



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA

im. Stanisława Staszica w Krakowie

**WYDZIAŁ INŻYNIERII
MECHANICZNEJ I ROBOTYKI**

Praca dyplomowa magisterska

**Katarzyna Rugełło,
Bartłomiej Piwowarczyk**

Imię i nazwisko

Automatyka i Robotyka

Kierunek studiów

**Opracowanie aplikacji do symulacji propagacji
fal prowadzonych w prętach stalowych**

Temat pracy dyplomowej

prof. dr hab. inż. Tadeusz Stepinski

Promotor Pracy

.....

Ocena

Kraków, rok 2017/2018

Kraków, 8 czerwca 2018

Imię i nazwisko: Katarzyna Rugeńko
Nr albumu: 269475
Kierunek studiów: Automatyka i Robotyka
Profil dyplomowania: Automatyka i Metrologia

OŚWIADCZENIE

Uprzedzony o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (tj. Dz. U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie”, a także uprzedzony o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 211 ust. 1 ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym (tj. Dz. U. z 2012 r. poz. 572, z późn. zm.) „Za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyny uchybiające godności student ponosi odpowiedzialność dyscyplinarną przed komisją dyscyplinarną albo przed sądem koleżeńskim samorządu studenckiego, zwanym dalej „sądem koleżeńskim”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem osobiście i samodzielnie i że nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy”.

.....
podpis dyplomanta

Kraków, 8 czerwca 2018

Imię i nazwisko: Bartłomiej Piwowarczyk
Nr albumu: 269466
Kierunek studiów: Automatyka i Robotyka
Profil dyplomowania: Automatyka i Metrologia

OŚWIADCZENIE

Uprzedzony o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (tj. Dz. U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie”, a także uprzedzony o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 211 ust. 1 ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym (tj. Dz. U. z 2012 r. poz. 572, z późn. zm.) „Za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyny uchybiające godności student ponosi odpowiedzialność dyscyplinarną przed komisją dyscyplinarną albo przed sądem koleżeńskim samorządu studenckiego, zwanym dalej „sądem koleżeńskim”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem osobiście i samodzielnie i że nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy”.

.....
podpis dyplomanta

Kraków, 8 czerwca 2018

Imię i nazwisko: Katarzyna Rugełło
Nr. albumu: 269475
Kierunek studiów: Automatyka i Robotyka
Specjalność: Automatyka i Metrologia

OŚWIADCZENIE

Świadomy odpowiedzialności karnej za poświadczanie nieprawdy oświadczam, że niniejszą magisterską pracę dyplomową wykonałem osobiście i samodzielnie oraz nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

Jednocześnie oświadczam, że dokumentacja pracy nie narusza praw autorskich w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 roku o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. z 2006 r. Nr 90 poz. 631 z późniejszymi zmianami) oraz dóbr osobistych chronionych prawem cywilnym. Nie zawiera ona również danych i informacji, które uzyskałem w sposób niedozwolony. Wersja dokumentacji dołączona przeze mnie na nośniku elektronicznym jest w pełni zgodna z wydrukiem przedstawionym do recenzji.

Zaświadczam także, że niniejsza magisterska praca dyplomowa nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadawaniem dyplomów wyższej uczelni lub tytułów zawodowych.

.....

podpis dyplomanta

Kraków, 8 czerwca 2018

Imię i nazwisko: Bartłomiej Piwowarczyk
Nr. albumu: 269466
Kierunek studiów: Automatyka i Robotyka
Specjalność: Automatyka i Metrologia

OŚWIADCZENIE

Świadomy odpowiedzialności karnej za poświadczanie nieprawdy oświadczam, że niniejszą magisterską pracę dyplomową wykonałem osobiście i samodzielnie oraz nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

Jednocześnie oświadczam, że dokumentacja pracy nie narusza praw autorskich w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 roku o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. z 2006 r. Nr 90 poz. 631 z późniejszymi zmianami) oraz dóbr osobistych chronionych prawem cywilnym. Nie zawiera ona również danych i informacji, które uzyskałem w sposób niedozwolony. Wersja dokumentacji dołączona przeze mnie na nośniku elektronicznym jest w pełni zgodna z wydrukiem przedstawionym do recenzji.

Zaświadczam także, że niniejsza magisterska praca dyplomowa nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadawaniem dyplomów wyższej uczelni lub tytułów zawodowych.

.....

podpis dyplomanta

Kraków, 8 czerwca 2018

Imię i nazwisko:	Katarzyna Rugiełło
Adres korespondencyjny:	ul. Adama Mickiewicza 17/38, 38-400 Krosno
Temat pracy dyplomowej magisterskiej:	Opracowanie aplikacji do symulacji propagacji fal prowadzonych w prętach stalowych
Rok ukończenia:	2018
Nr. albumu:	269475
Kierunek studiów:	Automatyka i Robotyka
Specjalność:	Automatyka i Metrologia

OŚWIADCZENIE

Niniejszym oświadczam, że zachowując moje prawa autorskie, udzielam Akademii Górniczo-Hutniczej im. S. Staszica w Krakowie nieograniczonej w czasie nieodpłatnej licencji niewyłącznej do korzystania z przedstawionej dokumentacji magisterskiej pracy dyplomowej, w zakresie publicznego udostępniania i rozpowszechniania w wersji drukowanej i elektronicznej¹.

Publikacja ta może nastąpić po ewentualnym zgłoszeniu do ochrony prawnej wynalazków, wzorów użytkowych, wzorów przemysłowych będących wynikiem pracy inżynierskiej².

Kraków,

data podpis dyplomanta

¹Na podstawie Ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. o prawie o szkolnictwie wyższym (Dz.U. z 2005 Nr 164, poz. 1365) Art. 239 oraz Ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz.U. 2000 r. Nr 80, poz. 904, z późn. zm.) Art. 15a: "Uczelni w rozumieniu przepisów o szkolnictwie wyższym przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w ciągu 6 miesięcy od jej obrony, student, który ją przygotował, może ją opublikować, chyba że praca dyplomowa jest częścią utworu zbiorowego."

²Ustawa z dnia 30 czerwca 2000 r. – prawo własności przemysłowej (Dz.U. z 2003 r. Nr 119, poz. 1117, z późn. zm.), a także rozporządzenie Prezesa Rady Ministrów z dnia 17 września 2001 r. w sprawie dokonywania i rozpatrywania zgłoszeń wynalazków i wzorów użytkowych (Dz.U. z 2001 r. Nr 102, poz. 1119 oraz z 2005 r. Nr 109, poz. 910).

Kraków, 8 czerwca 2018

Imię i nazwisko:	Bartłomiej Piwowarczyk
Adres korespondencyjny:	Stryżowa 27, 32-420 Gdów
Temat pracy dyplomowej magisterskiej:	Opracowanie aplikacji do symulacji propagacji fal prowadzonych w prętach stalowych
Rok ukończenia:	2018
Nr. albumu:	269466
Kierunek studiów:	Automatyka i Robotyka
Specjalność:	Automatyka i Metrologia

OŚWIADCZENIE

Niniejszym oświadczam, że zachowując moje prawa autorskie, udzielam Akademii Górniczo-Hutniczej im. S. Staszica w Krakowie nieograniczonej w czasie nieodpłatnej licencji niewyłącznej do korzystania z przedstawionej dokumentacji magisterskiej pracy dyplomowej, w zakresie publicznego udostępniania i rozpowszechniania w wersji drukowanej i elektronicznej³.

Publikacja ta może nastąpić po ewentualnym zgłoszeniu do ochrony prawnej wynalazków, wzorów użytkowych, wzorów przemysłowych będących wynikiem pracy inżynierskiej⁴.

Kraków,

data podpis dyplomanta

³Na podstawie Ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. o prawie o szkolnictwie wyższym (Dz.U. z 2005 Nr 164, poz. 1365) Art. 239 oraz Ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz.U. 2000 r. Nr 80, poz. 904, z późn. zm.) Art. 15a: "Uczelni w rozumieniu przepisów o szkolnictwie wyższym przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w ciągu 6 miesięcy od jej obrony, student, który ją przygotował, może ją opublikować, chyba że praca dyplomowa jest częścią utworu zbiorowego."

⁴Ustawa z dnia 30 czerwca 2000 r. – prawo własności przemysłowej (Dz.U. z 2003 r. Nr 119, poz. 1117, z późn. zm.), a także rozporządzenie Prezesa Rady Ministrów z dnia 17 września 2001 r. w sprawie dokonywania i rozpatrywania zgłoszeń wynalazków i wzorów użytkowych (Dz.U. z 2001 r. Nr 102, poz. 1119 oraz z 2005 r. Nr 109, poz. 910).

Kraków, 8 czerwca 2018

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ I ROBOTYKI**

TEMATYKA PRACY DYPLOMOWEJ MAGISTERSKIEJ
dla studenta II roku studiów stacjonarnych

**Katarzyna Rugiełło,
Bartłomiej Piwowarczyk**
imię i nazwisko studenta

TEMAT PRACY DYPLOMOWEJ MAGISTERSKIEJ: Opracowanie aplikacji do symulacji propagacji fal prowadzonych w prętach stalowych

Promotor pracy: prof. dr hab. inż. Tadeusz Stepinski

Recenzent pracy: dr hab. inż. Paweł Paćko

.....
podpis dziekana

PLAN PRACY DYPLOMOWEJ:

1. Omówienie tematu pracy i sposobu realizacji z promotorem.
2. Zebranie i opracowanie literatury dotyczącej tematu pracy.
3. Zebranie i opracowanie wyników badań.
4. Analiza wyników badań, ich omówienie i zatwierdzenie przez promotora.
5. Opracowanie redakcyjne.

Kraków,
data *podpis dyplomanta*

TERMIN ODDANIA DO DZIEKANATU: **20... r.**

.....
podpis promotora

Kraków, 8 czerwca 2018

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Kierunek: Automatyka i Robotyka

Profil dyplomowania: Automatyka i Metrologia

Katarzyna Rugełło

Bartłomiej Piwowarczyk

Praca dyplomowa magisterska

Opracowanie aplikacji do symulacji propagacji fal prowadzonych w prętach stalowych

Opiekun: prof. dr hab. inż. Tadeusz Stepinski

STRESZCZENIE

[Treść streszczenia]

Cracow, June 8, 2018

AGH University of Science and Technology
Faculty of Mechanical Engineering and Robotics

Field of Study: Automatics and Robotics

Specialisations: Automation and Metrology

Katarzyna Rugełło

Bartłomiej Piwowarczyk

Master Diploma Thesis

Development of software application for the simulation of guided wave in steel bars

Supervisor: prof. dr hab. inż. Tadeusz Stepinski

SUMMARY

[Summary text]

*Serdecznie dziękuję . . . tu ciąg dalszych
podziękowań np. dla promotora, żony,
sąsiada itp.*

Spis treści

1. Wprowadzenie	10
1.1. Cele pracy	10
1.1.1. Jakiś tytuł	10
1.1.2. Jakiś tytuł 2	10
1.2. Zawartość pracy.....	10
2. Wybrane zagadnienia propagacji fal w ośrodku sprężystym.....	11
2.1. Liniowa teoria sprężystości	11
2.1.1. Napężenie	11
2.1.2. Odkształcenie i prawo Hooke'a	12
2.2. Rodzaje fal sprężystych.....	14
2.2.1. Fale podłużne	14
2.2.2. Fale poprzeczne.....	15
2.2.3. Fale Rayleigha i Löva.....	15
2.2.4. Fale Lamba.....	16
2.3. Zjawisko dyspersji	17
2.3.1. Prędkość fazowa i grupowa.....	18
2.3.2. Analityczne wyznaczanie krzywych dyspersji.....	20
2.3.3. Numeryczne wyznaczanie krzywych dyspersji.....	24
2.3.4. Eksperymentalne wyznaczanie krzywych dyspersji	30
3. Wykorzystywane zagadnienia metody elementów skończonych	32
3.1. Rozwiązywanie zadań z pomocą MES.....	32
3.2. Funkcje kształtu.....	33
3.3. Wyznaczanie macierzy sztywności i mas elementów	35
3.4. Agregacja globalnych macierzy mas i sztywności	39
3.5. Rozwiązanie wyznaczonego równania macierzowego.....	41
3.6. Zbieżność metody i błędy rozwiązania	43
Bibliografia	46
Załączniki	46
A. Lorem Ipsum	47

1. Wprowadzenie

\LaTeX jest systemem składu umożliwiającym tworzenie dowolnego typu dokumentów (w szczególności naukowych i technicznych) o wysokiej jakości typograficznej ([Dil00], [Lam92]). Wysoka jakość składu jest niezależna od rozmiaru dokumentu – zaczynając od krótkich listów do bardzo grubych książek. \LaTeX automatyzuje wiele prac związanych ze składaniem dokumentów np.: referencje, cytowania, generowanie spisów (treści, rysunków, symboli itp.) itd.

\LaTeX jest zestawem instrukcji umożliwiającym autorom skład i wydruk ich prac na najwyższym poziomie typograficznym. Do formatowania dokumentu \LaTeX stosuje \TeX a (wymawiamy 'tech' – greckie litery τ , ϵ , χ). Korzystając z systemu składu \LaTeX mamy za zadanie przygotować jedynie tekst źródłowy, cały ciężar składania, formatowania dokumentu przejmuje na siebie system.

