# 光回折

※ 実験中、レーザーからの出た光が絶対に直接目に入ることのないように細心の注意を払うようにしてください。

※ gnuplot の実行環境については、各自で事前に準備してみることを推奨します。

## （1） 概　　要

回折・干渉現象を理解するため、スリットによるレーザー光の回折強度を測定する。具体的には、各自で作成した単スリット・複スリットを用いて 1 次元回折強度分布を測定し、スリットの幅・間隔等を推定する。

課題 1：　単スリットを作成し、それによる光回折の強度分布を測定する。
課題 2：　複スリットを作成し、それによる光回折の強度分布を測定する。
課題 3：　測定された強度分布から、スリット幅やスリット間隔を推定し、実体顕微鏡による実測値と比較・考察する。

## （2） 光回折現象

図 1 のように、波数$k_0$の波が、スリットを有する一次元の壁を通して、距離$L$離れたスクリーンに投影されることを考える。スリット面上の点 P での位置を$X_{\mathrm{P}}$、スクリーン上の点 Q での位置を$X_{\mathrm{Q}}$で表し、点 P と点 Q の距離を$D$とすれば、スクリーン上に投影される回折光の振幅$F(X_{\mathrm{Q}})$は、スリット内の各点からの球面状の二次波（素元波）の和により得られる。したがって、各点での入射光の振幅を$A(X_{\mathrm{P}})$とすれば、

$$F(X_{\mathrm{Q}}) = \int_{\text{スリット部}} A(X_{\mathrm{P}}) \frac{\exp(\mathrm{i}k_0 D)}{D} dX_{\mathrm{P}}$$

と書ける。ここで、入射光が（少なくともスリット部程度の範囲において）均一である、すなわち、$A(X_{\mathrm{P}}) = A$ (const.)とすれば、上の式は、

$$F(X_{\mathrm{Q}}) = A \int_{\text{スリット部}} \frac{\exp(\mathrm{i}k_0 D)}{D} dX_{\mathrm{P}} \tag{1}$$

と書き変えられる。

いま、スリット面とスクリーン面の距離$L$が十分に大きいと仮定して、式(1)の被積分関数を近似する。まず分母について、$D \simeq L$とする近軸近似により、

$$F(X_{\mathrm{Q}}) = A \int_{\text{スリット部}} \frac{\exp(\mathrm{i}k_0 D)}{D} dX_{\mathrm{P}}$$

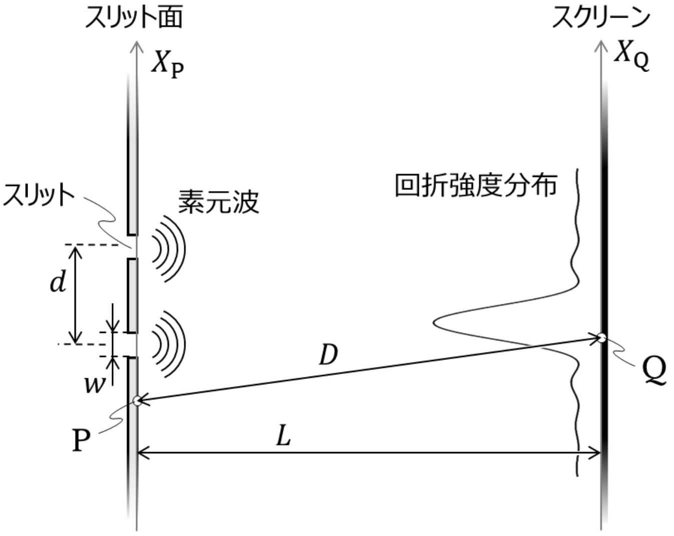

図 1. スリットによる光回折。

$$\simeq A\int_{\text{スリット部}}\frac{\exp(\mathrm{i}k_0 D)}{L}dX_\mathrm{P}=\frac{A}{L}\int_{\text{スリット部}}\exp(\mathrm{i}k_0 D)\,dX_\mathrm{P}$$

