



**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
im. Stanisława Staszica w Krakowie  
WYDZIAŁ INŻYNIERII  
MECHANICZNEJ I ROBOTYKI**

---

# **Praca dyplomowa magisterska**

**Katarzyna Rugełło,  
Bartłomiej Piwowarczyk**

*Imię i nazwisko*

**Automatyka i Robotyka**

*Kierunek studiów*

**Metody kompensacji dyspersji dla fal  
prowadzonych propagujących w prętach  
stalowych**

*Temat pracy dyplomowej*

**prof. dr hab. inż. Tadeusz Stepinski**  
*Promotor Pracy*

.....  
**Ocena**

Kraków, rok 2017/2018

Kraków, 17 czerwca 2018

Imię i nazwisko: Katarzyna Rugełło  
Nr albumu: 2694–  
Kierunek studiów: Automatyka i Robotyka  
Profil dyplomowania: Automatyka i Metrologia

## OŚWIADCZENIE

**Uprzedzony o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (tj. Dz. U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, videogram lub nadanie”, a także uprzedzony o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 211 ust. 1 ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym (tj. Dz. U. z 2012 r. poz. 572, z późn. zm.) „Za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyny uchybiające godności student ponosi odpowiedzialność dyscyplinarną przed komisją dyscyplinarną albo przed sądem koleżeńskim samorządu studenckiego, zwanym dalej „sądem koleżeńskim”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem osobiście i samodzielnie i że nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy”.**

.....  
*podpis dyplomanta*

Kraków, 17 czerwca 2018

Imię i nazwisko: Bartłomiej Piwowarczyk  
Nr albumu: 269466  
Kierunek studiów: Automatyka i Robotyka  
Profil dyplomowania: Automatyka i Metrologia

## OŚWIADCZENIE

**Uprzedzony o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (tj. Dz. U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, videogram lub nadanie”, a także uprzedzony o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 211 ust. 1 ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym (tj. Dz. U. z 2012 r. poz. 572, z późn. zm.) „Za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyny uchybiające godności student ponosi odpowiedzialność dyscyplinarną przed komisją dyscyplinarną albo przed sądem koleżeńskim samorządu studenckiego, zwanym dalej „sądem koleżeńskim”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem osobiście i samodzielnie i że nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy”.**

.....  
*podpis dyplomanta*

Kraków, 17 czerwca 2018

Imię i nazwisko: Katarzyna Rugełło  
Nr. albumu: 2694–  
Kierunek studiów: Automatyka i Robotyka  
Specjalność: Automatyka i Metrologia

## OŚWIADCZENIE

Świadomy odpowiedzialności karnej za poświadczanie nieprawdy oświadczam, że niniejszą magisterską pracę dyplomową wykonałem osobiście i samodzielnie oraz nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

Jednocześnie oświadczam, że dokumentacja pracy nie narusza praw autorskich w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 roku o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. z 2006 r. Nr 90 poz. 631 z późniejszymi zmianami) oraz dóbr osobistych chronionych prawem cywilnym. Nie zawiera ona również danych i informacji, które uzykałem w sposób niedozwolony. Wersja dokumentacji dołączona przeze mnie na nośniku elektronicznym jest w pełni zgodna z wydrukiem przedstawionym do recenzji.

Zaświadczam także, że niniejsza magisterska praca dyplomowa nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanego z nadawaniem dyplomów wyższej uczelni lub tytułów zawodowych.

.....  
*podpis dyplomanta*

Kraków, 17 czerwca 2018

Imię i nazwisko: Bartłomiej Piwowarczyk

Nr. albumu: 269466

Kierunek studiów: Automatyka i Robotyka

Specjalność: Automatyka i Metrologia

## OŚWIADCZENIE

Świadomy odpowiedzialności karnej za poświadczanie nieprawdy oświadczam, że niniejszą magisterską pracę dyplomową wykonałem osobiście i samodzielnie oraz nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

Jednocześnie oświadczam, że dokumentacja pracy nie narusza praw autorskich w rozumieniu ustawy z dnia 4 lutego 1994 roku o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. z 2006 r. Nr 90 poz. 631 z późniejszymi zmianami) oraz dóbr osobistych chronionych prawem cywilnym. Nie zawiera ona również danych i informacji, które uzy skałem w sposób niedozwolony. Wersja dokumentacji dołączona przeze mnie na nośniku elektronicznym jest w pełni zgodna z wydrukiem przedstawionym do recenzji.

Zaświadczam także, że niniejsza magisterska praca dyplomowa nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadawaniem dyplomów wyższej uczelni lub tytułów zawodowych.

.....

*podpis dyplomanta*

Kraków, 17 czerwca 2018

Imię i nazwisko:	Katarzyna Rugełło
Adres korespondencyjny:	wypelnic
Temat pracy dyplomowej magisterskiej:	Metody kompensacji dyspersji dla fal prowadzonych propagujących w prętach stalowych
Rok ukończenia:	2018
Nr. albumu:	2694-
Kierunek studiów:	Automatyka i Robotyka
Specjalność:	Automatyka i Metrologia

## OŚWIADCZENIE

Niniejszym oświadczam, że zachowując moje prawa autorskie, udzielam Akademii Górniczo-Hutniczej im. S. Staszica w Krakowie nieograniczonej w czasie nieodpłatnej licencji niewyłącznej do korzystania z przedstawionej dokumentacji magisterskiej pracy dyplomowej, w zakresie publicznego udostępniania i rozpowszechniania w wersji drukowanej i elektronicznej<sup>1</sup>.

Publikacja ta może nastąpić po ewentualnym zgłoszeniu do ochrony prawnej wynalazków, wzorów użytkowych, wzorów przemysłowych będących wynikiem pracy inżynierskiej<sup>2</sup>.

Kraków, .....

*data*      *podpis dyplomanta*

---

<sup>1</sup>Na podstawie Ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. o prawie o szkolnictwie wyższym (Dz.U. z 2005 Nr 164, poz. 1365) Art. 239 oraz Ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz.U. 2000 r. Nr 80, poz. 904, z późn. zm.) Art. 15a: "Uczelni w rozumieniu przepisów o szkolnictwie wyższym przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w ciągu 6 miesięcy od jej obrony, student, który ją przygotował, może ją opublikować, chyba że praca dyplomowa jest częścią utworu zbiorowego."

<sup>2</sup>Ustawa z dnia 30 czerwca 2000 r. – prawo własności przemysłowej (Dz.U. z 2003 r. Nr 119, poz. 1117, z późn. zm.), a także rozporządzenie Prezesa Rady Ministrów z dnia 17 września 2001 r. w sprawie dokonywania i rozpatrywania zgłoszeń wynalazków i wzorów użytkowych (Dz.U. z 2001 r. Nr 102, poz. 1119 oraz z 2005 r. Nr 109, poz. 910).

Kraków, 17 czerwca 2018

Imię i nazwisko:	Bartłomiej Piwowarczyk
Adres korespondencyjny:	Stryszowa 27, 32-420 Gdów
Temat pracy dyplomowej magisterskiej:	Metody kompensacji dyspersji dla fal prowadzonych propagujących w prętach stalowych
Rok ukończenia:	2018
Nr. albumu:	269466
Kierunek studiów:	Automatyka i Robotyka
Specjalność:	Automatyka i Metrologia

## OŚWIADCZENIE

Niniejszym oświadczam, że zachowując moje prawa autorskie, udzielam Akademii Górniczo-Hutniczej im. S. Staszica w Krakowie nieograniczonej w czasie nieodpłatnej licencji niewyłącznej do korzystania z przedstawionej dokumentacji magisterskiej pracy dyplomowej, w zakresie publicznego udostępniania i rozpowszechniania w wersji drukowanej i elektronicznej<sup>3</sup>.

Publikacja ta może nastąpić po ewentualnym zgłoszeniu do ochrony prawnej wynalazków, wzorów użytkowych, wzorów przemysłowych będących wynikiem pracy inżynierskiej<sup>4</sup>.

Kraków, .....

*data*      *podpis dyplomanta*

---

<sup>1</sup>Na podstawie Ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. o prawie o szkolnictwie wyższym (Dz.U. z 2005 Nr 164, poz. 1365) Art. 239 oraz Ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz.U. 2000 r. Nr 80, poz. 904, z późn. zm.) Art. 15a: "Uczelni w rozumieniu przepisów o szkolnictwie wyższym przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w ciągu 6 miesięcy od jej obrony, student, który ją przygotował, może ją opublikować, chyba że praca dyplomowa jest częścią utworu zbiorowego."

<sup>2</sup>Ustawa z dnia 30 czerwca 2000 r. – prawo własności przemysłowej (Dz.U. z 2003 r. Nr 119, poz. 1117, z późn. zm.), a także rozporządzenie Prezesa Rady Ministrów z dnia 17 września 2001 r. w sprawie dokonywania i rozpatrywania zgłoszeń wynalazków i wzorów użytkowych (Dz.U. z 2001 r. Nr 102, poz. 1119 oraz z 2005 r. Nr 109, poz. 910).

Kraków, 17 czerwca 2018

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA  
WYDZIAŁ INŻYNIERII MECHANICZNEJ I ROBOTYKI**

**TEMatyKA PRACY DYPLOMOWEJ MAGISTERSKIEJ**  
dla studenta II roku studiów stacjonarnych

**Katarzyna Rugełło,  
Bartłomiej Piwowarczyk**  
*imię i nazwisko studenta*

**TEMAT PRACY DYPLOMOWEJ MAGISTERSKIEJ:** Metody kompensacji dyspersji dla fal prowadzonych propagujących w prętach stalowych

*Promotor pracy:* prof. dr hab. inż. Tadeusz Stepinski

*Recenzent pracy:* dr hab. inż. Paweł Paćko

*.....  
podpis dziekana*

**PLAN PRACY DYPLOMOWEJ:**

1. Omówienie tematu pracy i sposobu realizacji z promotorem.
2. Zebranie i opracowanie literatury dotyczącej tematu pracy.
3. Zebranie i opracowanie wyników badań.
4. Analiza wyników badań, ich omówienie i zatwierdzenie przez promotora.
5. Opracowanie redakcyjne.

Kraków, .....  
*data* .....  
*podpis dyplomanta*

**TERMIN ODDANIA DO DZIEKANATU:** ..... **20... r.**

.....  
*podpis promotora*

Kraków, 17 czerwca 2018

Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica  
**Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki**

Kierunek: Automatyka i Robotyka  
Profil dyplomowania: Automatyka i Metrologia

Katarzyna Rugełło  
Bartłomiej Piwowarczyk  
**Praca dyplomowa magisterska**

Metody kompensacji dyspersji dla fal prowadzonych propagujących w prętach stalowych  
Opiekun: prof. dr hab. inż. Tadeusz Stepinski

#### STRESZCZENIE

[Treść streszczenia]

Cracow, June 17, 2018

AGH University of Science and Technology  
**Faculty of Mechanical Engineering and Robotics**

Field of Study: Automatics and Robotics

Specialisations: Automation and Metrology

Katarzyna Rugełło

Bartłomiej Piwowarczyk

**Master Diploma Thesis**

Dispersion compensation methods of guided waves(GW) propagating in steel bars

Supervisor: prof. dr hab. inż. Tadeusz Stepinski

## SUMMARY

[Summary text]

*Serdecznie dziękuję ... tu ciąg dalszych podziękowań np. dla promotora, żony, sąsiada itp.*

# Spis treści

<b>1. Wstęp</b> .....	11
1.1. Cele pracy .....	12
1.2. Plan pracy .....	13
<b>2. Wybrane zagadnienia propagacji fal w ośrodku sprężystym</b> .....	15
2.1. Liniowa teoria sprężystości .....	15
2.1.1. Naprężenie .....	15
2.1.2. Odkształcenie i prawko Hooke'a .....	16
2.2. Rodzaje fal sprężystych.....	18
2.2.1. Fale podłużne.....	18
2.2.2. Fale poprzeczne .....	19
2.2.3. Fale Rayleigha i Löva .....	19
2.2.4. Fale Lamba .....	20
2.3. Zjawisko dyspersji .....	21
2.3.1. Prędkość fazowa i grupowa .....	22
2.3.2. Analityczne wyznaczanie krzywych dyspersji .....	24
2.3.3. Numeryczne wyznaczanie krzywych dyspersji .....	28
2.3.4. Eksperymentalne wyznaczanie krzywych dyspersji.....	34
<b>3. Wykorzystywane zagadnienia metody elementów skończonych</b> .....	36
3.1. Rozwiązywanie zadań z pomocą MES .....	36
3.2. Funkcje kształtu .....	37
3.3. Wyznaczanie macierzy sztywności i mas elementów .....	39
3.4. Agregacja globalnych macierzy mas i sztywności .....	43
3.5. Rozwiązywanie wyznaczonego równania macierzowego .....	45
3.6. Zbieżność metody i błędy rozwiązania .....	47
<b>4. Metody kompensacji dyspersji</b> .....	50
4.1. Cel kompensacji .....	50
4.1.1. Zastosowanie fal Lamba w nieniszczacych testach .....	50
4.1.2. Sygnał stosowany w symulacji .....	53
4.2. Agregacja krzywych dyspersji uzyskanych z zaimplementowanego solvera..	55
4.2.1. Cel agregacji .....	55
4.2.2. Algorytm agregacji .....	55
4.3. Metoda odwracania sygnału w czasie.....	56
4.3.1. Podstawy teoretyczne.....	57
4.3.2. Implementacja numeryczna.....	58

4.4. Metoda mapowania liniowego przy pomocy rozwinięcia w szereg Taylora ..	60
4.4.1. Podstawy teoretyczne.....	60
<b>5. Aplikacja do obliczeń numerycznych .....</b>	<b>64</b>
5.1. Instalacja i konfiguracja środowiska.....	64
5.1.1. Anaconda.....	64
5.1.2. PyCharm.....	69
5.2. Obliczenia MES i wyznaczanie krzywych dyspersji oraz wzbudzalności .....	70
5.2.1. Elementy czworościenne .....	70
<b>Bibliografia .....</b>	<b>76</b>
<b>Załączniki .....</b>	<b>76</b>
A.    Lorem Ipsum .....	77

# 1. Wstęp

W dzisiejszym czasach z każdej strony otaczają nas różnego rodzaj konstrukcje mechaniczne. Wysokie koszty materiałów skłaniają inżynierów do szukania sposobów na mniejsze ich zużycie oraz zwiększenie żywotności konstrukcji. Dodatkowo pojawia się problem bieżącego sprawdzania stanu konstrukcji w trakcie jej eksploatacji. Jednym ze sposobów badania stanu konstrukcji jest zastosowanie fal mechanicznych. Fale te stały się przedmiotem zainteresowania badaczy już w XIX w. i zaczęły powstawać pierwsze prace takich inżynierów i naukowców jak Poisson, Stokes, Rayleigh. Badania te stawały się popularniejsze i w kolejnych dziesięcioleciach powstawały nowe poważne prace na ten temat. W ostatnich latach pojawiło się duże zainteresowanie wokół tematu fal prowadzonych, które dają duże możliwości badania konstrukcji, ale ich opis jest trudny i najczęściej problemy z nimi związane nie są możliwe do rozwiązania w sposób analityczny.

Na gruncie badań nad falami wyłoniły się dwa obszary ich zastosowań tj. badania nieniszczące oraz monitorowanie zdrowia konstrukcji. W pierwszym przypadku celem jest wyszukiwanie uszkodzeń konstrukcji przy pomocy wyspecjalizowanej, przenośnej aparatury poprzez korzystanie z wysokoczęstotliwościowych fal (fal objętościowych). Konstrukcję bada się w różnych punktach, szukając uszkodzenia w bliskim otoczeniu punktu badawczego. Utrudnieniem jest brak odniesienia do wyników poprawnie działającej konstrukcji. Powoduje to, że badania może być bardzo czasochłonne, co podnosi dodatkowo koszty.

Monitorowanie zdrowia konstrukcji skupia się wokół sprawdzania przydatności konstrukcji do użycia i pozostałego czasu, w którym może być ona używana. Możliwe jest to dzięki badaniu z jednego punktu dużego obszaru konstrukcji za pomocą fal prowadzonych. O takich falach mówimy kiedy ich długość staje się porównywalna do wymiarów geometrycznych konstrukcji. Zastosowanie takiego rozwiązania pozwala zautomatyzować proces testowania i zmniejszyć koszta. Aby to było możliwe niezbędne są dane zebrane na prawidłowo działającej konstrukcji. Dodatkowo wymagane jest zastosowanie metod kompensacji zjawisk fizycznych jak dyspersja. Na rysunku 1.1 przedstawiony jest sposób badania konstrukcji przy pomocy fal objętościowych oraz fal prowadzonych.



**Rys. 1.1.** Przykład badania przy pomocy fal objętościowych (góry rysunek) oraz fal prowadzonych (dolny rysunek)

## 1.1. Cele pracy

Praca skupia się wokół symulacji badania metalowych prętów przy pomocy fal prowadzonych. Symulacja ma za zadanie wyznaczyć sygnał zwrotny, dla nadanego sygnału za pomocą np. przetwornika piezoelektrycznego, w przypadku badania puls-echo. Fale prowadzone podlegają dyspersji, więc sygnał powrotny jest silnie zniekształcony w stosunku do nadanego. Algorytmy, które pozwolą skompensować dyspersję są kolejnym aspektem branym pod uwagę przy symulowaniu przebiegu sygnału.

Pomysł na tego typu symulację wziął się z problemu badania kotw stropowych przedstawionego w [!!!]. Jeśli wykorzystamy metalowe pręty aby wzmacnić strop tunelu i mamy do nich dostęp wyłącznie od strony czoła, to możliwości sprawdzania stanu tych prętów jest mocno ograniczony. Rysunek 4.1 przedstawia widok tunelu i kotw stropowych. Sposobem na diagnostykę kotw, może być właśnie zastosowanie fal prowadzonych.



**Rys. 1.2.** Zastosowanie kotw do wzmacniania stropu oraz różne rodzaje kotw

Aby dać możliwość symulacji badania pręta, program musi zapewniać następujące funkcjonalności:

1. Możliwość wyboru sygnału wejściowego
2. Możliwość wyznaczenia modelu matematycznego pręta
3. Możliwość wyznaczenia sygnału zwrotnego z uwzględnieniem parametrów pręta
4. Możliwość wyznaczenia krzywych dyspersji dla pręta o zadanych właściwościach materiałowych
5. Możliwość kompensacji dyspersji sygnału wyjściowego.

Dodatkowo program daje możliwość wyznaczania krzywych wzbudzalności dla pręta i symulacji badania w układzie samowzbudnym (efekt sing-around).

## 1.2. Plan pracy

Praca podzielona jest na 6 rozdziałów. W rozdziale 1 przedstawiono krótki wstęp oraz założenia projektowe. W rozdziale 2 opisane są podstawowe pojęcia dotyczące propagacji fali w środowisku sprężystym. Podano definicję naprężenia oraz odkształcenia oraz opisano rodzaje fal sprężystych. Następnie przytoczone są informację o zjawisku dyspersji. Opisano przykładu kiedy możliwe jest analityczne wyznaczenie krzywych dyspersji oraz przykład gdzie nie jest to już możliwe. Na kolejnych stronach znajdują się metody numerycznego wyznaczania tych krzywych oraz możliwości wyznaczenia ich w badaniach doświadczalnych. Dwie ostatnie sekcje rozdziału skupione są na możliwościach wyznaczania krzywych wzbudzalności oraz efektu sing-around. Rozdział 3 przedstawia zagadnienia metody elementów skończonych, które zostały wykorzystane w aplikacji do obliczania modelu pręta. Opisane są kolejno funkcje kształtu, sposoby ich wyznaczania, obliczanie macierzy mas i sztywności elementu oraz agregacja macierzy globalnych. Dla wyznaczonego modelu przedstawiono kilka sposobów wyznaczenia rozwiązania w postaci przemieszczeń, oraz sposoby estymacji błędów rozwiązania i sprawdzenia czy rozwiązanie jest zbieżne. W rozdziale 4 opisano trzy metody kompensacji dyspersji, które zostały zaimplementowane w programie. Przytoczono pełne algorytmy, które są w nich wykorzystane oraz podano możliwości zastosowania wraz z wadami i zaletami. Rozdział 5 stanowi opis zbudowanej aplikacji oraz opisa środowiska programistycznego. Początek rozdziału zawiera instrukcję instalacji i konfiguracji interpretera Python oraz programu PyCharm, który został wykorzystany w projekcie. Dalsza część rozdziału zawiera pełny opis działania programu wraz z przytoczonymi przykładami wykorzystania. Opisane są kolejne kroki obliczeń dwóch głównych modułów aplikacji tj. budowania modelu wraz z wyznaczaniem krzywych dyspersji oraz kompensowania dyspersji z użyciem wybranej metody. Dodatkowym elementem jest możliwość symulowania efektu sing-around z

pomocą krzywych wzbudzalności. Rozdział 6 jest podsumowaniem efektów pracy przy projekcie. Opisano stan zrealizowania założeń oraz podano możliwości rozwoju projektu.

## 2. Wybrane zagadnienia propagacji fal w ośrodku sprężystym

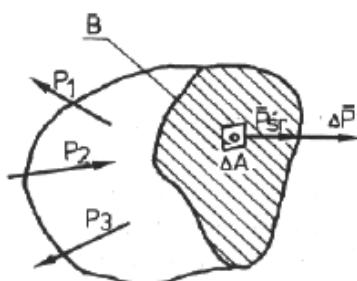
### 2.1. Liniowa teoria sprężystości

Liniowa teoria sprężystości jest mechaniką ciała stałego opartą na następujących założeniach:

- ciało jest wypełnione materią w sposób ciągły zarówno przed jak i po odkształceniu
- odkształcenia i przemieszczenia są bardzo małe
- spełniona jest zasada superpozycji
- ośrodek zachowuje się zgodnie z prawem Hooke'a
- siły działają na ciało w taki sam sposób przed odkształceniem jak i po odkształceniu

#### 2.1.1. Naprężenie

Naprężenie można zdefiniować jako miara sił wewnętrznych ciała w punkcie. Weźmy ciało przedstawione na Rys.2.x., na które działają siły zewnętrzne  $P_1$  i  $P_2$ . W płaszczyźnie przekroju wybieramy punkt B, w którego otoczeniu określamy pole  $dA$ . Stosunek sił jakimi oddziałują na siebie połówki ciała w tym punkcie przekroju, do pola  $dA$ , nazywamy naprężeniem ciała w punkcie B. Kierunek naprężenia będzie zgodny z kierunkiem działania siły przekrojowej w punkcie.



Rys. 2.1. Ciało pod wpływem sił zewnętrznych

Stana naprężenia w punkcie B oznacza ogólną naprężenie, które otrzymamy dla wszystkich możliwych przekrojów ciała przez ten punkt. W przypadku trójwymiarowego stanu

naprężenia, dla każdego przekroju wektor naprężenia będzie miał inny kierunek. Stan naprężenia można opisać przy pomocy tensora naprężen, dla układu kartezjańskiego danego wzorem:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

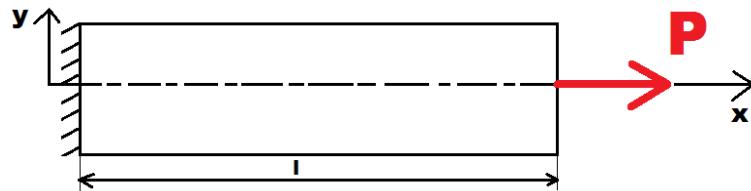
gdzie

$\sigma_{ii}$  – naprężenie normalne,  $i=(x, y, z)$

$\tau_{ij}$  – naprężenie styczne,  $i,j=(x, y, z)$ ,  $i \neq j$ ,  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

### 2.1.2. Odkształcenie i prawko Hooke'a

Pod wpływem naprężen ciało sprężyste ulega odkształceniu. Możemy wyróżnić odkształcenia liniowe  $\varepsilon_i$  oraz odkształcenia postaciowe  $\gamma_{ij}$ . Najprostszym przypadkiem odkształcenia liniowego jest rozciąganie pręta. Poniżej znajduje się rysunek pręta rozciąganej siłą  $P$ .



