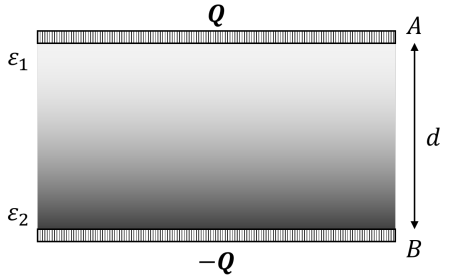
電磁気学 I 演習 2025年5月30日（金）7回目

レポート締切(Moodleに提出)：**2025年6月12日(木)23:59**



1. 図のような誘電率が一方の極板Aのところでε_1で、それから距離に比例して増加し他方の極板Bのところでε_2になるように誘電体を詰めた間隔dで極板面積Sの平行平板コンデンサを考える。ただし電極の端での電場の乱れを無視する。
   (i). 電荷Qの真電荷を電極Aに与え、電荷$-Q$の真電荷を極板Bに与えたとき極板Aから距離xでの電場を求めよ。
   (ii). 次に極板間の電位差Vを求め、この平行平板コンデンサの静電容量Cを求めよ。
   (iii). このコンデンサを時刻$t = 0$で抵抗Rを持つ外部抵抗で極板A、Bをつなぎ、放電させた。時刻tに流れる電流$I(t)$を求めよ。
   (iv). 放電が完了するまでに抵抗で消費されたエネルギーははじめにコンデンサに蓄えられていたエネルギーに等しいことを示せ。

2. [レポート課題]

(i). 透磁率μ_0の真空中に図 1 のような半径 a の円形コイルに定常電流 I が流れている。コイルの中心軸上の点 P の磁束密度$\boldsymbol{B}$を求めよ。ここで、コイルの中心 O を座標の原点とし、bを原点から点 P までの距離とする。

(ii). 半径aの小さな回路に定常電流 I が流れている時、回路から十分離れた点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg a)$ に生じる磁束密度を求めよ。

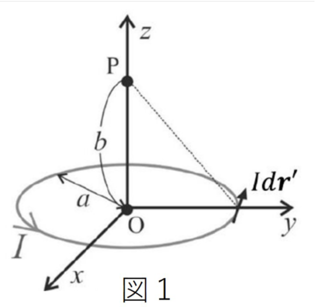


図 1

3. [レポート課題] 以下に従って、Biot-Savartの法則を導出せよ。定常電流が流れている状態では、磁場$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$について以下のMaxwell方程式が成り立つ。

$$\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = 0. \tag{2}$$

但し、μ_0を真空の透磁率、$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$を電流密度とする。ここで、ベクトルポテンシャルと呼ばれる$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$を

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

によって導入する。この時、以下の問に応えよ。

(i) 式(3)が式(2)を満たしていることを確かめよ。

(ii) 磁場$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$は、任意のスカラー関数$\lambda(\boldsymbol{x})$を用いたベクトルポテンシャル: $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + \nabla\lambda(\boldsymbol{x})$ の変換に対して不変であることを確かめよ。また、この事実を用いて、ベクトルポテンシャルは $\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = 0$と出来ることを示せ。

(iii) 問(ii)の結果を考慮し、式(1)を$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$を用いて表わせ。そして、得られた方程式を解き、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$を求めよ。(Hint：演習第４回大問１)

(iv) 問(iii)の結果から、以下のBiot-Savartの法則を導出せよ。

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}') \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|^3} d^3\boldsymbol{x}'. \tag{4}$$