となり、比例係数として積分の外に出すことができる。次に位相項（expの中身）については、波数$k_0$との積が$2\pi$程度となり得ることから近軸近似では粗すぎるため、距離$D$の展開を考える。すなわち、

$$D=\sqrt{L^2+\left(X_\mathrm{P}-X_\mathrm{Q}\right)^2}=L\left\{1+\frac{1}{2}\frac{\left(X_\mathrm{P}-X_\mathrm{Q}\right)^2}{L^2}-\frac{1}{8}\left(\frac{\left(X_\mathrm{P}-X_\mathrm{Q}\right)^2}{L^2}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$\simeq L\left\{1+\frac{1}{2}\frac{\left(X_\mathrm{P}-X_\mathrm{Q}\right)^2}{L^2}\right\}=L\left(1+\frac{1}{2}\frac{X_\mathrm{P}^2}{L^2}+\frac{1}{2}\frac{X_\mathrm{Q}^2}{L^2}-\frac{X_\mathrm{P}X_\mathrm{Q}}{L^2}\right)$$

$$\simeq L+\frac{X_\mathrm{Q}^2}{2L}-\frac{X_\mathrm{P}X_\mathrm{Q}}{L}$$

とする。ここで 1 つ目の近似（フレネル近似）では、$\left(X_\mathrm{P}-X_\mathrm{Q}\right)/L$の 4 乗項が十分に小さいとして無視している。さらに 2 つ目の近似（フラウンホーファー近似）では、スリットの大きさが$L$と比較して十分に小さいとして、$X_\mathrm{P}/L$の 2 乗項を回折強度の計算から無視するものである。これらにより、

$$F\left(X_\mathrm{Q}\right)=\frac{A}{L}\int_{\text{スリット部}}\exp(\mathrm{i}k_0 D)\,dX_\mathrm{P}$$

$$\simeq\frac{A}{L}\int_{\text{スリット部}}\exp\left(\mathrm{i}k_0\left(L-\frac{X_\mathrm{P}X_\mathrm{Q}}{L}+\frac{X_\mathrm{Q}^2}{2L}\right)\right)dX_\mathrm{P}$$

$$=\frac{A}{L}\int_{\text{スリット部}}\exp\left(\mathrm{i}k_0\left(L+\frac{X_\mathrm{Q}^2}{2L}\right)\right)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{k_0X_\mathrm{Q}}{L}X_\mathrm{P}\right)dX_\mathrm{P}$$

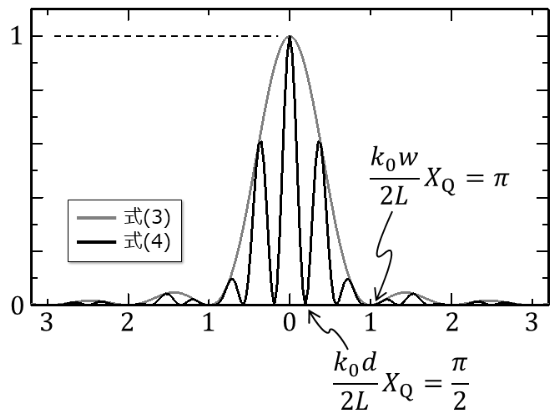


図 2. 単スリットおよび複スリットによる回折光の強度分布の概形。縦軸と横軸は、それぞれ、回折強度$\left|F(X_\mathrm{Q})\right|^2$とスクリーン上の位置$X_\mathrm{Q}$を規格化したもの。灰線と黒線が、それぞれ、単スリット（本文中の式(3)）と複スリット（本文中の式(4)）に相当する。

$$= \frac{A}{L}\exp\left(\mathrm{i}k_0\left(L + \frac{X_\mathrm{Q}^2}{2L}\right)\right)\int_{\text{スリット部}} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{k_0 X_\mathrm{Q}}{L} X_\mathrm{P}\right) dX_\mathrm{P}$$

$$\propto \int_{\text{スリット部}} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{k_0 X_\mathrm{Q}}{L} X_\mathrm{P}\right) dX_\mathrm{P} \tag{2}$$

となる。

実際に観測される回折強度の分布は、回折光の振幅$F(X_\mathrm{Q})$の絶対値の二乗$\left|F(X_\mathrm{Q})\right|^2$で求められる。たとえば、幅$w$のスリットが 1 つだけある場合、

$$F(X_\mathrm{Q}) \propto \int_{\text{スリット部}} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{k_0 X_\mathrm{Q}}{L} X_\mathrm{P}\right) dX_\mathrm{P} = \int_{-w/2}^{+w/2} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{k_0 X_\mathrm{Q}}{L} X_\mathrm{P}\right) dX_\mathrm{P}$$

であることから、

$$\left|F(X_\mathrm{Q})\right|^2 \propto \left(\frac{\sin\left(\frac{k_0 w}{2L} X_\mathrm{Q}\right)}{\left(\frac{k_0 w}{2L} X_\mathrm{Q}\right)}\right)^2 \tag{3}$$