1.1. Cele pracy

Celem poniższej pracy jest zapoznanie studentów z systemem \LaTeX w zakresie umożliwiającym im samodzielne, profesjonalne złożenie pracy dyplomowej w systemie \LaTeX .

1.1.1. Jakiś tytuł

1.1.1.1. Jakiś tytuł w subsection

1.1.2. Jakiś tytuł 2

1.2. Zawartość pracy

W rozdziale ?? przedstawiono podstawowe informacje dotyczące struktury dokumentów w \LaTeX u. Alvis [Alvis2011] jest językiem

2. Wybrane zagadnienia propagacji fal w ośrodku sprężystym

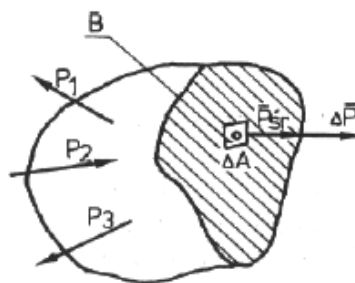
2.1. Liniowa teoria sprężystości

Liniowa teoria sprężystości jest mechaniką ciała stałego opartą na następujących założeniach:

- ciało jest wypełnione materią w sposób ciągły zarówno przed jak i po odkształceniu
- odkształcenia i przemieszczenia są bardzo małe
- spełniona jest zasada superpozycji
- ośrodek zachowuje się zgodnie z prawem Hooke’a
- siły działają na ciało w taki sam sposób przed odkształceniem jak i po odkształceniu

2.1.1. Naprężenie

Naprężenie można zdefiniować jako miara sił wewnętrznych ciała w punkcie. Weźmy ciało przedstawione na Rys.2.x., na które działają siły zewnętrzne P_1 i P_2 . W płaszczyźnie przekroju wybieramy punkt B, w którego otoczeniu określamy pole dA . Stosunek sił jakimi oddziałują na siebie połówki ciała w tym punkcie przekroju, do pola dA , nazywamy naprężeniem ciała w punkcie B. Kierunek naprężenia będzie zgodny z kierunkiem działania siły przekrojowej w punkcie.



Rys. 2.1. Ciało pod wpływem sił zewnętrznych

Stana naprężenia w punkcie B oznacza ogół naprężeń, które otrzymamy dla wszystkich możliwych przekrojów ciała przez ten punkt. W przypadku trójwymiarowego stanu

naprężenia, dla każdego przekroju wektor naprężenia będzie miał inny kierunek. Stan naprężenia można opisać przy pomocy tensora naprężeń, dla układu kartezjańskiego danego wzorem:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

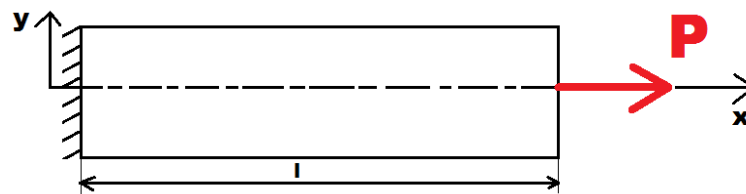
gdzie

σ_{ii} – naprężenie normalne, $i=(x, y, z)$

τ_{ij} – naprężenie styczne, $i,j=(x, y, z)$, $i \neq j$, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

2.1.2. Odkształcenie i prawo Hooke'a

Pod wpływem naprężeń ciało sprężyste ulega odkształceniu. Możemy wyróżnić odkształcenia liniowe ε_i oraz odkształcenia postaciowe γ_{ij} . Najprostszym przypadkiem odkształcenia liniowego jest rozciąganie pręta. Poniżej znajduje się rysunek pręta rozciąganego siłą P.



Rys. 2.2. Rozciąganie pręta

W takim przypadku odkształceniem wzdłużnym będziemy nazywać stosunek wydłużenia pręta do jego początkowej długości:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.2)$$

z kolei odkształceniem poprzecznym nazywać będziemy stosunek zmiany średnicy przekroju do jego początkowej średnicy:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta d}{d}. \quad (2.3)$$

Odkształcenia te związane są zależnością:

$$\varepsilon_x = -\nu \varepsilon_y \quad (2.4)$$

gdzie

ν – współczynnik Poissona.

Współczynnik Poissona jest wielkością bezwymiarową. Określa on sposób w jaki odkształca się ciało i przyjmuje wartości z przedziału $[-1, 1]$. Dla popularnych w mechanice stopów metali przyjmuje zwykle wartości z przedziału $[0.2, 0.4]$. Wartości ujemne przyjmuje dla tak zwanych materiałów odwrotnych, które pod wpływem naprężenia zwiększają swoją objętość.

Dla przypadku prostego rozciągania zachodzi jeszcze jedna zależność. Opisuje ona związek pomiędzy naprężeniem i odkształceniem i nazywana jest prawem Hooke'a.

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.5)$$

gdzie

E – moduł Younga.

Moduł Younga określa zależność odkształcenia liniowego i przyłożonego naprężenia. Jednostką moduły Younga jest paskal, a wartości podaje się w gigapaskalach (GPa). Wartości dla stali wynoszą około 200 GPa, a dla aluminium około 70 GPa.

W przypadku trójwymiarowego rozkładu odkształceń stosuje się zapis tensorowy. Tensor odkształcenia znajduje się poniżej:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

gdzie

ε_{ii} – odkształcenie liniowe, $i=(x, y, z)$

γ_{ij} – odkształcenie postaciowe, $i,j=(x, y, z)$, $i \neq j$, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

Dla takiego przypadku prawo Hooke'a przybiera bardziej skomplikowaną postać:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})), \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})), \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})), \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.9)$$

G – moduł Kirchoffa

Moduł Kirchhoffa opisuje zależność odkształcenia postaciowego od naprężenia stycznego występującego w materiale. Jednostką tego współczynnika jest paskal, a typowymi wartościami są dla stali 80 GPa, dla aluminium 25,5 GPa.

Opisane wcześniej stałe materiałowe są powiązane równaniem:

$$E = 2G(\nu + 1) \quad (2.10)$$

2.2. Rodzaje fal sprężystych

Fale można podzielić ze względu na sposób w jaki propagują w materiale. Mogą to być fale podłużne lub poprzeczne. Fale takie propagują jeśli długość fali jest mniejsza lub bliska wymiarom ośrodka. Fale o długości przekraczającej wyraźnie przynajmniej jeden z wymiarów falowodu nazywamy falami prowadzonymi i mają one zupełnie inne własności. Do takich fal możemy zaliczyć np. fale Lamba. Fala Rayleigha z kolei propagują na powierzchniach, stąd ośrodek musi być ograniczony przynajmniej jedną płaszczyzną.

2.2.1. Fale podłużne

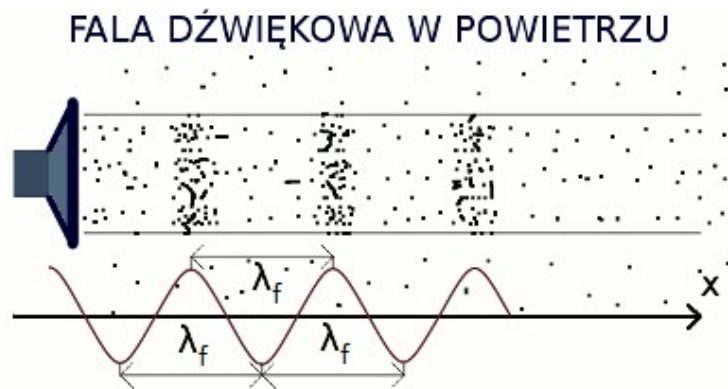
Fale podłużne to fale, w których kierunek propagacji jest równoległy z kierunkiem drgania cząstek. Tego typu fale mogą rozchodzić się w każdym ośrodku materialnym. Przykładem fali podłużnej jest fala dźwiękowa rozchodząca się w powietrzu, pokazana na Rys.2.1. Prędkość fali podłużnej w nieograniczonym ośrodku zależy od parametrów materiałowych ośrodka i dana jest wzorem:

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.11)$$

gdzie

- c_L – prędkość fali podłużnej
- λ, μ – stałe Lamégo
- ρ – gęstość ośrodka

Długością fali λ_f nazywamy odległość między dwoma maksimami (lub minimami), które oznaczają maksymalne zagęszczenie (rozrzedzenie) cząstek w materiale.



Rys. 2.3. Przykład fali podłużnej

2.2.2. Fale poprzeczne

Fale poprzeczne propagują w kierunku prostopadłym do kierunku drgań cząstek. Przykładami takich fal są fale elektromagnetyczne, fale propagacji naprężeń w materiale stałym, czy fala na zamocowanym jednostronnie sznurze, pokazana na Rys.2.2. Prędkość fali poprzecznej w nieograniczonym ośrodku wyraża się wzorem:

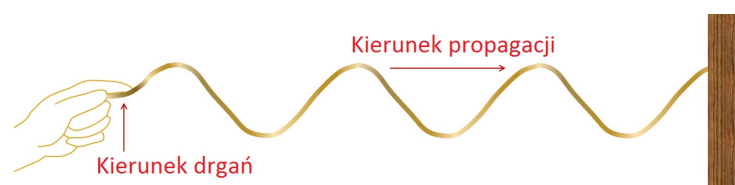
$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.12)$$

gdzie

c_T – prędkość fali poprzecznej

μ – stała Lamégo

ρ – gęstość ośrodka



Rys. 2.4. Przykład fali poprzecznej

2.2.3. Fale Rayleigha i Löva

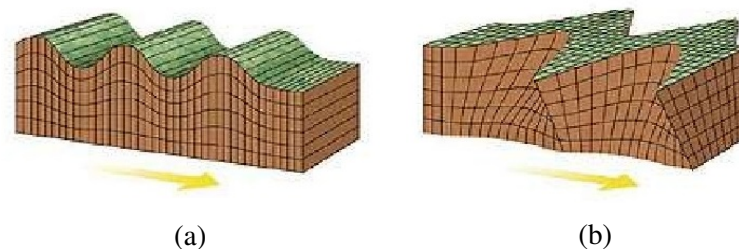
Opisane wcześniej fale propagują w nieograniczonych mediach. Fale Rayleigha oraz Löva są falami propagującymi w obszarze powierzchni ciał stałych. Dla fal Rayleigha drgania cząstek odbywają się równolegle oraz prostopadle do kierunku rozchodzenia się fali, zataczając elipsy. Kierunek prostopadły jest normalny do płaszczyzny, na której fala propaguje. Prędkość fal Rayleigha dla metalu można wyrazić za pomocą współczynnik Poissona i prędkości fal poprzecznych:

$$c_R = \frac{0.87 + 1.12 \cdot \nu}{1 + \nu} \cdot c_T \quad (2.13)$$

gdzie

- c_R – prędkość fali Rayleigha
- c_T – prędkość fali poprzecznej
- ν – współczynnik Poissona

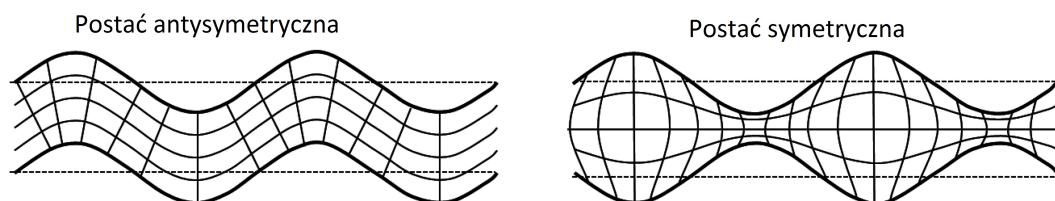
Fale Löwa to fale, w których drgania zachodzą w kierunku prostopadłym do kierunku, ale równoległe do płaszczyzny propagacji. Takie fale są wykorzystywane przy badaniu układów wielowarstwowych. Są silnie dyspersyjne, co oznacza że ich prędkość jest funkcją częstotliwości.



Rys. 2.5. Fale powierzchniowe: (a) fala Rayleigha, (b) fala Löwa

2.2.4. Fale Lamba

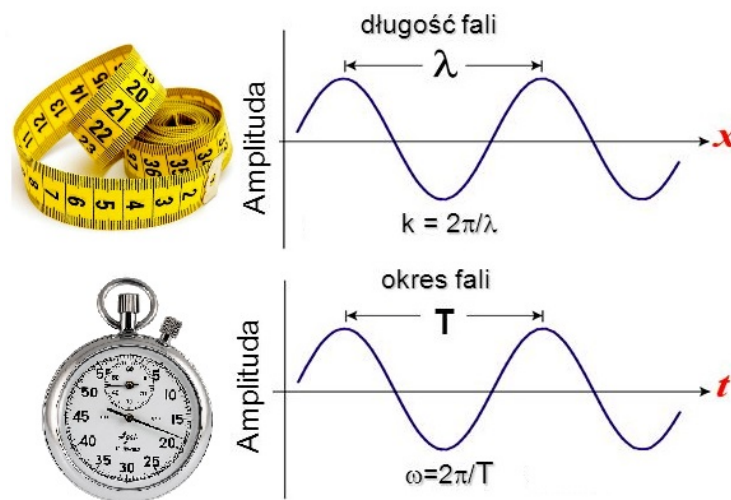
Ważnym typem fal, z racji na szerokie zastosowanie, są fale Lamba. Propagują one na cienkościennych elementach jak płyty, czy rury. Tego typu fale powstają na skutek złożenia dwóch fal Rayleigha, propagujących na płaszczyznach po obu stronach obiektu. Fale Lamba można podzielić na fale symetryczne, kiedy obie fale składowe propagują w tej samej fazie i antysymetryczne kiedy propagują w innych fazach. Prędkość fal Lamba zależna jest od częstotliwości, ze względu na dyspersyjny charakter.