Rys. 2.2. Rozciąganie pręta

W takim przypadku odkształceniem wzdłużnym będziemy nazywać stosunek wydłużenia pręta do jego początkowej długości:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}, \quad (2.2)$$

z kolei odkształceniem poprzecznym nazywać będziemy stosunek zmiany średnicy przekroju do jego początkowej średnicy:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta d}{d}. \quad (2.3)$$

Odkształcenia te związane są zależnością:

$$\varepsilon_x = -\nu \varepsilon_y \quad (2.4)$$

gdzie

$\nu$  – współczynnik Poissona.

Współczynnik Poissona jest wielkością bezwymiarową. Określa on sposób w jaki odkształca się ciało i przyjmuje wartości z przedziału  $[-1, 1]$ . Dla popularnych w mechanice stopów metali przyjmuje zwykle wartości z przedziału  $[0.2, 0.4]$ . Wartości ujemne przyjmuje dla tak zwanych materiałów odwrotnych, które pod wpływem naprężenia zwiększą swoją objętość.

Dla przypadku prostego rozciągania zachodzi jeszcze jedna zależność. Opisuje ona związek pomiędzy naprężeniem i odkształceniem i nazywana jest prawem Hooke'a.

$$\sigma = E\varepsilon \quad (2.5)$$

gdzie

$E$  – moduł Younga.

Moduł Younga określa zależność odkształcenia liniowego i przyłożonego naprężenia. Jednostką moduły Younga jest paskal, a wartości podaje się w gigapasklach (GPa). Wartości dla stali wynoszą około 200 GPa, a dla aluminium około 70 GPa.

W przypadku trójwymiarowego rozkładu oksztalceń staje się zapis tensorowy. Tensor odkształcenia znajduje się poniżej:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

gdzie

$\varepsilon_{ii}$  – odkształcenie liniowe,  $i=(x, y, z)$

$\gamma_{ij}$  – odkształcenie postaciowe,  $i,j=(x, y, z)$ ,  $i \neq j$ ,  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

Dla takiego przypadku prawo Hooke'a przybiera bardziej skomplikowaną postać:

$$\varepsilon_x x = \frac{1}{E}(\sigma_x x - \nu(\sigma_y y + \sigma_z z)), \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.7)$$

$$\varepsilon_y y = \frac{1}{E}(\sigma_y y - \nu(\sigma_x x + \sigma_z z)), \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_z z = \frac{1}{E}(\sigma_z z - \nu(\sigma_x x + \sigma_y y)), \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (2.9)$$

$G$  – moduł Kirchhoffa

Moduł Kirchoffa opisuje zależność odkształcenia postaciowego od naprężenia stycznego występującego w materiale. Jednostką tego współczynnika jest pascal, a typowymi wartościami są dla stali 80 Gpa, dla aluminium 25,5 GPa.

Opisane wcześniej stałe materiałowe są powiązane równaniem:

$$E = 2G(\nu + 1) \quad (2.10)$$

## 2.2. Rodzaje fal sprężystych

Fale można podzielić ze względu na sposób w jaki propagują w materiale. Mogą to być fale podłużne lub poprzeczne. Fale takie propagują jeśli długość fali jest mniejsza lub bliska wymiarom ośrodka. Fale o długości przekraczającej wyraźnie przynajmniej jeden z wymiarów falowodu nazywamy falami prowadzonymi i mają one zupełnie inne własności. Do takich fal możemy zaliczyć np. fale Lamba. Fala Rayleigha z kolei propagują na powierzchniach, stąd ośrodek musi być ograniczony przynajmniej jedną płaszczyzną.

### 2.2.1. Fale podłużne

Fale podłużne to fale, w których kierunek propagacji jest równoległy z kierunkiem drgania cząstek. Tego typu fale mogą rozchodzić się w każdym ośrodku materialnym. Przykładem fali podłużnej jest fala dźwiękowa rozchodząca się w powietrzu, pokazana na Rys.2.1. Prędkość fali podłużnej w nieograniczonym ośrodku zależy od parametrów materiałowych ośrodka i dana jest wzorem:

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (2.11)$$

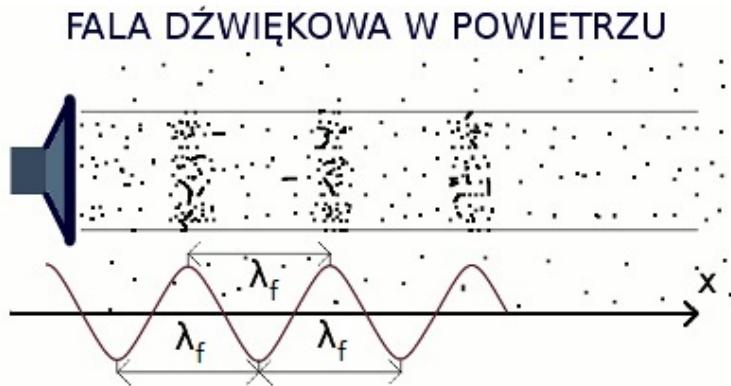
gdzie

$c_L$  – prędkość fali podłużnej

$\lambda, \mu$  – stałe Lamégo

$\rho$  – gęstość ośrodka

Długością fali  $\lambda_f$  nazywamy odległość między dwoma maksimami (lub minimami), które oznaczają maksymalne zagęszczenie (rozrzedzenie) cząstek w materiale.



Rys. 2.3. Przykład fali podłużnej

### 2.2.2. Fale poprzeczne

Fale poprzeczne propagują w kierunku prostopadłym do kierunku drgań cząstek. Przykładami takich fal są fale elektromagnetyczne, fale propagacji naprężeń w materiale stałym, czy fala na zamocowanym jednostronnie sznurze, pokazana na Rys.2.2. Prędkość fali poprzecznej w nieograniczonym ośrodku wyraża się wzorem:

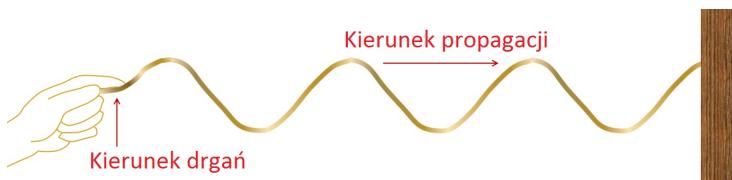
$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (2.12)$$

gdzie

$c_T$  – prędkość fali poprzecznej

$\mu$  – stała Lamégo

$\rho$  – gęstość ośrodka



Rys. 2.4. Przykład fali poprzecznej

### 2.2.3. Fale Rayleigha i Löva

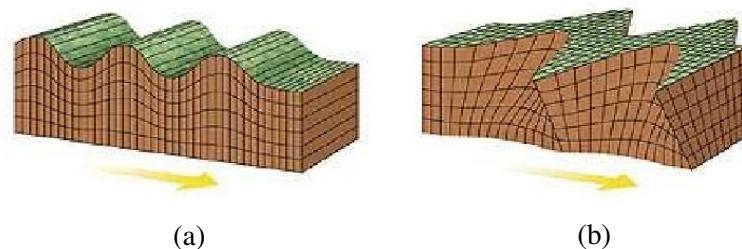
Opisane wcześniej fale propagują w nieograniczonych mediach. Fale Rayleigha oraz Löva są falami propagującymi w obszarze powierzchni ciał stałych. Dla fal Rayleigha drgania cząstek odbywają się równolegle oraz prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali, zataczając elipsy. Kierunek prostopadły jest normalny do płaszczyzny, na której fala propaguje. Prędkość fal Rayleigha dla metalu można wyrazić za pomocą współczynnika Poissona i prędkości fal poprzecznych:

$$c_R = \frac{0.87 + 1.12 \cdot \nu}{1 + \nu} \cdot c_T \quad (2.13)$$

gdzie

- $c_R$  – prędkość fali Rayleigha
- $c_T$  – prędkość fali poprzecznej
- $\nu$  – współczynnik Poissona

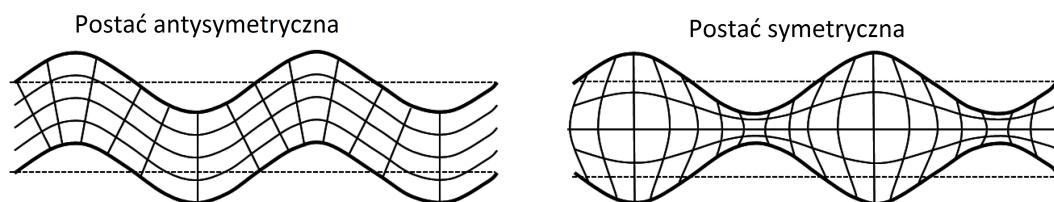
Fale Löva to fale, w których drgania zachodzą w kierunku prostopadłym do kierunku, ale równolegle do płaszczyzny propagacji. Takie fale są wykorzystywane przy badaniu układów wielowarstwowych. Są silnie dyspersyjne, co oznacza, że ich prędkość jest funkcją częstotliwości.



Rys. 2.5. Fale powierzchniowe: (a) fala Rayleigha, (b) fala Löva

## 2.2.4. Fale Lamba

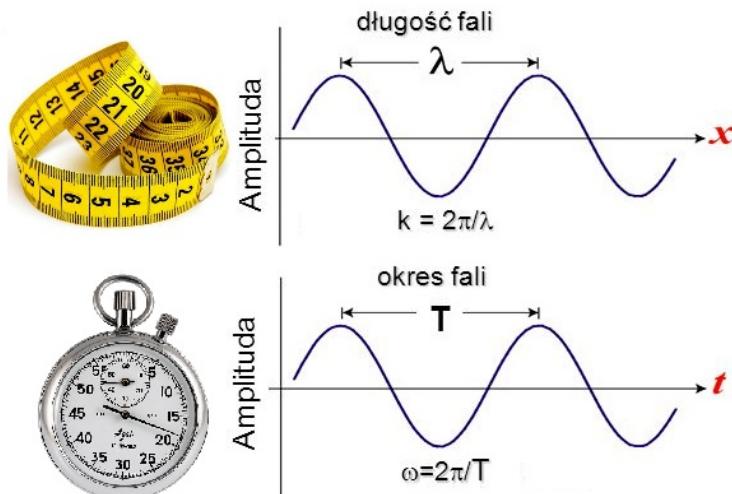
Ważnym typem fal, z racji na szerokie zastosowanie, są fale Lamba. Propagują one na cienkościennych elementach jak płyty, czy rury. Tego typu fale powstają na skutek złożenia dwóch fal Rayleigha, propagujących na płaszczyznach po obu stronach obiektu. Fale Lamba można podzielić na fale symetryczne, kiedy obie fale składowe propagują w tej samej fazie i antysymetryczne kiedy propagują w innych fazach. Prędkość fal Lamba zależy od częstotliwości, ze względu na dyspersyjny charakter.



Rys. 2.6. Fale Lamba

## 2.3. Zjawisko dyspersji

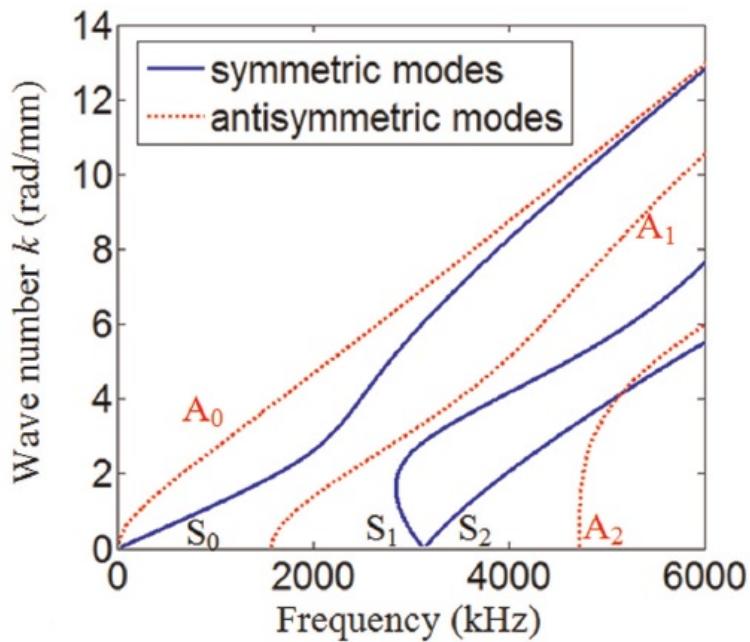
Dyspersja jest zjawiskiem zależności prędkości propagacji fali od jej częstotliwości. Częstotliwością fali nazywamy liczbę pełnych przebiegów (np. od maximum do maximum) w jednostce czasu. Jednostką częstotliwości jest herc (Hz). Wielkością równie często używaną jest częstotliwość kołowa dana wzorem  $\omega = 2\pi f$ . Jej jednostką jest radian na sekundę [rad/s]. Odpowiednikiem tego parametru dla wymiarów geometrycznych jest liczba falowa. Określa ona jak wiele długości fali zawiera fala w jednostce odległości. Jednostką liczby falowej jest radian na metr [rad/m].



Rys. 2.7. Częstotliwość  $\omega$  i liczba falowa  $k$

Kiedy mówimy o krzywych dyspersji, możliwe chodzić o zależności liczby falowej od częstotliwości, prędkości fazowej od częstotliwości lub prędkości grupowej od częstotliwości. Poniżej znajdują się przykładowe charakterystyki  $k(\omega)$  postaci fal Lamba dla aluminiowej płyty o grubości 1mm.

Na wykresach widać jedną rzeczą, ważną dla zastosowań fal prowadzonych - są one multimodalne. Z wykresów wynika, że w najkorzystniejszym do analizy przypadku propagują dwa mody, jeden symetryczny i jeden antysymetryczny. Wraz ze wzrostem częstotliwości propagującej fali pojawiają się dodatkowe jej postaci, co znacznie utrudnia analizę danych z przebiegów. Jednym ze sposobów ograniczania liczby modów, jest wprowadzanie wymuszeń od niskich częstotliwościach.

Rys. 2.8. Krzywe  $k(\omega)$ 

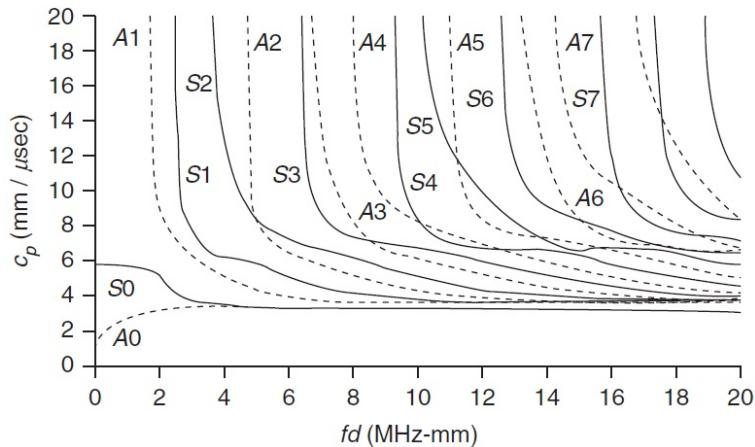
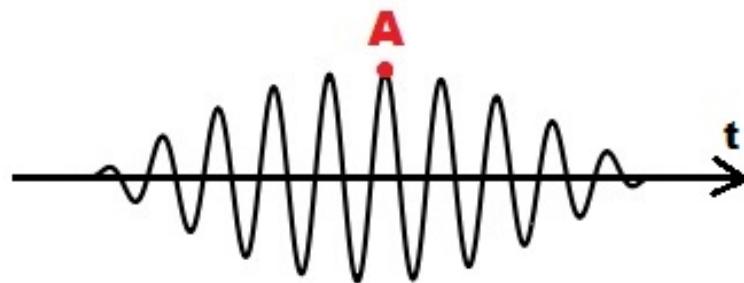
### 2.3.1. Prędkość fazowa i grupowa

Prędkość fazowa określa jak szybko przemieszcza się punkt fali o stałej fazie. Dla fali sinusoidalnej  $u(x,t)=\sin(kx-\omega t)$  można wyznaczyć zależność na prędkość fazową w następujący sposób:

$$kx - \omega t = \text{const} \Rightarrow \frac{d(kx - \omega t)}{dt} = 0 \Rightarrow k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} \quad (2.14)$$

Jak widać dla skończonej wartości  $\omega$  i  $k$  dążącego do zera, prędkość fazowa rośnie do nieskończoności. Dla przypadku pierwszych modów, gdzie zarówno  $k$  jak i  $\omega$  zmierzają do zera, sytuacja wygląda różnie. Poniżej znajduje się przykładowy wykres zależności prędkości fazowej od iloczynu częstotliwości i grubości materiału dla cienkościennej rury. W przypadku fal prowadzonych dla elementów cienkościennych, często wykresy charakterystyki z zaznaczeniem wpływu grubości ściany. Na wykresie widać, że wszystkie mody poza pierwszymi dwoma dążą prawostronnie do nieskończoności. Pozostałe dwa zachowują się odmiennie - jeden wykres dąży do 0 (postać antysymetryczna), a drugi do wartości skończonej (postać symetryczna).

Jeśli fala składa się z więcej niż jednej składowej sinusoidalnej, które mają różne prędkości, należy określić jeszcze prędkość grupową. Prędkość każdej z pojedynczych składowych, będzie jej prędkością fazową. Prędkość grupowa dotyczy sygnału, złożonego ze wszystkich składowych. Można ją prezentować jako prędkość jakiegoś punktu na wykresie sygnału, np. maximum, jak na poniższym rysunku.

Rys. 2.9. Krzywe  $V_p(\omega)$ 

Rys. 2.10. Przykładowy sygnał. Prędkość punktu A jest prędkością grupową

Weźmy sygnał złożony z kilku sinusoid o zbliżonej częstotliwości. Fazę każdego sygnału można zapisać jako  $\omega_i t - k_i T + \phi_i$ , gdzie  $i$  oznacza numer składowej. Założymy, że fazy tych sygnałów są równe w punkcie  $x=0, t=0$ . Wynika stąd, że  $\phi_i$  są niezależne od  $\omega$ . Punkt  $x=0, t=0$  będzie maksimum, ponieważ wszystkie składowe zsumują się w tym punkcie. Aby znaleźć kolejny punkt z takim maximum, należy określić gdzie fazy po raz kolejny będą sobie równe. Punkt, w którym to zjawisko zajdzie musi być niezależny od  $\omega$ , w otoczeniu pewnego  $\omega$ . Symbolicznie można to zapisać jako:

$$\frac{d(\omega t - kx - \phi)}{d\omega} = 0 \Rightarrow t - \frac{dk}{d\omega}x = 0 \Rightarrow \frac{x}{t} = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.15)$$

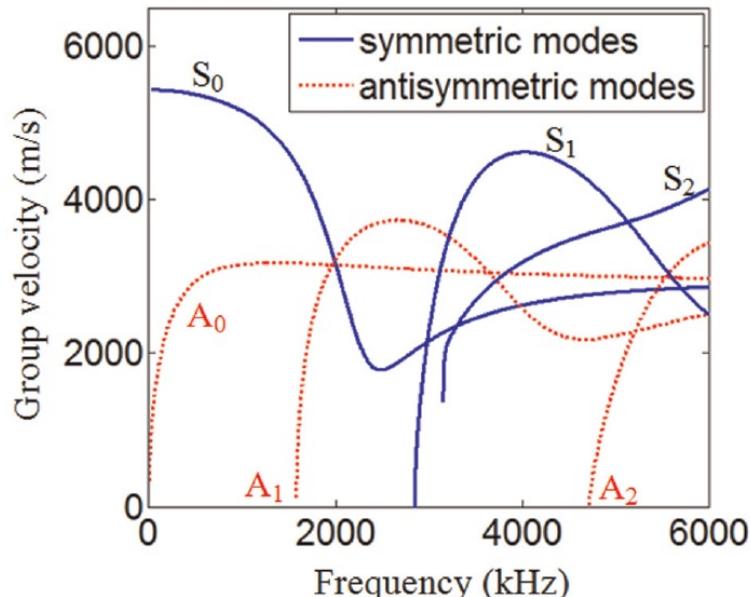
Maximum sygnału będzie więc w każdym punkcie  $x, t$  spełniającym powyższą zależność. Prędkość grupowa fali jest więc równa:

$$V_g = \frac{dw}{dk} \quad (2.16)$$

Z samego faktu istnienia takiej zależności nie wynika, że w sygnale znajdzie się jakiś charakterystyczny punkt, propagujący z taką prędkością. Wynika z niej natomiast, że jeśli takowy punkt będzie, to będzie się poruszał z prędkością grupową. Należy jeszcze

wspomnieć o wyznaczaniu prędkości grupowej sygnału o składowych, o różnych wartościach  $\omega$ . W takim przypadku należy prędkość grupową wyznaczyć dla wartości  $\omega$  sygnału dominującego. Dominujący sygnał można znaleźć przy pomocy przekształcenia Fouriera.

Poniżej znajdują się przykładowe krzywe, przedstawiające prędkość grupową dla fal Lamba, dla cienkościennej płyty aluminiowej.



Rys. 2.11. Wykres prędkości grupowej  $V_g(\omega)$

### 2.3.2. Analityczne wyznaczanie krzywych dyspersji

Zależności dyspersyjne są trudne, a często niemożliwe do wyznaczenia w sposób analityczny. Dla prostych przypadków rozwiązań analitycznych są znane, a kilka z nich jest poniżej opisanych w celu lepszego wyjaśnienia zjawiska dyspersji. Pierwszym przypadkiem będzie model nieskończoność długiej, napiętej sprężyny, przedstawionej na rysunku poniżej.

gdzie

$ds$  – długość sprężyny

$\theta$  – kąt przyłożenia siły zewnętrznej

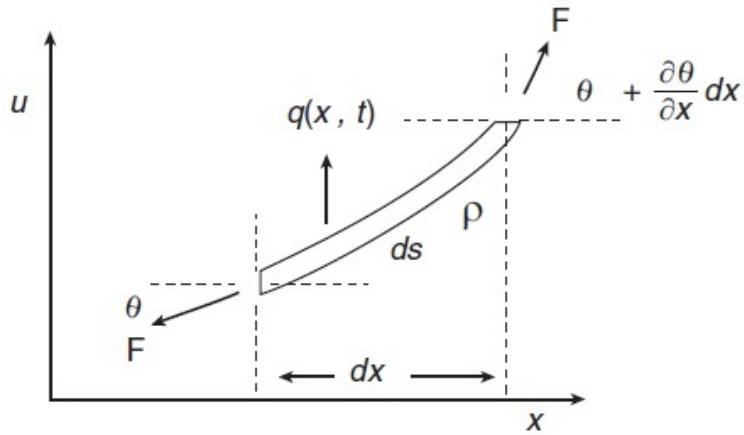
$F$  – siły wewnętrzne

$q$  – siła oddziaływania sprężyny na jednostkę długości ugięcia

$\rho$  – masa sprężyny na jednostkę długości

Korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona, zapisujemy równanie ruchu układu:

$$-F\sin\theta + F\sin(\theta + \frac{\partial\theta}{\partial x}dx) + qds = \rho ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.17)$$



Rys. 2.12. Nieskończenie krótki odcinek napiętej sprężyny

Założymy dodatkowo, że:

$$ds \approx dx, \sin\theta = \theta \text{ i } \theta = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (2.18)$$

To pozwala uprościć równanie:

$$-F\theta + F(\theta + \frac{\partial\theta}{\partial x}dx) = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

$$F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.20)$$

Jeśli założymy brak siły zewnętrznej, to otrzymujemy proste równanie falowe:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{F}{\rho}} \quad (2.21)$$

gdzie

$c_0$  – prędkość fali.

