

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова



Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра Математических Методов Прогнозирования

КУРСОВАЯ РАБОТА

«Фазовые переходы в модели Изинга» «Phase transitions in Ising model»

Выполнил:
студент 3 курса 317 группы
Суглобов Кирилл Алексеевич

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., профессор
Ветров Дмитрий Петрович

Москва, 2022

Содержание

1 Введение	1
2 Одномерная модель Изинга	2
2.1 Модель в общем случае	4
2.2 Модель при отсутствии внешнего поля	6
3 Двумерная модель Изинга	6
4 Выводы	11
Источники	12

1 Введение

На сегодняшний день модель Изинга - это математическая модель ферромагнетизма в статистической механике. Она была изобретена немецким физиком Вильгельмом Ленцем в 1920 как попытка объяснить, собственно, явление ферромагнетизма. Ленц дал эту модель в качестве задачи своему ученику Эрнсту Изингу, который решил её в одномерном виде в своей докторской диссертации [1]. А потом английский физик Рудольф Пайерлс написал статью об этой модели, впервые назвав её «моделью Изинга» [2]. Позже долгие годы внимания к разобранной модели почти не было, в том числе из-за сложности решения задачи в двумерном виде. От модели отказался и сам Изинг, а его диссертация станет его первой и единственной публикацией. Наконец, в 1944 году Ларс Онзагер, впоследствии лауреат Нобелевской премии по химии 1968 года, решил двумерную модель Изинга и нашёл в ней фазовый переход.



Эрнст Изинг



Ларс Онзагер

С этого момента модель Изинга становится всё более известной, и сегодня это модель, изучаемая не столько как попытка описать ферромагнетизм, сколько как [3]:

- магнитная система с фазовым переходом: из теории универсальности в статистической физике следует, все системы с одинаковой размерностью (здесь две) и одинаковыми симметриями обладают эквивалентными критическими свойствами, т.е. их законы масштабирования, проявляемые фазовыми переходами, идентичны. Значит, изучение фазовых переходов модели Изинга расскажет не только о магнитных, но и других, схожих по симметрии и размерности, системах.
- модель, изоморфная спиновым стёклам в физике, сети Хопфилда или машине Больцмана в нейронных сетях.
- собственно, как статистическая модель.

Под фазовым переходом (ФП) системы будем подразумевать крупное качественное изменение системы, её свойств, при небольшом изменении каких-либо макропараметров системы. Каждый из таких параметров можно представить минимум в виде двух множеств: при нахождении параметра в любом из них система находится в определённом состоянии, но эти состояния сильно различаются. Так, при переходе параметра из одного множества в другое, состояние (фаза) системы резко изменяется с одного на другое. Момент перехода системы между фазами и называется ФП. С аналитической точки зрения, **фазовые переходы происходят, когда термодинамическая свободная энергия системы неаналитична** для некоторого выбора термодинамических переменных. Обычно так бывает из-за взаимодействия большого количества частиц в системе и не возникает в системах, которые слишком малы или в некотором роде просты.

Целью данной работы является рассмотрение модели Изинга как магнитной системы с ФП и изучение в ней возможных ФП. Особое внимание уделим такому макропараметру системы, как температура: известно, что у ферромагнетиков с ростом температуры исчезает намагниченность, происходит ФП. А именно, существует точка Кюри на шкале температуры, по достижении которой магнитный момент обращается в ноль, и отсутствует при более высокой температуре.

2 Одномерная модель Изинга

Подойдём к ФП через явление, рассматриваемое в изначальной задаче, - через ферромагнетизм. Возьмём цепочку из N атомов, которые находятся в узлах кристаллической решётки. Будем считать, что положения атомов фиксированы и что нас не интересует кинетический вклад этих атомов в термодинамические величины системы. Для каждого атома интерес представляет ориентация магнитного момента, связанная со спином атома. Конкретнее, нас интересует проекция спинов атомов на определённое направление: в данном случае на ось, перпендикулярную цепочке атомов.

Выясним, при каких условиях в описанной системе возникает выстраивание всех магнитных моментов в одном направлении - явление ферромагнетизма (возникновение макроскопического магнитного поля). Учитывая важное значение температуры в системе, в ходе решения посчитаем необходимые термодинамические величины.



Рис. 2: Одномерная модель Изинга

Итак, пусть есть цепочка из N атомов и у каждого атома i проекцию спина обозначим за $\sigma_i \in \{-1, +1\}$. Также пусть ближайшие соседи-атомы, и только они, взаимодействуют друг с другом и для атомов i и j константа взаимодействия равна $J_{ij} = J$ и одинакова для всей системы. Важным допущением для одномерной модели Изинга (это пригодится для упрощения вычислений) является **периодичность модели**: пусть также взаимодействуют между собой первый и последний атомы. Также в общем случае система может находиться во внешнем магнитном поле. Будем считать, что в окрестности каждого атома оно равно $h_{ij} = h$ и одинаково во всей системе. Тогда гамильтониан системы равен:

$$\mathcal{H} = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \sum_i h_i \sigma_i = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

Под обозначением $\langle i,j \rangle$ имеем в виду соседние атомы модели. так как не-соседи не взаимодействуют друг с другом. Далее, из [1], представим слагаемое с внешним полем через некую замену, ε , и двойную сумму по всем **соседним** i,j :

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \frac{\varepsilon}{2} \sum_i \sum_j (\sigma_i + \sigma_j) = - \sum_{\langle i,j \rangle} \left(J \sigma_i \sigma_j + \frac{\varepsilon}{2} (\sigma_i + \sigma_j) \right)$$

Замечание о константе J взаимодействия атомов в модели.