Rys. 2.6. Fale Lamba

2.3. Zjawisko dyspersji

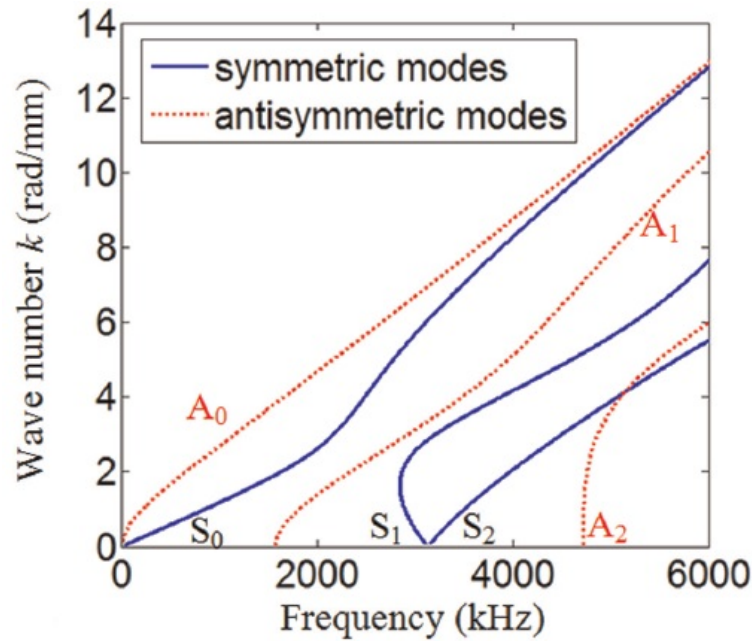
Dyspersja jest zjawiskiem zależności prędkości propagacji fali od jej częstotliwości. Częstotliwością fali nazywamy liczbę pełnych przebiegów (np. od maximum do maximum) w jednostce czasu. Jednostką częstotliwości jest herc (Hz). Wielkością równie często używaną jest częstość kołowa dana wzorem $\omega = 2\pi f$. Jej jednostką jest radian na sekundę [rad/s]. Odpowiednikiem tego parametru dla wymiarów geometrycznych jest liczba falowa. Określa ona jak wiele długości fali zawiera fala w jednostce odległości. Jednostką liczby falowej jest radian na metr [rad/m].



Rys. 2.7. Częstotliwość ω i liczba falowa k

Kiedy mówimy o krzywych dyspersji, można chodzić o zależności liczby falowej od częstotliwości, prędkości fazowej od częstotliwości lub prędkości grupowej od częstotliwości. Poniżej znajdują się przykładowe charakterystyki $k(\omega)$ postaci fal Lamba dla aluminiowej płyty o grubości 1mm.

Na wykresach widać jedną rzecz, ważną dla zastosowań fal prowadzonych - są one multimodalne. Z wykresów wynika, że w najkorzystniejszym do analizy przypadku propagują dwa mody, jeden symetryczny i jeden antysymetryczny. Wraz ze wzrostem częstotliwości propagującej fali pojawiają się dodatkowe jej postaci, co znacznie utrudnia analizę danych z przebiegów. Jednym ze sposobów ograniczania liczby modów, jest wprowadzanie wymuszeń od niskich częstotliwościach.

Rys. 2.8. Krzywe $k(\omega)$

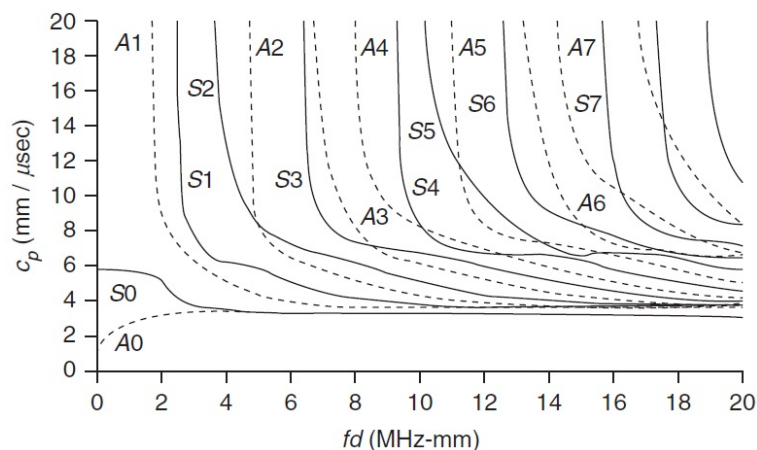
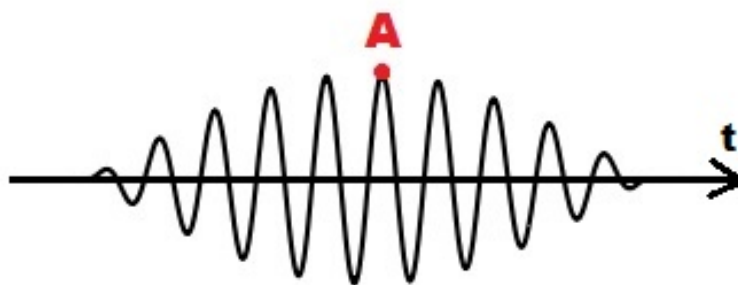
2.3.1. Prędkość fazowa i grupowa

Prędkość fazowa określa jak szybko przemieszcza się punkt fali o stałej fazie. Dla fali sinusoidalnej $u(x,t)=\sin(kx-\omega t)$ można wyznaczyć zależność na prędkość fazową w następujący sposób:

$$kx - \omega t = \text{const} \Rightarrow \frac{d(kx - \omega t)}{dt} = 0 \Rightarrow k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (2.14)$$

Jak widać dla skończonej wartości ω i k dążącego do zera, prędkość fazowa rośnie do nieskończoności. Dla przypadku pierwszych modów, gdzie zarówno k jak i ω zmierzają do zera, sytuacja wygląda różnie. Poniżej znajduje się przykładowy wykres zależności prędkości fazowej od iloczynu częstotliwości i grubości materiału dla cienkościennej rury. W przypadku fal prowadzonych dla elementów cienkościennych, często wykreśla się charakterystyki z zaznaczeniem wpływu grubości ściany. Na wykresie widać, że wszystkie mody poza pierwszymi dwoma dążą prawostronnie do nieskończoności. Pozostałe dwa zachowują się odmiennie - jeden wykres dąży do 0 (postać antysymetryczna), a drugi do wartości skończonej (postać symetryczna).

Jeśli fala składa się z więcej niż jednej składowej sinusoidalnej, które mają różne prędkości, należy określić jeszcze prędkość grupową. Prędkość każdej z pojedynczych składowych, będzie jej prędkością fazową. Prędkość grupowa dotyczy sygnału, złożonego ze wszystkich składowych. Można ją prezentować jako prędkość jakiegoś punktu na wykresie sygnału, np. maximum, jak na poniższym rysunku.

Rys. 2.9. Krzywe $V_p(\omega)$ 

Rys. 2.10. Przykładowy sygnał. Prędkość punktu A jest prędkością grupową

Weźmy sygnał złożony z kilku sinusoid o zbliżonej częstotliwości. Fazę każdego sygnału można zapisać jako $\omega_i t - k_i x + \phi_i$, gdzie i oznacza numer składowej. Załóżmy, że fazy tych sygnałów są równe w punkcie $x=0$, $t=0$. Wynika stąd, że ϕ_i są niezależne od ω . Punkt $x=0$, $t=0$ będzie maksimum, ponieważ wszystkie składowe zsumują się w tym punkcie. Aby znaleźć kolejny punkt z takim maximum, należy określić gdzie fazy po raz kolejny będą sobie równe. Punkt, w którym to zjawisko zajdzie musi być niezależny od ω , w otoczeniu pewnego ω . Symbolicznie można to zapisać jako:

$$\frac{d(\omega t - kx - \phi)}{d\omega} = 0 \Rightarrow t - \frac{dk}{d\omega} x = 0 \Rightarrow \frac{x}{t} = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.15)$$

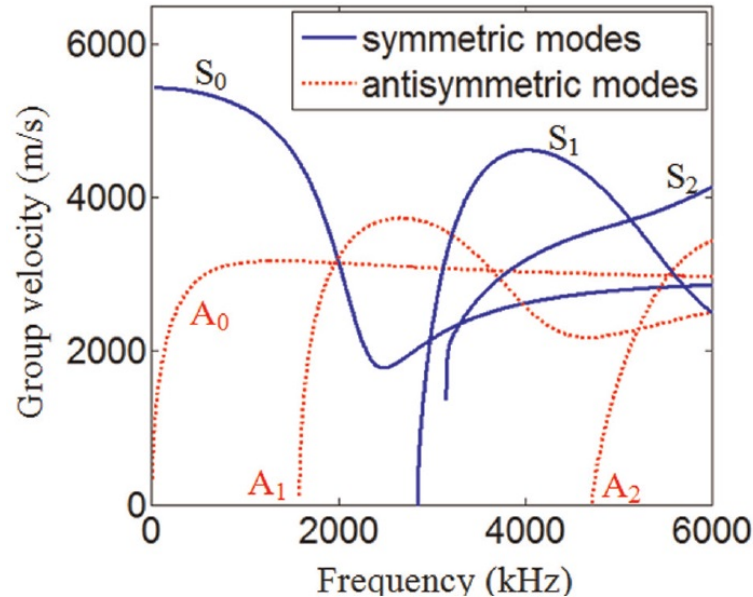
Maximum sygnału będzie więc w każdym punkcie x , t spełniającym powyższą zależność. Prędkość grupowa fali jest więc równa:

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.16)$$

Z samego faktu istnienia takiej zależności nie wynika, że w sygnale znajdzie się jakiś charakterystyczny punkt, propagujący z taką prędkością. Wynika z niej natomiast, że jeśli takowy punkt będzie, to będzie się poruszał z prędkością grupową. Należy jeszcze

wspomnieć o wyznaczaniu prędkości grupowej sygnału o składowych, o różnych wartościach ω . W takim przypadku należy prędkość grupową wyznaczyć dla wartości ω sygnału dominującego. Dominujący sygnał można znaleźć przy pomocy przekształcenia Fouriera.

Poniżej znajdują się przykładowe krzywe, przedstawiające prędkość grupową dla fal Lamba, dla cienkościennej płyty aluminiowej.



Rys. 2.11. Wykres prędkości grupowej $V_g(\omega)$

2.3.2. Analityczne wyznaczanie krzywych dyspersji

Zależności dyspersyjne są trudne, a często niemożliwe do wyznaczenia w sposób analityczny. Dla prostych przypadków rozwiązania analityczne są znane, a kilka z nich jest poniżej opisanych w celu lepszego wyjaśnienia zjawiska dyspersji. Pierwszym przypadkiem będzie model nieskończenie długiej, napiętej sprężyny, przedstawionej na rysunku poniżej.

gdzie

ds – długość sprężyny

θ – kąt przyłożenia siły zewnętrznej

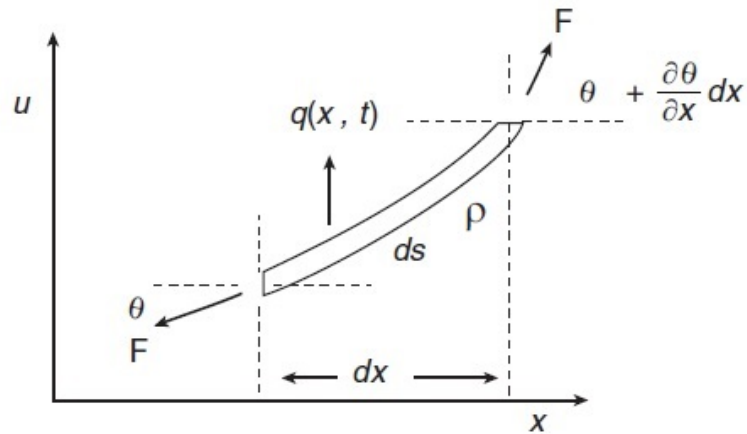
F – siły wewnętrzne

q – siła oddziaływania sprężyny na jednostkę długości ugięcia

ρ – masa sprężyny na jednostkę długości

Korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona, zapisujemy równanie ruchu układu:

$$-F \sin \theta + F \sin\left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx\right) + q ds = \rho ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.17)$$



Rys. 2.12. Nieskończenie krótki odcinek napiętej sprężyny

Założmy dodatkowo, że:

$$ds \approx dx, \sin \theta = \theta \text{ i } \theta = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.18)$$

To pozwala uprościć równanie:

$$-F\theta + F\left(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx\right) = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

$$F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.20)$$

Jeśli założymy brak siły zewnętrznej, to otrzymujemy proste równanie falowe:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{F}{\rho}} \quad (2.21)$$

gdzie

c_0 – prędkość fali.