Przyjmijmy rozwiązanie w postaci:

$$u(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}. \quad (2.22)$$

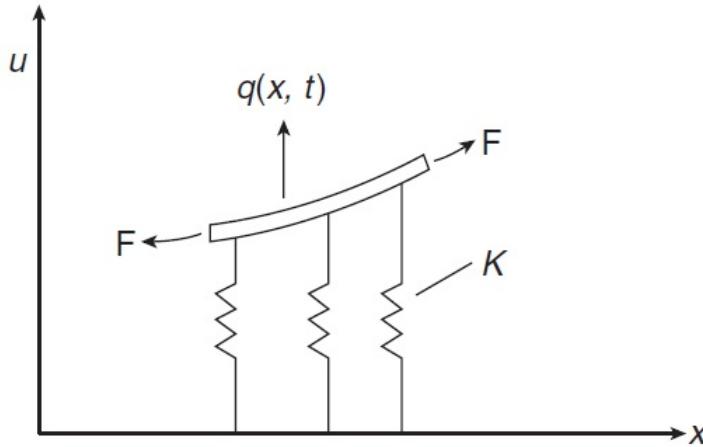
Jeśli wstawimy je do równania falowego to otrzymamy zależność dyspersyjną:

$$\omega^2 = c_0^2 k^2. \quad (2.23)$$

Jest to przypadek liniowej zależności  $k(\omega)$ , a więc dyspersja fali nie zachodzi. W takim przypadku prędkość fazowa, jest równa prędkości grupowej:

$$V_p = \frac{\omega}{k} = \frac{d\omega}{dk} = V_g \quad (2.24)$$

Prosta modyfikacja układu ze sprężyną, powoduje skomplikowanie zależności dyspersyjnej.



**Rys. 2.13.** Nieskończanie krótki odcinek napiętej sprężyny na sprężystym podłożu

Przyjmijmy siłę  $q = -Ku(x, t)$ , co prowadzi do równania równowagi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{K}{F}u = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.25)$$

Ponownie założymy rozwiązanie w postaci  $u(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$  i podstawmy je do równania równowagi. Prowadzi to do zależności:

$$\left( -k^2 - \frac{K}{F} + \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) e^{i(kx-\omega t)} = 0. \quad (2.26)$$

Równanie to jest nazywane równaniem charakterystycznym (lub dyspersyjnym). Rozwiązaniem jest:

$$-k^2 - \frac{K}{F} + \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0. \quad (2.27)$$

Zależność  $k(\omega)$  przyjmuje postać:

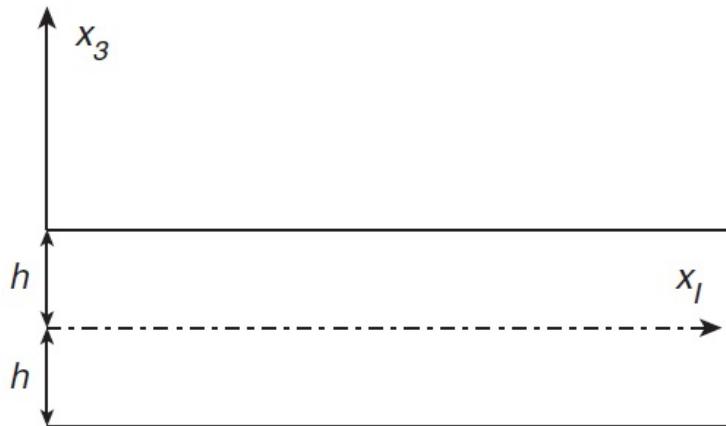
$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{K}{F}. \quad (2.28)$$

Podstawiając  $k = \frac{\omega}{c_p}$ , otrzymujemy :

$$c_p = \sqrt{c_0^2 \left( \frac{1}{1 - \frac{c_0^2 K}{\omega^2 F}} \right)}. \quad (2.29)$$

Jak widać w takim przypadku prędkość fazowa jest zależna od częstotliwości, a więc będzie zachodzić dyspersja fali.

Kolejnym problemem wartym wspomnienia, jest problem propagacji fal Lamba w cienkiej, nieskończonej płycie. Płyta wraz z przyjętym układem współrzędnych znajduje się poniżej.



Rys. 2.14. Nieskończona płyta

Jest kilka metod rozwiązywania takiego zagadnienia, ale nie są opisane one w tej pracy (metoda potencjałów, metoda fal cząstkowych). Jeśli przyjmiemy zerowe naprężenia na płaszczyznach zewnętrznych jako warunki początkowe, to związki dyspersyjne przyjmują zależności:

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{4k^2pq}{(q^2 - k^2)^2} \quad (2.30)$$

dla postaci symetrycznych oraz

$$\frac{\tan(qh)}{\tan(ph)} = -\frac{(q^2 - k^2)^2}{4k^2pq} \quad (2.31)$$

dla postaci niesymetrycznych

gdzie

$$p^2 = \frac{\omega^2}{c_L^2} - k^2, \quad a \quad q^2 = \frac{\omega^2}{c_T^2} - k^2 \quad (2.32)$$

$c_T$  – prędkość fali poprzecznej

$c_L$  – prędkość fali podłużnej

Równania te nazywają się równaniami Rayleigha-Lamba i są nieroziwiązywalne w sposób analityczny. Jest to przykład bardziej skomplikowanego modelu, gdzie możliwe jest wyznaczenie związków  $k$  i  $\omega$ , ale do wykreślenia krzywych dyspersji konieczne jest zastosowanie metod numerycznych.

### 2.3.3. Numeryczne wyznaczanie krzywych dyspersji

Pierwszym przypadkiem numerycznego wyznaczania krzywych dyspersji, jest rozwiązanie równań Rayleigha-Lamba przedstawionych w poprzedniej sekcji. Zakładamy, że interesują nas tylko rozwiązania rzeczywiste, które pojawią się jeśli k przyjmie wartości rzeczywiste bądź urojone (występuje tylko czynnik  $k^2$ ).

Poniżej znajdują się równania Rayleigha-Lamba w postaci ułatwiającej proponowany sposób rozwiązania:

$$\frac{\tan(qh)}{q} + \frac{4k^2 p \tan(ph)}{q^2 - k^2} = 0 \quad (2.33)$$

$$q \tan(qh) + \frac{(q^2 - k^2)^2 \tan(ph)}{2k^2 p} = 0. \quad (2.34)$$

Rozwiązać równanie możemy według przedstawionego algorytmu.

1. Wybierz iloczyn  $(\omega h)_0$ .
2. Wybierz początkową estymatę prędkości fazowe  $(c_p)_0$  (a pośrednio też  $k$ ).
3. Oblicz znak lewych stron równań R-L.
4. Wybierz kolejną wartość prędkości fazowej  $(c_p)_1 > (c_p)_0$  i policz znaki lewych stron jeszcze raz.
5. Powtarzaj kroki 3 i 4 aż znaki się zmienią. Oznaczać to będzie, że pierwiastek równania znajduje się pomiędzy ostatnio wybranymi prędkościami. Założymy, że jest to pomiędzy  $(c_p)_n$  i  $(c_p)_{n+1}$ .
6. Wykorzystaj jakiś algorytm iteracyjny do znalezienia pierwiastka  $c_p$  z odpowiednią dokładnością.
7. Po znalezieniu pierwiastka, kontynuuj wyszukiwanie kolejnych pierwiastków dla założonego  $(\omega h)_0$ , powtarzając kroki 2-6.
8. Wybierz kolejną wartość  $\omega h$  i wykonaj dla niej kroki 2-7.

W ten sposób łatwo wyznaczyć krzywe dyspersji, ale należy zaznaczyć, że równania dyspersyjne zostały obliczone analitycznie dla konkretnego przypadku struktury, jaką jest płyta. Metody numeryczne ograniczają się w tym przypadku do rozwiązania wyznaczonych równań. Możliwość ogólniejszego podejścia do badań numerycznych, dla szerokiego wachlarza struktur daje metoda elementów skończonych.

Metoda ta daje możliwości dokładnego przewidzenia odpowiedzi dynamicznych, dla złożonych układów mechanicznych. Jeśli założymy przypadek małych odkształceń, to problem można zapisać w postaci równania różniczkowego:

$$M\ddot{u} + Ku = f^{ext} \quad (2.35)$$

gdzie

- $M$  – macierz mas układu
- $K$  – macierz sztywności układu
- $u$  – przemieszczenia punktów układu
- $f^{ext}$  – wektor sił zewnętrznych

Sposobem wyznaczenia krzywych dyspersji z tak określonego układu, może być rozwiązanie równania tj. znalezienie pola przemieszczeń dla wszystkich węzłów w dyskretnych chwilach czasowych, a następnie obliczenie wielowymiarowego przekształcenia Fouriera otrzymanego sygnału.

Równanie można rozwiązać na przykład z wykorzystaniem centralnej formuły różnicowej dla  $ii$ :

$$\ddot{x} = \frac{u^{t+1} - 2u^t + u^{t-1}}{\Delta t^2}. \quad (2.36)$$

Po podstawieniu otrzymujemy zależność:

$$\frac{1}{\Delta t^2} M(u^{t-1} - 2u^t + u^{t-1}) + Ku^t = f^t \quad (2.37)$$

$$u^{t+1} = \Delta t^2 M^{-1} (f^t - Ku^t) + 2u^t - u^{t-1} \quad (2.38)$$

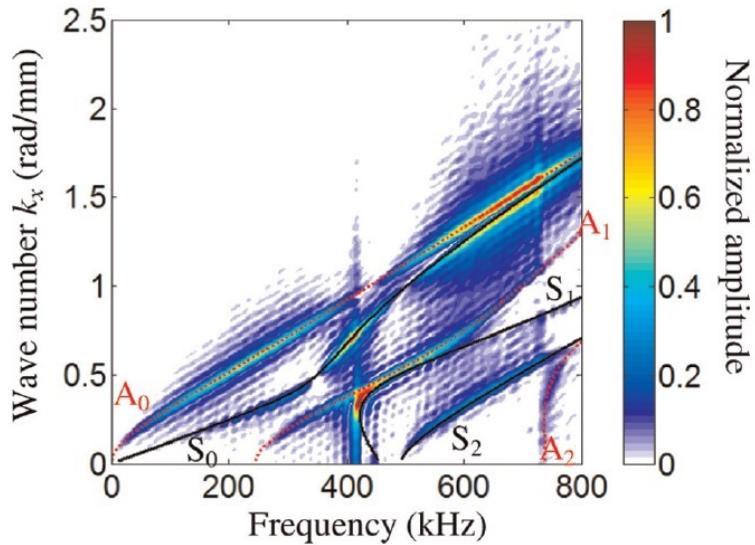
gdzie  $t$  oznacza obecną chwilę czasową, a  $t + 1$  chwilę kolejną. Operacja odwracania macierzy mas jest kosztowna obliczeniowo. Można przyśpieszyć obliczenia przez zastosowanie skupionej macierzy mas (wyrazy niezerowe tylko na głównej diagonali).

Jeśli interesuje nas propagacja tylko w jednym kierunku, to dla obliczonego sygnału  $u[m, n]$  (m - liczba kroków czasowych  $\Delta t$ , n - liczba kroków geometrycznych  $\Delta x$  w kierunku x) przekształcenie Fouriera można obliczyć według wzoru:

$$U[p, q] = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} u[k, l] e^{-i2\pi(-p\frac{k}{m} + q\frac{l}{n})} \quad (2.39)$$

Mając dyskretną postać przekształcenia Fouriera można wykreślić krzywe dyspersji, wyznaczając dla każdej próbki wartość częstotliwości i liczby falowej. Można to zrobić wiedząc, że częstotliwość zawiera się w przedziale  $[0, \frac{1}{2\Delta t}]$ , a liczba falowa  $[0, \frac{1}{2\Delta x}2\pi]$ . Przykładowe krzywe przedstawione są na rysunku 2.15.

Innym sposobem jest symulacja układu dla wymuszeń harmonicznych o ustalonych częstotliwościach, w których chcemy wyznaczyć krzywe. Jako przykład rozpatrzmy jednorodny pręt. Dla przypadku pręta wymuszanego na jednej płaszczyźnie przekroju, dane



Rys. 2.15. Krzywe dyspersji wyznaczone przy pomocy dwuwymiarowego DFT

należy zebrać przed odbiciem fali od swobodnego końca pręta, tak aby sygnał propagował tylko w jednym kierunku. W liniach równoległych do osi, obliczamy pola prędkości przemieszczenia punktów. Może to być też pole przemieszczeń lub naprężeń, ale pole prędkości jest stosunkowo łatwe do wyznaczenia. Znając już prędkości dla wszystkich punktów w jednej linii, w chwili  $t$ , możemy wyznaczyć widmo otrzymanego sygnału. Następnie z widma sygnału odczytujemy liczby falowe, dla których powstały widoczne piki. Pik dla największej liczby falowej dotyczy pierwszego modu, a każdy kolejny, z coraz mniejszymi liczbami falowymi, modów kolejnych.

Pole prędkości można wyznaczyć na podstawie różnicowych formuł centralnych 2.40 oraz 2.41.

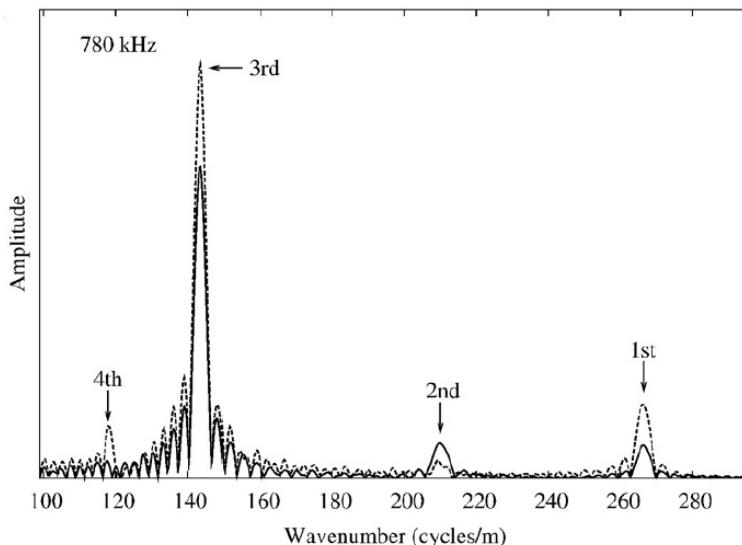
$$\dot{u}^{t+1} = \dot{u}^n + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}^n + \ddot{u}^{n+1}) \quad (2.40)$$

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t(\dot{u}^n + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}^n) \quad (2.41)$$

Założymy, że znamy pełne rozwiązanie w chwili  $t$ . Przesunięcie w chwili  $t+1$  możemy więc obliczyć z zależności 2.41. Następnie podstawiamy wynik do równania 2.35 i obliczamy przyspieszenie w chwili  $t+1$ . Ostatecznie korzystając z formuły 2.40 możemy wyznaczyć prędkość w chwili  $t+1$ .

Przykładowe widmo, z którego możemy odczytać liczby falowe czterech modów znajduje się na rysunku 2.16. Jak widać nie wszystkie liczby falowe da się wykryć przy pomocy danych z jednej linii, więc niezbędne jest prowadzenie obliczeń dla kilku różnych.

Wadą tego sposobu jest konieczność prowadzenia obliczeń dla każdej częstotliwości, dla jakiej chcemy mieć punkty krzywych dyspersji. Jedne przebiegi dają nam tylko jeden



Rys. 2.16. Widmo sygnału prędkości na liniach równoległych do osi pręta

punkt na każdej krzywej. Fakt prowadzenia obliczeń tylko w liniach równoległych do osi pręta, ogranicza dodatkowo obszar propagujących fal do fal podłużnych.

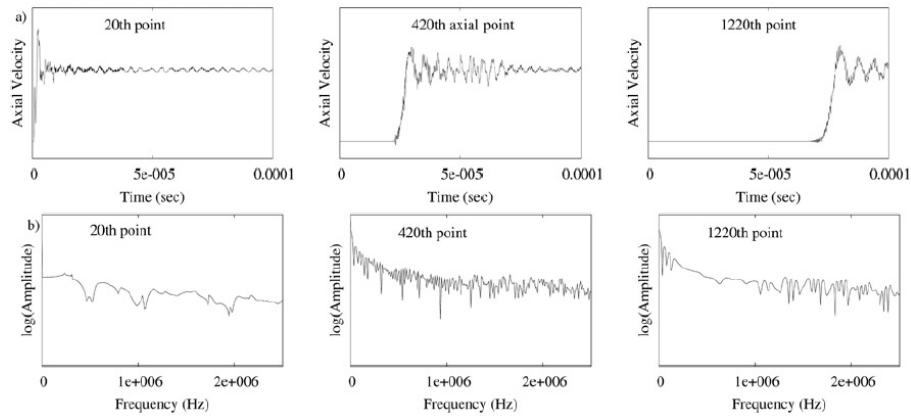
Sposobem zmniejszenia liczby symulacji jakie trzeba przeprowadzić jest symulacja z wymuszeniem szerokopasmowym. Pozwala to na uzyskanie informacji o krzywych dyspersji, dla częstotliwości zawierających się w wymuszającym sygnale. Pojawia się jednak kilka dodatkowych kroków jakie trzeba wykonać, aby uzyskać liczby falowe modów dla poszczególnych częstotliwości.

Aby uzyskać dane do wykreszenia krzywych dyspersji, należy obliczyć przestrzenny rozkład prędkości na liniach równoległych do osi dla wszystkich częstotliwości. W tym celu trzeba wykonać następujące czynności.

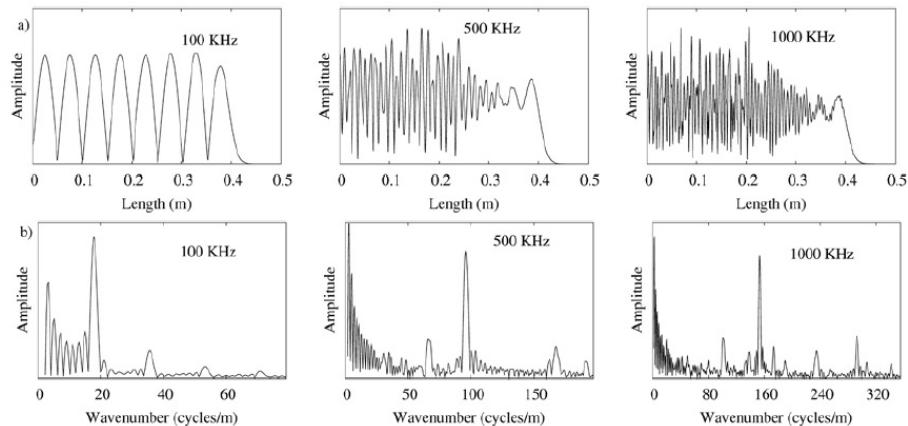
1. Wyznaczyć odpowiedzi czasowe dla każdego punktu na interesującej nas lini równoległej do osi pręta.
2. Obliczyć transformaty Fouriera tych sygnałów
3. Z widma sygnału w każdym punkcie pobrać informacje o amplitudzie dla kolejnych częstotliwości. Na tej podstawie odtworzyć amplitudowy przebieg sygnału na całej linii dla każdej interesującej nas częstotliwości.
4. Dla obliczonych w pkt. 3 przebiegów, obliczyć transformaty Fouriera i z wykresu odczytać wartości liczby falowej, dla wybranych częstotliwości.

Rysunki 2.17 oraz 2.18 przedstawiają kolejne kroki postępowania, dla odpowiedzi na wymuszenie krokiem jednostkowym preta zbudowanego z 1601 węzłów na długości jednej lini.

Ostatnia przedstawiona tutaj metoda skupia się, na rozwiązaniu zagadnienia własnego modelu wyznaczonego z pomocą MES. Tym razem zakładając będziemy wybraną



Rys. 2.17. a) Odpowiedzi na szerokopasmowe wymuszenie w wybranych punktach jednej lini b) Przekształcenia Fouriera odpowiedzi czasowych

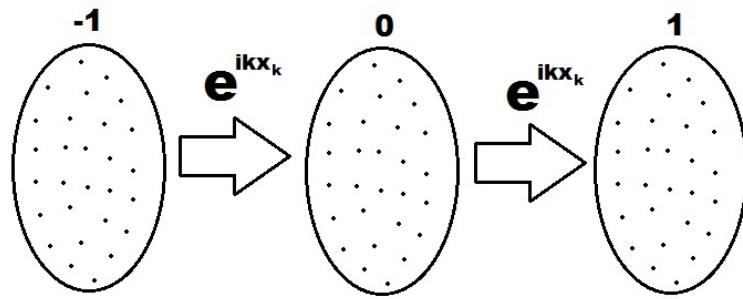


Rys. 2.18. a) Odtworzony sygnał amplitudowy na długości pręta w jednej linii b) Przekształcenie Fouriera odtworzonych sygnałów

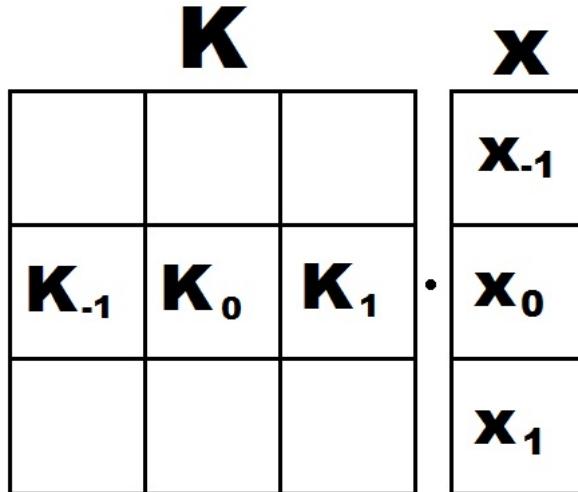
liczbę falową i dla niej obliczać częstotliwości poszczególnych modów. Po raz kolejny za przykład weźmy pręt. Pręt dzielimy na komórki, które będą się składać z kolejnych płaszczyzn, na których znajdują się węzły. Znając odległość płaszczyzn i wybierając liczbę falową, możemy określić przesunięcie fazowe fali pomiędzy płaszczyznami. Sytuacja przedstawiona jest na rysunku 2.19.

W liniowych systemach do opisu popagacji fali wystarcza jedna komórka i siły wewnętrzne pochodzące od komórek sąsiednich. W przypadku braku sił zewnętrznych i przy założeniu skupionej macierzy mas, równanie układu można zapisać w postaci 2.42. Rysunek 2.20 przedstawia sposób wyznaczania macierzy sztywności dla komórki środkowej, z uwzględnieniem zależności z komórkami sąsiednimi.

$$M_0 \ddot{x}_0 + \sum_{p=-1}^1 K_p x_p = 0 \quad (2.42)$$



Rys. 2.19. Kolejne komórki pręta



Rys. 2.20. Wyznaczanie macierzy sztywności środkowej komórki z uwzględnieniem zależności z komórkami sąsiednimi

Uwzględniając wszystkie informacje równanie układu można zapisać jako 2.43. Podstawiając dodatkowo zależności  $\ddot{x} = x\omega^2$ ,  $M_{sys} = M_0$  oraz  $K_{sys} = K_{-1}e^{-ikx_k} + K_0 + K_1e^{ikx_k}$  otrzymujemy równanie 2.44.

$$M_0\ddot{x}_0 + K_{-1}x_0e^{-ikx_k} + K_0x_0 + K_1x_0e^{ikx_k} = 0 \quad (2.43)$$

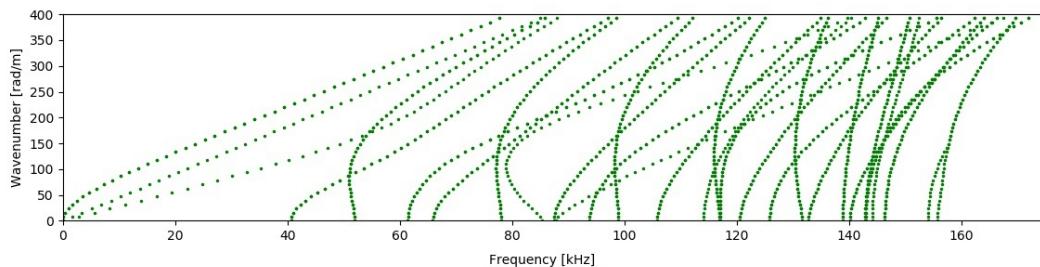
$$(M_{sys}\omega^2 + K_{sys})x_0 = 0 \quad (2.44)$$

Ostatecznie rozwiązując zagadnienie własne dla pary macierzy  $M_{sys}$  i  $K_{sys}$  otrzymujemy kwadraty częstości własnych układu dla założonego  $k$ . Każda z częstości należy do jednego modu krzywych dyspersji.