1. Если $J > 0$, то вещество, атомы которого мы рассматриваем, является **ферромагнетиком**. Из вида гамильтониана модели видно, что $J > 0$ энергия взаимодействия соседних атомов будет < 0 , если их спины параллельны (со-направлены). Любая система стремится к энергетическому минимуму, а в данном случае это означает, что система будет стремиться, чтобы в ней было больше параллельных спинов, чем антипараллельных (противоположно направленных). То есть в ферромагнитной системе более вероятны большие корреляции - когда значительное число спинов выстраивается по одному направлению и от таких скоплений одинаково направленных спинов возникает магнитное поле. Если скопления какого-то одного типа "побеждают" если их становится больше, и в итоге вся (или почти вся) система имеет одинаково направленные спины, то образуется **макроскопический магнитный момент**.
2. Если $J < 0$, то вещество является **антиферромагнетиком**. Ситуация противоположна случаю ферромагнетика: система стремится к энергетическому минимуму, а вклад соседних атомов в энергию системы < 0 , когда соседние спины антипараллельны. Таким образом, антиферромагнитная система



Рис. 3: Отношения соседних спинов

оправдывает своё название: система будет стремиться к минимальным корреляциям, то есть к состоянию, в котором **макроскопического магнитного поля нет**, так как поля соседей обнуляют друг друга.

2.1 Модель в общем случае

Пусть β - это обратная температура системы, $E(s)$ - это энергия системы, а s - это состояние системы. В данном случае s можно задать вектором длины N из -1 и $+1$, а множество всевозможных состояний системы S определить как «булев» (не совсем булев) куб размерности N . То есть $s \in S = \{-1, +1\}^N$. Теперь посчитаем статсумму системы:

$$\mathcal{Z} = \sum_{s \in S} e^{-\beta E(s)} = \sum_{s \in S} e^{\beta \sum_{\langle i,j \rangle} (J \sigma_i \sigma_j + \frac{\varepsilon}{2} (\sigma_i + \sigma_j))} = \sum_{s \in S} \prod_{\langle i,j \rangle} e^{\beta (J \sigma_i \sigma_j + \frac{\varepsilon}{2} (\sigma_i + \sigma_j))}$$

Воспользуемся математическим аппаратом трансфер-матриц. Для вычисления такой статсуммы можно использовать следующую трансфер-матрицу (с обратной заменой ε на h):

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} e^{\beta(J+h)} & e^{\beta J} \\ e^{\beta J} & e^{\beta(J-h)} \end{bmatrix}$$

Учитывая **периодичность модели** и вид статсуммы, сделаем «transfer-matrix trick» [4], [5]. А именно, заметим, что эта статсумма представима в виде следа матричного произведения трансфер-матриц и далее через собственные значения трансфер-матрицы:

$$\mathcal{Z} = \text{Tr}(\mathcal{P}^N) = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

Собственные значения такой трансфер-матрицы равны:

$$\lambda_{1,2} = e^{\beta J} \left(\cosh \beta h \pm \sqrt{\sinh^2 \beta h + e^{-4\beta J}} \right)$$

В итоге статсумма равна:

$$\mathcal{Z} = e^{N\beta J} \left(\left(\cosh \beta h + \sqrt{\sinh^2 \beta h + e^{-4\beta J}} \right)^N + \left(\cosh \beta h - \sqrt{\sinh^2 \beta h + e^{-4\beta J}} \right)^N \right)$$

Теперь сделаем модель Изинга **большой** для проявления статистических закономерностей: устремим $N \rightarrow +\infty$. Тогда в скобке в выражении статсуммы останется только первый член (второй устремиться к 0), то есть большее собственное значение в степени N (бóльшим считаем λ_1):

$$\mathcal{Z} = \lambda_1^N + \lambda_2^N \approx \lambda_1^N$$

Теперь, зная статсумму, можем вычислить основные характеристики модели. Одна из них - это **средняя энергия системы** \bar{E} , иначе - статистически просуммированная по всем состояниям энергия системы:

$$\bar{E} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{s \in S} e^{-\beta E(s)} E(s)$$

Выпишем формулы для основных характеристик системы, приходящихся на спин (для наглядности и инвариантности относительно размеров модели):

1. Свободная энергия на спин:

$$F_{spin} = \frac{F}{N} = -\frac{1}{N\beta} \ln \mathcal{Z} = -J - \frac{1}{\beta} \ln \left(\cosh \beta h \pm \sqrt{\sinh^2 \beta h + e^{-4\beta J}} \right)$$