である。同様の計算から、スリット間隔$d$でともにスリット幅$w$の複スリットの場合、

$$\left|F(X_\mathrm{Q})\right|^2 \propto \left(\frac{\sin\left(\frac{k_0 w}{2L} X_\mathrm{Q}\right)}{\left(\frac{k_0 w}{2L} X_\mathrm{Q}\right)}\right)^2 \cos^2\left(\frac{k_0 d}{2L} X_\mathrm{Q}\right) \tag{4}$$

となる。これらの回折強度分布の概形を図 2 に示す。

## （３）　スリットの作成

(a) 単スリット（図 3(a)）

2 枚のカッターの刃をわずかな隙間（目安としてはシャープペンシルの芯の半分程度）を開けてスライドガラス上に並べ、ビニールテープで固定する。スリットがスライドガラスの長辺と垂直になるように、かつ、2 枚の刃が平行になるように注意する。

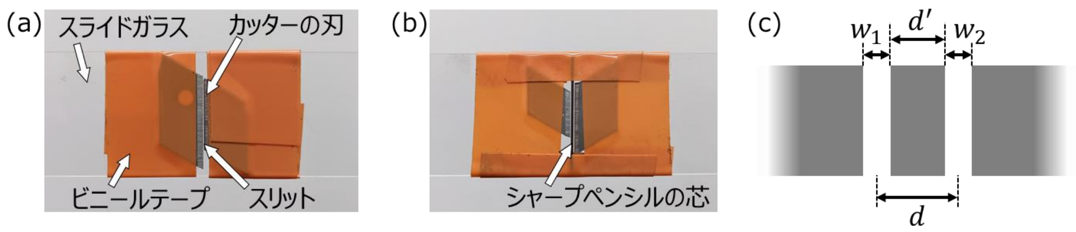


図 3. (a)単スリットの例。(b)複スリットの例。(c)スリット間隔$d$を示す模式図。$w_1$と$w_2$はスリット幅であり、$d'$はスリット間の幅。

(b) 複スリット（図 3(b)）

カッターの刃、シャープペンシルの芯、カッターの刃の順に、スライドガラス上に並べる。それぞれの間にわずかな隙間（目安としてはシャープペンシルの芯の 1/4 から 1/3 程度）を開け、ビニールテープで固定する。スリットがスライドガラスの長辺と垂直になるように、かつ、スリット幅が均一になるように注意し、2 つのスリット幅はできる限り同じにする。

## （4） 実体顕微鏡によるスリット幅およびスリット間隔の測定

マイクロメータでステージを動かし、その目盛の差からのついたスリット幅等を測定する。具体例として、以下に単スリットのスリット幅の測定手順を述べる。

まず、パソコンの画面上に顕微鏡の画像を表示できるようにする。スリットを画面に映し、スリット端にマウスカーソルを合わせる。マイクロメータの値を記録したのち、もう一方のスリット端がマウスカーソルの場所にくるまでマイクロメータでステージを動かす。マイクロメータの目盛の差をスリット幅とする。

複スリットにおけるスリット間隔$d$は、2 つのスリットの中心間距離とする。すなわち、図 3(c)のような複スリットにおいて、2 つのスリット幅$w_1, w_2$、および、スリット間の幅$d'$が測定されたとき、$d = w_1/2 + d' + w_2/2$となる。

## （5） 回折強度の測定

図 4(a)に回折強度測定の装置セットアップを示す。光源として He-Ne ガスレーザー(波長$632.8\ \mathrm{nm}$)を用いる。He-Ne レーザーから出た光は、鏡で反射され、スリットを通って回折されたのちに、フォトダイオードに入射する。フォトダイオードは入射した光の強度に比例して電流を生じさせるため、抵抗を介して電圧として測定することで、光の強度を測定できる（図 4(b)）[1]。そこで、マイクロメータを用いてフォトダイオードを少しずつ横に移動し、入射光の強度の変化を記録することで、強度分布の測定を行う。

---

[1] 本テーマでは、フォトダイオードとして TOSHIBA 製 TPS601A を用い、定電圧源からの出力は$3.0\ \mathrm{V}$、抵抗は$240\ \Omega$としている。