Wadami tej metody są konieczność prowadzenia obliczeń dla każdej liczby falowej, którą chcemy uwzględnić w wynikach, oraz brak dokładnej informacji, która częstość własna należy do której postaci fali.

Dużą zaletą z kolei jest fakt, że wyznaczamy jedną metodą krzywe dyspersji dla fal podłużnych i poprzecznych.

Przykładowe krzywe dyspersji uzyskane w ten sposób przedstawia rysunek 2.21.



**Rys. 2.21.** Krzywe uzyskane przez wielokrotne rozwiązywanie zagadnienia własnego pręta

### 2.3.4. Eksperimentalne wyznaczanie krzywych dyspersji

Eksperimentalne badania fal prowadzonych przeprowadza się, wzbudzając odpowiednio obiekt, a następnie zbiera się dane o powstałej fali w innych punktach lub w tym samym miejscu po odbiciu fali. Zebrane dane analizuje się za pomocą algorytmów, w których duże znaczenie ma przekształcenie Fouriera.

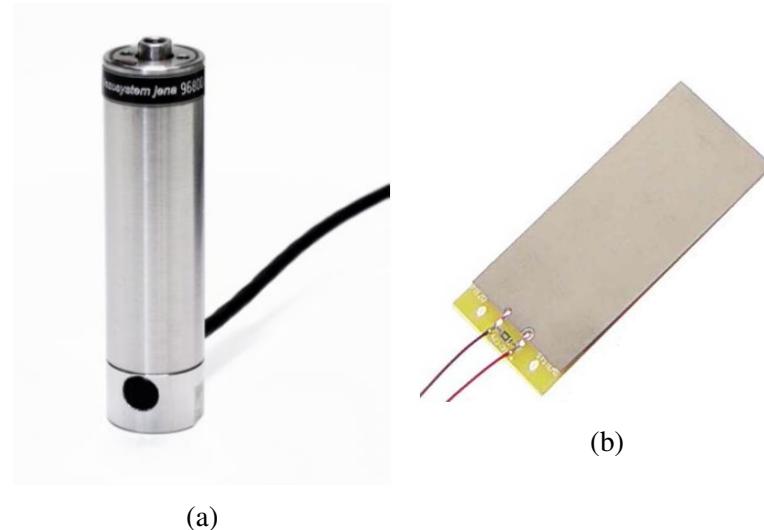
Jako wzbudniki fal prowadzonych często stosowane są przetworniki piezoelektryczne (na przykład z ceramiką PZT). Proste zjawisko piezoelektryczne z jakiego korzystają takie przetworniki, pozwala przekształcić energię elektryczną na energię mechaniczną. Efekt odwrotny pozwala zbierać informację o energii odkształcenie w materiale i sygnał mechaniczny przekształcić w elektryczny.

Materiały piezoelektryczne znalazły szerokie zastosowanie ze względu na dobre parametry mechaniczne, odporność na wiele substancji chemicznych oraz bardzo duże możliwości kształtowania przetworników. Wzbudniki i sensory piezoelektryczne często występują jako cienkie fragmenty materiału piezoelektrycznego, które można wykonać w dowolnym kształcie. W przypadku kiedy chcemy uzyskać większą amplitudę wzbudzenia, stosuje się stosey stworzone z wielu warstw piezoelektryka.

Obecna ilość dostępnych na rynku rozwiązań pozwala na dobranie odpowiedniego przetwornika do niemal każdego projektu bazującego na niskich częstotliwościach. Podczas analizy rozwiązań komercyjnych okazało się, że duża część takich przetworników posiada ograniczenia działania do kilku kHz. Jest to najczęściej zbyt niska częstotliwość, nawet w przypadku badania wyłącznie modów podstawowych. Dostępne są też rozwiązań dla częstotliwości do nawet kilkuset kHz, co w przypadku fal prowadzonych może stanowić wystarczającą wartość.

Przykłady przetworników piezoelektrycznych w formie płytka oraz stoseu znajdują się na rysunku 2.22.

Innym sposobem badań jest wykorzystanie techniki laserowej. Za pomocą wiązki lasera możliwe jest wzbudzenie fali sprężystych w materiale. Na szczególną uwagę zasługuje możliwość wzbudzenia fali krótkim impulsem, którego widmo będzie miała bardzo

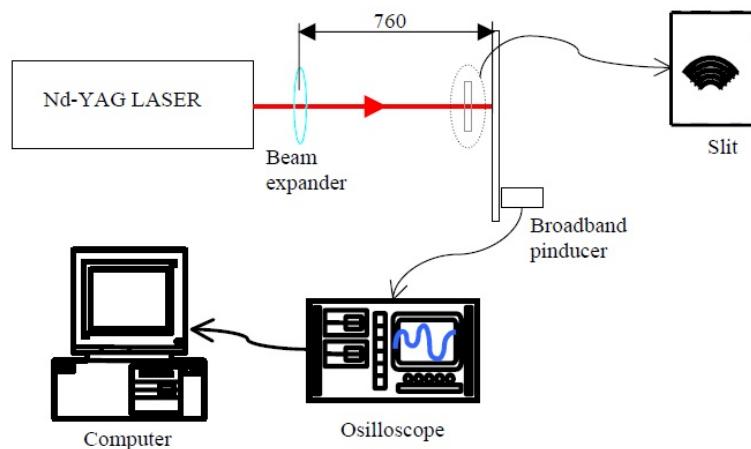


**Rys. 2.22.** Przetworniki piezoelektryczne: (a) w formie sotsu, (b) w formie płytki

duży zakres częstotliwości. Sygnał taki możemy porównać do delty Diraca, dla której widmo ma stałą amplitudę.

Z pomocą lasera możemy wykonywać także pomiary drgań materiału. Posłużyć może do tego na przykład interferometr laserowy, wykorzystujący efekt Dopplera. Detekcja jest jednak ograniczona do fal powierzchniowych. Atutem takiego pomiaru jest możliwość wykonania go dla wielu punktów na badanym obiekcie. Dzięki temu możemy uzyskać przestrzenny obraz propagacji fali.

Przykładowe stanowisko do badania płyt za pomocą wymuszenia laserem przedstawia rysunek 2.23.



**Rys. 2.23.** Przykładowy układ stanowiska do badania fal Lamba w cienkiej płycie

### 3. Wykorzystywane zagadnienia metody elementów skończonych

Metoda elementów skończonych jest zaawansowanym sposobem rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych. Jest ona szczególnym przypadkiem metody Galerkina. Nazwa pochodzi od nazwiska Borisa Grigoriewicza Galerkina, który jako pierwszy przeprowadził usystematyzowane studia na temat tego typu metod. Za pomocą tej metody można rozwiązać skomplikowane zadania dziedzin takich jak mechanika ciała stałego, mechanika płynów czy teoria pola elektromagnetycznego.

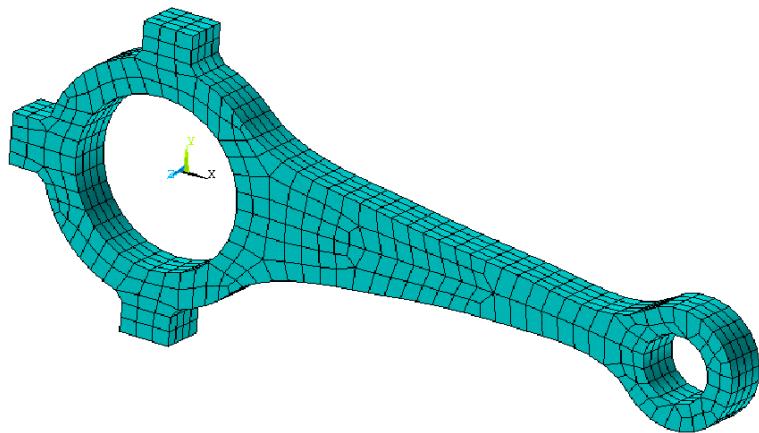
#### 3.1. Rozwiązywanie zadań z pomocą MES

W wytrzymałości materiałów poszukujemy zwykle sił działających w poporach konstrukcji i naprężeń wewnętrz jej konkretnych elementów. Innym podejściem jest znalezienie pola przemieszczeń dla każdego punktu konstrukcji. W jednym i drugim przypadku znalezienie niewiadomych jest osiągalne wyłącznie dla mało skomplikowanych konstrukcji.

Metoda elementów skończonych bierze swoją nazwę od wydzielanych fragmentów konstrukcji, które są właśnie elementami skończonymi. Elementy tworzymy na siatce węzłów, które są punktami wewnętrz lub na brzegach konstrukcji. Węzły są także punktami wspólnymi sąsiadujących elementów. Rozwiązywanie opiera się na znalezieniu przemieszczenia węzłów i na tej podstawie obliczenia rozwiązania we wszystkich punktach wewnętrz elementów. Kolejne etapy rozwiązywania zadania za pomocą MES przedstawione są poniżej. Rysunek 3.1 przedstawia przykład obiektu, który został zdyskretyzowany za pomocą elementów skończonych.

1. Generacja siatki węzłów.
2. Budowa elementów skończonych na stworzonej siatce.
3. Wyznaczanie macierzy mas i sztywności dla każdego elementu (macierze lokalne).
4. Agregacja macierzy mas i sztywności dla całej konstrukcji (macierze globalne).
5. Wprowadzenie wektora obciążień.

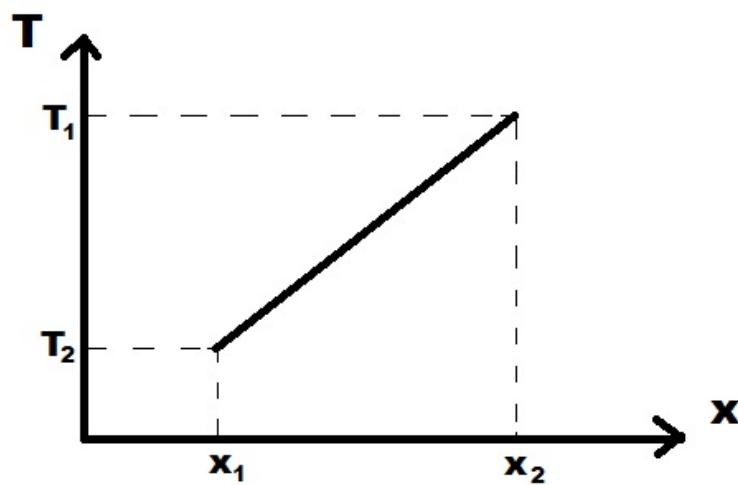
6. Wprowadzenie warunków brzegowych. Mogą to być siły czynne (modyfikacja wektora obciążen), naprężenia początkowe czy przemieszczenia wskazanych węzłów.
7. Rozwiążanie wyznaczonego liniowego równania różniczkowego  $M\ddot{x} + Kx = F$  - znalezienie przemieszczeń węzłów.
8. Wyznaczanie odkształceń i naprężen.
9. Wyznaczenie reakcji w podporach (węzłach, dla których założono przemieszczenie)



Rys. 3.1. Przykład dyskretyzacji obiektu za pomocą elementów skończonych

## 3.2. Funkcje kształtu

Weźmy metalowy pręt o długości  $L$ . W punkcie  $x_1$  na pręcie przykładamy temperaturę  $T_1$ , a w punkcie  $x_2$  temperaturę  $T_2$ . Przewidujemy, że po nieskończeniu długim czasie rozkład temperatury w pręcie pomiędzy tymi punktami będzie liniowy (Rys. 3.2).



Rys. 3.2. Temperatury pomiędzy punktami pręta

Temperaturę pomiędzy tymi punktami możemy przedstawić funkcją 3.1.

$$T(x) = a_0 + a_1 x, \quad \text{dla } x \in [x_1, x_2] \quad (3.1)$$

Można wyznaczyć współczynniki funkcji liniowej mając dwa jej punkty.

$$a_1 = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \quad (3.2)$$

$$a_0 = T_2 - a_1 x_2 \quad (3.3)$$

Podstawiając współczynniki do funkcji, możemy wyznaczyć funkcje kształtu.

$$T(x) = T_1 - \frac{T_2 - T_1}{L} x_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x = \frac{x_2 - x}{L} T_1 + \frac{x - x_1}{L} T_2 = N_1(x) T_1 + N_2(x) T_2 \quad (3.4)$$

gdzie

$N_1, N_2$  – funkcje kształtu.

Funkcje kształtu określają w jakim stopniu wartość temperatury z jednego węzła wpływa na wartość temperatury w dowolnym punkcie wewnątrz elementu. Dla większej liczby węzłów w jednowymiarowym elemencie funkcje kształtu są wielomianami wyższych rzędów. Poniżej znajduje się sposób wyznaczania funkcji kształtu na przykładzie 3-węzłowego elementu jednowymiarowego.

$$T(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{p} \mathbf{a}^e = \mathbf{N} \mathbf{T}^e \quad (3.5)$$

gdzie

$\mathbf{p}$  – wektor zmiennych kolejnych jednomianów  $T(x)$

$\mathbf{a}^e$  – wektor współczynników kolejnych jednomianów  $T(x)$

$\mathbf{N}$  – wektor funkcji kształtu

$\mathbf{T}^e$  – wektor wartości w węzłach.

Prawdziwe jest też poniższe równanie.

$$\mathbf{T}^e = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{M}^e \mathbf{a}^e \quad (3.6)$$

Wyznaczając z tego równania  $\mathbf{a}^e$  i podstawiając do równania 3.5, otrzymamy następującą zależność.

$$\mathbf{p} \mathbf{a}^e = \mathbf{p}(\mathbf{M}^e)^{-1} \mathbf{T}^e = \mathbf{N} \mathbf{T}^e \quad \Rightarrow \quad \mathbf{N} = \mathbf{p}(\mathbf{M}^e)^{-1} \quad (3.7)$$

Funkcje kształtu obliczone w taki sposób mają postać jak poniżej.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\det \mathbf{M}^e} (x_2 x_3^2 - x_2^2 x_3 + (x_2^2 - x_3^2)x + (-x_2 + x_3)x^2) \\ N_2 &= \frac{1}{\det \mathbf{M}^e} (x_1^2 x_3 - x_1 x_3^2 + (x_3^2 - x_1^2)x + (x_1 - x_3)x^2) \\ N_3 &= \frac{1}{\det \mathbf{M}^e} (x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 + (x_1^2 - x_2^2)x + (-x_1 + x_2)x^2) \end{aligned} \quad (3.8)$$

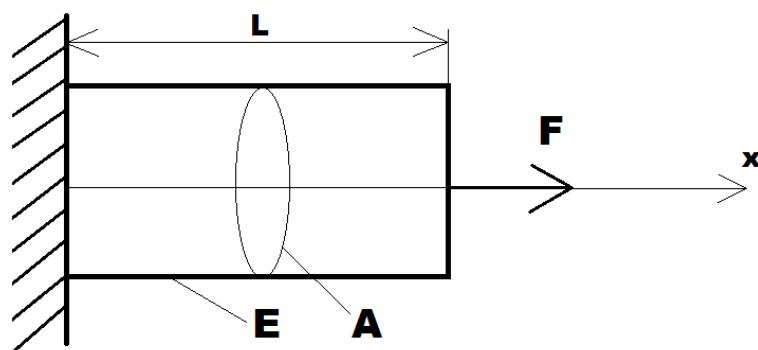
Prawidłowo wyznaczone funkcje kształtu mają dwie ważną własności. Pierwsza związana jest z węzłami i mówi że każda funkcja przyjmuje wartość 1 w jednym węźle, a we wszystkich pozostałych 0. Druga własność mówi, że suma funkcji kształtu wewnętrz elementu skończonego wynosi 1. Matematycznie zapisać te własności można następująco:

$$\begin{cases} N_n(x_m, y_m) = 1, & \text{dla } n = m \\ N_n(x_m, y_m) = 0, & \text{dla } n \neq m \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\sum_1^n N_n = 1. \quad (3.10)$$

### 3.3. Wyznaczanie macierzy sztywności i mas elementów

Weźmy model jednorodnego pręta, obciążonego jak na rysunku 5.14 o module Younga  $E$ , polu przekroju  $A$  i długości  $L$ .



Rys. 3.3. Model pręta

Energię potencjalną i kinetyczną układu można wyrazić poniższymi wzorami.

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \varepsilon A \sigma dx - F u_{x=L} = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx - F u_{x=L} \quad (3.11)$$

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3.12)$$

gdzie

$V$  – energia potencjalna

$K$  – energia kinetyczna

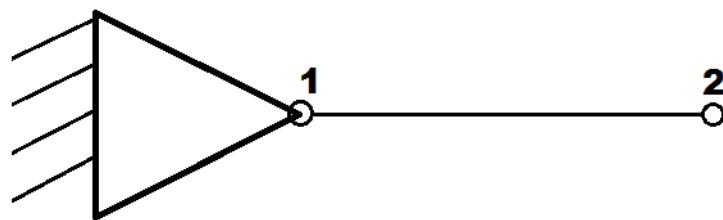
$u$  – przemieszczenie

$\varepsilon$  – odkształcenie

$\sigma$  – naprężenie

$F$  – siła zewnętrzna skupiona

Następnie stwórzmy uproszczony model, do którego wyznaczymy zależności MES.



Rys. 3.4. Uproszczony model pręta

Znając funkcje kształtu i wartości przemieszczeń węzłów można wyznaczyć przemieszczenie w każdym punkcie pręta, a następnie odpowiednie pochodne po przemieszczeniach i po czasie.

$$u = N_1 x_1 + N_2 x_2 = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{u}^e \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}^e \quad (3.15)$$

Mając wyznaczoną energię, możemy obliczyć lagranżjan i wstawić go do dynamicznych równań Lagrangea drugiego rodzaju. Dzięki tej operacji otrzymamy końcowe, dynamiczne równanie ruchu oraz postać macierzy mas i sztywności. Równania Lagrangea drugiego rodzaju mają postać:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}^e} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}^e} = 0, \quad L = K - V \quad (3.16)$$

gdzie

$L$  – lagranżjan.

Pierwszy człon wynosi

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{u}}^e} = \int_0^L \rho A \mathbf{N}^T \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^e dx, \quad (3.17)$$

zaś drugi

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}^e} = - \int_0^L E A \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u}^e dx + F \mathbf{N} \mathbf{u}_{x=L}^e. \quad (3.18)$$

Równanie dynamiki układu zapisane jest poniżej.

$$\int_0^L \rho A \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \ddot{\mathbf{u}}^e + \int_0^L A \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dx u = F \mathbf{N} \mathbf{u}_{x=L}^e \quad (3.19)$$

Postaci macierzy mas i sztywności są następujące:

$$\mathbf{M}^e = \int_0^L \rho A \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \quad (3.20)$$

$$\mathbf{K}^e = \int_0^L A \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dx. \quad (3.21)$$

W przypadku kiedy występuje więcej niż jedna stała materiałowa, zamiast  $E$  pojawia się macierz materiałowa  $D$ . W przypadku bardziej złożonych obiektów o większej liczbie elementów skończonych, całkowanie niezbędne do obliczenia macierzy staje się bardzo czasochłonne. Ponieważ funkcje kształtu są wielomianami, optymalnym rozwiążaniem jest zastosowanie kwadratur Gaussa. Kolejny problem to określenie granic całkowania. W przypadku przedstawionym powyżej nie widać specjalnej trudności, natomiast dla trójwymiarowych obiektów o nieregularnych kształtach wymaga to dodatkowej serii obliczeń.

W takich przypadkach można zastosować mapowanie na współrzędne naturalne. W takich współrzędnych element ma z góry ustalone współrzędne węzłów, co za tym idzie także granice całkowania są znane. Dla obiektu trójwymiarowego przyjmijmy współrzędne rzeczywiste  $x, y, z$  i współrzędne naturalne  $\xi, \eta, \zeta$ . Mapowania z jednych współrzędnych

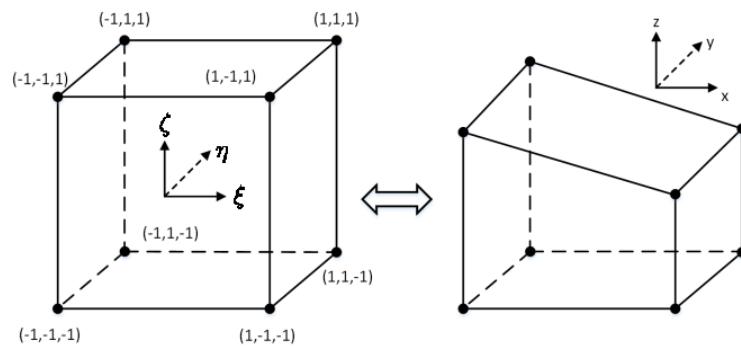
na drugie oblicza się według poniższego wzoru. Wizualizacja procedury przedstawiona jest na rysunku 3.5.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (3.22)$$

$x_i, y_i, z_i$  – współrzędne rzeczywiste punktów

$N_i$  – funkcje kształtu we współrzędnych naturalnych

$n$  – liczba węzłów elementu.



Rys. 3.5. Przekształcenie izoparametryczne

Dla elementów w takich współrzędnych funkcje kształtu są znane i stabilaryzowane.

Dla elementu sześciennego wypisane są w 3.25.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\ N_5 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_6 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_7 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\ N_8 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ostatnim elementem niezbędnym do prawidłowego całkowania we współrzędnych naturalnych jest wyznaczenie jakobianu przekształcenia. Macierz Jacobiego przedstawiona jest w równaniu 3.24.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

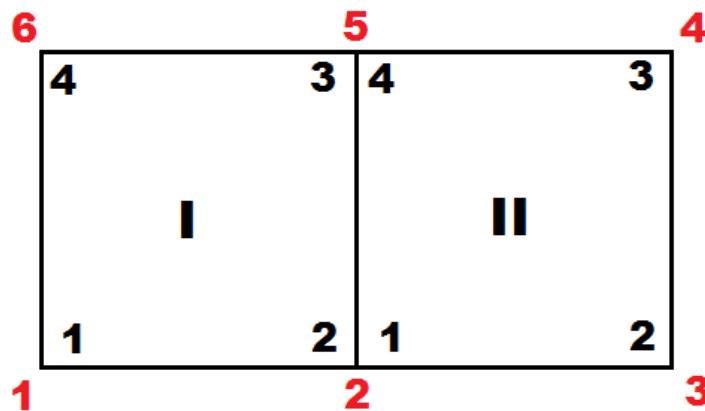
Ostatecznie wyznaczanie macierzy mas i sztywności dla elementu sześciennego zostanie zmodyfikowane jak poniżej:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e &= \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad \rightarrow \quad \mathbf{M}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta \\ \mathbf{K}^e &= \int_V \mathbf{B}^T E \mathbf{B} dV \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned} \quad (3.25)$$

### 3.4. Agregacja globalnych macierzy mas i sztywności

Metoda agregacji macierzy globalnych zostanie przedstawiona na przykładzie macierzy sztywności dwóch elementów kwadratowych i obiektu z nich zbudowanego. Wspomniany obiekt przedstawia rysunek 3.6. Czarne cyfry oznaczają numerację lokalną wewnętrz elmentu, a czerwone numerację globalną.