2. Средняя энергия на спин:

$$\bar{E}_{spin} = \frac{\bar{E}}{N} = -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z}$$

3. Теплоёмкость на спин (нормирована на постоянную Больцмана k):

$$C_{spin} = \frac{C(T)}{Nk} = \frac{1}{Nk} \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{\beta^2}{N} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln \mathcal{Z}$$

Но:

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln \mathcal{Z} = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{s \in S} e^{-\beta E(s)} (E(s))^2 - (\bar{E})^2 = \overline{E^2} - (\bar{E})^2 = \text{var}(E)$$

Тогда:

$$C_{spin} = \frac{\beta^2}{N} \text{var}(E)$$

Важная связь теплоёмкости и свободной энергии:

$$C(T) = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \Rightarrow C_{spin} = -\frac{T}{Nk} \frac{\partial^2 F}{\partial T^2}$$

4. Намагниченность на спин:

$$M_{spin} = \frac{M}{N} = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial}{\partial h} \ln \mathcal{Z}$$

2.2 Модель при отсутствии внешнего поля

При отсутствии внешнего поля, то есть при $h = 0$, статсумма модели следующая:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} &= \lambda_1^N = e^{N\beta J} \left(\cosh\beta h + \sqrt{\sinh^2\beta h + e^{-4\beta J}} \right)^N = e^{N\beta J} \left(1 + e^{-2\beta J} \right)^N \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathcal{Z} = (2\cosh\beta J)^N + (2\sinh\beta J)^N = (2\cosh\beta J)^N \left(1 + (\tanh\beta J)^N \right)\end{aligned}$$

При $N \rightarrow +\infty$: $\mathcal{Z} \approx (2\cosh\beta J)^N$

Тогда для одномерной модели Изинга без внешнего поля имеем:

1. Свободная энергия на спин:

$$F_{spin} = -\frac{1}{N\beta} \ln \mathcal{Z} = -\frac{1}{N\beta} \ln (2\cosh\beta J)^N = -\frac{1}{\beta} \ln (2\cosh\beta J)$$

2. Средняя энергия на спин:

$$\bar{E}_{spin} = -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z} = -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln (2\cosh\beta J)^N = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln (2\cosh\beta J) = -J \tanh\beta$$

3. Теплоёмкость на спин (нормирована на постоянную Больцмана k):

$$C_{spin} = \frac{\beta^2}{N} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln \mathcal{Z} = \frac{\beta^2}{N} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln (2\cosh\beta J)^N = (\beta J)^2 \operatorname{sech}^2 \beta J = \left(\frac{J}{kT} \right)^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{J}{kT} \right)$$

Значит, вторая производная свободной энергии системы:

$$\frac{\partial F^2}{\partial T^2} = -\frac{Nk}{T} C_{spin} = -\left(\frac{NJ^2}{kT^3} \right) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{J}{kT} \right), \quad \frac{\partial F^2}{\partial T^2} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0, \quad T \in [0, +\infty]$$

Вторая производная свободной энергии - гладкая функция температуры, значит, первая производная тем более не имеет скачков. При этом вторая производная свободной энергии является бесконечно дифференцируемой функцией от температуры. То есть свободная энергия такой системы всюду (в зависимости от температуры) аналитична.

Значит, фазового перехода в одномерной (как в ферромагнитной, так и в антиферромагнитной) модели Изинга без внешнего поля нет. При этом ФП в одномерной модели Изинга нет и при внешнем поле [6].

То есть в одномерной модели Изинга нет ФП.

3 Двумерная модель Изинга

Перейдём теперь к двумерной модели Изинга. Она представляет собой (кристаллическую) решётку зафиксированных в пространстве атомов размера $n \times n$, но, как и в случае одномерной модели интерес представляют спины этих атомов, поэтому

можно представить модель как квадратную матрицу $n \times n$, состоящую из спинов $\sigma_{ij} \in \{-1, 1\}$. Атомы, последовательно находящиеся в каком-либо «столбце» или в какой-либо «строке» модели, и только они, считаются соседями. Соседние атомы взаимодействуют с константой взаимодействия J , постоянной и одинаковой для каждой пары соседних атомов. В общем случае система находится во внешнем магнитном поле h , которое в окрестности каждого атома также одинаково и постоянно. Тогда гамильтониан системы:

$$\mathcal{H} = -J \left(\sum_{\langle i_1 j_1, i_2 j_2 \rangle} \sigma_{i_1 j_1} \sigma_{i_2 j_2} \right) - h \sum_{ij} \sigma_{ij}, \quad \text{где атомы } i_1 j_1 \text{ и } i_2 j_2 \text{ являются соседями}$$

Эмпирическим путём выясним, есть ли и если есть, то при каких значениях температуры, ФП в двумерной модели Изинга. Единственное замечание: будем рассматривать ферромагнитную модель без внешнего магнитного поля.

