Погрешность арифметических операций.

$a = a^* + \Delta a$, a – приближенное (измеренное) значение, a^* – точное значение, Δa – абсолютная погрешность.

Δa = 0.000134 ???

В дальнейшем Δa – ***предельная абсолютная погрешность***.

$\frac{\Delta a}{a}$ – ***предельная относительная погрешность***.

$$\frac{\Delta a}{a} \text{ или } \frac{\Delta a}{a^*} \text{ ???}$$

$\frac{\Delta a}{a}$ = 0.000134 ?????

Абсолютная погрешность или относительная ???

$\frac{\Delta a}{a} \sim 10^{-5}$. Сколько верных знаков мантиссы у значения a ?

Погрешность арифметических операций. Сложение.

$$c = a + b \Rightarrow c^* + \Delta c = a^* + \Delta a + b^* + \Delta b;$$
$$\Delta c = \Delta a + \Delta b.$$

Вопрос. Число с ***пятью*** верными знаками мантиссы складываем с числом с ***тремя*** верными знаками мантиссы. Сколько верных знаков будет у их суммы?

Пусть для определенности $\frac{\Delta a}{a} \le \frac{\Delta b}{b}$.

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a + \Delta b}{a+b} = \frac{\frac{\Delta a}{a} \cdot a + \frac{\Delta b}{b} \cdot b}{a+b} = \begin{cases} \le \frac{\Delta b}{b} \\ \ge \frac{\Delta a}{a} \end{cases}.$$

0.25341 + 0.325 – сколько верных разрядов у результата?

2.5341 + 0.325 – сколько верных разрядов у результата?

25.341 + 0.325 – сколько верных разрядов у результата?

Задан одномерный массив (вектор) из $18*10^9$ положительных чисел в диапазоне $0.1 < a < 1$. Каждое из этих чисел имеет 7 верных разрядов мантиссы.

Вопрос. Сколько верных разрядов будет у суммы всех элементов массива?

Погрешность арифметических операций. Умножение и деление.

$$c = a \cdot b \Rightarrow c^* + \Delta c = \left(a^* + \Delta a\right) \cdot \left(b^* + \Delta b\right) = a^* \cdot b^* + a^* \cdot \Delta b + b^* \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b$$

$$\Delta c \approx a^* \cdot \Delta b + b^* \cdot \Delta a \Rightarrow \frac{\Delta c}{c^*} \approx \frac{a^* \cdot \Delta b + b^* \Delta a}{a^* \cdot b^*} = \frac{\Delta a}{a^*} + \frac{\Delta b}{b^*}$$

Вопрос. Число с ***пятью*** верными знаками мантиссы умножили на число с ***тремя*** верными знаками мантиссы. Сколько верных знаков будет у произведения этих чисел?

Операция деления сводится к умножению на обратную величину второго множителя и можно показать, что для деления работают законы умножения.

Погрешность арифметических операций. Вычитание.

Для предельных абсолютных погрешностей имеем

$$\Delta c = \Delta a + \Delta b.$$

Тогда $\dfrac{\Delta c}{c} = \dfrac{\Delta a + \Delta b}{a - b}$

Вопрос. Уменьшаемое и вычитаемое имеют один порядок и заданы оба с 5 верными знаками мантиссы. На сколько верных разрядов может рассчитывать их разность?

0.76859 – 0.12342 сколько верных разрядов у результата?

0.76859 – 0.72342 сколько верных разрядов у результата?

0.76859 – 0.76342 сколько верных разрядов у результата?

0.76859 – 0.76842 сколько верных разрядов у результата?

0.76859 – 0.76852 сколько верных разрядов у результата?

НЕ ВЫЧИТАЙТЕ БЛИЗКИХ ЧИСЕЛ !!!

Пример 1. $x = 7 - \sqrt{48.99}$. Числа 7 и 48.99 заданы точно без какого-либо округления.
Вопрос: С какой точностью нужно вычислить квадратный корень, чтобы получить величину x с двумя верными разрядами?

$x = 7 - \sqrt{48.99} \approx 7 - 6.9992857 = 0.0007143$

Умножим и разделим x на $x = \dfrac{49 - 48.99}{7 + \sqrt{48.99}} = \dfrac{0.01}{7 + \sqrt{48.99}}$.

Если даже приближенно считать $\sqrt{48.99} \approx 7$, то $\dfrac{0.01}{7+7} \approx 0.0007143$ дает ответ с четырьмя верными знаками мантиссы.

