Логистическая регрессия. Нейронные сети

18

Пусть $\sigma(z) = \dfrac{1}{1+e^{-z}}$ (сигмоидальная функция).

Проверить, что $\sigma' = \sigma(1-\sigma)$

$$\sigma' = \left(\frac{1}{1+e^{-z}}\right)'_z = -\frac{1}{(1+e^{-z})^2}\cdot(1+e^{-z})'_z =$$

$$= \frac{e^{-z}}{(1+e^{-z})^2} = \frac{1}{(1+e^{-z})}\cdot\frac{e^{-z}}{(1+e^{-z})} =$$

$$\frac{1+e^{-z}-1}{1+e^{-z}}$$

$$= \frac{1}{1+e^{-z}}\cdot\left(1-\frac{1}{1+e^{-z}}\right) = \sigma(1-\sigma)$$

19 Пусть в задаче классификации на K классов $\{1, 2, \dots K\}$ последний слой нейронной сети вычисляет soft-max функцию:

$$g(s_1, s_2, \dots s_k) = \frac{e^{s_k}}{\sum\limits_{l=1}^{K} e^{s_l}}$$

В качестве штрафа используется кросс-энтропия (logloss-функция):

$$R^{(i)} = -\sum_{k=1}^{K} I(y^{(i)}=k)\ln g_k(s_1, s_2, \dots, s_K),$$

где $g_k(s_1, s_2, \dots s_K)$ - soft-max функция.

Доказать, что

1) $\underline{\frac{\partial g_k}{\partial s_l} = g_k\cdot\left(I(k=l) - g_l\right)}$

$$\frac{\partial g_k}{\partial s_l} = \frac{\partial}{\partial s_l}\left(\frac{e^{s_k}}{\sum\limits_{l=1}^{K} e^{s_l}}\right) = e^{s_k}\cdot -\left(\sum_{l=1}^{K} e^{s_l}\right)^{-2}\cdot e^{s_l} =$$

$$= \overbrace{\frac{e^{s_k}}{\sum\limits_{l=1}^{K} e^{s_l}}}^{g_k}\cdot\overbrace{\frac{-e^{s_l}}{\sum\limits_{l=1}^{K} e^{s_l}}}^{-g_l} =$$ Рассмотрим $l \neq k$ =

= Рассмотрим $l \neq k$ =

$$= g_k\cdot(-g_l) = -g_k\cdot g_l$$

= Рассмотрим $l = k$ =

$$\frac{\partial g_k}{\partial s_k} = \frac{\partial}{\partial s_k}\left(\frac{e^{s_k}}{\sum\limits_{l=1}^{K} e^{s_l}}\right) = \frac{e^{s_k}\sum\limits_{l=1}^{K} e^{s_l} - e^{s_k}\cdot e^{s_k}}{\left(\sum\limits_{l=1}^{K} e^{s_l}\right)^2} =$$

$$= \overbrace{\frac{e^{s_k}}{\sum\limits_{l=1}^{K} e^{s_l}}}^{=g_k}\cdot\left(1 - \overbrace{\frac{e^{s_k}}{\sum\limits_{l=1}^{K} e^{s_l}}}^{=g_k}\right) = g_k(1-g_k)$$

Получаем: $\frac{\partial g_k}{\partial s_l} = g_k\left(I(k=l) - g_l\right)$

2) $$\frac{\partial R^{(i)}}{\partial g_k} = -\frac{I(y^{(i)}=k)}{g_k}$$

$$\frac{\partial R^{(i)}}{\partial g_k} = \frac{\partial}{\partial g_k}\left(-\sum_{n=1}^{k} I(y^{(i)}=n)\ln g_n\right) =$$

$$= -I(y^{(i)}=k)\cdot\frac{1}{g_k} = -\frac{I(y^{(i)}=k)}{g_k}$$

3) $$\frac{\partial R^{(i)}}{\partial s_l} = g_l - I(l=y^{(i)})$$

$$\frac{\partial R^{(i)}}{\partial s_l} = \frac{\partial}{\partial s_l}\left(-\sum_{n=1}^{k} I(y^{(i)}=n)\ln g_n\right) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{k} I(y^{(i)}=n)\cdot\frac{1}{g_n}\cdot\frac{\partial g_n}{\partial s_l} = \left|\begin{array}{l} g_n = g_n(s_1,\dots s_k) \\ \text{используем св-во 1 из №9} \end{array}\right| =$$

$$= -\sum_{n=1}^{k} I(y^{(i)}=n)\,\frac{1}{\cancel{g_n}}\cdot \cancel{g_n}\left(I(n=l)-g_l\right) =$$

$$= \underbrace{-\sum_{n=1}^{k} I(y^{(i)}=n)\,I(n=l)}_{I(l=y^{(i)})} + g_l\cdot\underbrace{\sum_{n=1}^{k} I(y^{(i)}=n)}_{=1} =$$

$$= g_l - I(l=y^{(i)})$$

(21) Нейронная сеть с двумя нелинейными слоями вычисляет функцию softmax $(B(\sigma(Ax)))$. Пусть в качестве функции потерь используется logloss. Таким образом, на объекте $x^{(i)}$ потери равны logloss (softmax $(B(\sigma(Ax^{(i)}))))$.

Пользуясь результатом задачи №1, выписать матричные формулы для алгоритма back propagation.

$$R^{(i)} = \text{logloss}\left(\text{softmax}\left(\underbrace{B\left(\overbrace{\sigma\left(\underbrace{Ax^{(i)}}_{y}\right)}^{z}\right)}_{s}\right)\right)$$

$$\delta_z = \frac{\partial R^{(i)}}{\partial z} = \frac{\partial R^{(i)}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial z} = \delta_s \cdot B$$

$$\delta_s = \frac{\partial R^{(i)}}{\partial s} = g - I$$

$$\delta_y = \frac{\partial R^{(i)}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \delta_z \cdot \text{diag}(\sigma'(s))$$

$$\delta_x = \frac{\partial R^{(i)}}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial R^{(i)}}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}}_{\delta_y} \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{x}}_{A} =$$

$$= \delta_s \cdot B \cdot \text{diag}(\sigma'(s)) A = (g - I) B \,\text{diag}(\sigma'(s)) \cdot A$$

$$\frac{\partial R^{(i)}}{\partial A} = \delta_y \cdot X$$

$$\frac{\partial R^{(i)}}{\partial B} = \delta_s \cdot z$$