Przyjmijmy rozwiązanie w postaci:

$$u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}. \quad (2.22)$$

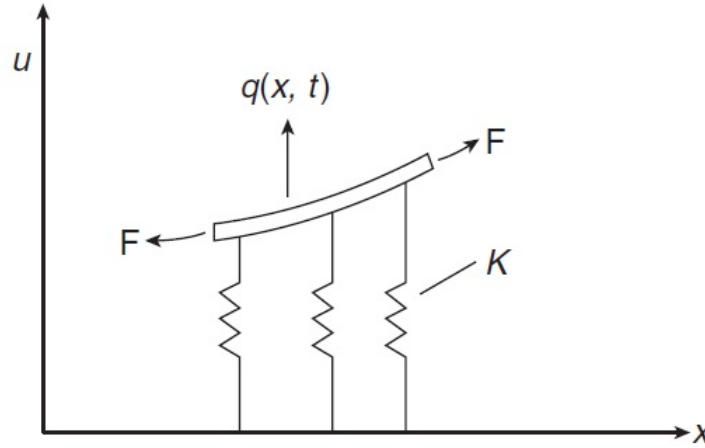
Jeśli wstawimy je do równania falowego to otrzymamy zależność dyspersyjną:

$$\omega^2 = c_0^2 k^2. \quad (2.23)$$

Jest to przypadek liniowej zależności $k(\omega)$, a więc dyspersja fali nie zachodzi. W takim przypadku prędkość fazowa, jest równa prędkości grupowej:

$$V_p = \frac{\omega}{k} = \frac{d\omega}{dk} = V_g \quad (2.24)$$

Prosta modyfikacja układu ze sprężyną, powoduje skomplikowanie zależności dyspersyjnej.



Rys. 2.13. Nieskończenie krótki odcinek napiętej sprężyny na sprężystym podłożu

Przyjmijmy siłę $q = -Ku(x, t)$, co prowadzi do równania równowagi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{K}{F}u = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.25)$$

Ponownie założmy rozwiązanie w postaci $u(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$ i podstawmy je do równania równowagi. Prowadzi to do zależności:

$$\left(-k^2 - \frac{K}{F} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\right)e^{i(kx - \omega t)} = 0. \quad (2.26)$$

Równanie to jest nazywane równaniem charakterystycznym (lub dyspersyjnym). Rozwiązaniem jest:

$$-k^2 - \frac{K}{F} + \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0. \quad (2.27)$$

Zależność $k(\omega)$ przyjmuje postać:

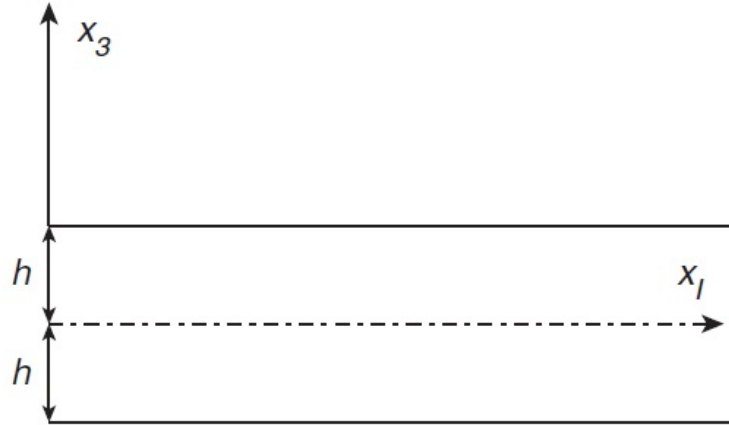
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{K}{F}. \quad (2.28)$$

Podstawiając $k = \frac{\omega}{c_p}$, otrzymujemy :

$$c_p = \sqrt{c_0^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{c_0^2 K}{\omega^2 F}} \right)}. \quad (2.29)$$

Jak widać w takim przypadku prędkość fazowa jest zależna od częstotliwości, a więc będzie zachodzić dyspersja fali.

Kolejnym problemem wartym wspomnienia, jest problem propagacji fal Lamba w cienkiej, nieskończonej płycie. Płyta wraz z przyjętym układem współrzędnych znajduje się poniżej.



Rys. 2.14. Nieskończona płyta

Jest kilka metod rozwiązania takiego zagadnienia, ale nie są opisane one w tej pracy (metoda potencjałów, metoda fal cząstkowych). Jeśli przyjmujemy zerowe naprężenia na płaszczyznach zewnętrznych jako warunki początkowe, to związki dyspersyjne przyjmują zależności:

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{4k^2pq}{(q^2 - k^2)^2} \quad (2.30)$$

dla postaci symetrycznych oraz

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{(q^2 - k^2)^2}{4k^2pq} \quad (2.31)$$

dla postaci niesymetrycznych

gdzie

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2, \text{ a } q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \quad (2.32)$$

c_T – prędkość fali poprzecznej

c_L – prędkość fali podłużnej

Równania te nazywają się równaniami Rayleigha-Lamba i są nierozwiązywalne w sposób analityczny. Jest to przykład bardziej skomplikowanego modelu, gdzie możliwe jest wyznaczenie związków k i ω , ale do wykreślenia krzywych dyspersji konieczne jest zastosowanie metod numerycznych.

2.3.3. Numeryczne wyznaczanie krzywych dyspersji

Pierwszym przypadkiem numerycznego wyznaczania krzywych dyspersji, jest rozwiązanie równań Rayleigha-Lamba przedstawionych w poprzedniej sekcji. Zakładamy, że interesują nas tylko rozwiązania rzeczywiste, które pojawiają się jeśli k przyjmie wartości rzeczywiste bądź urojone (występuje tylko czynnik k^2).

Poniżej znajdują się równania Rayleigha-Lamba w postaci ułatwiającej proponowany sposób rozwiązania:

$$\frac{\tan(qh)}{q} + \frac{4k^2 p \tan(ph)}{q^2 - k^2} = 0 \quad (2.33)$$

$$q \tan(qh) + \frac{(q^2 - k^2)^2 \tan(ph)}{2k^2 p} = 0. \quad (2.34)$$

Rozwiązać równanie możemy według przedstawionego algorytmu.

1. Wybierz iloczyn $(\omega h)_0$.
2. Wybierz początkową estymatę prędkości fazowej $(c_p)_0$ (a pośrednio też k).
3. Oblicz znak lewych stron równań R-L.
4. Wybierz kolejną wartość prędkości fazowej $(c_p)_1 > (c_p)_0$ i policz znaki lewych stron jeszcze raz.
5. Powtarzaj kroki 3 i 4 aż znaki się zmienią. Oznaczać to będzie, że pierwiastek równania znajduje się pomiędzy ostatnio wybranymi prędkościami. Załóżmy, że jest to pomiędzy $(c_p)_n$ i $(c_p)_{n+1}$.
6. Wykorzystaj jakiś algorytm iteracyjny do znalezienia pierwiastka c_p z odpowiednią dokładnością.
7. Po znalezieniu pierwiastka, kontynuuj wyszukiwanie kolejnych pierwiastków dla założonego $(\omega h)_0$, powtarzając kroki 2-6.
8. Wybierz kolejną wartość ωh i wykonaj dla niej kroki 2-7.

W ten sposób łatwo wyznaczyć krzywe dyspersji, ale należy zaznaczyć, że równania dyspersyjne zostały obliczone analitycznie dla konkretnego przypadku struktury, jaką jest płyta. Metody numeryczne ograniczają się w tym przypadku do rozwiązania wyznaczonych równań. Możliwość ogólniejszego podejścia do badań numerycznych, dla szerokiego wachlarza struktur daje metoda elementów skończonych.

Metoda ta daje możliwości dokładnego przewidzenia odpowiedzi dynamicznych, dla złożonych układów mechanicznych. Jeśli założymy przypadek małych odkształceń, to problem można zapisać w postaci równania różniczkowego:

$$M\ddot{u} + Ku = f^{ext} \quad (2.35)$$

gdzie

M – macierz mas układu

K – macierz sztywności układu

u – przemieszczenia punktów układu

f^{ext} – wektor sił zewnętrznych

Sposobem wyznaczenia krzywych dyspersji z tak określonego układu, może być rozwiązanie równania tj. znalezienie pola przemieszczeń dla wszystkich węzłów w dyskretnych chwilach czasowych, a następnie obliczenie wielowymiarowego przekształcenia Fouriera otrzymanego sygnału.

Równanie można rozwiązać na przykład z wykorzystaniem centralnej formuły różnicowej dla \ddot{u} :

$$\ddot{x} = \frac{u^{t+1} - 2u^t + u^{t-1}}{\Delta t^2}. \quad (2.36)$$

Po podstawieniu otrzymujemy zależność:

$$\frac{1}{\Delta t^2} M(u^{t+1} - 2u^t + u^{t-1}) + Ku^t = f^t \quad (2.37)$$

$$u^{t+1} = \Delta t^2 M^{-1}(f^t - Ku^t) + 2u^t - u^{t-1} \quad (2.38)$$

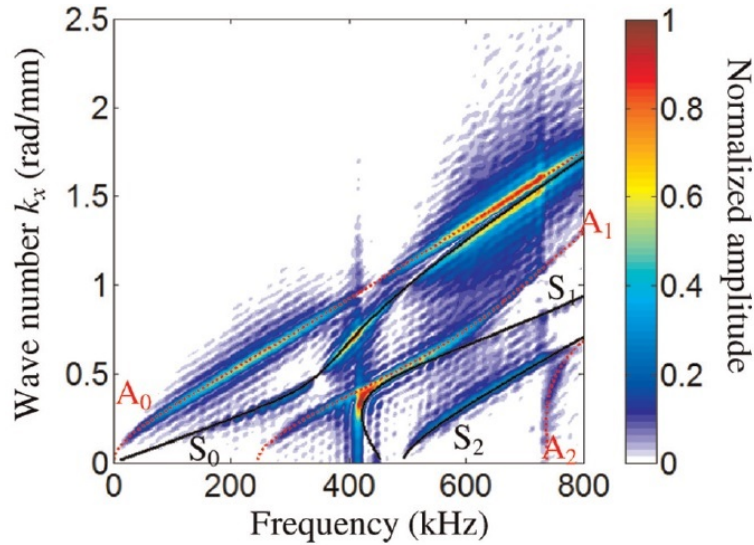
gdzie t oznacza obecną chwilę czasową, a $t + 1$ chwilę kolejną. Operacja odwracania macierzy mas jest kosztowna obliczeniowo. Można przyspieszyć obliczenia przez zastosowanie skupionej macierzy mas (wyrazy niezerowe tylko na głównej diagonalu).

Jeśli interesuje nas propagacja tylko w jednym kierunku, to dla obliczonego sygnału $u[m, n]$ (m - liczba kroków czasowych Δt , n - liczba kroków geometrycznych Δx w kierunku x) przekształcenie Fouriera można obliczyć według wzoru:

$$U[p, q] = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} u[k, l] e^{-i2\pi(-p\frac{k}{m} + q\frac{l}{n})} \quad (2.39)$$

Mając dyskretną postać przekształcenia Fouriera można wykreślić krzywe dyspersji, wyznaczając dla każdej próbki wartość częstotliwości i liczby falowej. Można to zrobić wiedząc, że częstotliwość zawiera się w przedziale $[0, \frac{1}{2\Delta t}]$, a liczba falowa $[0, \frac{1}{2\Delta x} 2\pi]$. Przykładowe krzywe przedstawione są na rysunku 2.15.

Innym sposobem jest symulacja układu dla wymuszeń harmoniczných o ustalonych częstotliwościach, w których chcemy wyznaczyć krzywe. Jako przykład rozpatrzmy jednorodny pręt. Dla przypadku pręta wymuszanego na jednej płaszczyźnie przekroju, dane



Rys. 2.15. Krzywe dyspersji wyznaczone przy pomocy dwuwymiarowego DFT

należy zebrać przed odbiciem fali od swobodnego końca pręta, tak aby sygnał propagował tylko w jednym kierunku. W liniach równoległych do osi, obliczamy pola prędkości przemieszczenia punktów. Może to być też pole przemieszczeń lub naprężeń, ale pole prędkości jest stosunkowo łatwe do wyznaczenia. Znając już prędkości dla wszystkich punktów w jednej linii, w chwili t , możemy wyznaczyć widmo otrzymanego sygnału. Następnie z widma sygnału odczytujemy liczby falowe, dla których powstały widoczne piki. Pik dla największej liczby falowej dotyczy pierwszego modu, a każdy kolejny, z coraz mniejszymi liczbami falowymi, modów kolejnych.

Pole prędkości można wyznaczyć na podstawie różnicowych formuł centralnych 2.40 oraz 2.41.