Algorytm agregacji polega na umieszczaniu odpowiednich elementów macierzy lokalnych do macierzy globalnej. Pokrywające się elmenty są sumowane. Ponieważ podmacierz sztywności dla jednego punktu lub zależności pomiędzy punktami jest umieszczana w macierzy globalnej bez wewnętrznych zmian, przyjmijmy zapis uproszczony:



Rys. 3.6. Dwa elementy skończone kwadratowe tworzące obiekt

$$\mathbf{K}_n^{ij} = \begin{bmatrix} K_{xx}^{ij} & K_{xy}^{ij} \\ K_{xy}^{ij} & K_{yy}^{ij} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

gdzie

- $i, j$  – numery punktów
- $n$  – numer elementu
- $x, y$  – współrzędne punktów.

W takim wypadku lokalne macierze sztywności dla obydwu elementów możemy zapisać jako:

$$\mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I^{11} & \mathbf{K}_I^{12} & \mathbf{K}_I^{13} & \mathbf{K}_I^{14} \\ \mathbf{K}_I^{21} & \mathbf{K}_I^{22} & \mathbf{K}_I^{23} & \mathbf{K}_I^{24} \\ \mathbf{K}_I^{31} & \mathbf{K}_I^{32} & \mathbf{K}_I^{33} & \mathbf{K}_I^{34} \\ \mathbf{K}_I^{41} & \mathbf{K}_I^{42} & \mathbf{K}_I^{43} & \mathbf{K}_I^{44} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{K}_{II} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{II}^{11} & \mathbf{K}_{II}^{12} & \mathbf{K}_{II}^{13} & \mathbf{K}_{II}^{14} \\ \mathbf{K}_{II}^{21} & \mathbf{K}_{II}^{22} & \mathbf{K}_{II}^{23} & \mathbf{K}_{II}^{24} \\ \mathbf{K}_{II}^{31} & \mathbf{K}_{II}^{32} & \mathbf{K}_{II}^{33} & \mathbf{K}_{II}^{34} \\ \mathbf{K}_{II}^{41} & \mathbf{K}_{II}^{42} & \mathbf{K}_{II}^{43} & \mathbf{K}_{II}^{44} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Macierze te mają wymiar  $8 \times 8$ , co odpowiada czterem punktom i dwóm współrzędnym dla każdego punktu. Macierz globalna wobec tego będzie miała wymiar  $12 \times 12$  ( $6 \times 6$  podmacierzy). Poniżej przedstawione jest wyznaczanie kilku elementów macierzy globalnej.

Dla globalnego punktu 1 mamy:

$$\mathbf{K}^{11} = \mathbf{K}_I^{11}, \quad (3.29)$$

ponieważ punkt globalny 1 pokrywa się z punktem 1 macierzy I.

Dla globalnego punktu 2 mamy:

$$\mathbf{K}^{22} = \mathbf{K}_I^{22} + \mathbf{K}_{II}^{11}, \quad (3.30)$$

ponieważ punkt globalny 2 pokrywa się z punktem 2 macierzy I oraz punktem 1 macierzy II.

Dla zależności globalnych punktów 2 i 3 mamy:

$$\mathbf{K}^{23} = \mathbf{K}_{II}^{12}, \quad (3.31)$$

ponieważ punkt globalny 2 pokrywa się z punktem 1, a punkt globalny 3 z punktem 2 macierzy II.

Dla zależności globalnych punktów 2 i 5 mamy:

$$\mathbf{K}^{25} = \mathbf{K}_I^{23} + \mathbf{K}_{II}^{14}, \quad (3.32)$$

ponieważ punkt globalny 2 pokrywa się z punktem 2 macierzy I oraz punktem 1 macierzy II, a punkt globalny 5 z punktem 3 macierzy I oraz punktem 4 macierzy II.

Uwzględniając że sztywność względna punktów nie będących ze sobą w sąsiedztwie (np. 1 i 3 w I) wynosi 0, macierz globalna przyjmuje postać:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I^{11} & \mathbf{K}_I^{12} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_I^{14} \\ \mathbf{K}_I^{21} & \mathbf{K}_I^{22} + \mathbf{K}_{II}^{11} & \mathbf{K}_{II}^{12} & 0 & \mathbf{K}_I^{23} + \mathbf{K}_{II}^{14} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{II}^{21} & \mathbf{K}_{II}^{22} & \mathbf{K}_{II}^{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{II}^{32} & \mathbf{K}_{II}^{33} & \mathbf{K}_{II}^{34} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_I^{32} + \mathbf{K}_{II}^{41} & 0 & \mathbf{K}_{II}^{43} & \mathbf{K}_I^{33} + \mathbf{K}_{II}^{44} & \mathbf{K}_I^{34} \\ \mathbf{K}_I^{41} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_I^{43} & \mathbf{K}_I^{44} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Oczywistym jest, że w przypadku innej numeracji węzłów globalnych zmieni się układ macierzy globalnej. Nie ma to jednak wpływu na ostateczny wynik rozwiązań MES. W modelach o dużej liczbie elementów skończonych macierze mas i sztywności są macierzami rzadkimi. Wykorzystuje się to w obliczeniach do oszczędzania pamięci komputera, poprzez zapis w pamięci tylko wartości niezerowych oraz ich położenia w macierzy.

Macierz mas wyznaczona w przedstawiony sposób jest nazywana macierzą konsystentną. Często stosuje się macierze skupione, które zawierają elementy tylko na diagonali. Pozwala to bardzo przyspieszyć obliczenia. Takie rozwiązanie jest ściśle rzecz biorąc niepoprawne, ponieważ nie ma algorytmu, który pozwala obliczyć macierz skupioną i zachować w pełni właściwości modelu. Macierze skupione oblicza się np. poprzez sumowanie wszystkich elementów w wierszu i umieszczenie tej sumy na elemencie diagonalnym. Dobrą stroną macierzy skupionych jest fakt, że rozwiązanie pozostaje zbieżne.

### 3.5. Rozwiązywanie wyznaczonego równania macierzowego

Przyjmijmy, że wyznaczone równanie różniczkowe po agregacji macierzy ma postać:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}. \quad (3.34)$$

Rozwiązać to równanie można na wiele sposobów. Przedstawione zostaną tutaj trzy. Pierwszy sposób to metoda całkowania jawnego, druga - metoda całkowania niejawnego, a trzecie to metoda modalna.

W metodzie całkowania jawnego zakładamy rozpoczęcie obliczeń w kroku czasowym  $t$  i przybliżamy pochodną drugiego rzędu poprzez formułę centralną:

$$\ddot{\mathbf{x}}^t = \frac{\mathbf{x}^{t+1} - 2\mathbf{x}^t + \mathbf{x}^{t-1}}{\delta t^2}. \quad (3.35)$$

Po podstawieniu do równania 3.38 wyznaczamy  $\mathbf{x}^{t+1}$ :

$$\mathbf{x}^{t+1} = \Delta t^2 \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F}^t - \mathbf{K} \mathbf{x}^t) + 2\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^{t-1}. \quad (3.36)$$

Metoda ta charakteryzuje się tym, że do stabilności rozwiązywania często wymaga małego kroku czasowego. Nadaje się ona za to do zrównoleglania obliczeń, co pozwala zastosować do tego celu procesory graficzne. Operacja odwracania macierzy  $\mathbf{M}$  we wzorze 3.36 jest kosztowna obliczeniowo. Zastosowanie macierzy skupionej pozwala znacznie przyspieszyć tą procedurę.

Metoda całkowania niejawnego różni się wyjściowym krokiem czasowym. Zakładamy początkową chwilę czasową  $t+1$ , co przy zastosowaniu tej samej formuły różnicowej wprowadza krok wstecz.

$$\ddot{\mathbf{x}}^{t+1} = \frac{\mathbf{x}^{t+1} - 2\mathbf{x}^t + \mathbf{x}^{t-1}}{\delta t^2}. \quad (3.37)$$

Podstawiamy równanie 3.37 do równania

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}^{t+1} + \mathbf{K} \mathbf{x}^{t+1} = \mathbf{F}^{t+1} \quad (3.38)$$

i otrzymujemy

$$\mathbf{x}^{t+1} = (\mathbf{M} + \Delta t^2 \mathbf{K})^{-1} (\Delta t^2 \mathbf{F}^{t+1} + 2\mathbf{M} \mathbf{x}^t - \mathbf{M} \mathbf{x}^{t-1}). \quad (3.39)$$

W tym wypadku nie unikniemy już odwracania macierzy  $\mathbf{M} + \Delta t^2 \mathbf{K}$ , co powoduje wydłużenie obliczeń. Zaletą tej metody jest fakt, że jest ona bezwarunkowo stabilna.

W metodzie modalnej jako pierwsze należy wyznaczyć wektory własne dla równania jednorodnego  $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = 0$ . Wektory własne wyznaczyć można z dokładnością do stałej multiplikatywnej. Możliwe jest wyskalowanie tych wektorów w taki sposób, aby macierz tych wektorów  $\boldsymbol{\phi}$  miała własność:

$$\boldsymbol{\phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi} = \mathbf{I}. \quad (3.40)$$

Zakładając przekształcenie współrzędnych  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi} \bar{\mathbf{x}}$  otrzymamy nową postać równania 3.38.

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Lambda} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{F}}, \quad \mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{F}. \quad (3.41)$$

Macierz  $\mathbf{\Lambda}$  jest macierzą diagonalną, więc rozwiązywanie układu sprowadza się teraz do znalezienia rozwiązania dla pojedynczych oscylatorów harmonicznych. Elementy macierzy  $\mathbf{\Lambda}$  są kwadratami częstości własnych drgań węzłów.

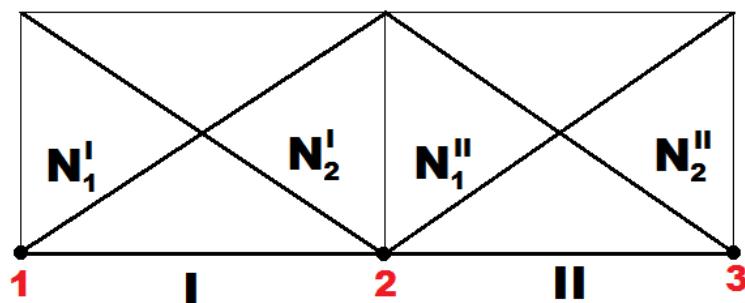
$$\begin{bmatrix} \ddot{\bar{x}}_1 \\ \ddot{\bar{x}}_2 \\ \ddot{\bar{x}}_3 \\ \vdots \\ \ddot{\bar{x}}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \omega_3^2 & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \vdots \\ \bar{F}_n \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} \ddot{\bar{x}}_1 + \omega_1^2 \bar{x}_1 = \bar{F}_1 & \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} \\ \ddot{\bar{x}}_2 + \omega_2^2 \bar{x}_2 = \bar{F}_2 & \rightarrow \\ \ddot{\bar{x}}_3 + \omega_3^2 \bar{x}_3 = \bar{F}_3 & \rightarrow \\ \vdots & \vdots \\ \ddot{\bar{x}}_n + \omega_n^2 \bar{x}_n = \bar{F}_n & \rightarrow \end{cases} \quad (3.43)$$

Po rozwiązaniu równań należy wyznaczyć ostateczne rozwiązanie  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi} \bar{\mathbf{x}}$ .

## 3.6. Zbieżność metody i błędy rozwiązań

O zbieżności rozwiązań możemy wnioskować na podstawie funkcji kształtu. Pierwszym warunkiem jest tzw. warunek zgodności. Mówiąc o tym, że funkcje kształtu muszą być ciągłe w przestrzeni elementów. Dla prostego przypadku dwóch elementów liniowych jednowymiarowych ciągłość funkcji ilustruje rysunek 3.7.



Rys. 3.7. Ciągłość funkcji w przestrzeni elementów

Warunek ten jest zapewniony poprzez własność funkcji kształtu przedstawioną we wzorze 3.9.

Kolejny warunek nazywa się warunkiem bryły sztywnej (WBS). Zapewnia on brak straty bądź narastania energii podczas wyznaczania wyniku wewnątrz elementu. Warunek ten jest zapewniony poprzez własność funkcji kształtu przedstawioną w 3.10.

Ostatnim warunkiem jest tzw. warunek stałego odkształcenia (WSO). Mówią on o tym, że jeśli w elemencie przyłożymy liniowe pole przemieszczeń, to odkształcenie będzie stałe w każdym punkcie elementu.

Jeśli spełnione są warunki zgodności, WBS oraz WSO to rozwiązanie dla elementu będzie zbieżne. Warunki te muszą być spełnione dla każdego elementu obliczanego modelu.

Zbieżność nie daje nam gwarancji, że rozwiązanie otrzymane przy pomocy symulacji MES jest poprawne. Przez poprawne rozumiane jest, że błąd rozwiązania jest dostatecznie mały. Aby mieć pewność, że rozwiązanie jest wystarczająco dokładne należy oszacować błąd maksymalny. W przypadku MES błąd powodują:

1. dyskretyzacja konstrukcji
2. zaokrąglenia arytmetyczne.

Pierwsza przyczyna występowania błędów związana jest z podziałem konstrukcji na elementy skończone. Błąd zawarty jest już w równaniu  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}$ . Pojawia się dlatego, że całe rozwiązanie wyznaczamy za pomocą wielomianowych funkcji kształtu. Błąd zbieżnego rozwiązania możemy zmniejszać poprzez wykorzystanie funkcji kształtu wyższego rzędu, bądź zagęszczenie siatki i budowę większej liczby elementów skończonych.

Estymacja błędów odbywa się na różne sposoby. Jednym z nich jest wykorzystanie równania 3.44.

$$F - \tilde{F}_i \approx c h_i^r \quad (3.44)$$

gdzie

$F$  – rozwiązanie dokładne

$\tilde{F}_i$  – i-te rozwiązanie przybliżone

$c$  – współczynnik proporcjonalności

$h_i$  – współczynnik zależny od zagęszczenia siatki

$r$  – współczynnik zależny od stopnia wielomianów interpolujących.

Jedna symulacja nie daje możliwości wyznaczyć błędu. Aby tego dokonać należy przeprowadzić dwie symulacje, co pozwala obliczyć błąd drugiej (dokładniejszej). Przyjmijmy, że druga symulacja zawiera elementy o dwukrotnie mniejszych wymiarach, czyli  $h_1 = 2h_2$ . Współczynnik  $r$  przyjmuje wartości mniejsze od 1, ale dla uproszczenia przyjmijmy dokładnie 1.

Podstawiając odpowiednie indeksy do wzoru 3.44, możemy wyznaczyć błąd drugiej symulacji, znając wyniki zarówno pierwszej jak i drugiej.

$$F - \tilde{F}_2 \approx \frac{\tilde{F}_2 - \tilde{F}_1}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^r - 1}. \quad (3.45)$$

Innym podejściem jest wyznaczanie błędów poprzez energię naprężenia elementów. Po wyznaczeniu przemieszczeń węzłów i obliczeniu naprężenia, naprężenia nie są ciągłe w przestrzeni elementów. Jeśli jeden węzeł należy do kilku elementów, to w każdym z nich może zostać wyznaczona inna wartość naprężenia dla takiego węzła. W ciągłym przypadku naprężenie byłoby funkcją ciągłą, dlatego błąd wynikający z naprężenia wyznacza się w następujący sposób:

1. Obliczamy średnią naprężenia w węźle, biorąc wartości dla węzła z każdego elementu, do którego należy.
2. Wyznaczamy błąd naprężenia w węzłach elementu, poprzez odejmowanie od naprężenia w węźle wartości średniego naprężenia w tym węźle.
3. Sumujemy błędy naprężen wszystkich elementów skończonych.
4. Wyznaczamy energię błędu naprężenia.
5. Wyznaczamy energię odkształcenia dla całej konstrukcji.
6. Obliczamy błąd procentowy według wzoru 3.46.

$$E = 100 \left( \frac{e}{U + e} \right)^{0.5} \quad (3.46)$$

gdzie

$e$  – całkowita energi błędu dla konstrukcji

$U$  – energi odkształcenia dla konstrukcji

$E$  – błąd procentowy energii.

## 4. Metody kompensacji dyspersji

Istnieje wiele różnych metod kompensacji dyspersji w tej pracy szczegółowo opisane zostały wybrane trzy. Pierwsza polegająca na przygotowaniu sygnału, który sam skompensuje się do odpowiedniej postaci w trakcie propagacji. Druga bazująca na przybliżaniu krzywych dyspersji przy pomocy rozwinięcia w szereg Taylora, oraz trzecia polegająca na mapowaniu sygnału z dziedziny czasu na odległość

### 4.1. Cel kompensacji

#### 4.1.1. Zastosowanie fal Lamba w nieniszczacych testach

Fale prowadzone akustyczne i ultradźwiękowe, w tym między innymi fale Lamba, są wykorzystywane na różne sposoby do nieniszczacych testów i ocen jakości. Stosowane są między innymi do diagnostyki uszkodzeń aktywnych lub pasywnych w monitorowaniu kondycji strukturalnej (SHM - Structural Health Monitoring). W niektórych przypakach są one wykorzystywane do uzyskania lokalnych informacji o próbce, której to informacji nie można uzyskać konwencjonalnymi technikami ultradźwiękowymi. Przykładem takiego zastosowania może być inspekcja spoiwa klejowego[2-Wilcox]. Jest to przykład aplikacji o krótkim zasięgu, ponieważ odległość propagacji fal kierowanych jest stosunkowo mała. Drugi obszar zastosowania kontroli fal prowadzonych jest przeznaczony do testowania dalekiego zasięgu. W tym przypadku odległość propagacji jest stosunkowo duża. Ich główną zaletą w stosowaniu do diagnozy urządzeń jest to, że mogą być wzbudzane przez elementy uruchamiające znajdujące się na lub wewnętrz struktury w jednym punkcie konstrukcji i mogą się rozprzestrzeniać na duże odległości, podczas gdy konwencjonalna kontrola ultradźwiękowa dużych struktur jest bardzo czasochłonna ponieważ testom musi zostać poddany każdy punkt badanej struktury, która ma być monitorowana. Wykorzystanie fal Lamba jest więc potencjalnie bardzo atrakcyjnym rozwiązaniem tego problemu. Jeżeli przetwornik odbierający znajduje się w odległym punkcie struktury, odebrany sygnał zawiera informacje o całej przebytej ścieżce propagacji między przetwornikami nadawczym i odbiorczym. W związku z tym test monitoruje całą ścieżkę, a nie pojedynczy punkt struktury, co pozwala na znaczne zaoszczędzenie czasu badań. W przypadku prętów często stosuje się techniki w których nadajnik po wyemitowaniu sygnału przełącza się w tryb

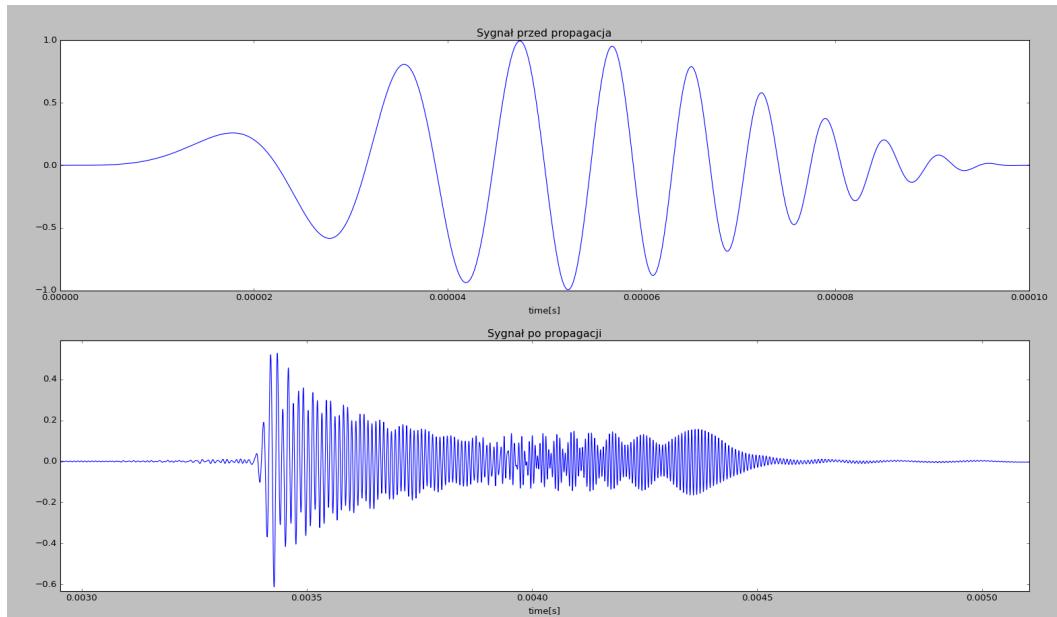
odbiornika. Propagujący sygnał odbija się od końca pręta i wraca spowrotem, gdzie jest odbierany i może zostać poddany analizie. Takie podejście jest bardzo często stosowane, zwłaszcza w sytuacjach, w których dostęp do pręta możliwy jest tylko z jednej strony jak na przykład podczas badania kotw górniczych. Przykład ich położenia ilustruje rysunek 4.1



**Rys. 4.1.** Przykład zamontowania kotw górniczych, do których dostęp w przypadku testów jest tylko z jednej strony ??

Nawet w najprostszych strukturach, takich jak swobodna płaska izotropowa płytka lub prosty stalowy pręt, może istnieć nieskończona liczba sterowanych trybów falowych. Co więcej postaci te są generalnie dyspersyjne. Obydwa te fakty komplikują użycie fal kierowanych. W praktyce testy kontroli dalekiego zasięgu są wykonywane w sposób zadowalający, gdy stosuje się tylko jedną lub czasami dwie postaci fal kierowanych, a pozostałe są tłumione. Tradycyjnie osiąga się to za pomocą specjalnych przetworników. Dzięki starannej kontroli częstotliwości i liczby falowej wzbudzenia, możliwe jest generowanie wybranych postaci fali Lamba oraz tłumienie pozostałych. Kontrola zakresu częstotliwości może być osiągnięta przez użycie sygnału o pewnej szerokości pasma zamkniętego w oknie Hanninga lub Gaussa, podczas gdy zakres liczby falowej może być ograniczony przez użycie starannie zaprojektowanych sond EMAT lub za pomocą piezoelektrycznego przetwornika.

Powyższe metody mogą służyć do tłumienia sygnałów wywołanych przez niepożądane postaci fali, ale nie mogą zapobiec efektowi dyspersji, ponieważ zjawisko to występuje w falach kierowanych podczas ich propagacji w strukturze. Dyspersja sygnału powoduje, co zostało opisane w rozdziale 2, że energia sygnału rozchodzi się w czasie i przestrzeni w trakcie propagacji sygnału. Praktycznie objawia się to wzrostem czasu trwania odbieranego sygnału w porównaniu do czasu trwania sygnału wejściowego. Rysunek 4.2 obrazuje przykład sygnału bez dyspersji oraz sygnału rozproszonego na skutek propagacji pewnej odległości. Łatwo zauważać, że sygnał przed propagacją trwa zaledwie 0,0001s natomiast po jego czas zwiększa się do około 0,0013s czyli ponad 10 razy dłużej.



Rys. 4.2. Przykład sygnału wejściowego, oraz sygnału rozproszonego

Zjawisko to pogarsza rozdzielczość i sprawia, że dane eksperymentalne są trudne do interpretacji z powodu nakładania się sygnału. Używanie sygnałów wejściowych o określonej przepustowości może zmniejszyć problem dyspersji. To koncentruje energię wejściową w ograniczonym zakresie częstotliwości, w którym jakiekolwiek zmiany prędkości pożądanego trybu fal kierowanych są małe. W praktyce oznacza to pracę w punktach na krzywych dyspersji dla konkretnego układu, w których prędkość grupowa jest stacjonarna lub prawie stacjonarna względem częstotliwości. Takie punkty zostały określone jako punkty żerowej dyspersji" [8 Wilcox], jest to określenie, które może wprowadzać w błąd, ponieważ niemożliwe jest skoncentrowanie całej energii sygnału wejściowego o skończonej długości na jednej częstotliwości. Zostało udowodnione Wilcox 13, że istnieje optymalny sygnał wejściowy dla każdego punktu na krzywych dyspersji, który maksymalizuje rozdzielczość, jaką można uzyskać w tym punkcie. Jeśli jednak przyjmiemy, że przetwarzanie sygnału jest dozwolone przed wyświetleniem informacji operatorowi, możliwe jest inne podejście do fal prowadzonych oraz ich roli w nieniszczących testach.

