長庚大學期中、期末考試答案用紙　　科目 機率與統計

108 學年度 第 二 學期 中 考 資 工 系 姓名 許書瑋 學號 B0729056

[1] (.1) $f_X(x)=b(x;10,\frac{1}{10})=\binom{10}{x}\cdot(\frac{1}{10})^x\cdot(\frac{9}{10})^{10-x}$

(.2) $E[X]=np=10\cdot\frac{1}{10}=1$

(.3) $Std[X]=\sqrt{npq}=\sqrt{10\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}=\sqrt{10}\cdot\frac{3}{10}=0.9487$

(.4) $f_Y(y)=h(y;100,10,10)=\frac{\binom{10}{y}\binom{90}{10-y}}{\binom{100}{10}}$

(.5) $E[Y]=\frac{nk}{N}=\frac{10\cdot10}{100}=1$; $Std[Y]=\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\cdot n\cdot\frac{k}{N}\cdot(1-\frac{k}{N})}=\sqrt{\frac{90}{99}\cdot10\cdot\frac{10}{100}\cdot(1-\frac{10}{100})}=0.8182$

$E[Y]+Std[Y]=1+0.8182=1.8182$ ※

(.6) $f_Z(z)=b^*(z;5,\frac{1}{10})=\binom{z-1}{4}\cdot(\frac{1}{10})^5\cdot(\frac{9}{10})^{z-5}$

[2] (.1) $f_W(w)=p(w;1)=\frac{e^{-1}\cdot1^w}{w!}=\frac{1}{e\cdot w!}=\frac{0.3679}{w!}$

(2) $E[W]=\lambda t=1$; $Std[W]=\sqrt{\lambda t}=1$ $\therefore E[W]+Std[W]=2$

(.3) $|W-E[W]|\le 2\cdot Std(W) \Rightarrow |W-1|\le 2 \Rightarrow 1\le W\le 3$

$\therefore P(\text{"}|W-E[W]|\le 2\cdot Std(W)\text{"})=P(1\le W\le 3)=f_W(1)+f_W(2)+f_W(3)=0.3679\cdot(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6})=0.6131$ ※

(.4) $P(W>120)=1-P(W\le120)=1-\sum_{w=0}^{120}f_w(w)=1-1=0$

(5) 根據上一題結果知，$W>120$ 的發生機率接近 0，與現實中時常發生的狀況不符，表示原假設「火災發生之平均頻率為每天1件」有誤，應予拒絕。

[3] (.1) $P(X\ge10)=1-P(X<10)=1-\sum_{x=0}^{9}b(x;100,0.05)=1-\sum_{x=0}^{9}p(x;5)=0.0318$

(.2) 在總瑕疵品佔所有產品不超過5%的前提下，隨機抽100個產品發現至少有10個瑕疵品的發生機率僅3.18%，表示不太可能發生，因此此假設可接受。

[4] $b(x;n,p)=\binom{n}{x}p^x\cdot(1-p)^{n-x}\underset{\uparrow}{=}\binom{n}{x}(\frac{\lambda t}{n})^x(1-\frac{\lambda t}{n})^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}\cdot(\frac{\lambda t}{n})^x\cdot(1-\frac{\lambda t}{n})^{n-x}=\frac{(\lambda t)^x}{x!}\cdot\frac{n!}{(n-x)!}\cdot\frac{1}{n^x}\cdot(1-\frac{\lambda t}{n})^{n-x}$

$\mu=\lambda t=np$ (when $n\to\infty$)

$\frac{n!}{(n-x)!}\cdot\frac{1}{n^x}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\cdots(n-x+1)}{n^x}=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\cdots\frac{n-x+1}{n}=1\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})\cdots\cdots(1-\frac{x-1}{n})$

$\therefore\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{(\lambda t)^x}{x!}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})\cdots\cdots(1-\frac{x-1}{n})\cdot(1-\frac{\lambda t}{n})^{n-x}=\frac{(\lambda t)^x}{x!}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot(1-\frac{2}{n})\cdots\cdots(1-\frac{x-1}{n})\cdot(1-\frac{\lambda t}{n})^n\cdot(1-\frac{\lambda t}{n})^{-x}$

$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{(\lambda t)^x}{x!}\cdot\lim_{n\to\infty}[(1-\overset{\to0}{\frac{1}{n}})\cdot(1-\overset{\to0}{\frac{2}{n}})\cdots\cdots(1-\overset{\to0}{\frac{x-1}{n}})]\cdot\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda t}{n})^n\cdot\lim_{n\to\infty}(1-\overset{\to0}{\frac{\lambda t}{n}})^{-x}$

$=\frac{(\lambda t)^x}{x!}\cdot1\cdot e^{-\lambda t}\cdot1=\frac{(\lambda t)^x\cdot e^{-\lambda t}}{x!}=p(x;\lambda t)$

（請翻面繼續作答）