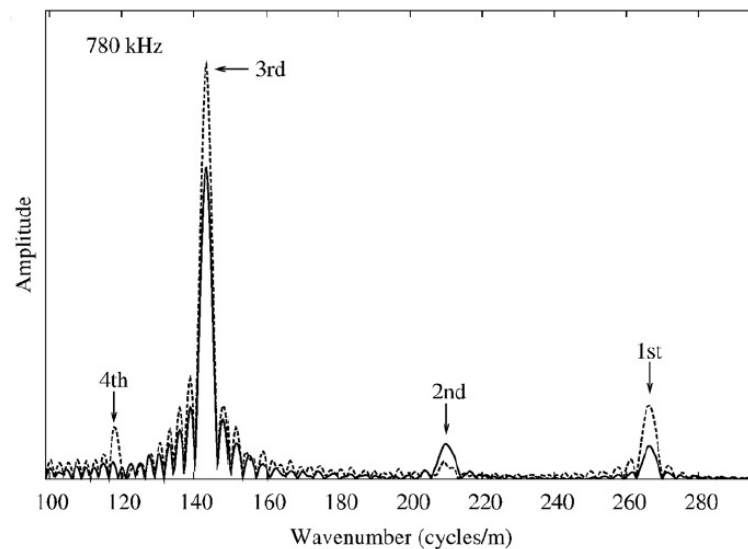
$$\dot{u}^{t+1} = \dot{u}^n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}^n + \ddot{u}^{n+1}) \quad (2.40)$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t(\dot{u}^n + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}^n) \quad (2.41)$$

Założmy, że znamy pełne rozwiązanie w chwili t . Przesunięcie w chwili $t+1$ możemy więc obliczyć z zależności 2.41. Następnie podstawiamy wynik do równania 2.35 i obliczamy przyspieszenie w chwili $t+1$. Ostatecznie korzystając z formuły 2.40 możemy wyznaczyć prędkość w chwili $t+1$.

Przykładowe widmo, z którego możemy odczytać liczby falowe czterech modów znajduje się na rysunku 2.16. Jak widać nie wszystkie liczby falowe da się wykryć przy pomocy danych z jednej linii, więc niezbędne jest prowadzenie obliczeń dla kilku różnych.

Wadą tego sposobu jest konieczność prowadzenia obliczeń dla każdej częstotliwości, dla jakiej chcemy mieć punkty krzywych dyspersji. Jedne przebieg dają nam tylko jeden



Rys. 2.16. Widmo sygnału prędkości na liniach równoległych do osi pręta

punkt na każdej krzywej. Fakt prowadzenia obliczeń tylko w liniach równoległych do osi pręta, ogranicza dodatkow obszar propagujących fal do fal podłużnych.

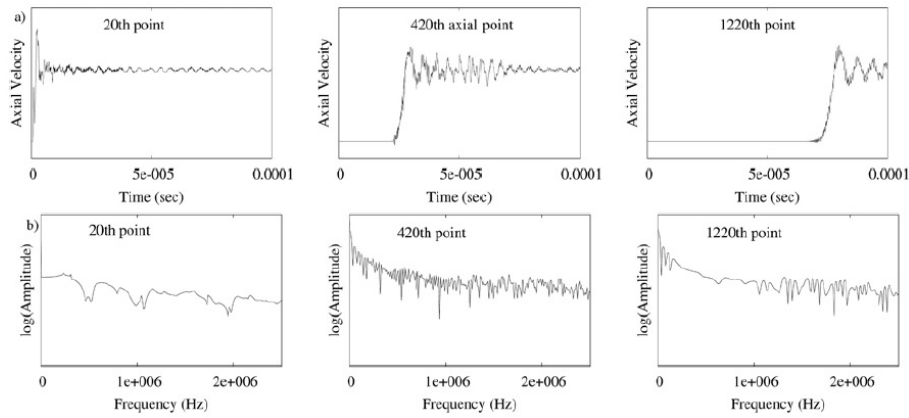
Sposobem zmniejszenia liczby symulacji jakie trzeba przeprowadzić jest symulacja z wymuszeniem szerokopasmowym. Pozwala to na uzyskanie informacji o krzywych dyspersji, dla częstotliwości zawierających się w wymuszającym sygnale. Pojawia się jednak kilka dodatkowych kroków jakie trzeba wykonać, aby uzyskać liczby falowe modów dla poszczególnych częstotliwości.

Aby uzyskać dane do wykreślenia krzywych dyspersji, należy obliczyć przestrzenny rozkład prędkości na liniach równoległych do osi dla wszystkich częstotliwości. W tym celu trzeba wykonać następujące czynności.

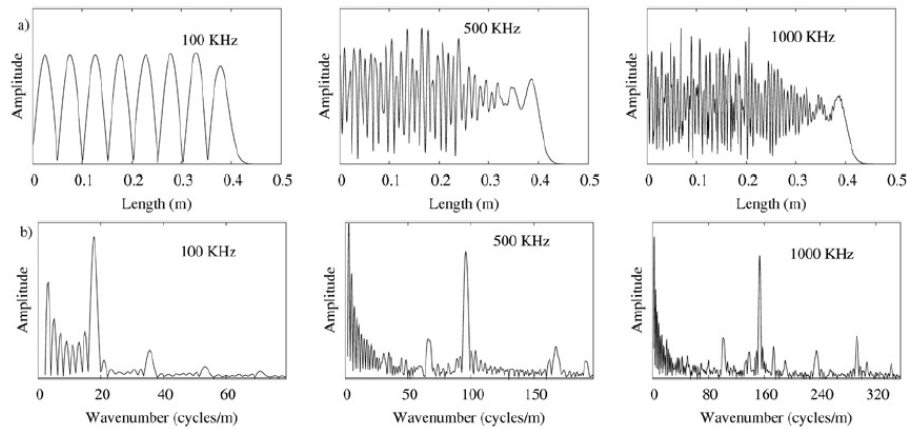
1. Wyznaczyć odpowiedzi czasowe dla każdego punktu na interesującej nas linii równoległej do osi pręta.
2. Obliczyć transformaty Fouriera tych sygnałów
3. Z widma sygnału w każdym punkcie pobrać informacje o amplitudzie dla kolejnych częstotliwości. Na tej podstawie odtworzyć amplitudowy przebieg sygnału na całej linii dla każdej interesującej nas częstotliwości.
4. Dla obliczonych w pkt. 3 przebiegów, obliczyć transformatę Fouriera i z wykresu odczytać wartości liczby falowej, dla wybranych częstotliwości.

Rysunki 2.17 oraz 2.18 przedstawiają kolejne kroki postępowania, dla odpowiedzi na wymuszenie krokiem jednostkowym pręta zbudowanego z 1601 węzłów na długości jednej linii.

Ostatnia przedstawiona tutaj metoda skupia się, na rozwiązaniu zagadnienia własnego modelu wyznaczonego z pomocą MES. Tym razem zakładac będziemy wybraną



Rys. 2.17. a) Odpowiedzi na szerokopasmowe wymuszenie w wybranych punktach jednej linii b) Przekształcenia Fouriera odpowiedzi czasowych

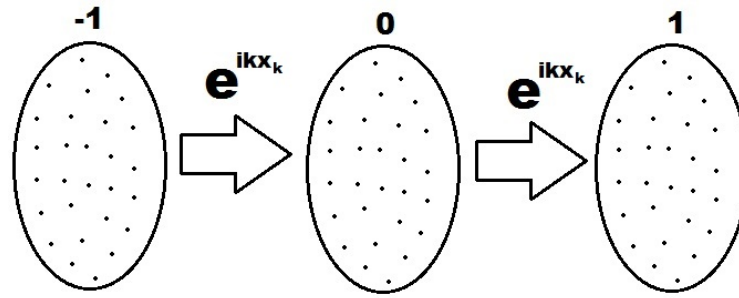


Rys. 2.18. a) Odtworzony sygnał amplitudowy na długości pręta w jednej linii b) Przekształcenie Fouriera odtworzonych sygnałów

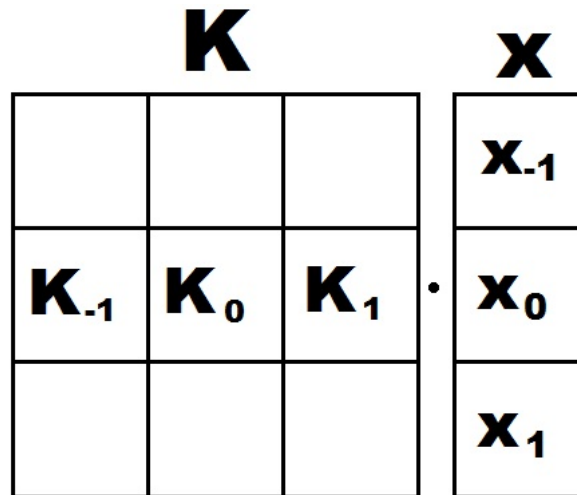
liczbę falową i dla niej obliczać częstotliwości poszczególnych modów. Po raz kolejny za przykład weźmy pręt. Pręt dzielimy na komórki, które będą się składać z kolejnych płaszczyzn, na których znajdują się węzły. Znając odległość płaszczyzn i wybierając liczbę falową, możemy określić przesunięcie fazowe fali pomiędzy płaszczyznami. Sytuacja przedstawiona jest na rysunku 2.19.

W liniowych systemach do opisu propagacji fali wystarcza jedna komórka i siły wewnętrzne pochodzące od komórek sąsiednich. W przypadku braku sił zewnętrznych i przy założeniu skupionej macierzy mas, równanie układu można zapisać w postaci 2.42. Rysunek 2.20 przedstawia sposób wyznaczania macierzy sztywności dla komórki środkowej, z uwzględnieniem zależności z komórkami sąsiednimi.

$$M_0 \ddot{x}_0 + \sum_{p=-1}^1 K_p x_p = 0 \quad (2.42)$$



Rys. 2.19. Kolejne komórki pręta



Rys. 2.20. Wyznaczanie macierzy sztywności środkowej komórki z uwzględnieniem zależności z komórkami sąsiednimi

Uwzględniając wszystkie informacje równanie układu można zapisać jako 2.43. Podstawiając dodatkowo zależności $\ddot{x} = x\omega^2$, $M_{sys} = M_0$ oraz $K_{sys} = K_{-1}e^{-ikx_k} + K_0 + K_1e^{ikx_k}$ otrzymujemy równanie 2.44.

$$M_0\ddot{x}_0 + K_{-1}x_0e^{-ikx_k} + K_0x_0 + K_1x_0e^{ikx_k} = 0 \quad (2.43)$$

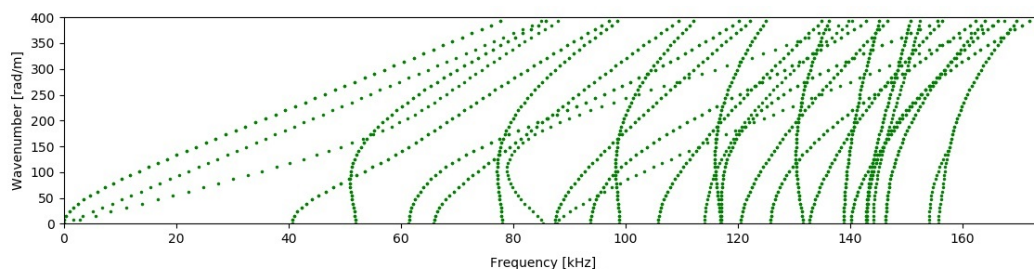
$$(M_{sys}\omega^2 + K_{sys})x_0 = 0 \quad (2.44)$$

Ostatecznie rozwiązując zagadnienie własne dla pary macierzy M_{sys} i K_{sys} otrzymujemy kwadraty częstości własnych układu dla założonego k . Każda z częstości należy do jednego modu krzywych dyspersji.

Wadami tej metody są konieczność prowadzenia obliczeń dla każdej liczby falowej, którą chcemy uwzględnić w wynikach, oraz brak dokładnej informacji, która częstość własna należy do której postaci fali.

Dużą zaletą z kolei jest fakt, że wyznaczamy jedną metodą krzywe dyspersji dla fal podłużnych i poprzecznych.

Przykładowe krzywe dyspersji uzyskane w ten sposób przedstawia rysunek 2.21.



Rys. 2.21. Krzywe uzyskane przez wielokrotne rozwiązanie zagadnienia własnego pręta

2.3.4. Eksperymentalne wyznaczanie krzywych dyspersji

Eksperymentalne badania fal prowadzonych przeprowadza się, wzbudzając odpowiednio obiekt, a następnie zbiera się dane o powstałej fali w innych punktach lub w tym samym miejscu po odbiciu fali. Zebrane dane analizuje się za pomocą algorytmów, w których duże znaczenie ma przekształcenie Fouriera.