Напомним нужные нам формулы из статистической физики, которые использовались в предыдущем разделе. За N обозначим число атомов в решётке, как и в прошлый раз. То есть $N = n \cdot n$:

1. Свободная энергия на спин:

$$F_{spin} = \frac{F}{N} = -\frac{1}{N\beta} \ln \mathcal{Z}$$

2. Средняя энергия на спин:

$$\bar{E}_{spin} = \frac{\bar{E}}{N} = -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z}$$

3. Теплоёмкость на спин (нормирована на постоянную Больцмана k):

$$C_{spin} = \frac{C(T)}{Nk} = \frac{1}{Nk} \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{\beta^2}{N} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln \mathcal{Z}, \quad C_{spin} = \frac{\beta^2}{N} \text{var}(E)$$

Важная связь теплоёмкости и свободной энергии:

$$C(T) = -T \frac{\partial F^2}{\partial T^2} \Rightarrow C_{spin} = -\frac{T}{Nk} \frac{\partial F^2}{\partial T^2}$$

4. Намагниченность на спин:

$$M_{spin} = \frac{M}{N} = \frac{1}{N\beta} \frac{\partial}{\partial h} \ln \mathcal{Z}$$

Итак, были проведены эксперименты с ферромагнитной двумерной моделью Изинга без внешнего магнитного поля. Для модели выполнялся алгоритм Монте-Карло с использованием сэмпирования Гиббса [3], вывод графиков и вывод эволюций системы (сэмплов и некоторых величин) на значимых, по графикам, температурах:

1. Создание кристаллической решётки 256×256 . Система достаточно большая для наблюдения за статистическими и физическими закономерностями: число спинов $N = n \cdot n = 256^2 = 65536$. Затем кристаллическая решётка дважды копируется. Итого имеем 3 незаполненные кристаллические решётки, назовём их `lattice_n`, `lattice_0` и `lattice_p`. Теперь заполняем решётки: последовательно проходимся по каждой и с вероятностями 0.25, 0.50 и 0.75 соответственно атому присваивается спин +1, иначе -1. Таким образом получили 3 модели Изинга: `lattice_n` преимущественно с отрицательными спинами, «нейтральную» `lattice_0` и `lattice_p` преимущественно с положительными спинами. Сделали это просто для вариативности, на решение это не влияет ни в теории, ни на практике.
2. После чего каждая из решёток доводилась до состояния термодинамического равновесия при помощи сэмпирования Гиббса (10000 итераций) для каждой температуры из сетки температур: $T \in [0.1, 10]$. После в состоянии термодинамического равновесия при каждой из температур генерировалось несколько (2000) состояний решётки, на которых подсчитывались ключевые термодинамические величины: средняя энергия на спин \bar{E}_{spin} , стандартное отклонение энергии σE , намагниченность на спин M_{spin} и теплоёмкость системы (нормализованная на постоянную Больцмана) C .
3. Полученные величины выводились на график. Это график установившихся (перечисленных выше) параметров системы в зависимости от температуры системы T .
4. После чего бралось несколько значимых температур с графика параметров при термодинамическом равновесии и при этих значимых температурах наблюдалась эволюция термодинамической системы (эволюция сэмпированием Гиббса). А именно, наблюдались графики эволюции энергии на спин E_{spin} и намагниченности на спин M_{spin} . Также наблюдались сами сэмплы в ходе стремления системы к состоянию термодинамического равновесия.

На [рис. 4](#) видны ключевые параметры в термодинамическом равновесии ферромагнитной модели Изинга в зависимости от температуры. Исходя из формул в [разд. 3](#) становится понятно, что стандартное отклонение энергии - это масштабированная теплоёмкость системы, а теплоёмкость системы связана со второй производной свободной энергии системы:

$$C(T) = -T \frac{\partial F^2}{\partial T^2} \Rightarrow \frac{\partial F^2}{\partial T^2} = -\frac{C}{T}$$

Учитывая это выражение и полученный график теплоёмкости в зависимости от температуры, можно утверждать, что:

1. Вторая производная свободной энергии имеет излом
2. Первая производная свободной энергии гладкая

⇒ Двумерная квадратная ферромагнитная модель Изинга без внешнего поля имеет фазовый переход второго рода. Критическая температура, при которой