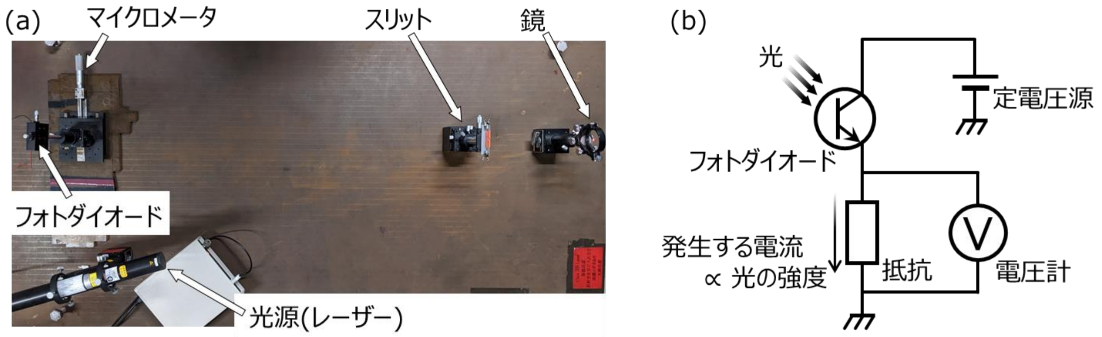

図 4. (a)回折強度測定の装置セットアップ。(b)光の強度測定の回路模式図。

## （６）　課題１：単スリットの作成と回折強度分布の測定

1. 単スリットを作成せよ。
2. 実体顕微鏡を用いて、作成した単スリットのスリット幅を測定せよ。測定は必ず複数回行い、それらの平均を最確値とする。
3. 作成した単スリットを用いて、光回折現象を観測し、回折強度分布を測定せよ。
    - レーザー光が単スリットの中央にあたるように、スリットの位置を調整する。
    - 30 点程度の測定で暗線が 2 回観測されるように、測定のステップ幅を決定する。
    - フォトダイオードからの信号が最大になる位置から 2 ステップ程度戻した位置から測定を行うことで、ピークの最大点を必ず測定する。
4. スリット-フォトダイオード間の距離を測定せよ。測定は必ず複数回行い、それらの平均を最確値とする。
5. 上記 2.と同様に測定を行い、スリット幅を確認せよ。

## （７）　課題２：複スリットの作成と回折強度分布の測定

1. 複スリットを作成せよ。
2. 実体顕微鏡を用いて、作成した 2 つのスリット幅とスリット間隔を測定せよ。それぞれの測定は必ず複数回行い、それらの平均を最確値とする。
3. 作成した複スリットを用いて、光回折現象を観測し、回折強度分布を測定せよ。
    - レーザー光が複スリットの中央にあたるように、スリットの位置を調整する。
    - 単スリットと比較して回折強度の変化が細かくなるので、ステップ幅は半分程度にする。すなわち、60 点程度の測定で式(4)の$\sin$による暗線が 1 回は観測されるように、測定のステップ幅を決定する。
    - フォトダイオードからの信号が最大になる位置から 2 ステップ程度戻した位置から測定を行うことで、ピークの最大点を必ず測定する。
4. スリット-フォトダイオード間の距離を測定せよ。測定は必ず複数回行い、それらの平均を最確値とする。
5. 上記 2.と同様に測定を行い、スリット幅およびスリット間隔を確認せよ。

## （８） 課題３： スリットの幅および間隔の推定

1. 単スリットおよび複スリットによる回折強度分布が、それぞれ、式(3)および式(4)となる。これを、式(2)を計算することで示せ。このとき、途中式を省略しないこと。
2. 式(3)から明らかである通り、単スリットによる回折強度がゼロとなる（暗線）の条件は $(k_0 w/2L)X_{\mathrm{Q}} = n\pi$ である。これを用いて、測定された回折強度分布から、単スリットのスリット幅を推定せよ。また、誤差の評価をせよ[2]。
3. 式(4)から明らかである通り、複スリットによる回折強度がゼロとなる（暗線）の条件は $(k_0 w/2L)X_{\mathrm{Q}} = n\pi$ もしくは $(k_0 d/2L)X_{\mathrm{Q}} = m\pi/2$ である。これを用いて、測定された回折強度分布から、複スリットのスリット幅およびスリット間隔を推定せよ。また、誤差の評価をせよ。
4. gnuplot の fit コマンドを用いて[3]、単スリットによる回折強度分布のフィッティングを行い、単スリットのスリット幅を推定せよ。また同様に、複スリットによる回折強度分布のフィッティングを行い、複スリットのスリット幅およびスリット間隔を推定せよ。
5. 上記の項目 2 および項目 4 で推定された単スリットのスリット幅を、実体顕微鏡で測定した値と比較し、考察せよ。また同様に、上記の項目 3 および項目 4 で推定された複スリットのスリット幅およびスリット間隔を、実体顕微鏡で測定した値と比較し、考察せよ。

gnuplot でのフィッティングは、式(3)および式(4)の形から、

$$y_{\mathrm{single}} = A\left(\frac{\sin\bigl(B(x-C)\bigr)}{B(x-C)}\right)^2, \qquad y_{\mathrm{double}} = A\left(\frac{\sin\bigl(B(x-C)\bigr)}{B(x-C)}\right)^2 \cos^2\bigl(D(x-C)\bigr)$$

