dx} - y = 0.$$

既に知っているように，一般解は $y = Ce^x$ である．ここでは一般解をべき級数解法を用いて導いてみる．

どのような y が方程式の解になっているか全く見当がつかないとする (実際にはついているとしても)．そこで，どんな形であっても対応できるように，y をべき級数の形で表しておくことにする．

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

これを与えられた微分方程式に代入すると，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - y &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underline{\{(n+1)a_{n+1} - a_n\}} x^n \\ &= 0,\end{aligned}$$

となる．これが x の値によらず成り立つためには，全ての x^n についての係数 (下線部) がゼロでなければならない．つまり，

$$\begin{aligned}(n+1)a_{n+1} - a_n &= 0, \\ \to a_{n+1} &= \frac{1}{n+1} a_n,\end{aligned}$$

という漸化式が得られ，一般項を求めると，

$$a_n = \frac{1}{n!} a_0,$$

である．従って，微分方程式の解が，

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = a_0 e^x$$

となることを示せた．

上記の例を参考にして，微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0,$$

を解いてみよう．

[*1] この方程式の斉次形が何者かは第 1 回の演習問題 4 を参照すること．粘性流体の中でバネに繋がれたおもりに，外力 $f_0 \cos\omega t$ が加えられた状態に対応するのが今回の微分方程式である．