Método de Euler

En matemática y computación, el método de Euler, llamado así en honor a Leonhard Euler, es un procedimiento de integración numérica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de un valor inicial dado.
El método de Euler es el más simple de los métodos numéricos para resolver un problema del siguiente tipo:

$$PVI = \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_i) = ? \end{cases}$$

Consiste en dividir los intervalos que va de x_o a x_f en n subintervalos de ancho h; o sea:

$$h = \frac{x_f - x_o}{n}$$

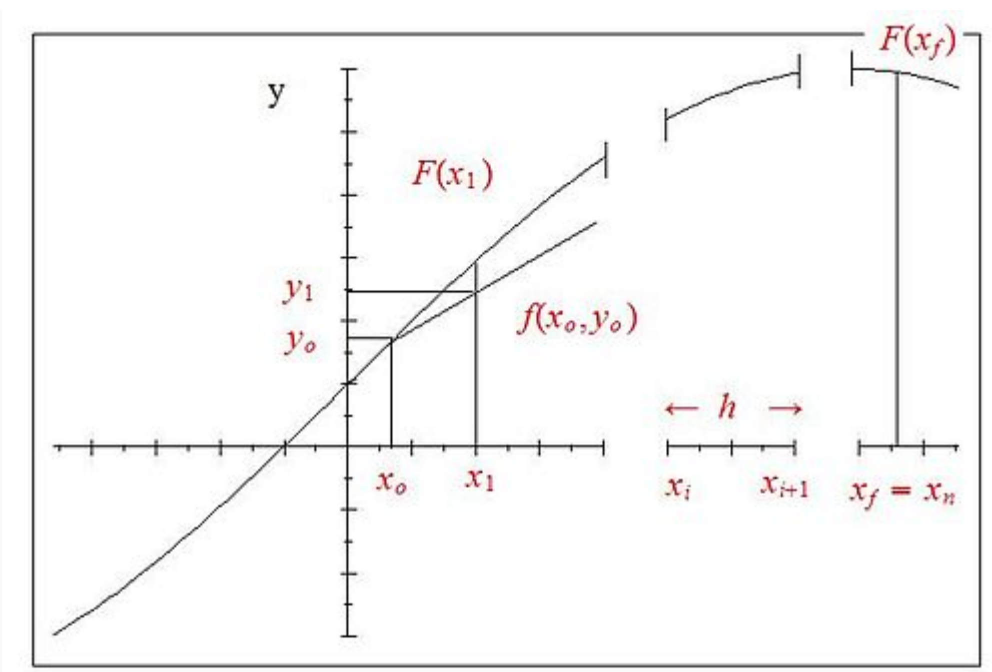
de manera que se obtiene un conjunto discreto de $n+1$ puntos: $x_o, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ del intervalo de interés $[x_o, x_f]$. Para cualquiera de estos puntos se cumple que:

$$x_i = x_0 + ih, 0 \leq i \leq n.$$

La condición inicial $y(x_o) = y_o$, representa el punto $P_o = (x_o, y_o)$ por donde pasa la curva solución de la ecuación del planteamiento inicial, la cual se denotará como $F(x) = y$.

Ya teniendo el punto P_o se puede evaluar la primera derivada de $F(x)$ en ese punto; por lo tanto:

$$F'(x) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{P_o} = f(x_o, y_o)$$



Gráfica A.

Con esta información se traza una recta, aquella que pasa por P_o y de pendiente $f(x_o, y_o)$. Esta recta aproxima $F(x)$ en una vecindad de x_o. Tómese la recta como reemplazo de $F(x)$ y localícese en ella (la recta) el valor de y correspondiente a x_1. Entonces, podemos deducir según la Gráfica A:

$$\frac{y_1 - y_o}{x_1 - x_o} = f(x_o, y_o)$$

Se resuelve para y_1:

$$y_1 = y_o + (x_1 - x_o) f(x_o, y_o) = y_o + h f(x_o, y_o)$$

Es evidente que la ordenada y_1 calculada de esta manera no es igual a $F(x_1)$, pues existe un pequeño error. Sin embargo, el valor y_1 sirve para que se aproxime $F'(x)$ en el punto $P = (x_1, y_1)$ y repetir el procedimiento anterior a fin de generar la sucesión de aproximaciones siguiente:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_o + h f(x_o, y_o) \\
y_2 &= y_1 + h f(x_1, y_1) \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
y_{i+1} &= y_i + h f(x_i, y_i) \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
&\;\;. \\
y_n &= y_{n-1} + h f(x_{n-1}, y_{n-1})
\end{aligned}
$$