

Metody numeryczne - projekt 3.

Kinga Świderek

1 Zadanie

Ruch punktu na płaszczyźnie (y_1, y_2) jest opisany równaniami:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= y_2 + y_1(0.3 - y_1^2 - y_2^2) \\ \frac{dy_2}{dx} &= -y_1 + y_2(0.3 - y_1^2 - y_2^2)\end{aligned}$$

Powyższe równania ruchu można przedstawić jako:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2)\end{aligned}$$

Zmienne y_1 oraz y_2 są oznaczeniami położenia, natomiast zmienna x może być interpretowana jako czas. Funkcje $y_1(x), y_2(x)$ symbolizują zmianę położenia punktu względem danej osi (y_1, y_2) w czasie.

Należy obliczyć przebieg trajektorii ruchu tego punktu w przedziale $[0, 20]$ dla warunków początkowych: $y_1(0) = 8, y_2(0) = 8$.

2 Opis algorytmu - metoda Heuna (RK2)

W metodzie Heuna kolejne punkty są wyznaczane zgodnie z równaniem:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h[\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n))]$$

gdzie $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_m]^T$, $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_m]^T$, natomiast h jest długością kroku.

Powyższy wzór, dla opisanego wyżej zadania, można zdekomponować na następujące kroki:

1. Zaczynając od znanego punktu $(x_n, (y_1)_n, (y_2)_n)$, obliczamy nachylenie początkowe:

$$(k_1)_p = f_1(x_n, (y_1)_n, (y_2)_n)$$

$$(k_2)_p = f_2(x_n, (y_1)_n, (y_2)_n)$$

2. Bazując na obliczonym nachyleniu początkowym, przewidujemy jaka będzie wartość funkcji na końcu kroku h :

$$(\tilde{y}_1)_{n+1} = (y_1)_n + h \cdot (k_1)_p$$

$$(\tilde{y}_2)_{n+1} = (y_2)_n + h \cdot (k_2)_p$$

3. Obliczamy nachylenie w przewidywanym punkcie końcowym:

$$(k_1)_k = f_1(x_n + h, (\tilde{y}_1)_{n+1}, (\tilde{y}_2)_{n+1})$$

$$(k_2)_k = f_2(x_n + h, (\tilde{y}_1)_{n+1}, (\tilde{y}_2)_{n+1})$$

4. Z nachylenia początkowego i końcowego wyliczamy nachylenie średnie, zgodnie ze wzorem:

$$k_1 = \frac{1}{2}((k_1)_p + (k_1)_k)$$

$$k_2 = \frac{1}{2}((k_2)_p + (k_2)_k)$$

5. Używając średnich nachyleń, aktualizujemy wartości funkcji:

$$(y_1)_{n+1} = (y_1)_n + h \cdot k_1$$

$$(y_2)_{n+1} = (y_2)_n + h \cdot k_2$$

6. Powyższe kroki należy powtarzać do momentu dojścia do odpowiedniego punktu końcowego - w tym przypadku będzie to $x = 20$.

Dodatkowo, długość kroku (h) powinna być zmienna z szacowaniem błędu metodą zdwabiania kroku. Oznacza to, że przy każdej iteracji będziemy szacować błąd zgodnie z równaniem:

$$\delta_n(h)_i = \frac{(y_i)_n^{(2)} - (y_i)_n^{(1)}}{2^p - 1}$$

gdzie $(y_i)_n^{(1)}$ oznacza nowy, i -ty igrek uzyskany w kroku o długości h , natomiast $(y_i)_n^{(2)}$ - dla dwóch kroków o długościach $\frac{h}{2}$. W przypadku metody Heuna, $p = 2$.

Na podstawie $\delta_n(h)_i$ obliczona zostanie wartość α - współczynnik modyfikacji kroku:

$$\alpha = \min_{1 \leq i \leq k} \left(\frac{\epsilon_i}{|\delta_n(h)_i|} \right)^{\frac{1}{p+1}}$$

gdzie $\epsilon_i = |(y_i)_n^{(2)}| \cdot \epsilon_w + \epsilon_b$, natomiast ϵ_w i ϵ_b będą parametrami wołania metody, oznaczającym dokładność obliczeń względną i bezwzględną.

Nową wartością kroku będzie:

$$h_{n+1} = \alpha h_n$$

Wartość kroku nie może spaść poniżej zadanej jako parametr wołania wartości h_{\min} .

3 Wyniki

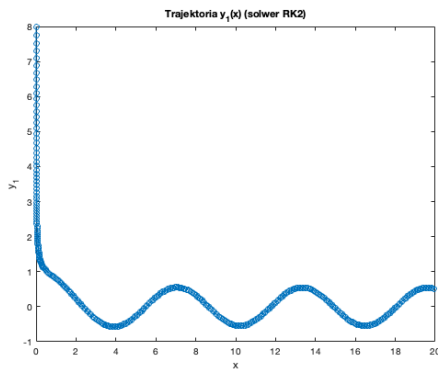
Wartości parametrów:

- minimalny krok: $h_{\min} = 1e-5$
- dokładność względna: $\epsilon_w = 1e-5$
- dokładność bezwzględna: $\epsilon_b = 1e-5$

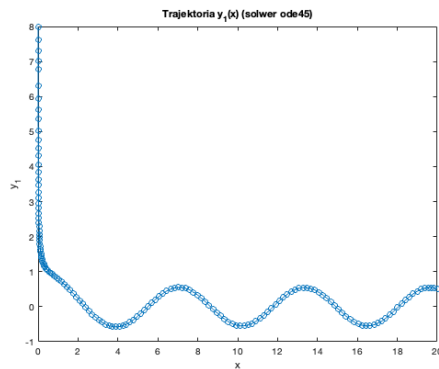
Na poniższych wykresach przedstawiono kolejno trajektorie ruchu: $y_1(x)$, $y_2(x)$ oraz w przestrzeni fazowej, obliczone przez solwery *RK2* (zaimplementowany samodzielnie) oraz *ode45* (solwer Matlaba).