Należy również zaznaczyć, iż w praktyce rozproszone sygnały są zwykle uszkodzone z powodu szumów. Zachodzące na siebie i słabnące sygnały w porównaniu z szumem sprawiają, że dane z czujników są trudniejsze do interpretacji. W konsekwencji rozdzielczość może ulec pogorszeniu. Dlatego zrodziła się ogromna potrzeba opracowania technik przetwarzania sygnałów w celu zwiększenia rozdzielczości czasowej i amplitudy SNR.

Z punktu widzenia systemów SHM, kompresja sygnału lub usuwanie dyspersji w dziedzinie czasu może być wygodnym i intuicyjnym sposobem na łatwiejszą interpretację sygnałów czujnika.

### 4.1.2. Sygnał stosowany w symulacji

W ramach niniejszej pracy powstała aplikacja, pozwalająca użytkownikowi na podstawie podanych parametrów preta wygenerować krzywe dyspersji opisujące dany obiekt. Aplikacja pozwala również na wygenerowanie sygnału testowego, symulację jego propagacji w zadanym precie, oraz kompensację otrzymanego sygnału wybranymi metodami. Sygnałem stosowanym najczęściej był sygnał chirp zmodyfikowany przypomocy okna Hanninga. Sygnał o nazwie chirp jest sygnałem sinusoidalnym, w którym faza jest funkcją czasu. [biblio art w dziwne numerki](#). Sygnał o nazwie linear chirp to sygnał, w którym częstotliwość zmienia się w sposób liniowo zależny od czasu. Sygnał taki jest opisany wzorem:

$$s(t) = \sin(\phi(t)) \quad (4.1)$$

Gdzie  $\phi(t)$  to funkcja fazy. Chwilową częstotliwość takiego sygnału jest związana funkcją fazy następującą zależnością:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d(\phi(t))}{dt} \quad (4.2)$$

Aby zatem wygenerować sygnał linear chirp o rządanych parametrach należy przyjąć, iż funkcja częstotliwości przybiera postać:

$$f(t) = f_0 + \frac{B}{T}t \quad (4.3)$$

Gdzie:

$f_0$  - częstotliwość początkowa

$B$  - szerokość pasma częstotliwości

$T$  - czas trwania sygnału

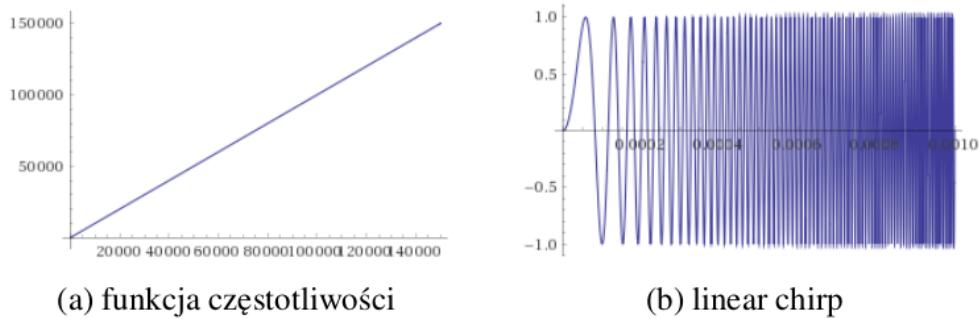
Łącząc równania (4.2) oraz (4.3) można funkcję fazy zapisać jako:

$$\phi(t) = 2\pi f_0 t + \frac{\pi B t^2}{T} \quad (4.4)$$

A zatem pełen wzór opisujący sygnał linear chirp można zapisać jako:

$$s(t) = \sin(2\pi f_0 t + \frac{\pi B t^2}{T}) \quad (4.5)$$

Przykład funkcji częstotliwości oraz uzyskanego w ten sposób sygnału przedstawia rysunek 4.3

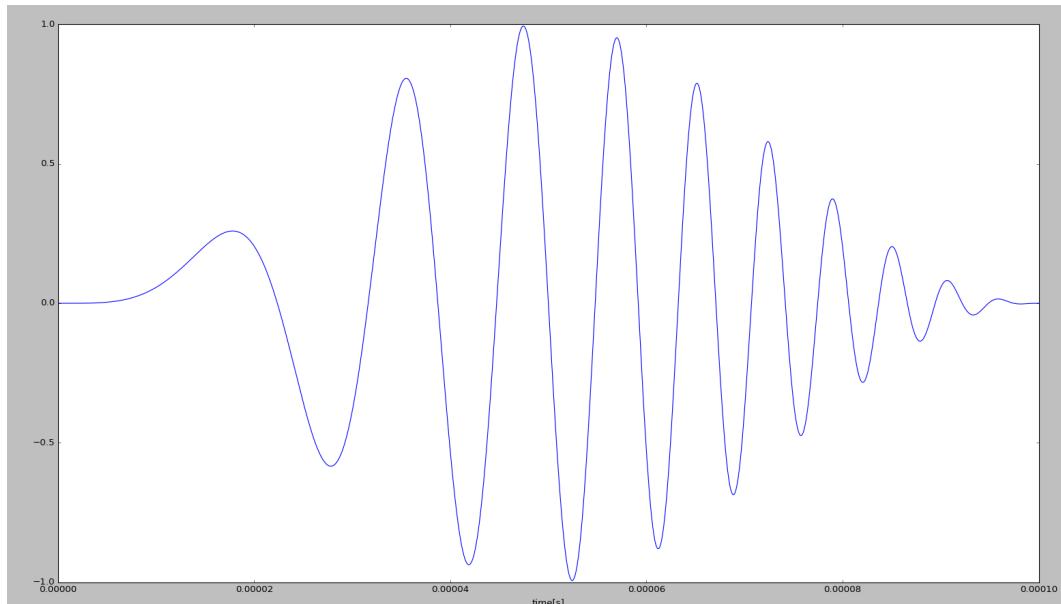


**Rys. 4.3.** Przykład sygnału linear chirp (b) oraz jego funkcji częstotliwości (a)

W prezentowanej pracy, sygnałem, który był poddawany symulacji był liniowy chirp dodatkowo pomnożony przez funkcję okna Hanninga daną wzorem:

$$w(n) = 0,5(1 - \cos(\frac{2\pi n}{N-1})) \quad (4.6)$$

Gdzie  $N$  to całkowita liczba próbek. uzyskany w ten sposób sygnał został zaprezentowany na rysunku 4.4



**Rys. 4.4.** Linear chirp pomnożony przez funkcję okna Hanninga

## 4.2. Agregacja krzywych dyspersji uzyskanych z zaimplementowanego solvera

### 4.2.1. Cel agregacji

Podstawą opracowania każdej z przedstawionych w tej pracy metod kompensacji jest znajomość krzywych dyspersji badanego obiektu, jakim jest stalowy pręt. Stanowią one pewnego rodzaju funkcję przejścia sygnału pomiędzy jednym punktem w czasie i przestrzeni a dowolnym innym punktem. Ich znajomość stanowi więc klucz do skomensowania efektu dyspersji. W stworzonej aplikacji, dzięki zastosowaniu odpowiednich algorytmów, na podstawie odpowiednich zadanych parametrów badanego obiektu, otrzymywane są poszukiwane krzywe dyspersji. Jednak dane są one w postaci chmury punktów zapisywanych w odpowiednich plikach. Aby funkcje te nadawały się do użycia należy każdy z wygenerowanych punktów przypisać do odpowiedniej krzywej. W ten sposób uzyskane zostaną funkcje, z których każda opisująca będzie zachowanie innej postaci fali prowadzonej. Przykładowe wygenerowane krzywe dyspersji przed agregacją przedstawia rysunek 2.21

### 4.2.2. Algorytm agregacji

Krzywe dyspersji wyrażają zależność liczby falowej od częstości kątowej. Jako wynik w aplikacji otrzymujemy pojedynczy wektor zawierający kolejne wartości liczby falowej oraz zestaw odpowiadających danej liczbie częstości kątowych. Pierwszym krokiem w agregacji tak zapisanych danych jest zapisanie wszystkich danych w postaci chmury punktów o dwóch współrzędnych  $A = (\omega, k)$  oraz posortowanie ich rosnąco wartościami  $\omega$ . Liczba wygenerowanych krzywych odpowiada ilości punktów posiadających tę samą współrzędną  $k$ , ponieważ są to wartości własne równania (2.44) to dla każdej wartości  $k$  jest ich tyle samo. Każda krzywa składa się z dokładnie takiej liczby punktów jaka jest długość wektora  $k$ . Kolejnym krokiem jest przyporządkowanie pierwszych dwóch punktów do każdej z krzywych. Mając punkty uporządkowane względem  $\omega$  wystarczy wybrać to o najmniejszej wartości  $k$ . Każdy z nich odpowiada kolejnemu trybowi fali. Punkty przedzielone do właściwego trybu zostają usunięte ze zbioru punktów do przydzielenia. Analogicznie postępujemy w przypadku drugiej grupy punktów. Wybieramy te o najniższej wartości  $k$  i przypisujemy do poszczególnych trybów. Agregacja kolejnych punktów musi przebiegać według innego schematu, ponieważ krzywe się wzajemnie przesinają i segregacja względem częstotliwości nie przyniesie zadowalających rezultatów. Przyjmując, że dla dowolnego modu, ostatni zagregowany punkt ma współrzędne  $P_l = (\omega_l, k_l)$  z chmury punktów wybieramy zbiór potencjalnych punktów spełniających następujące warunki:

1. Wartość  $k$  potencjalnych punktów musi wynosić  $k = k_p = v_k[l + 1]$

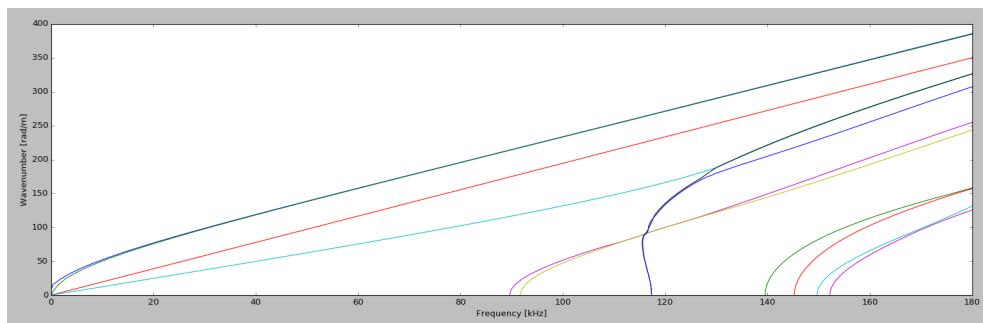
Gdzie  $k_p$  oznacza wartość k potencjalnych punktów,  $v_k$  oznacza posortowany rosnąco wektor wartości k, a  $l + 1$  to indeks wartości z wektora  $v_k$  o jeden większy niż indeks ostatnio zagregowanego do danego trybu punktu

2. Wartość  $\omega$  potencjalnych punktów musi znajdować się w pewnym, ograniczonym otoczeniu wartości  $\omega_l$

Ze zbioru potencjalnych punktów, które spełniają wyżej wymienione warunki należy następnie wybrać ten, który w najlepszy sposób będzie pasował do powstałego już fragmentu krzywej dyspersji. W celu wybrania najlepszego punktu obliczony zostaje kąt pomiędzy wektorami  $\vec{v}_1 = \overrightarrow{P_{l-1}P_l}$  oraz  $\vec{v}_2 = \overrightarrow{P_lP_{p_i}}$ , gdzie  $P_{p_i}$  oznacza i-ty potencjalny punkt ze zbioru. Sformułowanie najlepiej pasujący punkt oznacza, iż kąt pomiędzy rozważanymi wektorami, obliczany ze wzoru:

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{v}_1 \circ \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|} \quad (4.7)$$

jest jak najbliższy zeru. Usuwając zagregowane już punkty ze zbioru punktów do przydzielania oraz postępując w sposób analogiczny do przedstawionego, wszystkie punkty ze zbioru zostają przydzielone odpowiedniej krzywej. Wyniki agregacji zostały przedstawione na rysunku 4.5



Rys. 4.5. Krzywe dyspersji po agregacji

Jak łatwo zauważyc opisany algorytm w sposób efektywny agreguje chmurę punktów do odpowiednich krzywych. Uporządkowane w ten sposób punkty zostały wykorzystane do opracowania trzech metod kompensacji, które zostały opisane w kolejnych sekcjach tego rozdziału.

### 4.3. Metoda odwracania sygnału w czasie

Metoda omawiana w tej sekcji polega na wygenerowaniu sygnału który po przeprowadzeniu pewnej odległości sam sie skompensuje. Technika kompensacji dyspersji poprzez wygenerowanie sygnału odwróconego w czasie została zaprezentowana w artykule [ ] [referencja do pialucha]

### 4.3.1. Podstawy teoretyczne

Podstawową ideą prezentowanej w tej części pracy techniki kompensacji dyspersji jest wytworzenie sygnału, który poprzez nałożenie składowych częstotliwości w czasie propagacji skompensuje się, tworząc oczekiwany sygnał w pozycji pomiarowej. W przypadku w którym do obiektu wprowadzony zostani zwykły sygnał sinusoidalny o liniowo zmieniającej się częstotliwości (linear-chirp) zostanie wzbudzone przynajmniej kilka trybów fali prowadzonej. Każdy tryb w każdej z częstotliwości może poruszać się z różną prędkością fazową i grupową. Ze względu na dyspersję sygnał wraz z propagacją będzie stawał się coraz dłuższy a jego amplituda będzie spadać, ponieważ ulegnie on rozproszeniu. Składowe częstotliwości sygnału odpowiadające najwyższej prędkością grupowym będą znajdować się z przodu, natomiast wolniejsze komponenty będą znajdować się z tyłu. Podstawa przedstawianej metody polega na założeniu, że tak otrzymany sygnał jesteśmy w stanie odwrócić w czasie, tak aby komponenty o mniejszej prędkości znalazły się z przodu sygnału a komponenty o większej prędkości znalazły się z tyłu. Wzbudzenie obiektu tak przygotowanym sygnałem da w odpowiedzi sygnał skompensowany tej samej postaci co pierwotne wzbudzenie. Skuteczność metody można wykazać analitycznie. Przyjijmy, że sygnał zastosowany do wzbudzenia pręta zostanie zastosowany w punkcie  $x = 0$  i będzie to sygnał  $f(t)$ . Sygnał wzbudzający w dziedzinie częstotliwości możemy zapisać jako:

$$[F(\omega)_{x=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.8)$$

Jeśli przez nasz obiekt propaguje jedna postać fali to w punkcie  $x = L$  można tę funkcję zapisać jako:

$$[F(\omega)_{x=L} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i(\omega t - kL)} dt \quad (4.9)$$

gdzie liczba falowa  $k$  jest funkcją częstotliwości  $\omega$ , która jest opisana za pomocą krzywej dyspersji dla danego trybu fali. Równania (4.8) oraz (4.9) można powiązać funkcją przejścia  $H(\omega)$  co można zapisać jako:

$$H(\omega) = \frac{[F(\omega)]_{x=L}}{[F(\omega)]_{x=0}} \quad (4.10)$$

Zakładając, że chcemy uzyskać sygnał  $g(t)$ , którego transformata Fouriera to  $G(\omega)$  przy ( $x = L$ ) wtedy wymagany sygnał wejściowy ( $x = 0$ )  $Y(\omega)$ :

$$Y(\omega) = \frac{G(\omega)}{H(\omega)} = G(\omega)[H(\omega)]^{-1} \quad (4.11)$$

Sygnal w dziedzinie czasu  $y(t)$  jaki musi zostać wpuszczony do badanego pręta w punkcie  $x = 0$  aby uzyskać odebrany sygnal  $g(t)$  w punkcie  $x = L$  można uzyskać z odwrotnej transformaty Fouriera równanie (4.11):

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{H(\omega)} e^{i\omega t} d\omega \quad (4.12)$$

W prostym przypadku gdy analizujemy pojedynczą postać fali prowadzonej:

$$[H(\omega)]^{-1} = e^{-ikL} = e^{-i\omega L/c} \quad (4.13)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega(L/c-t)} d\omega \quad (4.14)$$

Przyjmując, że sygnal w domenie czasu  $g(t)$  jest aplikowany w punkcie  $x = 0$  sygnal  $y^*(t)$  w punkcie  $x = L$  można zapisać jako:

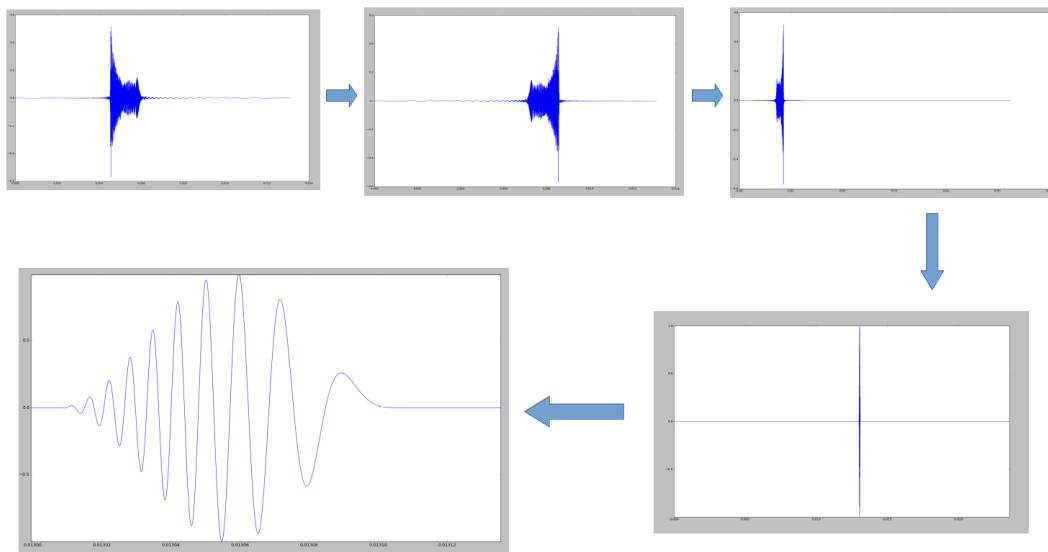
$$y^*(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{-i\omega(L/c+t)} d\omega \quad (4.15)$$

Technika kompensacji w tym przypadku polega na odebraniu sygnału  $y^*(t)$  w przedziale czasowym  $t \in [0, T]$  w którym cała paczka falowa zostanie odebrana przez odbiornik. Następnie sygnal zostaje odwrócony w czasie. Otrzymany w ten sposób sygnal może być zaaplikowany do badanego pręta. W trakcie propagacji zostanie on skompensowany do fali o kształcie takim jak kształt sygnału  $g(t)$

### 4.3.2. Implementacja numeryczna

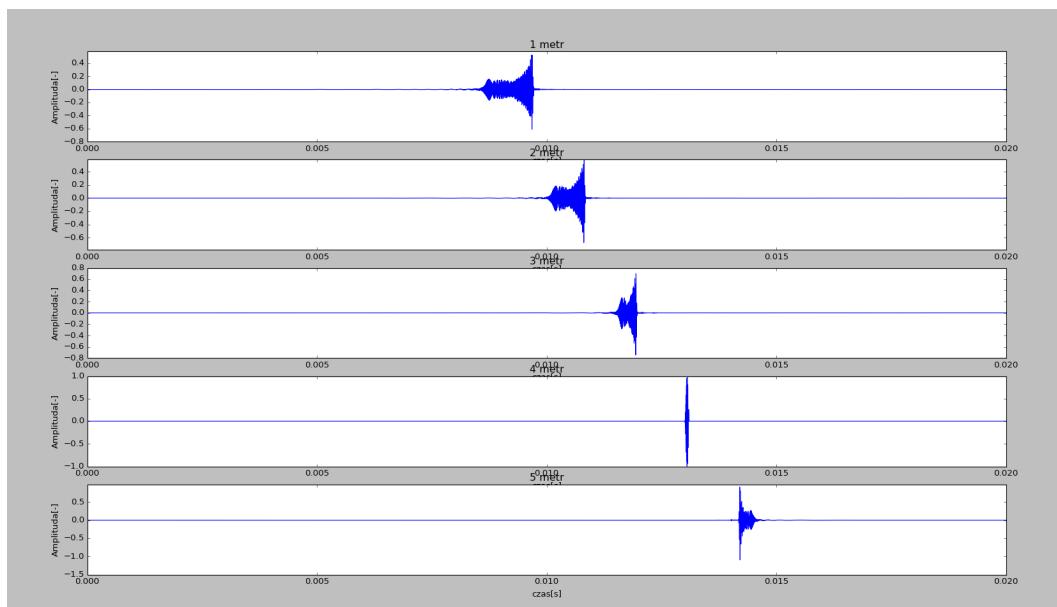
W ramach niniejszej pracy, omawiana metoda została zaimplementowana do aplikacji. Podstawa jej działania opiera się na znajomości krzywych dyspersji. Pierwszym etapem jest wygenerowanie sygnału, jaki chce się uzyskać w wyniku kompensacji. Następnie dzięki zaimplementowanym metodom należy uzyskać przewidywany kształt sygnału po przepropagowaniu zadanej odległości oraz odrócenie go w czasie. Sygnal otrzymany z tak przygotowanego sygnału wejściowego powinien skompensować się na zadanej odległości. Rysunek 4.6 przedstawia opisane kroki na przykładzie chirpa.

W zaprezentowanym przykładzie odwrócony w czasie sygnal został dodatkowo wypełniony zerami. Zabieg ten został zastosowany, ponieważ całość została przeprowadzona w ramach symulacji i wypełnienie sygnału było zabiegiem niezbędnym do przeprowadzenia prawidłowej symulacji propagacji. Przedstawiana metoda pozwala zatem wygenerować sygnal kompensujący się na zadanej odległości do fali o oczekiwanyim kształcie. Pozwala na propagowanie zarówno pojedynczego trybu jaki nałożonych wielu postaci.



Rys. 4.6. Algorytm kompensacji odwracania czasu

Jednak aby móc stosować tę metodę konieczna jest znajomość długości ścieżki propagacji sygnału. Jeżeli ściażka propagacji ulegnie zmianie, konieczne jest wygenerowanie nowego sygnału adekwatnego do aktualnego badanego obiektu. W przypadku w którym podczas propagacji następowalby dodatkowe odbicia, na przykład mielibyśmy do czynienia z falą propagującą przez dwa pręty złączone ze sobą, część energii odbiła by się od łączenia a część przepropagowała przez drugi pręt i odbiła się na końcu. Stworzenie sygnału kompensującego się w takiej sytuacji byłoby bardziej skomplikowane i nie zostało opisane w tej pracy. Rysunek 4.7 prezentuje przykład fali przygotowanej do kompensacji po 4 metrach propagacji.



Rys. 4.7. Sygnał przygotowany do kompensacji po 4 metrach propagacji przedstawiony kolejno po 1, 2, 4 i 5 metrach propagacji

Jak łatwo zauważyc wprowadzony sygnał kompensuje się tylko i wyłącznie po przepropagowaniu założonej odległości. Wraz z oddalaniem się od punktu, w którym przewidziany był odbiornik efekt dyspersji się nasila. Tak więc zarówno przed jak i za założonym punktem odbioru odebrany sygnał byłby rozproszony. Metoda ta może służyć do przeprowadzania nieniszczących testów obiektów o znanej charakterystyce przejścia. W sytuacji w której w strukturze nie będzie żadnych uszkodzeń otrzymywany sygnał będzie skompensowany. Natomiast gdy pojawią się uszkodzenia, nieciągłości w strukturze spowodują odbicie fali i skrócenie ścieżki propagacji co da informację o uszkodzeniach.