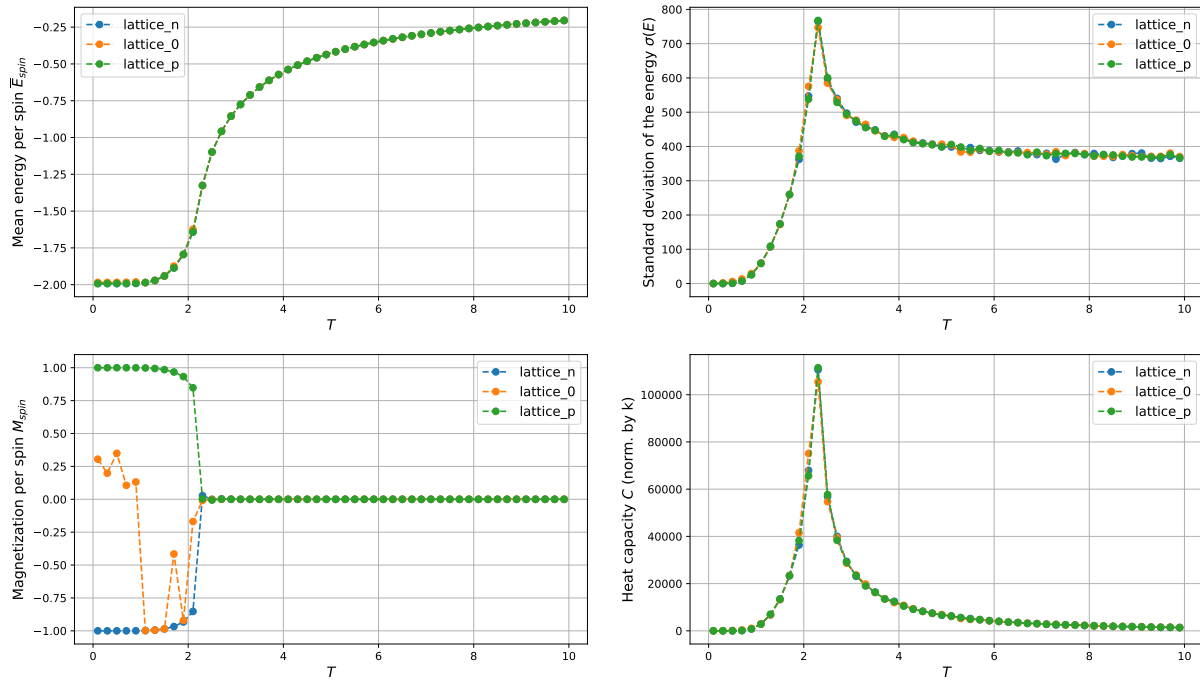


Рис. 4: Параметры в термодинамическом равновесии для ферромагнитной системы в зависимости от температуры

происходит ФП, называется температурой Кюри $T_c \approx 2.269$. И, как видно по графику намагниченности системы, именно при температуре ФП ферромагнетик резко теряет свои магнитные свойства.

Теперь посмотрим на эволюцию системы в зависимости от температуры: выберем температуру меньше T_c , равную T_c и большую T_c . На сэмплах чёрные точки соответствуют спинам -1 , а белые точки - спинам $+1$. Результаты изображены соответственно на: [рис. 5](#), [рис. 6](#) для $T < T_c$, [рис. 7](#), [рис. 8](#) для $T = T_c$, [рис. 9](#), [рис. 10](#) для $T > T_c$. На указанных сэмплах чётко видно, что:

1. При $T < T_c$ система достаточно быстро, как видно по графикам энергии и намагниченности, устремляется к энергетически наиболее выгодному положению и формирует макроскопическое магнитное поле, видна преобладающая, почти покрывающая всё пространство решётки, корреляция спинов. Это фаза, когда ферромагнетик обладает **спонтанной намагниченностью**.
2. При $T > T_c$ система не имеет спонтанной намагниченности, а там, где имела какую-то начальную намагниченность в силу инициализации преимущественно положительными или отрицательными спинами, - быстро потеряла её. Корреляций спинов нет, на сэмплах сплошная «каша». Это и есть наиболее вероятное и наиболее энергетически выгодное состояние системы в этой фазе. Ферромагнетик в этой фазе становится антиферромагнетиком.
3. Наконец, при $T = T_c$, при критической температуре интенсивность теплового движения атомов ферромагнетика оказывается достаточной для разрушения

его самопроизвольной намагниченности, но крупные корреляции спинов остаются, это видно по всем сэмплам. А график намагниченности показывает, что она не осталась начальной, но и не ушла в ноль, стабильно, флуктуируя, держится где-то посередине, что опять же подтверждается сэмплами. В критической точке эта ферромагнитная система становится парамагнетиком.

Ну а начальная инициализация влияла только на то, какого «цвета» или знака будет конечная раскраска сэмпла. И «нейтральная инициализация» сходилась в конце (в термодинамическом равновесии) к одному из результатов других инициализаций.