Wyniki nie różnią się między sobą, jedynie poza większą częstością punktów przy wykorzystaniu solwera *RK2* - co wynika z wybranych wartości h_{\min} , ϵ_w , ϵ_b . Wyniki działania zaimplementowanego algorytmu są zatem poprawne.

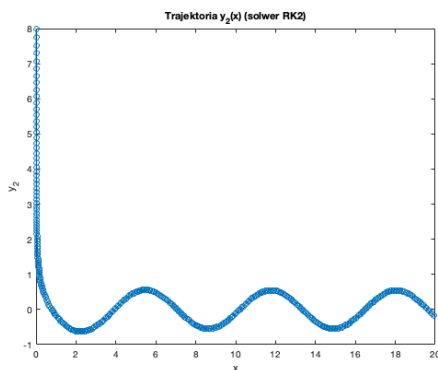
Czas działania obu algorytmów jest bardzo zbliżony do siebie - w przypadku *RK2* jest to średnio ok. 0.003 sekundy, natomiast w przypadku *ode45* - ok. 0.002 sekundy.



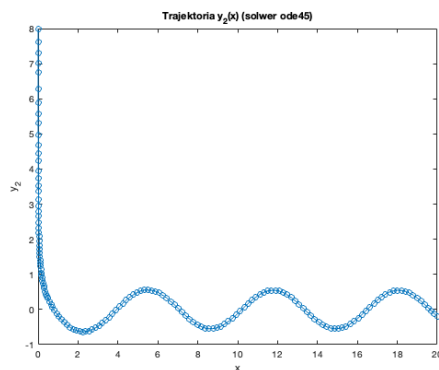
Rysunek 1: Trajektoria $y_1(x)$ wyznaczone solwerem *RK2*



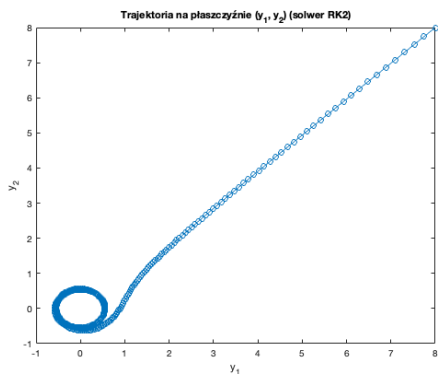
Rysunek 2: Trajektoria $y_1(x)$ wyznaczone solwerem *ode45*



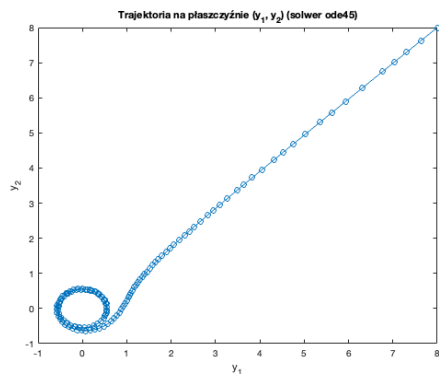
Rysunek 3: Trajektoria $y_2(x)$ wyznaczone solwerem *RK2*



Rysunek 4: Trajektoria $y_2(x)$ wyznaczone solwerem *ode45*

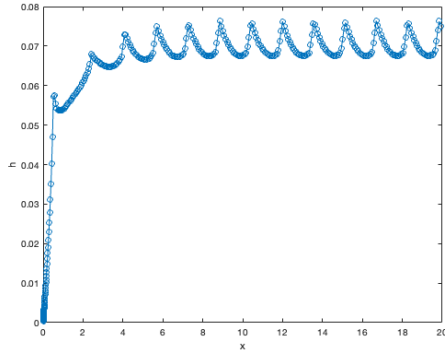


Rysunek 5: Trajektoria na płaszczyźnie (y_1, y_2) wyznaczone solwerem *RK2*

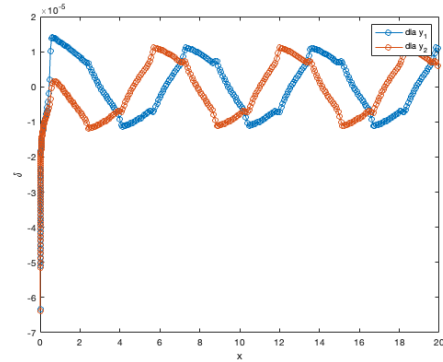


Rysunek 6: Trajektoria na płaszczyźnie (y_1, y_2) wyznaczone solwerem *ode45*

Poniższe wykresy przedstawiają zależność długości kroku od czasu oraz zależność estymaty błędu od czasu:



Rysunek 7: Zależność długości kroku h od czasu x



Rysunek 8: Zależność estymaty błędu δ od czasu x dla równań y_1, y_2

Oba te wykresy mają charakterystykę okresową, poza ich początkiem. W przypadku wykresu estymaty błędu, obie krzywe - dla y_1 oraz y_2 - mają niemal identyczne wykresy, z małym przesunięciem fazowym jednego względem drugiego. Rzędy wielkości długości kroku to 10^{-2} . Rzędy wielkości błędu to 10^{-5} - zgodnie z założoną dokładnością.