## 4.4. Metoda mapowania liniowego przy pomocy rozwinięcia w szereg Taylora

Prezentowana w poniższej sekcji metoda kompensacji dyspersji została w artykule [referencja do yuanliu](#)

### 4.4.1. Podstawy teoretyczne

Po wzbudzeniu badanego pręta odpowiednim sygnałem wejściowym możliwe jest aby przełączył się on w tryb obioru sygnału i nasłuchiwał nadajścia odpowiedzi układu. W takim wypadku odpowiedź jaką uzyskamy będzie sumą odpowiedzi ze wszystkich odbić, od końca pręta oraz ewentualnych uszkodzeń. Proponowana w tym rozdziale metoda opiera się na założeniu, że w badanym obiekcie propaguje jedna wybrana postać drgań. Jej celem jest kompensacja powstałej dyspersji, tak aby sygnały z różnych punktów odbicia nie nachodziły na siebie i była możliwa ich interpretacja w celu ustalenia ilości punktów odbicia oraz oszacowania ich odległości od miejsca wzbudzenia na podstawie znajomości prędkości grupowej fali. Przy tak sformułowanych założeniach, sygnał otrzymany w odbiorniku można przedstawić wzorem:

$$g(t) = \sum_{n=1}^N N f_n(r_n, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \sum_{n=1}^N (A_n(\omega) e^{-ikr_n}) e^{i\omega t} d\omega \quad (4.16)$$

Gdzie:

$N$  - całkowita liczba ścieżek propagacji sygnału (liczba punktów odbicia)

$r_n$  - długość  $n$ -tej ścieżki propagacji

$A_n$  - współczynnik odbicia  $n$ -tego punktu odbicia.

Widmo częstotliwości takiego sygnału  $G(\omega)$  możemy obliczyć przy pomocy transformaty Fouriera i zapisać wzorem:

$$G(\omega) = F(\omega) \sum_{n=1}^N (A_n(\omega) e^{-ikr_n}) \quad (4.17)$$

Jak wiadomo, dyspersja zależy od kształtu krzywej dyspersji,  $k = K(\omega)$ . Jeśli więc  $K(\omega)$  jest funkcją kwadratową lub wyższego rzędu względem  $\omega$ , to  $G(\omega)$  reprezentuje widmo częstotliwości rozproszonych pakietów fal. Jeśli natomiast zależność  $K(\omega)$  byłaby funkcją liniową, zjawisko dyspersji nie występowałoby, a  $G(\omega)$  reprezentowałoby widmo częstotliwości sygnału, który nie uległ dyspersji. Wybraną krzywą dyspersji można przybliżyć przy pomocy rozwinięcia w szereg Taylora:

$$k = K(\omega) - k_0 + k_1(\omega - \omega_0) + k_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (4.18)$$

Gdzie:

$$k_0 = \frac{\omega_0}{c_p}$$

$$k_1 = \frac{dk}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0}$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2 k}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0}$$

$c_p$  - prędkość fazowa

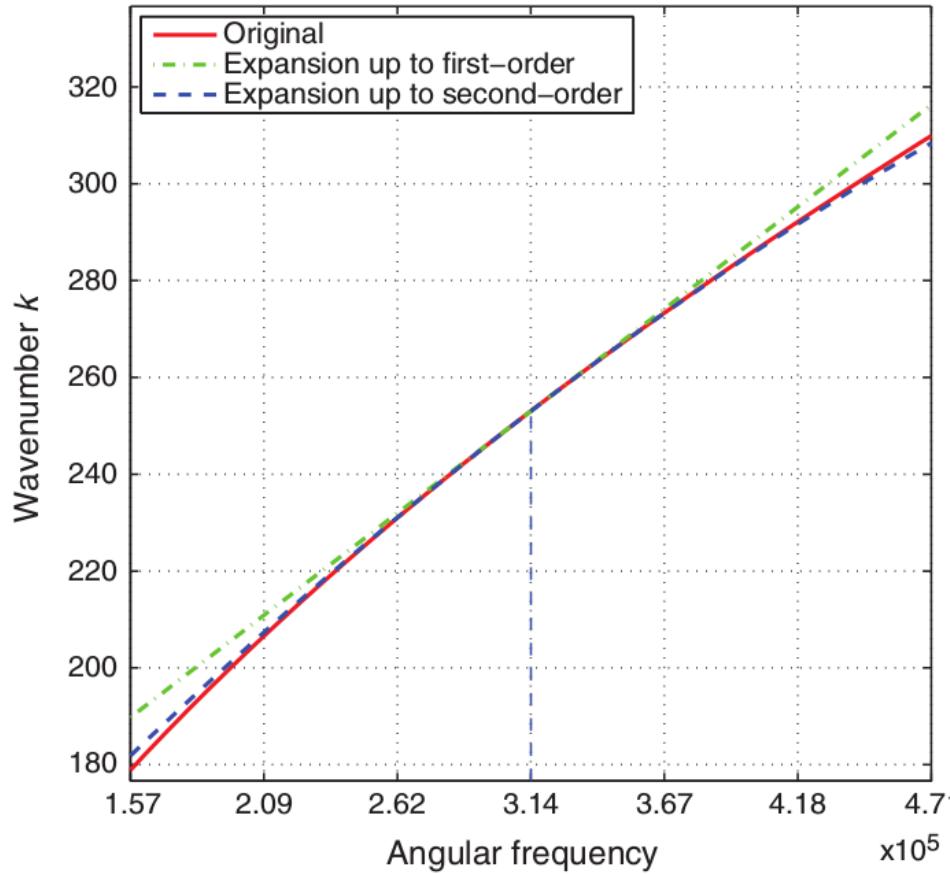
Wynika z tego, iż dyspersję sygnału można usunąć usuwając jej nieliniowy składnik, poprzez zastąpienie oryginalnej zależności  $K(\omega)$  liniowym przybliżeniem tej funkcji. Zastosowanie takiego zabiegu sprawi, iż sygnał w dziedzinie czasu będzie postrzegany jako skompensowany do postaci niedyspersyjnej, a prędkość grupowa obliczona z liniowego przybliżenia krzywej dyspersji może zostać wykorzystana do określenia długości ścieżek propagacji wynikających z kolejnych odbić.

W szczególnym przypadku, w którym mamy do czynienia z pojedyńczą ścieżką propagacji ( $N = 1$ ) i odległość między nadajnikiem a punktem odbicia jest znana, można usunąć dyspersję poprzez wyeliminowanie wyrażenia kwadratowego w  $K(\omega)$ . Matematycznie można to zrobić przy pomocy wzoru:

$$\tilde{G}(\omega) = (F(\omega)A_1(\omega)e^{-ikr_1})e^{ik_2(\omega-\omega_0)^2r_1} \quad (4.19)$$

Gdzie  $\tilde{G}(\omega)$  jest zmodyfikowanym widmem częstotliwości, a  $r_1$  jest odległością między nadajnikiem i odbiornikiem. Sygnał skompensowany w dziedzinie czasu można natychmiast uzyskać poprzez odwrotną transformatę Fouriera. Ponieważ jednak zazwyczaj długość ścieżki propagacji sygnału nie jest znana, a sygnał może składać się z wielu odbić, między innymi od uszkodzeń ( $N > 1$ ) usuwanie dyspersji przy pomocy powyższego wzoru byłoby niepraktyczne.

Rysunek 4.8 obrazuje przykład krzywej dyspersji, trybu  $A_0$ , płyty aluminiowej o grubości 3,175 mm. Linia ciągła pokazuje zależności  $K(\omega)$  uzyskaną metodami komputerowymi, natomiast linia przerywana kropkowana wskazuje z rozwinięcie szeregu Taylora pierwszego rzędu, a linia przerywana rozszerzenie szeregu Taylora drugiego rzędu w odniesieniu do centralnej częścią kątowej ( $\omega_0 = 2\pi * 50kHz$ )



**Rys. 4.8.** Przykładowe porównanie oryginalnej krzywej oraz jej przybliżeń przy pomocy rozwinięcia w szereg Taylor'a

Łatwo zauważyc, że po pierwsze, rozszerzenie drugiego rzędu daje bardzo dobrze przybliżenie pierwotnego kształtu krzywej, po drugie,  $K(\omega)$  jest monotoniczną funkcją  $\omega$  w okolicy  $\omega_0$ .

Równanie 4.17 można zapisać w postaci złożenia funkcji:

$$G(\omega) = G(k) \circ K(\omega) \quad (4.20)$$

Gdzie  $\circ$  jest operatorem składania funkcji.  $G(k)$  jest niejawną funkcją  $k$  z równania 4.17. Zamieniając  $K(\omega)$  na  $K_{lin}(\omega)$  będące aproksymacją  $K(\omega)$  pierwszego rzędu w punkcie  $\omega_0$ , gdzie  $\omega_0$  oznacza częstotliwość o najwyższej energii, można wyprowadzić zmodyfikowane widmo częstotliwości:

$$\tilde{G}(\omega) = G(k) \circ K_{lin}(\omega) \quad (4.21)$$

Ponieważ  $G(\omega)$  jest znane oraz znana jest analizowana krzywa dyspersji, znane jest również  $G(k)$ , obliczając przybliżenie liniowe  $K_{lin}(\omega)$  można w prosty sposób obliczyć  $\tilde{G}(\omega)$ , poprzez interpolację odpowiednich wartości. Opisana metoda może być określana

mianem mapowania liniowego. W jej efekcie uzyskane zostaje nowe widmo częstotliwości  $\tilde{G}(\omega)$ . Po mapowaniu widmo amplitudy pozostaje bez zmian, natomiast widmo fa

# 5. Aplikacja do obliczeń numerycznych

W tym rozdziale przedstawione są wszystkie niezbędne informacje potrzebne do korzystania ze zbudowanej na potrzeby projektu aplikacji. Aplikacja napisana jest w skryptowym języku Python. W projekcie skorzystano z gotowej paczki bibliotek Anaconda, zawierającej też potrzebny do uruchamiania programów interpreter języka. IDE wykorzystanym do tworzenia projektu jest PyCharm. Anaconda jak i wersja Community programu PyCharm są całkowicie darmowe dla zastosowań niekomercyjnych. W dalszej części rozdziału przedstawiony jest sposób instalacji i konfiguracji środowiska dla systemu Windows 8 64-bit.

Aplikacja składa się z dwóch głównych części. Pierwsza obejmuje obliczanie modelu MES oraz wyznaczanie krzywych dyspersji i wzbudzalności na podstawie obliczonego modelu, a druga pozwala symulować propagację fali oraz metody kompensacji dyspersji. Każdy plik z rozszerzeniem .py zawierający kod w Pythonie nazywa się modułem. Każda ze wspomnianych części aplikacji składa się z kilku modułów. Oprócz tego jest kilka modułów z funkcjami pomocniczymi wykorzystywanymi w głównych częściach programu. Wszystkie moduły zostaną omówione w dalszej części rozdziału.

## 5.1. Instalacja i konfiguracja środowiska

### 5.1.1. Anaconda

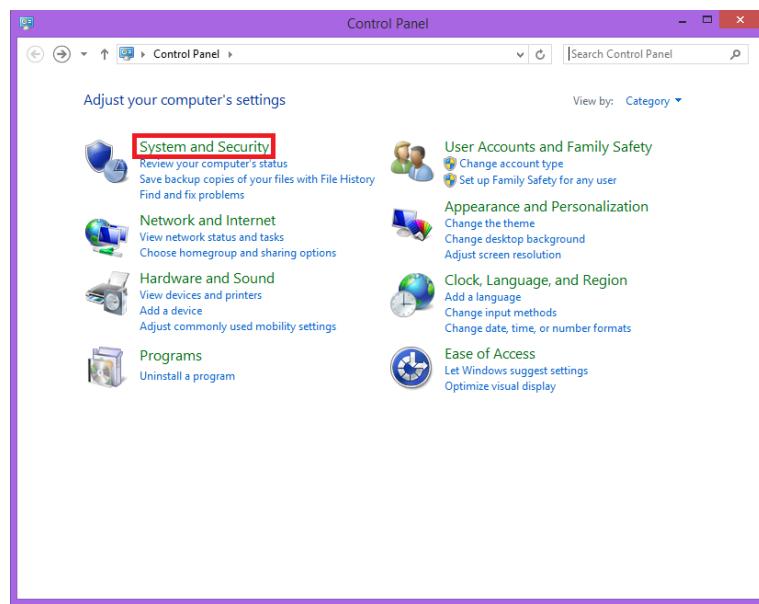
Instalację rozpoczynamy od interpretera Anaconda. Pliki instalacyjne pobrać można z oficjalnej strony Anacondy "<https://anaconda.org/anaconda/python>". Na stronie powiniśmy znaleźć pliki instalacyjne dla różnych systemów operacyjnych. Pobieramy plik odpowiedni dla naszego systemu. W omawianym przypadku będzie to win-64. Pliki instalacyjne zawarte są na płycie CD dołączonej do pracy.

Po zainstalowaniu Anacondy należy dodać jej ścieżkę do zmiennych systemowych. W tym celu wymagane są uprawnienia administratora. Poniżej znajdują się instrukcja dodawania ścieżki oraz sposób sprawdzenia czy Anaconda jest widoczna przez system.

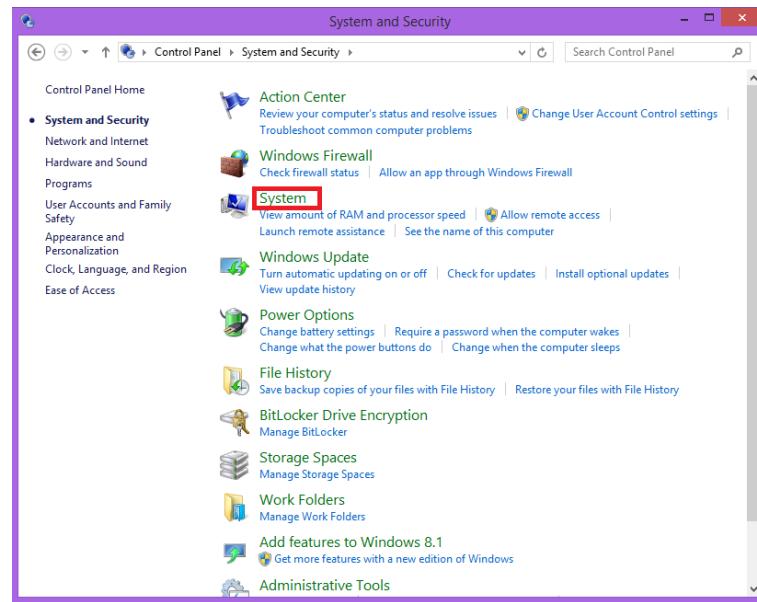
Otwieramy „Panel Sterowania” („Control Panel”). Wchodzimy w zakładkę „System i Zabezpieczenia” („System and Security”), rysunek 5.1, a następnie w „System”, rysunek 5.2. Z lewej strony klikamy „Zaawansowane ustawienia systemu” („Advanced system

settings”), rysunek 5.3, a następnie „Zmienne środowiskowe” („Environment variables”), rysunek 5.4. Znajdujemy zmienną „Ścieżka” („Path”), rysunek 5.5 i otwieramy ją przez dwukrotne kliknięcie myszką. Przesuwamy do końca tekst w nowo otwartym oknie i dopisujemy na końcu średnik, ścieżkę do folderu gdzie zainstalowaliśmy Anacondę, kolejny średnik i ścieżkę do folderu Scripts, który znajduje się w katalogu Anacondy, rysunek 5.6. Przykładowe ścieżki to ;F:\Programy\Anaconda;F:\Programy\Anaconda\Scripts. We wszystkich oknach które otworzyliśmy klikamy OK.

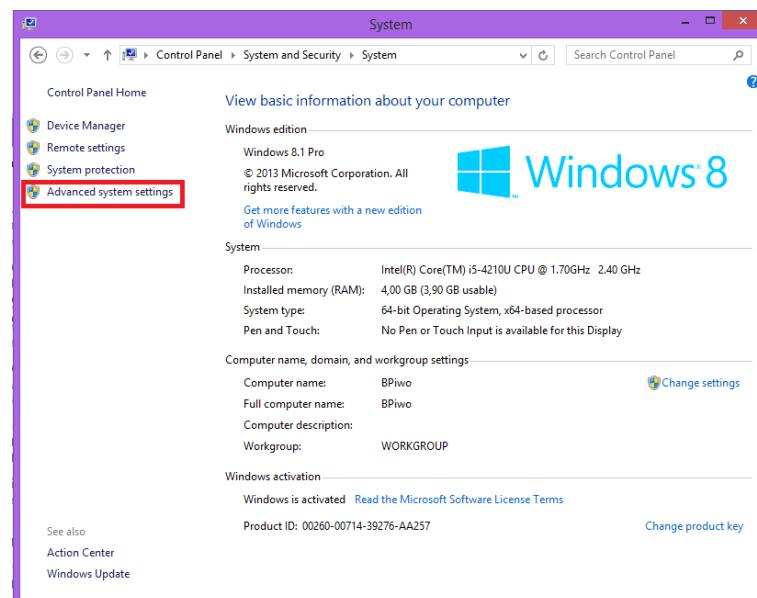
Aby sprawdzić czy całość operacji przebiegła pomyślnie należy otworzyć „Wiersz Poleceń” („Command Prompt”), np. poprzez kliknięcie symbolu Windows na klawiaturze, wpisanie „cmd” i otwarcie znalezionej aplikacji. W otwartym oknie wpisujemy komendę „conda”, rysunek 5.7. Jeśli jest ona rozpoznana to dostaniemy odpowiedź jak na rysunku 5.8. Jeśli komenda nie zostanie rozpoznana, należy sprawdzić poprzednie kroki oraz prawidłowość ścieżek dodanych do zmiennej „Path”.



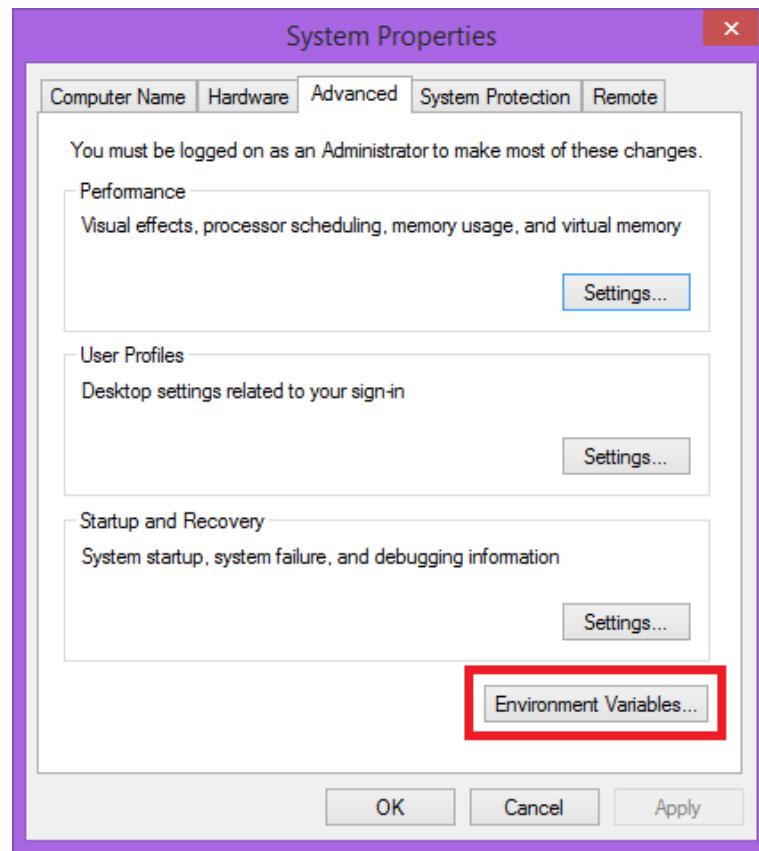
Rys. 5.1. Widok panelu sterowania



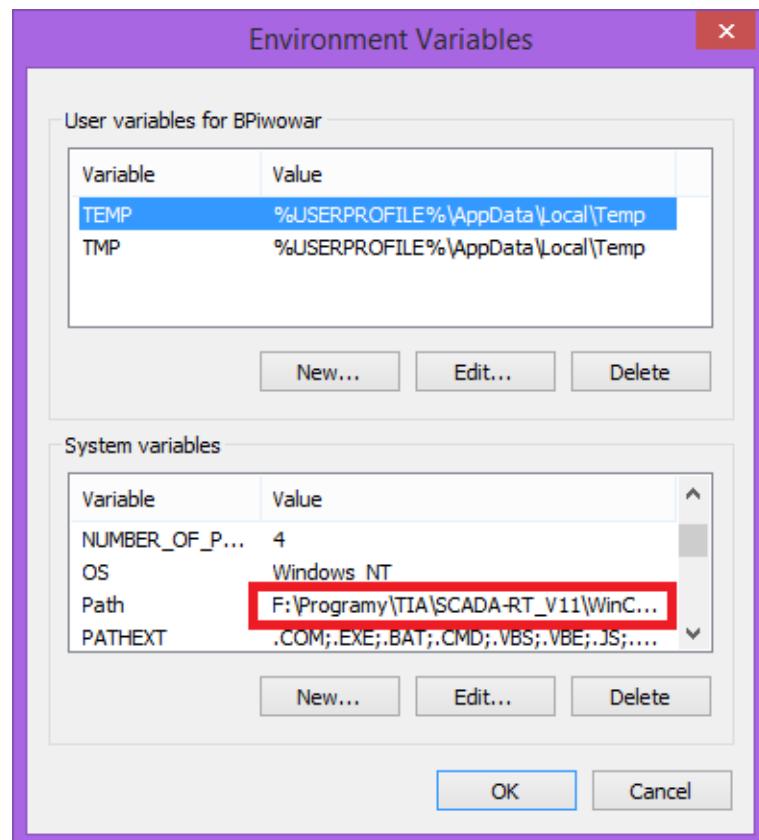
Rys. 5.2. Zakłada System i Zabezpieczenia



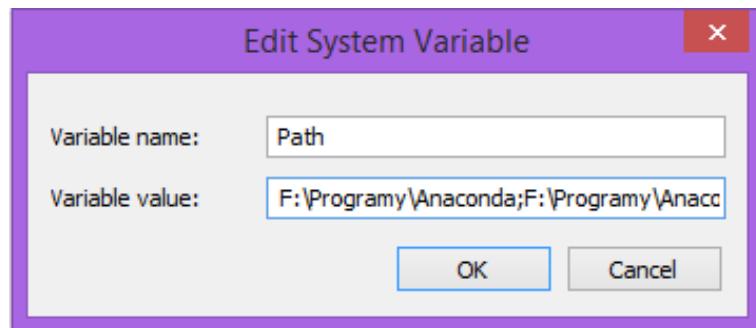
Rys. 5.3. Zakładka System



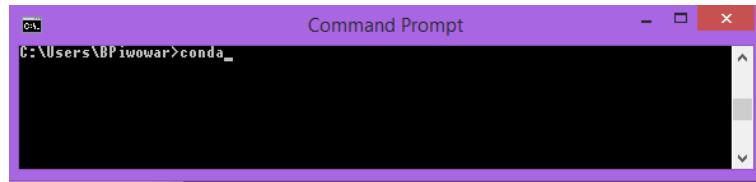
Rys. 5.4. Okno Zaawansowane ustawienia systemu



