

TPPMark 2025

Keisuke Nakano

September 15, 2025

以下の問題を定理証明支援系を用いて形式化し、証明を記述してください。
Formalize the following problem and give your proof on a proof assistant.

問題

$n \geq 1$ を整数とする。同じサイズの立方体型ランプを隙間なく n^3 個並べて、全体として $n \times n \times n$ の大きな立方体を作る。すると、その外面には各面に $n \times n$ 個、計 $6n^2$ 個の小正方形（外側に見えているランプの外面）が現れる。各ランプは on/off のいずれかの状態をもち、外面の小正方形のうち一つを押すと、その小正方形とちょうど反対側にある小正方形を結ぶ直線上^{†1} の n 個のランプだけが同時に反転（on \leftrightarrow off）する。

全ランプの on/off の状態が与えられたとき、上記の操作の繰り返しのみですべてのランプを off にできるための必要十分条件をなるべく簡潔に記述し、その条件の正しさを証明せよ。

—

^{†1} 追記 (2025/9/16): 「その小正方形とちょうど反対側にある小正方形を結ぶ直線上」は「その小正方形を垂直に貫通する直線上」の意です。

Problem

Let $n \geq 1$ be an integer. Arrange n^3 identical cube-shaped lamps tightly, forming a large $n \times n \times n$ cube. On each outer face, an $n \times n$ grid of small squares (the exposed faces of the lamps on that face) is visible, for a total of $6n^2$ squares. Each lamp is either on or off. When one of the small squares on the outer surface is pressed, the n lamps on the straight line joining the pressed square and the square directly opposite it on the far face toggle simultaneously (on \leftrightarrow off)^{†2}.

Given the on/off configuration of all lamps, describe as concisely as possible a necessary and sufficient condition on the configuration to be turned off by repeated applications of the above operation, and prove the correctness of the condition.

—

^{†2} Addendum (September 16, 2025): “on the straight line joining the pressed square and the square directly opposite it on the far face” means “on the line perpendicular to the pressed square.”