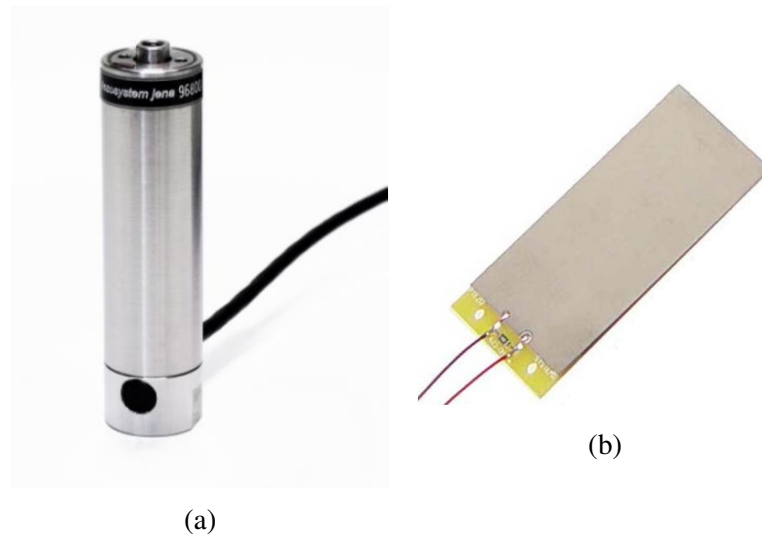
Jako wzbudniki fal prowadzonych często stosowane są przetworniki piezoelektryczne (na przykład z ceramiki PZT). Proste zjawisko piezoelektryczne z jakiego korzystają takie przetworniki, pozwala przekształcić energię elektryczną na energię mechaniczną. Efekt odwrotny pozwala zbierać informację o energii odkształcenia w materiale i sygnał mechaniczny przekształcić w elektryczny.

Materiały piezoelektryczne znalazły szerokie zastosowanie ze względu na dobre parametry mechaniczne, odporność na wiele substancji chemicznych oraz bardzo duże możliwości kształtowania przetworników. Wzbudniki i sensory piezoelektryczne często występują jako cienkie fragmenty materiału piezoelektrycznego, które można wykonać w dowolnym kształcie. W przypadku kiedy chcemy uzyskać większą amplitudę wzbudzenia, stosuje się stosy stworzone z wielu warstw piezoelektryka.

Obecna ilość dostępnych na rynku rozwiązań pozwala na dobranie odpowiedniego przetwornika do niemal każdego projektu bazującego na niskich częstotliwościach. Podczas analizy rozwiązań komercyjnych okazało się, że duża część takich przetworników posiada ograniczenia działania do kilku kHz. Jest to najczęściej zbyt niska częstotliwość, nawet w przypadku badania wyłącznie modów podstawowych. Dostępne są też rozwiązania dla częstotliwości do nawet kilkuset kHz, co w przypadku fal prowadzonych może stanowić wystarczającą wartość.

Przykłady przetworników piezoelektrycznych w formie płytki oraz stosu znajdują się na rysunku 2.22.

Innym sposobem badań jest wykorzystanie techniki laserowej. Za pomocą wiązki lasera możliwe jest wzbudzenie fali sprężystych w materiale. Na szczególną uwagę zasługuje możliwość wzbudzenia fali krótki impuls, którego widmo będzie miała bardzo

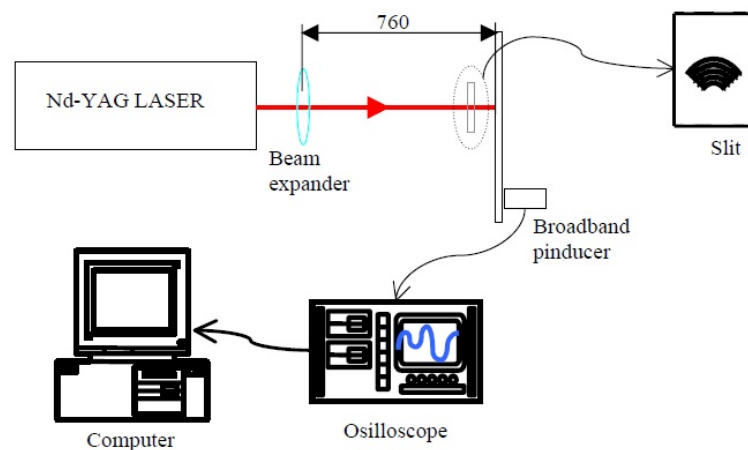


Rys. 2.22. Przetworniki piezoelektryczne: (a) w formie sotsu, (b) w formie płytki

duży zakres częstotliwości. Sygnał taki możemy porównać do delty Diraca, dla której widmo ma stałą amplitudę.

Za pomocą lasera możemy wykonywać także pomiary drgań materiału. Posłużyć może do tego na przykład interferometr laserowy, wykorzystujący efekt Dopplera. Detekcja jest jednak ograniczona do fal powierzchniowych. Atutem takiego pomiaru jest możliwość wykonania go dla wielu punktów na badanym obiekcie. Dzięki temu możemy uzyskać przestrzenny obraz propagacji fali.

Przykładowe stanowisko do badania płyt za pomocą wymuszenia laserem przedstawia rysunek 2.23.



Rys. 2.23. Przykładowy układ stanowiska do badania fal Lamba w cienkiej płycie

3. Wykorzystywane zagadnienia metody elementów skończonych

Metoda elementów skończonych jest zaawansowanym sposobem rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Jest ona szczególnym przypadkiem metody Galerki. Nazwa pochodzi od nazwiska Borisa Grigorievicha Galerki, który jako pierwszy przeprowadził usystematyzowane studia na temat tego typu metod. Za pomocą tej metody można rozwiązać skomplikowane zadania dziedzin takich jak mechanika ciała stałego, mechanika płynów czy teoria pola elektromagnetycznego.

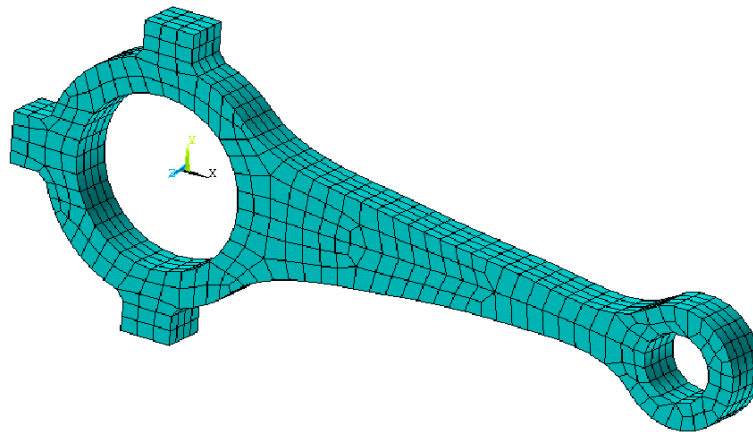
3.1. Rozwiązywanie zadań z pomocą MES

W wytrzymałości materiałów poszukujemy zwykle sił działających w poporach konstrukcji i naprężeń wewnątrz jej konkretnych elementów. Innym podejściem jest znalezienie pola przemieszczeń dla każdego punktu konstrukcji. W jednym i drugim przypadku znalezienie niewiadomych jest osiągalne wyłącznie dla mało skomplikowanych konstrukcji.

Metoda elementów skończonych bierze swoją nazwę od wydzielanych fragmentów konstrukcji, które są właśnie elementami skończonymi. Elementy tworzymy na siatce węzłów, które są punktami wewnątrz lub na brzegach konstrukcji. Węzły są także punktami wspólnymi sąsiadujących elementów. Rozwiązanie opiera się na znalezieniu przemieszczenia węzłów i na tej podstawie obliczenia rozwiązania we wszystkich punktach wewnątrz elementów. Kolejne etapy rozwiązywania zadania za pomocą MES przedstawione są poniżej. Rysunek 3.1 przedstawia przykład obiektu, który został zdyskretyzowany za pomocą elementów skończonych.

1. Generacja siatki węzłów.
2. Budowa elementów skończonych na stworzonej siatce.
3. Wyznaczanie macierzy mas i sztywności dla każdego elementu (macierze lokalne).
4. Agregacja macierzy mas i sztywności dla całej konstrukcji (macierze globalne).
5. Wprowadzenie wektora obciążeń.

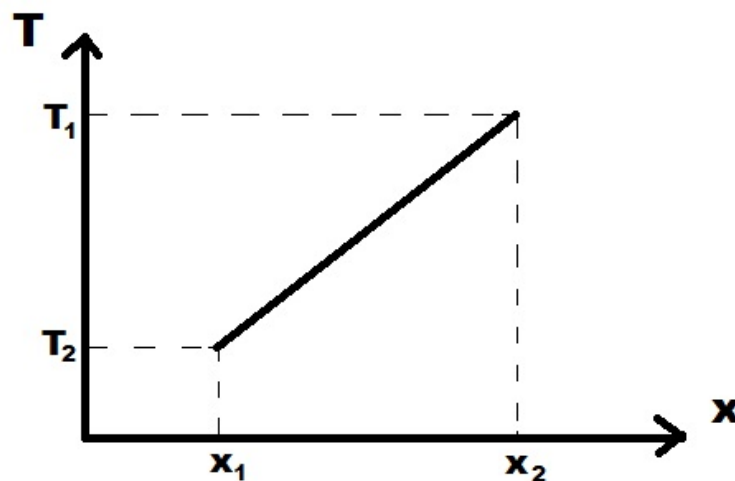
6. Wprowadzenie warunków brzegowych. Mogą to być siły czynne (modyfikacja wektora obciążeń), naprężenia początkowe czy przemieszczenia wskazanych węzłów.
7. Rozwiązanie wyznaczonego liniowego równania różniczkowego $M\ddot{x} + Kx = F$ - znalezienie przemieszczeń węzłów.
8. Wyznaczenie odkształceń i naprężeń.
9. Wyznaczenie reakcji w podporach (węzłach, dla których założono przemieszczenie)



Rys. 3.1. Przykład dyskretyzacji obiektu za pomocą elementów skończonych

3.2. Funkcje kształtu

Weźmy metalowy pręt o długości L . W punkcie x_1 na pręcie przykładamy temperaturę T_1 , a w punkcie x_2 temperaturę T_2 . Przewidujemy, że po nieskończone długim czasie rozkład temperatury w pręcie pomiędzy tymi punktami będzie liniowy (Rys. 3.2).



Rys. 3.2. Temperatur pomiędzy punktami pręta

Temperaturę pomiędzy tymi punktami możemy przedstawić funkcją 3.1.

$$T(x) = a_0 + a_1 x, \quad \text{dla } x \in [x_1, x_2] \quad (3.1)$$

Można wyznaczyć współczynniki funkcji liniowej mając dwa jej punkty.

$$a_1 = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \quad (3.2)$$

$$a_0 = T_2 - a_1 x_2 \quad (3.3)$$

Podstawiając współczynniki do funkcji, możemy wyznaczyć funkcję kształtu.

$$T(x) = T_1 - \frac{T_2 - T_1}{L} x_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x = \frac{x_2 - x}{L} T_1 + \frac{x - x_1}{L} T_2 = N_1(x) T_1 + N_2(x) T_2 \quad (3.4)$$

gdzie

N_1, N_2 – funkcje kształtu.

Funkcje kształtu określają w jakim stopniu wartość temperatury z jednego węzła wpływa na wartość temperatury w dowolnym punkcie wewnątrz elementu. Dla większej liczby węzłów w jednowymiarowym elemencie funkcje kształtu są wielomianami wyższych rzędów. Poniżej znajduje się sposób wyznaczania funkcji kształtu na przykładzie 3-węzłowego elementu jednowymiarowego.

$$T(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{p} \mathbf{a}^e = \mathbf{N} \mathbf{T}^e \quad (3.5)$$

gdzie

\mathbf{p} – wektor zmiennych kolejnych jednomianów $T(x)$

\mathbf{a}^e – wektor współczynników kolejnych jednomianów $T(x)$

\mathbf{N} – wektor funkcji kształtu

\mathbf{T}^e – wektor wartości w węzłach.

Prawdziwe jest też poniższe równanie.

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^e \mathbf{a}^e \quad (3.6)$$

Wyznaczając z tego równania \mathbf{a}^e i podstawiając do równania 3.5, otrzymamy następującą zależność.

$$\mathbf{p} \mathbf{a}^e = \mathbf{p}(\mathbf{M}^e)^{-1} \mathbf{T}^e = \mathbf{N} \mathbf{T}^e \Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{p}(\mathbf{M}^e)^{-1} \quad (3.7)$$

Funkcje kształtu obliczone w taki sposób mają postać jak poniżej.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\det \mathbf{M}^e} (x_2 x_3^2 - x_2^2 x_3 + (x_2^2 - x_3^2)x + (-x_2 + x_3)x^2) \\ N_2 &= \frac{1}{\det \mathbf{M}^e} (x_1^2 x_3 - x_1 x_3^2 + (x_3^2 - x_1^2)x + (x_1 - x_3)x^2) \\ N_3 &= \frac{1}{\det \mathbf{M}^e} (x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 + (x_1^2 - x_2^2)x + (-x_1 + x_2)x^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

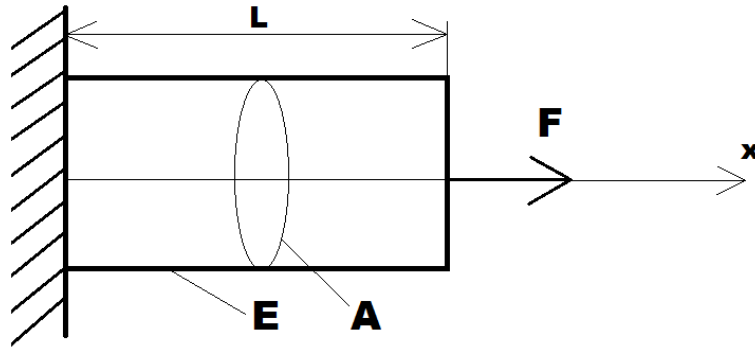
Prawidłowo wyznaczone funkcje kształtu mają dwie ważną własności. Pierwsza związana jest z węzłami i mówi że każda funkcja przyjmuje wartość 1 w jednym węźle, a we wszystkich pozostałych 0. Druga własność mówi, że suma funkcji kształtu wewnątrz elementu skończonego wynosi 1. Matematycznie zapisać te własności można następująco:

$$\begin{cases} N_n(x_m, y_m) = 1, & \text{dla } n = m \\ N_n(x_m, y_m) = 0, & \text{dla } n \neq m \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\sum_{n=1}^n N_n = 1. \quad (3.10)$$

3.3. Wyznaczanie macierzy sztywności i mas elementów

Weźmy model jednorodnego pręta, obciążonego jak na rysunku 3.3 o module Younga E , polu przekroju A i długości L .