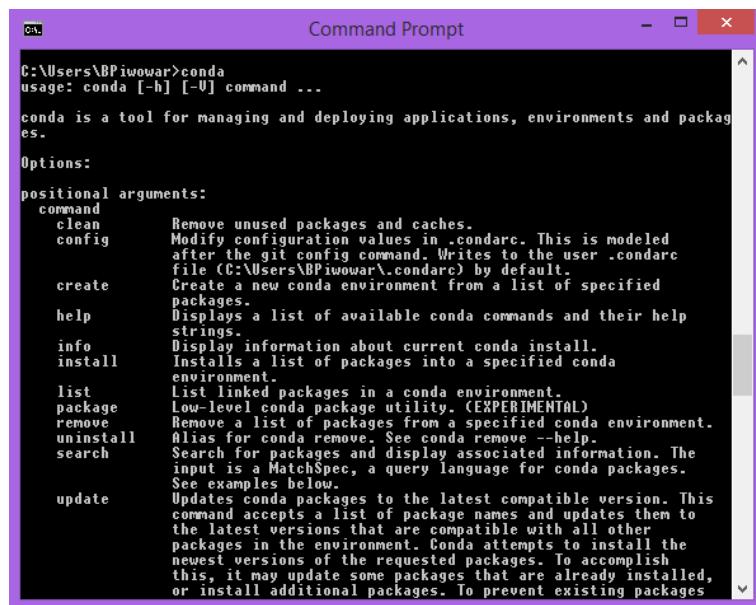
Rys. 5.5. Okno Zmienne środowiskowe



Rys. 5.6. Okno zmiennej Path



Rys. 5.7. Wiersz Poleceń

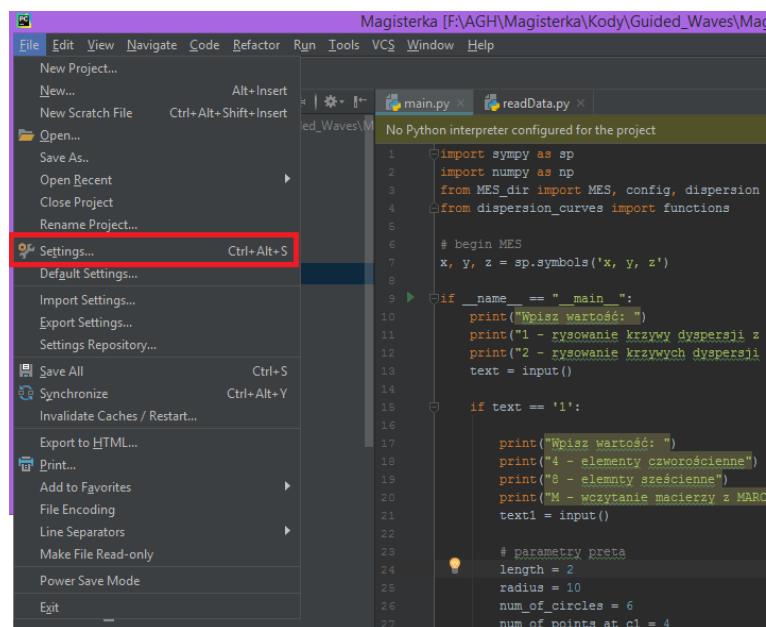


Rys. 5.8. Odpowiedź na komendę „Conda”

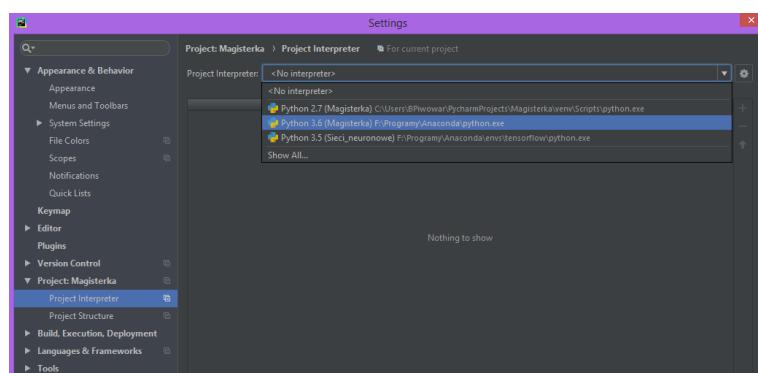
## 5.1.2. PyCharm

IDE wykorzystywany w projekcie jest PyCharm. Program jest dostępny do pobrania pod linkiem <https://www.jetbrains.com/pycharm/download/#section=windows>. Dodatkowo plik instalacyjny jest zamieszczony na płycie CD dołączonej do pracy. Po zainstalowaniu programu, można otworzyć projekt aplikacji w standardowy sposób tj. File -> Open. W oknie, które się otworzy należy wskazać katalog projektu.

Ostatnia rzecz dotycząca konfiguracji to ustawienie aktywnego interpretera dla projektu. W tym celu wchodzimy należy wejść w ustawienia („Settings”), rysunek 5.9. Następnie otwieramy zakładkę „Project”, klikamy na „Project interpreter” i w pasku wyboru na górze wybieramy interpreter ze ścieżką, gdzie zainstalowaliśmy Anacondę, rysunek 5.10.



Rys. 5.9. Okno główne projektu w programie PyCharm

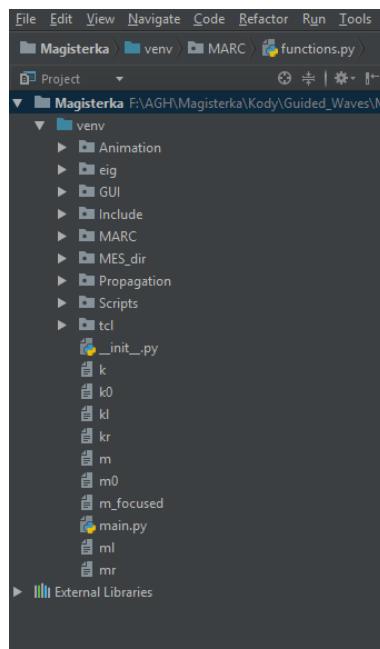


Rys. 5.10. Wybór interpretera

## 5.2. Obliczenia MES i wyznaczanie krzywych dyspersji oraz wzbudzalności

W tej sekcji przedstawione są kolejno sposoby tworzenia siatki węzłów, budowy elementów skończonych, wyznaczania lokalnych i globalnych macierzy modelu MES pręta i wyznaczani krzywych dyspersji oraz wzbudzalności. Program umożliwia tworzenie modelu MES z wykorzystaniem elementów czworościennych oraz sześciennych. Krzywe dyspersji oraz wzbudzalności można wyznaczyć z obliczonego modelu, ale jest też opcja wczytania danych modelu z programu MARC.

Strukturę projektu przedstawia rysunek 5.11. Implementacja zagadnień związanych z obliczeniami MES oraz wyznaczaniem krzywych dyspersji z obliczonego modelu znajduje się w katalogu MES\_dir. Katalog MARC zawiera funkcje umożliwiające wczytanie danych z programu MARC i na ich podstawie wyznaczeniu krzywych dyspersji.

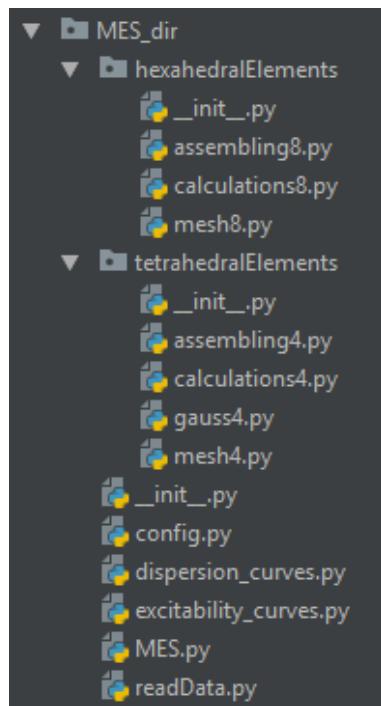


Rys. 5.11. Widok okna projektu

### 5.2.1. Elementy czworościennne

Zawartość katalogu MES dir przedstawia rysunek 5.12. Obliczenia dotyczące elementów czworościennych zawarte są w modułach katalogu tetrahedralElements. Poniżej znajdują się funkcje poszczególnych modułów, wraz z opisem ich zastosowania, argumentami wejściowymi oraz wyjściowymi.

**Moduł mesh4.** Dane zbierane w postaci macierzy są najczęściej tablicami array z biblioteki NumPy, która służy do obliczeń numerycznych. W części modułów obliczenia są



Rys. 5.12. Widok okna projektu

prowadzone na zmiennych symbolicznych z wykorzystaniem biblioteki SymPy. Macierzy zmiennych symbolicznych są obiektami Matrix z tej biblioteki.

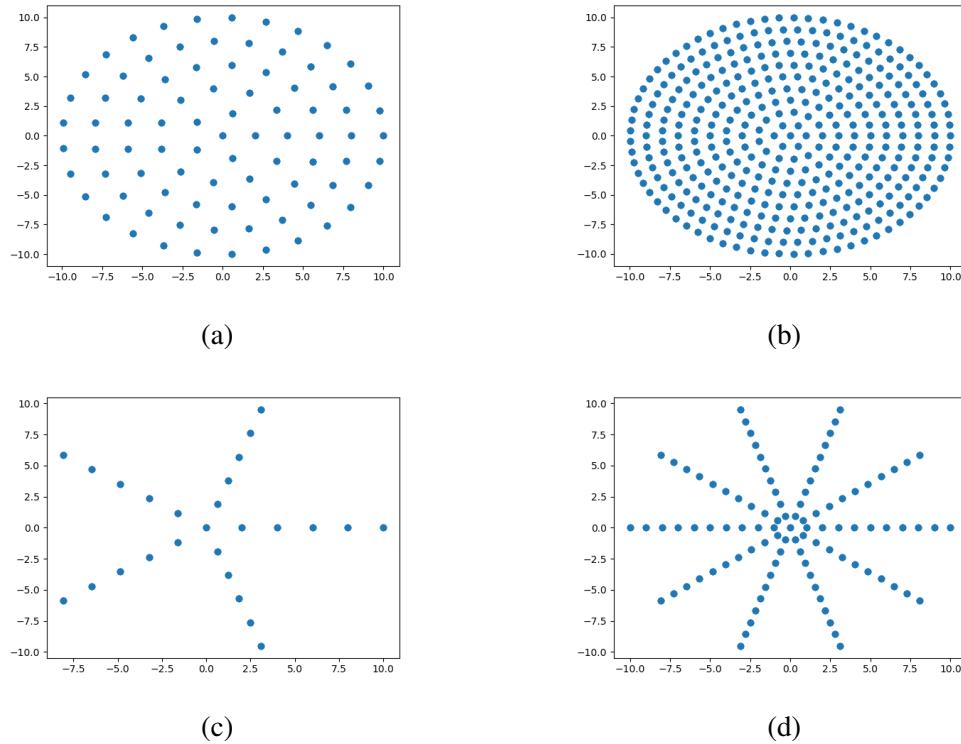
*circlePlaneVerticies(x, radius, numberOfPoints)* - funkcja wykorzystywana przy tworzeniu siatki (w *circleMeshFull* oraz *circleMeshSparse*). Dodaje do siatki węzły na okręgu w płaszczyźnie pręta na długości x. Promień okręgu określa radius, a ilość węzłów na okręgu to *numberOfPoints*.

*circleMeshFull(radius, numberOfCircles, numberOfPoints)* - funkcja tworzy siatkę na trzech płaszczyznach przesuniętych o 1 we współrzędnej x. Siatka zbudowana jest na każdej płaszczyźnie tak samo i zawiera węzeł centralny oraz okręgi z węzłami w ilości *numberOfCircles*. Na każdym okręgu liczba węzłów jest większa, aby zapewnić możliwie równe odległości pomiędzy węzłami. Pierwszy okrąg zawiera liczbę węzłów *numberOfPoints*. Zwraca tablicę o wymiarach n x 3, gdzie n to liczba węzłów. W kolumnach są kolejne współrzędne węzłów.

*circleMeshSparse(radius, numberOfCircles, numberOfPoints)* - jak wyżej, z tą różnicą, że każdy okrąg siatki ma tyle samo węzłów.

*triangulation(vertices)* - funkcja tworzy elementy skończone czworościenne. Przyjmuje macierz węzłów z powyższych funkcji i zwraca tablicę e x 4, gdzie e to liczba elementów. W kolumnach zawarte są indeksy węzłów z macierzy wejściowej, które należą do danego elementu.

*correctVolumeSign(vertices, indices)* - funkcja sprawdza czy objętość elementu skończonego obliczona za pomocą wyznacznika ma dodatnią wartość. Jeśli nie, to zmienia miejscami dwa indeksy elementu w macierzy zwróconej z *triangulation(vertices)*.



**Rys. 5.13.** Układ siatki węzłów na płaszczyźnie powstających z a) `circleMeshFull(10, 5, 5)` b) `circleMeshFull(10, 10, 10)` c) `circleMeshSparse(10, 10, 10)` d) `circleMeshSparse(10, 10, 10)`

`drawPlane(vertices)` - funkcja przyjmuje macierz węzłów i rysuje ich układ na płaszczyźnie. Przykładowe układy przedstawione są na rysunku 5.13.

`drawBar(vertices)` - funkcja przyjmuje macierz węzłów i rysuje wszystkie węzły w rzucie izometrycznym. Przykład przedstawia rysunek 5.14.

`drawTriangulation(vertices, indices)` - funkcja przyjmuje macierz węzłów i macierz elementów skończonych. Rysuje elementy skończone w rzucie izometrycznym. Przykład przedstawia rysunek 5.15.

#### Moduł calculation4.

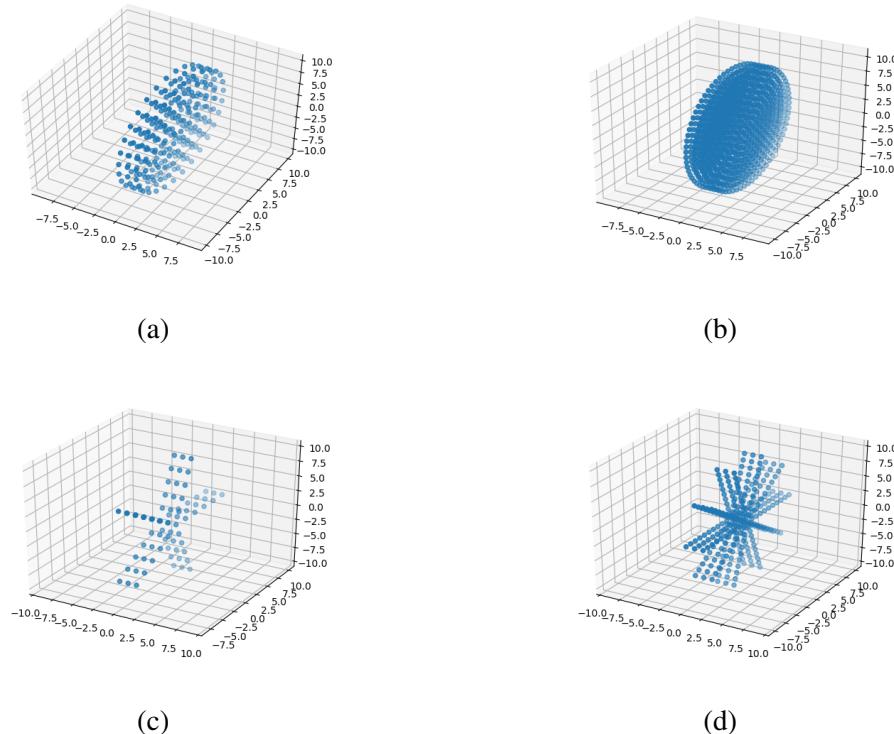
`pVector()` - funkcja zwraca macierz zmiennych symbolicznych z wektorem p dla elementu czworościeniowego, przykład podany jest w ??.

`meMatrix(vertices, elementIndices)` - funkcja przyjmuje macierz węzłów oraz indeksy dla węzłów elementu skończonego i zwraca macierz  $M^e$ .

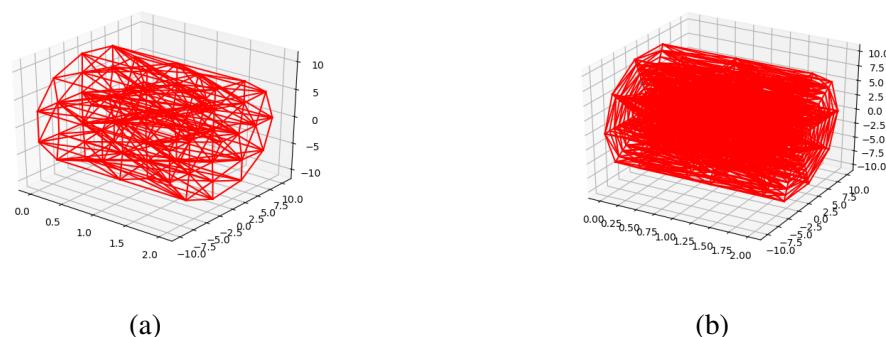
`meInvMatrix(vertices, elementIndices)` - jak powyżej, dodatkowo odwraca macierz wyjściową.

`shapeFunctions(vertices, elementIndices)` - funkcja przyjmuje macierz węzłów i indeksy dla węzłów elementu skończonego, a zwraca funkcje kształtu w formie tablicy zmiennych symbolicznych.

`bMatrixFc(shapeFunctions)` - funkcja przyjmuje tablicę funkcji kształtu w postaci symbolicznej a zwraca macierz B w postaci tablicy numerycznej. Funkcje kształtu są dla



**Rys. 5.14.** Układ siatki węzłów pręta z a)  $circleMeshFull(10, 5, 5)$  b)  $circleMeshFull(10, 10, 10)$  c)  $circleMeshSparse(10, 10, 10)$  d)  $circleMeshSparse(10, 10, 10)$



**Rys. 5.15.** Triangulacja (elementy skończone) dla siatki a)  $circleMeshFull(10, 3, 3)$  b)  $circleMeshSparse(10, 10, 10)$

elementów czworościennych liniowe więc ich pochodne są stałymi. Przykład macierzy podany jest w ??.

*bMatrixNatural(shapeFunctions)* - jak powyżej, ale dla tablicy funkcji kształtu we współrzędnych naturalnych.

*dMatrixFc(youngModulus, poissonCoeficient)* - funkcja zwraca macierz D, obliczoną na podstawie stałych materiałowych.

*stiffLocalMatrix(shapeFunctions, vertices, elementIndices, youngModulus, poissonCoefficient)* - funkcja przyjmuje jako argumenty funkcje kształtu w formie symbolicznej, macierz węzłów, indeksy węzłów elementu skońzonego oraz moduł Younga i współczynnik Poissona. Zwraca macierz sztywności dla elementu skońzonego.

*massLocalMatrix(density)* - funkcja przyjmuje gęstość materiału. Zwraca macierz mas obliczoną we współrzędnych naturalnych bez uwzględnienia jakobianu. Na tym etapie nie jest to więc poprawnie wyznaczona macierz mas. Jakobian jest stały dla elementów czworościennych i uwzględniany jest na etapie agregacji. Pozwala to obliczyć całkę ?? raz, a następnie mnożyć ją dla każdego elementu przez jakobian.

*volume(elementVertices)* - funkcja przyjmuje węzły elementu i oblicza objętość elementu z wykorzystaniem geometrii analitycznej.

*volumeDet(vertices)* - jak powyżej z tym, że objętość jest obliczana za pomocą wyznacznika macierzy  $M^e$ .

**Moduł gauss4.** Moduł zawiera funkcje pomocnicze do całkowania macierzy mas. Obliczanie macierzy sztywności nie wymaga całkowania, ponieważ macierz B jest stała.

*shapeFunctionsNatural()* - zwraca tablicę funkcji kształtu we współrzędnych naturalnych, w formie symbolicznej.

*coordinateChangeModel(elementVertices, naturalShapeFc)* - funkcja przyjmuje funkcje kształtu we współrzędnych naturalnych oraz współrzędne węzłów elementu skońzonego i oblicza zależność współrzędnych rzeczywistych i naturalnych. Zwraca trzy wyrażenia symboliczne zawierające współrzędne naturalne. Przedstawiają one współrzędne rzeczywiste, kolejno x, y, z.

*jacobian(elementVertices, naturalShapeFc)* - funkcja przyjmuje współrzędne węzłów elementu skońzonego oraz funkcje kształtu we współrzędnych naturalnych. Zwraca jakobian przekształcenia, który jest wykorzystywany w obliczaniu macierzy mas.

*matrixToIntegrate(density)* - zwraca macierz podcałkową, do obliczania macierzy mas. Nie uwzględnia jakobianu, który jest stały. Wynik całkowania jest mnożony przez jakobian na etapie agregacji.

**Moduł assembling4.** Moduł zawiera funkcje do obliczania macierzy globalnych. Pozwala też na wizualizację rzadkości macierzy.

*assembleGlobalStiffMatrix(vertices, indices, youngModulus, poissonCoefficient)* - funkcja przyjmuje macierz węzłów konstrukcji, indeksy wszystkich elementów, moduł Younga i współczynnik Poissona. Zwraca globalną macierz sztywności.

*drawMatrixSparsity(matrix)* - funkcja pozwala rysować rzadkość macierzy w postaci bitmapy, gdzie każdy element macierzy jest jednym pikselem.

*assembleGlobalMassMatrix(vertices, indices, density)* - funkcja przyjmuje macierz współrzędnych węzłów konstrukcji, indeksy wszystkich elementów skończonych oraz gęstość materiału. Zwraca globalną macierz mas.

*focuseMatrixRows(matrix)* - funkcja przyjmuje macierz. Zwraca macierz skupioną poprzez sumowanie elementów w wierszu i umieszczenie ich na diagonali. Wykorzystywana przy obliczeniach ze skupioną macierzą mas.

## Załączniki

## A. Lorem Ipsum

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Fusce aliquet consequat sollicitudin. Nam nec eros ut dolor vulputate maximus. Vivamus quis neque sed orci cursus ornare. Proin vel elit eros. Duis efficitur mi tempus mi volutpat ullamcorper. Vestibulum consectetur dictum dui, ac suscipit eros aliquet ac. Quisque at dignissim mauris. Nulla non finibus nunc. In hac habitasse platea dictumst. Donec semper in nunc eget ultricies. Fusce varius scelerisque cursus. Vestibulum a sem lobortis, pretium nibh quis, pharetra justo.

Mauris turpis nunc, dignissim ac fringilla quis, dignissim sed dui. Cras porttitor congue nulla, vitae hendrerit ligula hendrerit vel. Donec lorem lectus, tempor a feugiat et, ultrices at augue. Suspendisse ultricies massa vitae pellentesque accumsan. Phasellus sollicitudin hendrerit lorem, lobortis aliquet nibh tristique a. Etiam nec tempus enim. Aenean diam nibh, pretium tincidunt malesuada vitae, laoreet non orci. Fusce dictum feugiat eros in malesuada. Sed vel ligula nunc. Donec nec hendrerit mauris. Sed accumsan quis quam vitae interdum. Praesent nec arcu est. Donec cursus nisi vitae ligula pharetra, quis sagittis felis dignissim.

Nunc a dapibus elit, nec iaculis erat. Suspendisse eleifend neque ac odio volutpat vulputate. Etiam varius odio quis leo aliquam, ac laoreet turpis vulputate. Donec rutrum pulvinar odio, vitae maximus ipsum bibendum a. Curabitur euismod erat a cursus vehicula. Aenean quis quam vulputate, consequat erat vitae, molestie felis. Morbi gravida nulla vitae leo hendrerit iaculis. Donec lobortis, quam ac ultrices aliquam, purus lectus tempus enim, et dictum nunc tortor vitae ligula. Aliquam volutpat bibendum nulla, non elementum nunc congue ut. Aenean mattis arcu in velit faucibus, vel eleifend nibh imperdiet. Etiam eget gravida nulla, quis varius sapien.

Donec bibendum commodo mi, vel interdum neque mattis nec. Suspendisse potenti. In lectus elit, accumsan non purus quis, viverra eleifend ipsum. Sed vel ex sed dolor consectetur scelerisque. Praesent id leo ultrices eros ornare accumsan. Mauris pharetra justo at tortor scelerisque mattis. Quisque eu risus vitae mi tristique pulvinar eget et nisi. Praesent a nibh vitae nunc aliquet laoreet eu eu massa. Sed aliquet mollis cursus. In erat nisl, suscipit eget justo id, euismod pellentesque nulla.