Métodos de Runge-Kutta de cuarto orden

Un miembro de la familia de los métodos Runge-Kutta es usado tan comúnmente que a menudo es referenciado como «RK4» o como «el método Runge-Kutta».

Definiendo un problema de valor inicial como:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Entonces el método RK4 para este problema está dado por la siguiente ecuación:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

Donde

$$\begin{cases} k_1 &= f\left(x_i, y_i\right) \\ k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2\right) \\ k_4 &= f\left(x_i + h, y_i + hk_3\right) \end{cases}$$

Así, el siguiente valor (y_{n+1}) es determinado por el presente valor (y_n) más el producto del tamaño del intervalo (h) por una pendiente estimada. La pendiente es un promedio ponderado de pendientes, donde k_1 es la pendiente al principio del intervalo, k_2 es la pendiente en el punto medio del intervalo, usando k_1 para determinar el valor de y en el punto $x_n + \frac{h}{2}$ usando el método de Euler. k_3 es otra vez la pendiente del punto medio, pero ahora usando k_2 para determinar el valor de y; k_4 es la pendiente al final del intervalo, con el valor de y determinado por k_3. Promediando las cuatro pendientes, se le asigna mayor peso a las pendientes en el punto medio:

$$\text{pendiente} = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.$$

Esta forma del método de Runge-Kutta, es un método de cuarto orden lo cual significa que el error por paso es del orden de $O(h^5)$, mientras que el error total acumulado tiene el orden $O(h^4)$. Por lo tanto, la convergencia del método es del orden de $O(h^4)$, razón por la cual es usado en los métodos computacionales.