Rys. 3.3. Model pręta

Energię potencjalną i kinetyczną układu można wyrazić poniższymi wzorami.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \varepsilon A \sigma dx - F u_{x=L} = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - F u_{x=L} \quad (3.11)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3.12)$$

gdzie

V – energia potencjalna

K – energia kinetyczna

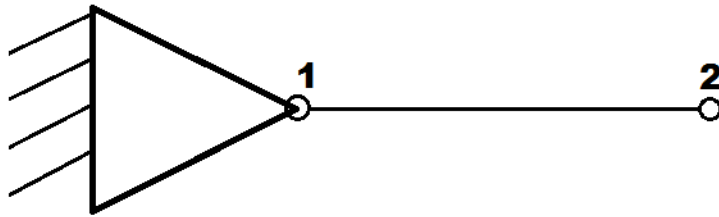
u – przemieszczenie

ε – odkształcenie

σ – naprężenie

F – siła zewnętrzna skupiona

Następnie stwórzmy uproszczony model, do którego wyznaczymy zależności MES.



Rys. 3.4. Uproszczony model pręta

Znając funkcje kształtu i wartości przemieszczeń węzłów można wyznaczyć przemieszczenie w każdym punkcie pręta, a następnie odpowiednie pochodne po przemieszczeniach i po czasie.

$$u = N_1 x_1 + N_2 x_2 = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u}^e \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^e \quad (3.15)$$

Mając wyznaczoną energię, możemy obliczyć lagranżjan i wstawić go do dynamicznych równań Lagrangea drugiego rodzaju. Dzięki tej operacji otrzymamy końcowe, dynamiczne równanie ruchu oraz postać macierzy mas i sztywności. Równania Lagrangea drugiego rodzaju mają postać:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}^e} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}^e} = 0, \quad L = K - V \quad (3.16)$$

gdzie

L – lagranżjan.

Pierwszy człon wynosi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}^e} = \int_0^L \rho \mathbf{A} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^e dx, \quad (3.17)$$

zaś drugi

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}^e} = - \int_0^L E \mathbf{A} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u}^e dx + F \mathbf{N} \mathbf{u}_{x=L}^e. \quad (3.18)$$

Równanie dynamiki układu zapisane jest poniżej.

$$\int_0^L \rho \mathbf{A} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \ddot{\mathbf{u}}^e + \int_0^L \mathbf{A} \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dx \mathbf{u}^e = F \mathbf{N} \mathbf{u}_{x=L}^e \quad (3.19)$$

Postaci macierzy mas i sztywności są następujące:

$$\mathbf{M}^e = \int_0^L \rho \mathbf{A} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \quad (3.20)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_0^L \mathbf{A} \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dx. \quad (3.21)$$

W przypadku kiedy występuje więcej niż jedna stała materiałowa, zamiast E pojawia się macierz materiałowa D . W przypadku bardziej złożonych obiektów o większej liczbie elementów skończonych, całkowanie niezbędne do obliczenia macierzy staje się bardzo czasochłonne. Ponieważ funkcje kształtu są wielomianami, optymalnym rozwiązaniem jest zastosowanie kwadratur Gaussa. Kolejny problem to określenie granic całkowania. W przypadku przedstawionym powyżej nie widać specjalnej trudności, natomiast dla trójwymiarowych obiektów o nieregularnych kształtach wymaga to dodatkowej serii obliczeń.

W takich przypadkach można zastosować mapowanie na współrzędne naturalne. W takich współrzędnych element ma z góry ustalone współrzędne węzłów, co za tym idzie także granice całkowania są znane. Dla obiektu trójwymiarowego przyjmijmy współrzędne rzeczywiste x, y, z i współrzędne naturalne ξ, η, ζ . Mapowania z jednych współrzędnych

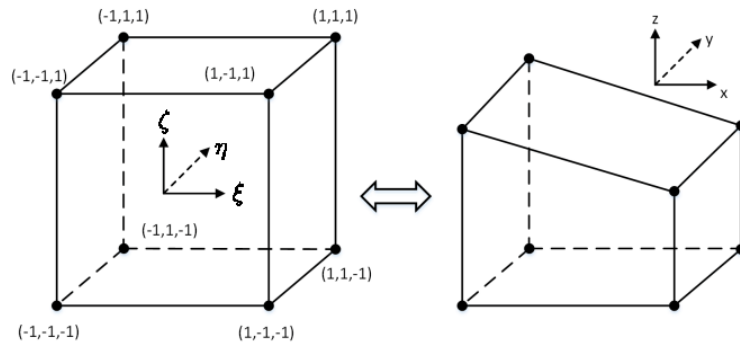
na drugie oblicza się według poniższego wzoru. Wizualizacja procedury przedstawiona jest na rysunku 3.5.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (3.22)$$

x_i, y_i, z_i – współrzędne rzeczywiste punktów

N_i – funkcje kształtu we współrzędnych naturalnych

n – liczba węzłów elementu.



Rys. 3.5. Przekształcenie izoparametryczne

Dla elementów w takich współrzędnych funkcje kształtu są znane i stabelaryzowane. Dla elementu sześciennego wypisane są w 3.25.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_6 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\ N_8 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ostatnim elementem niezbędnym do prawidłowego całkowania we współrzędnych naturalnych jest wyznaczenie jacobianu przekształcenia. Macierz Jacobiego przedstawiona jest w równaniu 3.24.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

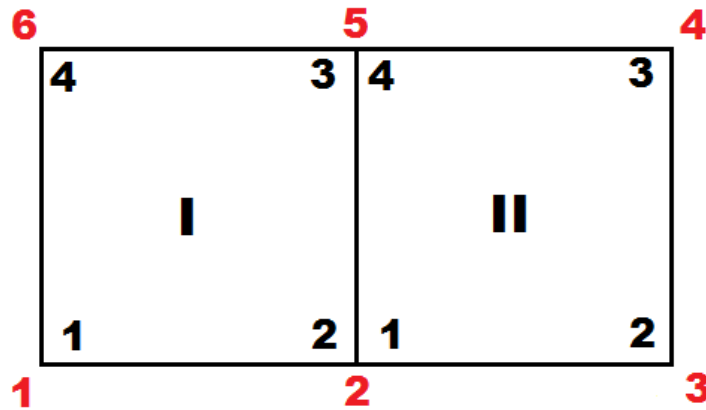
Ostatecznie wyznaczanie macierzy mas i sztywności dla elementu sześciennego zostanie zmodyfikowane jak poniżej:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e &= \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \\ \mathbf{K}^e &= \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \quad (3.25)$$

3.4. Agregacja globalnych macierzy mas i sztywności

Metoda agregacji macierzy globalnych zostanie przedstawiona na przykładzie macierzy sztywności dwóch elementów kwadratowych i obiektu z nich zbudowanego. Wspomniany obiekt przedstawia rysunek 3.6. Czarne cyfry oznaczają numerację lokalną wewnątrz elementu, a czerwone numerację globalną.

Algorytm agregacji polega na umieszczaniu odpowiednich elementów macierzy lokalnych do macierzy globalnej. Pokrywające się elementy są sumowane. Ponieważ podmacierz sztywności dla jednego punktu lub zależności pomiędzy punktami jest umieszczana w macierzy globalnej bez wewnętrznych zmian, przyjmijmy zapis uproszczony:



Rys. 3.6. Dwa elementy skończone kwadratowe tworzące obiekt

$$\mathbf{K}_n^{ij} = \begin{bmatrix} K_{xx}^{ij} & K_{xy}^{ij} \\ K_{xy}^{ij} & K_{yy}^{ij} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

gdzie

i, j – numery punktów

n – numer elementu

x, y – współrzędne punktów.

W takim wypadku lokalne macierze sztywności dla obydwu elementów możemy zapisać jako:

$$\mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I^{11} & \mathbf{K}_I^{12} & \mathbf{K}_I^{13} & \mathbf{K}_I^{14} \\ \mathbf{K}_I^{21} & \mathbf{K}_I^{22} & \mathbf{K}_I^{23} & \mathbf{K}_I^{24} \\ \mathbf{K}_I^{31} & \mathbf{K}_I^{32} & \mathbf{K}_I^{33} & \mathbf{K}_I^{34} \\ \mathbf{K}_I^{41} & \mathbf{K}_I^{42} & \mathbf{K}_I^{43} & \mathbf{K}_I^{44} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{K}_{II} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^{11} & \mathbf{K}_{II}^{12} & \mathbf{K}_{II}^{13} & \mathbf{K}_{II}^{14} \\ \mathbf{K}_{II}^{21} & \mathbf{K}_{II}^{22} & \mathbf{K}_{II}^{23} & \mathbf{K}_{II}^{24} \\ \mathbf{K}_{II}^{31} & \mathbf{K}_{II}^{32} & \mathbf{K}_{II}^{33} & \mathbf{K}_{II}^{34} \\ \mathbf{K}_{II}^{41} & \mathbf{K}_{II}^{42} & \mathbf{K}_{II}^{43} & \mathbf{K}_{II}^{44} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Macierze te mają wymiar 8x8, co odpowiada czterem punktom i dwóm współrzędnym dla każdego punktu. Macierz globalna wobec tego będzie miała wymiar 12x12 (6x6 podmacierzy). Poniżej przedstawione jest wyznaczanie kilku elementów macierzy globalnej.

Dla globalnego punktu 1 mamy:

$$\mathbf{K}^{11} = \mathbf{K}_I^{11}, \quad (3.29)$$

ponieważ punkt globalny 1 pokrywa się z punktem 1 macierzy I.

Dla globalnego punktu 2 mamy:

$$\mathbf{K}^{22} = \mathbf{K}_I^{22} + \mathbf{K}_{II}^{11}, \quad (3.30)$$

ponieważ punkt globalny 2 pokrywa się z punktem 2 macierzy I oraz punktem 1 macierzy II.

Dla zależności globalnych punktów 2 i 3 mamy:

$$\mathbf{K}^{23} = \mathbf{K}_{II}^{12}, \quad (3.31)$$

ponieważ punkt globalny 2 pokrywa się z punktem 1, a punkt globalny 3 z punktem 2 macierzy II.

Dla zależności globalnych punktów 2 i 5 mamy:

$$\mathbf{K}^{25} = \mathbf{K}_I^{23} + \mathbf{K}_{II}^{14}, \quad (3.32)$$

ponieważ punkt globalny 2 pokrywa się z punktem 2 macierzy I oraz punktem 1 macierzy II, a punkt globalny 5 z punktem 3 macierzy I oraz punktem 4 macierzy II.

Uwzględniając że sztywność względna punktów nie będących ze sobą w sąsiedztwie (np. 1 i 3 w I) wynosi 0, macierz globalna przyjmuje postać:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I^{11} & \mathbf{K}_I^{12} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_I^{14} \\ \mathbf{K}_I^{21} & \mathbf{K}_I^{22} + \mathbf{K}_{II}^{11} & \mathbf{K}_{II}^{12} & 0 & \mathbf{K}_I^{23} + \mathbf{K}_{II}^{14} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{II}^{21} & \mathbf{K}_{II}^{22} & \mathbf{K}_{II}^{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{II}^{32} & \mathbf{K}_{II}^{33} & \mathbf{K}_{II}^{34} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_I^{32} + \mathbf{K}_{II}^{41} & 0 & \mathbf{K}_{II}^{43} & \mathbf{K}_I^{33} + \mathbf{K}_{II}^{44} & \mathbf{K}_I^{34} \\ \mathbf{K}_I^{41} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_I^{43} & \mathbf{K}_I^{44} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Oczywistym jest, że w przypadku innej numeracji węzłów globalnych zmieni się układ macierzy globalnej. Nie ma to jednak wpływu na ostateczny wynik rozwiązania MES. W modelach o dużej liczbie elementów skończonych macierze mas i sztywności są macierzami rzadkimi. Wykorzystuje się to w obliczeniach do oszczędzania pamięci komputera, poprzez zapis w pamięci tylko wartości niezerowych oraz ich położenia w macierzy.

Macierz mas wyznaczona w przedstawiony sposób jest nazywana macierzą konsystentną. Często stosuje się macierze skupione, które zawierają elementy tylko na diagonalu. Pozwala to bardzo przyspieszyć obliczenia. Takie rozwiązanie jest ściśle rzecz biorąc niepoprawne, ponieważ nie ma algorytmu, który pozwala obliczyć macierz skupioną i zachować w pełni właściwości modelu. Macierze skupione oblicza się np. poprzez sumowanie wszystkich elementów w wierszu i umieszczanie tej sumy na elemencie diagonalnym. Dobrą stroną macierzy skupionych jest fakt, że rozwiązanie pozostaje zbieżne.