という関数で行えばよい。

しかしながら、このままでは gnuplot に“Undefined value during function evaluation error during fit”というエラーが表示され、フィッティングに失敗することがある。これは、$x = C$ において、$y_{\mathrm{single}}$や$y_{\mathrm{double}}$の分母がゼロとなり、プログラム上で処理できないためである。このエラーを回避するためには、

$$f(x) = \begin{cases} A & (x = C) \\ y_{\mathrm{single}} \text{ or } y_{\mathrm{double}} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5}$$

と例外処理を定義した関数を用いる。

実際の gnuplot 上では、式(5)は三項演算子を用いて表現され、

```
gnuplot> f(x) = ( (x==c) ? a : ysingleもしくはydoubleの内容 )
```

となる。

---

[2] 本テーマ末の誤差の伝搬則も参考にするとよい。

[3] gnuplot および fit コマンドの使用方法は、本テキストの計算機技術のテーマに、簡単な説明がある。

## （９）　レポート提出

レポートは、内容を知らない人に対して説明するつもりで作成する。とくに、結果や考え方（考察の内容）を読者が再現可能かどうかを意識する。たとえば本テーマにおいては、まったく同じスリットを作成することは困難であるとしても、同一のスリットを使用すれば同じ結果を得られるか、どのような考察を経て、なぜそのような結論に至ったのかを、採点者が確認できることが重要である。

本テーマに関して、とくに注意すべき点を以下に挙げておく。

- レポートの構成は、一般的な実験レポートの形式[4]に沿うこと。
- 実験方法については、図を用いて説明すること。
- 提出するグラフは、タイトル（キャプション）や軸ラベル、凡例などを有しており、「グラフ」（図）として成立していること。
- 記載内容や提出するグラフは、判読可能であること。
- 文献等を参考にした場合は、引用元を記載すること。

最後に、本テーマの電子ファイルによる提出について、以下の通りとする。

- すべてのファイルをひとつの PDF ファイルにまとめて提出すること。

[4] レポートの構成・書き方は、たとえば自然科学総合実験を見返すとよい。

## マイクロメータの読み方

1. スリーブの主尺と副尺から、0.5 mm単位まで読む。
2. シンブルの値を読み、スリーブの値に加える。

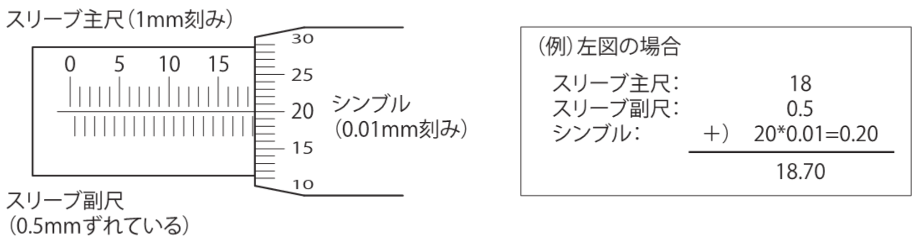


図 A. マイクロメータの読み方

## 互いに独立な偶然誤差の伝搬則

変数$x, y$についての関数$z(x, y)$があり、それぞれ独立な$x, y$の誤差$\sigma_x, \sigma_y$があるとき、$z$の誤差$\sigma_z$には

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2$$

の関係が成立する。したがって、単純な四則演算の形に対して、以下の通りとなる。

1. $z(x, y) = x \pm y$の場合：

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

2. $z(x, y) = xy$の場合：

$$\sigma_z = \sqrt{y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2}$$

3. $z(x, y) = x/y$の場合：

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{y^2} + \frac{x^2\sigma_y^2}{y^4}}$$

ここで、2.積や 3.商の場合に限って、相対誤差$\sigma_z/z$を計算すれば、

$$\frac{\sigma_z}{z} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

である。