ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 7
ПОСТРОЕНИЕ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ ФУНКЦИИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Компьютерная математика
БГУ, ММФ, 1 курс, КМ
доц. Малевич А.Э.,
доц. Щеглова Н.Л.
доц. Лаврова О.А.
октябрь 2021

Литература

1. Голубева Л.Л., Малевич А.Э., Щеглова Н.Л. Компьютерная математика. Символьный пакет *Mathematica*. Лаб. практикум в 2 ч. Ч 1. – Минск: БГУ, 2012. – 235 с.

Требуется обучить *Mathematica* вычислению производных функций одной переменной.

Задание 1. Знакомство с принципами построения правил преобразований

Ознакомьтесь с принципами построения пользовательской функции **`integrate`**, которая описана в системе справки *Mathematica.* Для поиска необходимой информации наберите в строке поиска справочной системы tutorial/AnExampleDefiningYourOwnIntegrationFunction.

Выполнение задания 1

При построении функции **`integrate`** используется механизм глобальных правил преобразований. Глобальные правила преобразований определяются посредством семейства **`Set`**-функций. В рассматриваемом примере используется функция **`SetDelayed`**. Операторная форма определения правила посредством функции **`SetDelayed`** имеет вид

`Pattern := global Definition.`

Введенное правило **`global Definition`** *Mathematica* закрепляет за некоторым символом (ассоциирует с символом), стоящим в левой части определения правила. Суть ассоциации - запись правила в один из списков значений, соответствующих символу.

Если левая часть `pattern` правила является не атомарным объектом, а выражением, голова которого – символ, система связывает заданное правило с этим символом, т.е. с головой выражения `pattern`. При этом правило помещается в `список нижних значений` **`DownValues`** головы-символа выражения `pattern`.

С символом можно ассоциировать сколько угодно глобальных правил преобразований. Увидеть все правила, закрепленные за символом, можно, используя функцию **`Information`**, операторная форма которой **`?`**.

Скопируйте из системы справки в свой Документ глобальные правила преобразований, закрепленные за символом **`integrate`**. Вычислите введенные глобальные правила преобразований. Изучите полученный список нижних значений символа **`integrate`**. Используйте при этом функции **`?integrate`** и **`DownValues[integrate]`**.

Задание 2. Основные правила дифференцирования функции одной переменной

Определите основные правила дифференцирования функции одной переменной, закрепив их за символом **`Dif`**. Проверьте, как работают правила. Сформулируйте необходимые объяснения по ходу выполнения задания.

Выполнение задания 2

См. [1], тема 3, п. 3.12

Задание 3. Компактное обозначение производной

Для случая, когда *Mathematica* возвращает выражение вида `Dif[expr,x]` невычисленным, представьте операцию дифференцирования выражения `expr` в традиционной математической нотации $(\mathrm{expr})'_x$.

Выполнение задания 3

См. [1], тема 3, п. 3.13

Задание 4. Производные основных элементарных функций

Для функции `Dif[expr,x]` определите правила дифференцирования основных элементарных функций.

Выполнение задания 4

См. [1], тема 3, п. 3.15

Задание 5. Вычисление производной функции одной переменной

Тестируйте функцию **`Dif`**, вычисляя производные y' следующих функций по вариантам. Проверьте правильность вычисления посредством встроенной функции дифференцирования **`D`**. Укажите какие правила необходимы для вычисления каждого из примеров. Приведите два примера выражения, которые функция **`Dif`** не сможет продифференцировать. Предположите, каких правил не хватает для вычисления производных.

1. $y = \left(4x - x^2\right)/4$, $\quad y = 2x^2 + 3x - 1$

2. $y = x - x^3$, $\quad y = x^2 + 8\sqrt{x} - 32$

3. $y = x + \sqrt{x^3}$, $y = \sqrt[3]{x^2} - 20$

4. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $y = 8\sqrt[4]{x} - 70$

5. $y = 2x^2 - 3x + 1$, $y = \left(x^2 - 3x + 6\right)/x^2$

6. $y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$, $y = \left(x^3 + 2\right)/\left(x^3 - 2\right)$

7. $y = 2x^2 + 3$, $y = \dfrac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}$

8. $y = 2x + \dfrac{1}{x}$, $y = -2\left(x^8 + 2\right)/\left(3\left(x^4 + 1\right)\right)$

9. $y = \dfrac{x^5 + 1}{x^4 + 1}$, $y = \dfrac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}$

10. $y = 3\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right)$, $y = 1/\left(3x + 2\right)$

11. $y = x/\left(x^2 + 1\right)$, $y = \left(x^2 - 3x + 3\right)/3$

12. $y = 2x/\left(x^2 + 1\right)$, $y = -2\left(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}\right)$

Задание 6. Дифференцирование параметрически заданной функции

Напишите пользовательскую функцию, возвращающую производные функции, заданной параметрически [1, с. 28, п. 1.15].

Найдите производные y' и y'' следующих функций:

1. $\begin{cases} x = \dfrac{3t^2+1}{3t^3}, \\ y = \sin\left(\dfrac{t^3}{3}+t\right). \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \operatorname{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-t)^2}}. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right), \\ y = t\sqrt{t^2+1}. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \arcsin(t-1). \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg}\left(2\,\mathrm{e}^t\right), \\ y = \ln\left(\operatorname{tg}\mathrm{e}^t\right). \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = \ln(\operatorname{ctg} t), \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\mathrm{e}^{t/2}, \\ y = \sqrt{\mathrm{e}^t+1}. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = \ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = \ln\dfrac{1}{\sqrt{1-t^4}}, \\ y = \arcsin\dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x = \arcsin\left(\sqrt{1-t^2}\right), \\ y = (\arccos t)^2. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \\ y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = \left(1+\cos^2 t\right)^2, \\ y = \dfrac{\cos t}{\sin^2 t}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \ln\dfrac{1-t}{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{t}, \\ y = \sqrt{t^2-1} + \arcsin\dfrac{1}{t}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{1}{\ln t}, \\ y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1+\sqrt{t}}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = (\arcsin t)^2, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = t\sqrt{t^2+1}, \\ y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t+1}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \ln\left(1-t^2\right), \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$ $\begin{cases} x = \operatorname{arctg}\dfrac{t+1}{t-1}, \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$