Пример 2. Требуется вычислить объем пространства между двумя сферами с общим центром. Радиус внутренней сферы $R = 1\,\text{метр}$, радиус внутренней $R + \Delta R,\quad \Delta R = 1\,\text{миллиметр} = 10^{-3}\text{м}$.

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi\left(R + \Delta R\right)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3$$

Если вычислять по этой формуле, то очевидна потеря значащих цифр.

Разность кубов дает:

$$\Delta V = \frac{4}{3}\pi\left(R + \Delta R\right)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\Delta R\left(\left(R + \Delta R\right)^2 + R\left(R + \Delta R\right) + R^2\right)$$

Если устраивает точность в три верных разряда, можно позволить себе считать, что $R + \Delta R \approx R$, и значение ΔV можно вычислять по формуле $\Delta V \approx \dfrac{4}{3}\pi R^2 \cdot \Delta R$.

Пример 3. Необходимо вычислить корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$. При этом вычисления проводятся на компьютере с относительной погрешностью порядка $\varepsilon \sim 10^{-7}$. Заранее известно, что значения p и q таковы, что дискриминант уравнения положителен и уравнение имеет два вещественных корня. После многочисленных удачных вычислений по известным формулам

$$x_{1,2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

потребовалось обратиться к уравнению для $p = 20000,\ q = 1$. Неожиданно для корней получаем

$$x_1 = \frac{-p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -10^4 - \sqrt{10^8 - 1} \approx -2 \cdot 10^4$$

$$x_2 = \frac{-p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -10^4 + \sqrt{10^8 - 1} \approx 0\,.$$

Здесь учитывался тот факт, что с учетом $\varepsilon \sim 10^{-7}$ выражение под знаком корня равно 10^8. Очевидно, что при вычислении x_2 происходит вычитание близких чисел.

Имея опыт решения *примера 1*, умножим и разделим x_2 на $\frac{-p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$. В результате имеем

$$x_2 = \frac{\frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right)}{\frac{-p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} = \frac{q}{\frac{-p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}} \approx -0.5 \cdot 10^{-4}$$

Однако, можно было не умножать и делить, а воспользоваться известным положением, что произведение корней равно q:

$$x_2 = \frac{q}{x_1} \approx -0.5 \cdot 10^{-4}.$$

Пример 4. По-прежнему, вычисления проводятся на компьютере с относительной погрешностью порядка $\varepsilon \sim 10^{-7}$. Нужно приближенно найти значение экспоненты e^x, используя ее разложение в ряд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Например, вычисление экспоненты $e^{-0.1}$ потребует лишь первых четырех слагаемых

$$e^{-0.1} \approx 1 - 0.1 + \frac{10^{-2}}{2} - \frac{10^{-3}}{6} + \frac{10^{-4}}{24},$$

так как $\left|\frac{x^5}{5!}\right| = \frac{10^{-5}}{120} < 10^{-7}$

Иначе обстоит дело с экспонентой $e^{-10.5}$. Ее истинное значение примерно равно $2.75 \cdot 10^{-5}$, а разложение в ряд неожиданно приводит к результату $e^{-10.5} \sim 10^{-3}$, что на два порядка больше ожидаемой величины.

Очевидно, что в разложении для достижения разумной точности ожидается большое количество слагаемых, так как, только начиная с одиннадцатого слагаемого, оно начнет уменьшаться по модулю по сравнению с предыдущим. Однако, уже сороковое слагаемое оказывается меньше $\varepsilon \sim 10^{-7}$ $\left(\frac{10.5^{40}}{40!} \approx 0.863 \cdot 10^{-7}\right)$, и все проблемы, казалось бы, должны ограничиться объемом вычислений. А наблюдается катастрофическая потеря точности. Дело в том, что наибольший по модулю член разложения равен $\frac{10.5^{10}}{10!} \approx 4488.7969$. Формально не видно вычитания близких чисел и нигде за одну операцию вычитания не происходит сокращения большого числа верных разрядов. Однако, старшие разряды пропадают «постепенно» в течение нескольких последовательных операций, а седьмой слева разряд не пропадает совсем, так как $\varepsilon \sim 10^{-7}$. Как выправить ситуацию, пользуясь той же программой разложения в ряд?

$e^{-10.5} = \frac{1}{e^{10.5}} \approx 2.75 \cdot 10^{-5}$ и никаких вычитаний, в том числе вычитаний близких чисел!