DFT、FFT、DFT Matrix 維基百科閱讀心得

一、關係

DFT（Discrete Fourier Transform，離散傅立葉變換）是傅立葉變換在時域和頻域上都呈離散的形式，將信號的時域採樣變換為其 DTFT 的頻域採樣。FFT（Fast Fourier Transform，快速傅立葉變換）是計算 DFT 及其逆變換的快速算法。按照 DFT 的定義計算一個長為 n 的序列的 DFT 需要的計算複雜度達到了 $O(n^2)$，而同樣長度 FFT 的計算複雜度僅為 $O(n\log n)$。由於 DFT 的逆變換可以由 DFT 表示，所以 DFT 逆變換的計算同樣可以由 FFT 完成。FFT 算法的提出，使 DFT 得到了廣泛的實際應用。DFT Matrix（離散傅立葉變換矩陣）是將 DFT 以矩陣乘法來表達的一種表示式。

二、定義

(一) DFT

對於 N 點序列 $\{x[n]\}_{0\le n<N}$，它的 DFT 為

$$\hat{x}[k]=\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}x[n] \qquad k=0,1,..N,-1$$

其中 e 是自然對數的底數，i 是虛數單位。通常以符號 $\mathcal{F}$ 表示這一變換，即

$$\hat{x}=\mathcal{F}x$$

(二) FFT

假設 $N=P_1\times P_2\times\cdots\times P_k$，其中 P_1、P_2、$\cdots$、P_k 彼此互質

P_k 的 DFT 的乘法量為 B_k，則 N 點 DFT 的乘法量為：

$$\frac{N}{P_1}B_1+\frac{N}{P_2}B_2+\cdots\cdots+\frac{N}{P_k}B_k$$

假設 $P_1=P^c$，P 是一個質數。

若 $N_1=P^a$ 點的 DFT 需要的乘法量為 B_1

且 $n_1\times n_2$ 當中（$n_1=0,1,\cdots,N_1-1$，$n_2=0,1,\cdots,N_2-1$）

有 D_1 個值不為 $\frac{N}{12}$ 及 $\frac{N}{8}$ 的倍數，

有 D_2 個值為 $\frac{N}{12}$ 及 $\frac{N}{8}$ 的倍數，但不為 $\frac{N}{4}$ 的倍數，

則 N 點 DFT 的乘法量為：

$$N_2B_1+N_1B_2+3D_1+2D_2$$

(三) DFT Matrix

N 點的離散傅立葉變換可以用一個 $n\times m$ 的矩陣乘法來表示，即 $X=W_x$，其中 x 是原始的輸入信號，X 是經過離散傅立葉變換得到的輸出信號。

一個 $n\times n$ 的變換矩陣 W 可以定義成 $W=\frac{(\omega^{ij})_{i,j=0,\ldots,N-1}}{\sqrt{N}}$，或等效如下：

$$W=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \cdots & \omega^{N-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \cdots & \omega^{2(N-1)}\\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega^9 & \cdots & \omega^{3(N-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \omega^{3(N-1)} & \cdots & \omega^{(N-1)(N-1)}\end{bmatrix}$$

其中ω是1的n次方根的主值(primitive nth root of unity),大小為$e^{\frac{-2\pi i}{N}}$。需要注意的是在總和前面的正規化因數$\frac{1}{\sqrt{N}}$,還有ω中指數的正負號是依據慣例,並且會因為處理的方法有所不同。