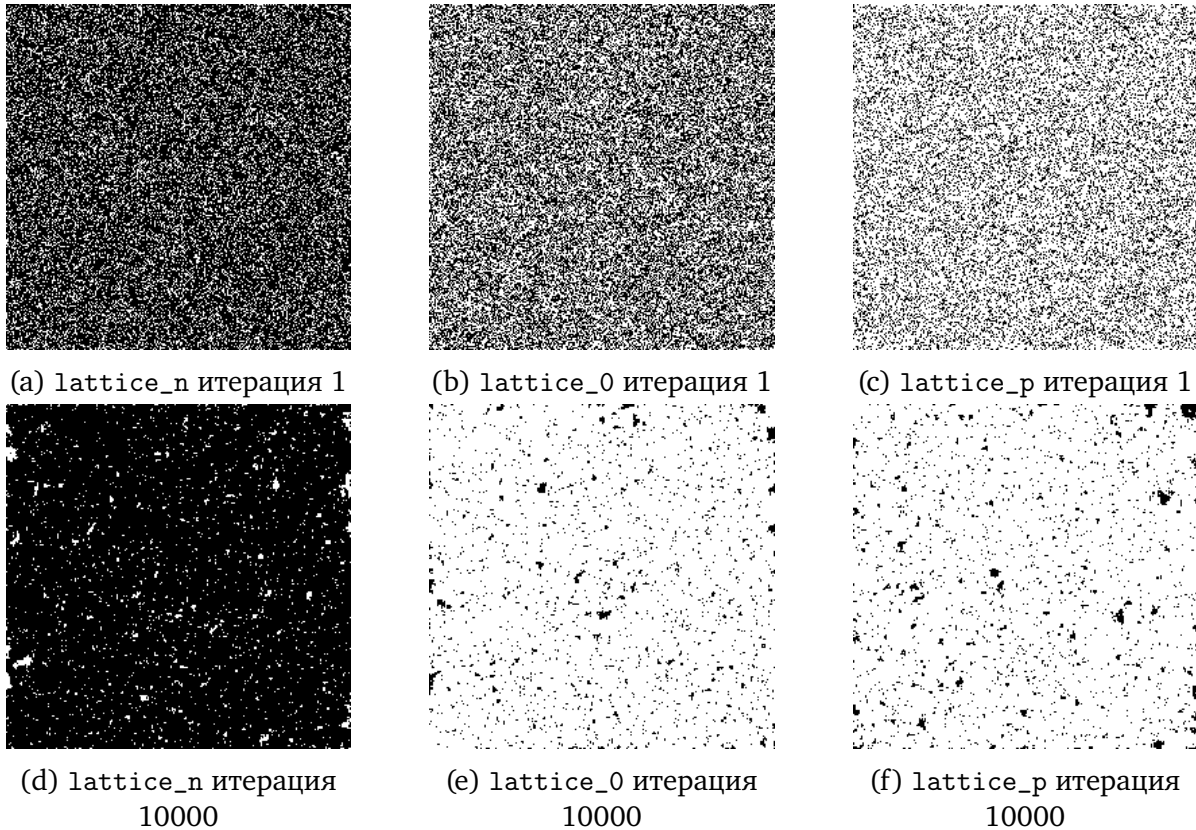


Рис. 5: Эволюция ферромагнитной системы при $T < T_c$

Evolution of energy and magnetization for $\beta = 0.5$

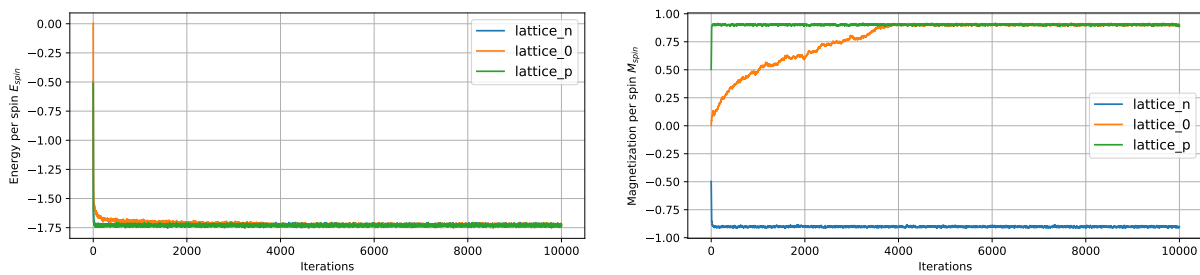


Рис. 6: Эволюция параметров ферромагнитной системы при $T < T_c$

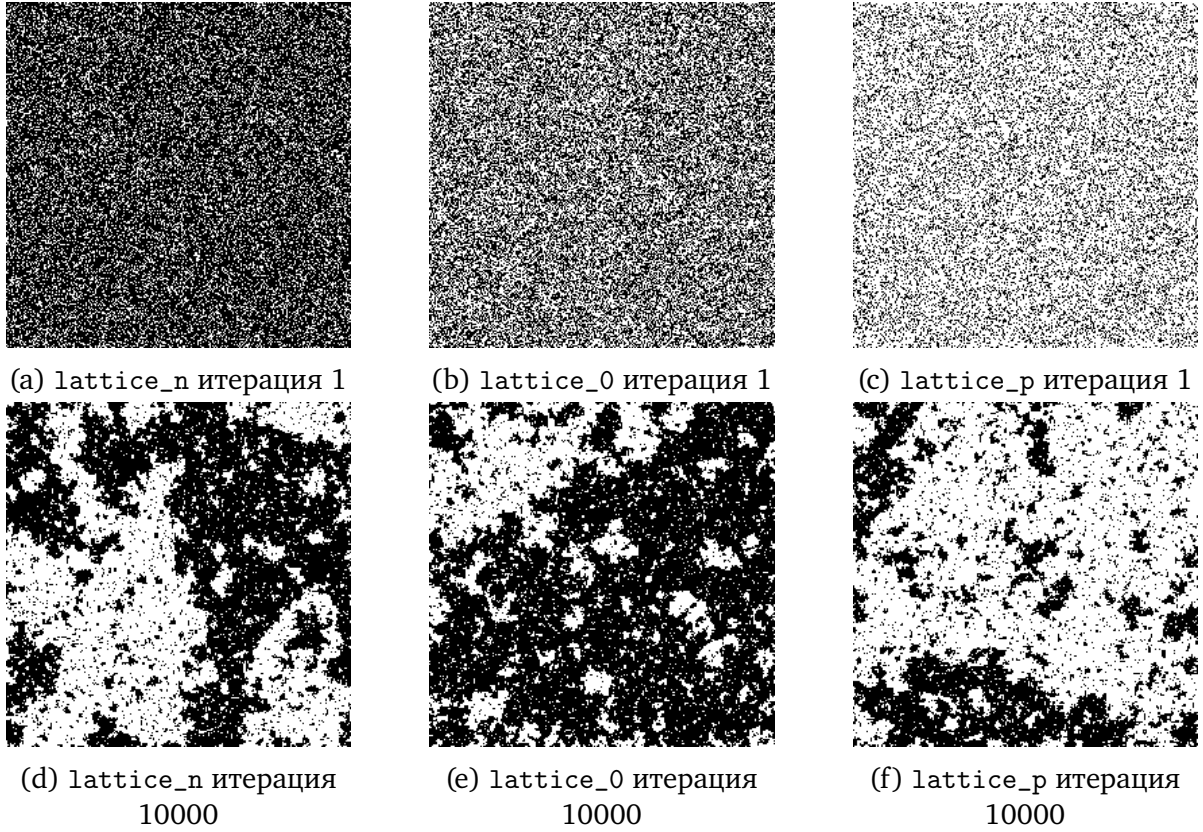


Рис. 7: Эволюция ферромагнитной системы при $T = T_c$

Evolution of energy and magnetization for $\beta = 0.441$

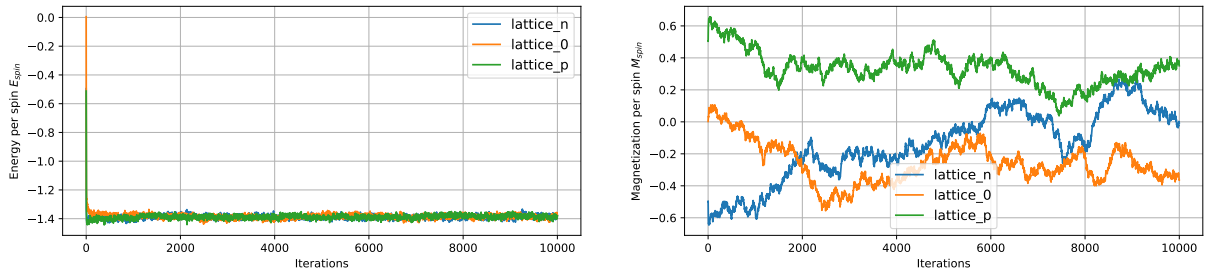


Рис. 8: Эволюция параметров ферромагнитной системы при $T = T_c$

4 Выводы

Таким образом, была рассмотрена и изучена модель Изинга, исследованы фазовые переходы в ней. Одномерная модель Изинга не имеет фазовых переходов, а двумерная квадратная ферромагнитная модель Изинга без внешнего поля имеет фазовый переход второго порядка при критической температуре, температуре Кюри, $T_c \approx 2.269$, что подтверждается существующей теорией и решениями модели Изинга [3], [7].