3.5. Rozwiązanie wyznaczonego równania macierzowego

Przyjmijmy, że wyznaczone równanie różniczkowe po agregacji macierzy ma postać:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}. \quad (3.34)$$

Rozwiązać to równanie można na wiele sposobów. Przedstawione zostaną tutaj trzy. Pierwszy sposób to metoda całkowania jawnego, druga - metoda całkowania niejawnego, a trzecie to metoda modalna.

W metodzie całkowania jawnego zakładamy rozpoczęcie obliczeń w kroku czasowym t i przybliżamy pochodną drugiego rzędu poprzez formułę centralną:

$$\ddot{\mathbf{x}}^t = \frac{\mathbf{x}^{t+1} - 2\mathbf{x}^t + \mathbf{x}^{t-1}}{\delta t^2}. \quad (3.35)$$

Po podstawieniu do równania 3.38 wyznaczamy \mathbf{x}^{t+1} :

$$\mathbf{x}^{t+1} = \Delta t^2 \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F}^t - \mathbf{K} \mathbf{x}^t) + 2\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^{t-1}. \quad (3.36)$$

Metoda ta charakteryzuje się tym, że do stabilności rozwiązania często wymaga małego kroku czasowego. Nadaje się ona za to do zrównoleglania obliczeń, co pozwala zastosować do tego celu procesory graficzne. Operacja odwracania macierzy \mathbf{M} we wzorze 3.36 jest kosztowna obliczeniowo. Zastosowanie macierzy skupionej pozwala znacznie przyspieszyć tę procedurę.

Metoda całkowania niejawnego różni się wyjściowym krokiem czasowym. Zakładamy początkową chwilę czasową $t+1$, co przy zastosowaniu tej samej formuły różnicowej wprowadza krok wstecz.

$$\ddot{\mathbf{x}}^{t+1} = \frac{\mathbf{x}^{t+1} - 2\mathbf{x}^t + \mathbf{x}^{t-1}}{\delta t^2}. \quad (3.37)$$

Podstawiamy równanie 3.37 do równania

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}^{t+1} + \mathbf{K} \mathbf{x}^{t+1} = \mathbf{F}^{t+1} \quad (3.38)$$

i otrzymujemy

$$\mathbf{x}^{t+1} = (\mathbf{M} + \Delta t^2 \mathbf{K})^{-1} (\Delta t^2 \mathbf{F}^{t+1} + 2\mathbf{M} \mathbf{x}^t - \mathbf{M} \mathbf{x}^{t-1}). \quad (3.39)$$

W tym wypadku nie unikniemy już odwracania macierzy $\mathbf{M} + \Delta t^2 \mathbf{K}$, co powoduje wydłużenie obliczeń. Zaletą tej metody jest fakt, że jest ona bezwarunkowo stabilna.

W metodzie modalnej jako pierwsze należy wyznaczyć wektory własne dla równania jednorodnego $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = 0$. Wektory własne wyznaczyć można z dokładnością do stałej multiplikatywnej. Możliwe jest wyskalowanie tych wektorów w taki sposób, aby macierz tych wektorów $\boldsymbol{\phi}$ miała własność:

$$\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{I}. \quad (3.40)$$

Zakładając przekształcenie współrzędnych $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi} \bar{\mathbf{x}}$ otrzymamy nową postać równania 3.38.

$$\ddot{\bar{\mathbf{x}}} + \Lambda \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{F}}, \quad \Lambda = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{F}. \quad (3.41)$$

Macierz Λ jest macierzą diagonalną, więc rozwiązanie układu sprowadza się teraz do znalezienia rozwiązania dla pojedynczych oscylatorów harmoniczych. Elementy macierzy Λ są kwadratami częstości własnych drgań węzłów.

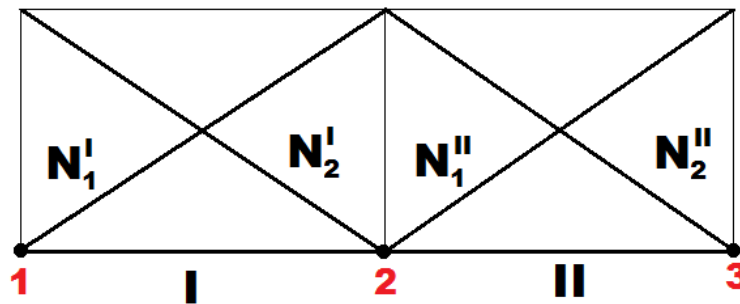
$$\begin{bmatrix} \ddot{\bar{x}}_1 \\ \ddot{\bar{x}}_2 \\ \ddot{\bar{x}}_3 \\ \vdots \\ \ddot{\bar{x}}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \omega_3^2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \vdots \\ \bar{F}_n \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_1 + \omega_1^2 \bar{x}_1 = \bar{F}_1 & \rightarrow \bar{x}_1 \\ \ddot{\bar{x}}_2 + \omega_2^2 \bar{x}_2 = \bar{F}_2 & \rightarrow \bar{x}_2 \\ \ddot{\bar{x}}_3 + \omega_3^2 \bar{x}_3 = \bar{F}_3 & \rightarrow \bar{x}_3 \\ \vdots & \vdots \\ \ddot{\bar{x}}_n + \omega_n^2 \bar{x}_n = \bar{F}_n & \rightarrow \bar{x}_n \end{cases} \quad (3.43)$$

Po rozwiązaniu równań należy wyznaczyć ostateczne rozwiązanie $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi} \bar{\mathbf{x}}$.

3.6. Zbieżność metody i błędy rozwiązania

O zbieżności rozwiązania możemy wnioskować na podstawie funkcji kształtu. Pierwszym warunkiem jest tzw. warunek zgodności. Mówi on o tym, że funkcje kształtu muszą być ciągłe w przestrzeni elementów. Dla prostego przypadku dwóch elementów liniowych jednowymiarowych ciągłość funkcji ilustruje rysunek 3.7.



Rys. 3.7. Ciągłość funkcji w przestrzeni elementów

Warunek ten jest zapewniony poprzez własność funkcji kształtu przedstawioną we wzorze 3.9.

Kolejny warunek nazywa się warunkiem bryły sztywnej (WBS). Zapewnia on brak straty bądź narastania energii podczas wyznaczania wyniku wewnątrz elementu. Warunek ten jest zapewniony poprzez własność funkcji kształtu przedstawioną w 3.10.

Ostatnim warunkiem jest tzw. warunek stałego odkształcenia (WSO). Mówi on o tym, że jeśli w elemencie przyłożymy liniowe pole przemieszczeń, to odkształcenie będzie stałe w każdym punkcie elementu.

Jeśli spełnione są warunki zgodności, WBS oraz WBO to rozwiązanie dla elementu będzie zbieżne. Warunki te muszą być spełnione dla każdego elementu obliczanego modelu.

Zbieżność nie daje nam gwarancji, że rozwiązanie otrzymane przy pomocy symulacji MES jest poprawne. Przez poprawne rozumiane jest, że błąd rozwiązania jest dostatecznie mały. Aby mieć pewność, że rozwiązanie jest wystarczająco dokładne należy oszacować błąd maksymalny. W przypadku MES błąd powodują:

1. dyskretyzacja konstrukcji
2. zaokrąglenia arytmetyczne.

Pierwsza przyczyna występowania błędów związana jest z podziałem konstrukcji na elementy skończone. Błąd zawarty jest już w równaniu $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}$. Pojawia się dlatego, że całe rozwiązanie wyznaczamy za pomocą wielomianowych funkcji kształtu. Błąd zbieżnego rozwiązania możemy zmniejszać poprzez wykorzystanie funkcji kształtu wyższego rzędu, bądź zagęszczenie siatki i budowę większej liczby elementów skończonych.

Estymacja błędów odbywa się na różne sposoby. Jednym z nich jest wykorzystanie równania 3.44.

$$F - \tilde{F}_i \approx ch_i^r \quad (3.44)$$

gdzie

F – rozwiązanie dokładne

\tilde{F}_i – i-te rozwiązanie przybliżone

c – współczynnik proporcjonalności

h_i – współczynnik zależny od zagęszczenia siatki

r – współczynnik zależny od stopnia wielomianów interpolujących.

Jedna symulacja nie daje możliwości wyznaczyć błędu. Aby tego dokonać należy przeprowadzić dwie symulacje, co pozwala obliczyć błąd drugiej (dokładniejszej). Przyjmijmy, że druga symulacja zawiera elementy o dwukrotnie mniejszych wymiarach, czyli $h_1 = 2h_2$. Współczynnik r przyjmuje wartości mniejsze od 1, ale dla uproszczenia przyjmijmy dokładnie 1.

Podstawiając odpowiednie indeksy do wzoru 3.44, możemy wyznaczyć błąd drugiej symulacji, znając wyniki zarówno pierwszej jak i drugiej.

$$F - \tilde{F}_2 \approx \frac{\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1}{(\frac{h_1}{h_2})^r - 1}. \quad (3.45)$$

Innym podejściem jest wyznaczanie błędów poprzez energię naprężenia elementów. Po wyznaczeniu przemieszczeń węzłów i obliczeniu naprężeń, naprężenia nie są ciągłe w przestrzeni elementów. Jeśli jeden węzeł należy do kilku elementów, to w każdym z nich może zostać wyznaczona inna wartość naprężenia dla takiego węzła. W ciągłym przypadku naprężenie byłoby funkcją ciągłą, dlatego błąd wynikający z naprężeń wyznacza się w następujący sposób:

1. Obliczamy średnią naprężeń w węźle, biorąc wartości dla węzła z każdego elementu, do którego należy.
2. Wyznaczamy błąd naprężenia w węzłach elementu, poprzez odejmowanie od naprężenia w węźle wartości średniego naprężenia w tym węźle.
3. Sumujemy błędy naprężeń wszystkich elementów skończonych.
4. Wyznaczamy energię błędu naprężenia.
5. Wyznaczamy energię odkształcenia dla całej konstrukcji.
6. Obliczamy błąd procentowy według wzoru 3.46.

$$E = 100 \left(\frac{e}{U + e} \right)^{0.5} \quad (3.46)$$

gdzie

e – całkowita energii błędu dla konstrukcji

U – energii odkształcenia dla konstrukcji

E – błąd procentowy energii.

Załączniki

A. Lorem Ipsum

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Fusce aliquet consequat sollicitudin. Nam nec eros ut dolor vulputate maximus. Vivamus quis neque sed orci cursus ornare. Proin vel elit eros. Duis efficitur mi tempus mi volutpat ullamcorper. Vestibulum consectetur dictum dui, ac suscipit eros aliquet ac. Quisque at dignissim mauris. Nulla non finibus nunc. In hac habitasse platea dictumst. Donec semper in nunc eget ultricies. Fusce varius scelerisque cursus. Vestibulum a sem lobortis, pretium nibh quis, pharetra justo.

Mauris turpis nunc, dignissim ac fringilla quis, dignissim sed dui. Cras porttitor congue nulla, vitae hendrerit ligula hendrerit vel. Donec lorem lectus, tempor a feugiat et, ultrices at augue. Suspendisse ultricies massa vitae pellentesque accumsan. Phasellus sollicitudin hendrerit lorem, lobortis aliquet nibh tristique a. Etiam nec tempus enim. Aenean diam nibh, pretium tincidunt malesuada vitae, laoreet non orci. Fusce dictum feugiat eros in malesuada. Sed vel ligula nunc. Donec nec hendrerit mauris. Sed accumsan quis quam vitae interdum. Praesent nec arcu est. Donec cursus nisi vitae ligula pharetra, quis sagittis felis dignissim.

Nunc a dapibus elit, nec iaculis erat. Suspendisse eleifend neque ac odio volutpat vulputate. Etiam varius odio quis leo aliquam, ac laoreet turpis vulputate. Donec rutrum pulvinar odio, vitae maximus ipsum bibendum a. Curabitur euismod erat a cursus vehicula. Aenean quis quam vulputate, consequat erat vitae, molestie felis. Morbi gravida nulla vitae leo hendrerit iaculis. Donec lobortis, quam ac ultrices aliquam, purus lectus tempus enim, et dictum nunc tortor vitae ligula. Aliquam volutpat bibendum nulla, non elementum nunc congue ut. Aenean mattis arcu in velit faucibus, vel eleifend nibh imperdiet. Etiam eget gravida nulla, quis varius sapien.

Donec bibendum commodo mi, vel interdum neque mattis nec. Suspendisse potenti. In lectus elit, accumsan non purus quis, viverra eleifend ipsum. Sed vel ex sed dolor consectetur scelerisque. Praesent id leo ultrices eros ornare accumsan. Mauris pharetra justo at tortor scelerisque mattis. Quisque eu risus vitae mi tristique pulvinar eget et nisi. Praesent a nibh vitae nunc aliquet laoreet eu eu massa. Sed aliquet mollis cursus. In erat nisl, suscipit eget justo id, euismod pellentesque nulla.