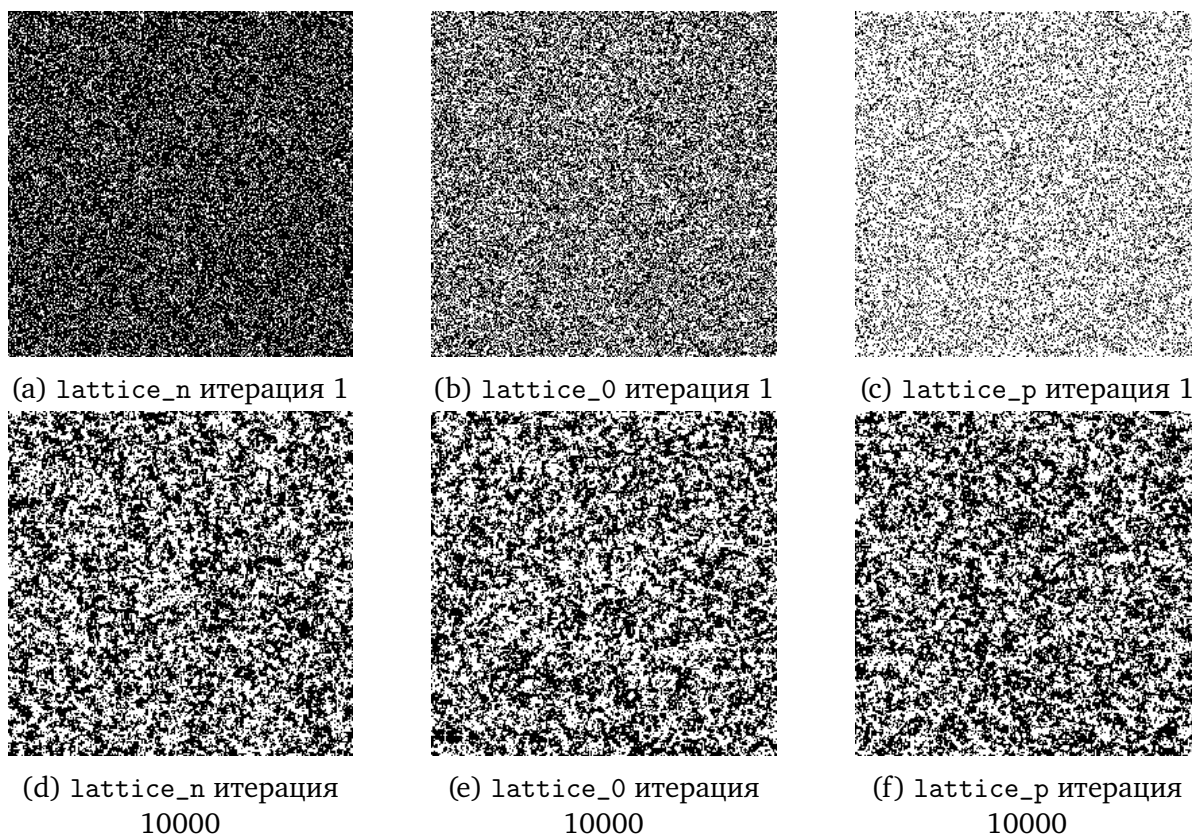


Рис. 9: Эволюция ферромагнитной системы при $T > T_c$

Evolution of energy and magnetization for $\beta = 0.3$

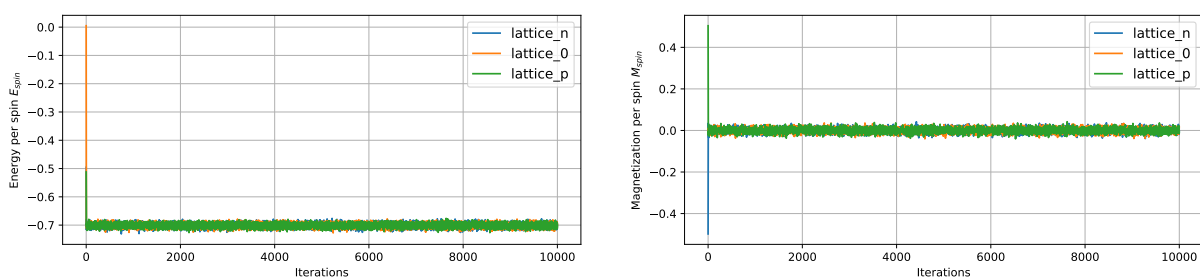


Рис. 10: Эволюция параметров ферромагнитной системы при $T > T_c$

Источники

- [1] E. Ising. *Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus*. 1925. URL: <https://www.semanticscholar.org/paper/Beitrag-zur-Theorie-des-Ferromagnetismus-Ising/cfd3f3da5eecf44137503e4f4f4fb02eef1c3aea>.
- [2] Peierls R. «On Ising's model of ferromagnetism». B: (1936). URL: https://www.imsc.res.in/~sitabhra/teaching/asm17/Peierls_ProcCambPhilosSoc_1936_On_Isings_model_of_ferromagnetism.pdf.
- [3] David J.C. MacKay. *Information Theory, Inference, and Learning Algorithms*. 2004, с. 400—412. URL: <https://www.inference.org.uk/itprnn/book.pdf>.

- [4] Jeffrey Chang. *Solving the 1D Ising Model*. URL: <https://stanford.edu/~jeffjar/statmech/lec4.html>.
- [5] R.J. Baxter. «Onsager and Kaufman's calculation of the spontaneous magnetization of the Ising model». В: (2011). URL: <https://arxiv.org/pdf/1103.3347.pdf>.
- [6] В. Ф. Елесин В. А. Кашурников. *Физика фазовых переходов*. 1997, с. 36—44. URL: <https://online.mephi.ru/pluginfile.php/7125/course/summary/PHASE.PDF>.
- [7] Vetrov D.P. *Спецсеминар «Байесовские методы машинного обучения»*. URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=%D0%A1%D0%BF%D0%B5%D1%86%D1%81%D0%B5%D0%BC%D0%B8%D0%BD%D0%B0%D1%80_%22%D0%91%D0%B0%D0%B9%D0%B5%D1%81%D0%BE%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B5_%D0%BC%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D1%8B_%D0%BC%D0%B0%D1%88%D0%B8%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BE%D0%B1%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%22.