Laboratorium identyfikacji systemów

Instytut Automatyki i Robotyki (IAR)
Politechnika Poznańska (PP)
opracowanie: Maciej M. Michałek

C4 Rekursywna parametryczna identyfikacja systemów

Ćwiczenie poświęcone jest rekursywnym wersjom metod LS oraz IV identyfikacji parametrycznej. Zastosowanie algorytmów rekursywnych: (a) pozwala na ograniczenie objętości wymaganej pamięci do składowania danych, (b) upraszcza obliczenia numeryczne w procesie estymacji parametrycznej (brak konieczności odwracania macierzy danych pomiarowych), (c) umożliwia wykorzystanie aktualnego modelu systemu w czasie rzeczywistym (tj. na bieżąco), co ma szczególne znaczenie np. w realizacji algorytmów sterowania adaptacyjnego lub w zastosowaniach służących diagnostyce uszkodzeń/awarii systemu. Podczas ćwiczenia przyjęte zostanie założenie o znajomości struktury identyfikowanego systemu przy nieznajomości wartości jego parametrów (model i identyfikacja typu GREY-BOX).

1 Identyfikacja bezpośrednia systemu dynamicznego czasu dyskretnego metodami RLS oraz RIV

Rekursywne algorytmy identyfikacji RLS oraz RIV (*Recursive* LS/IV) wynikają z przekształcenia estymatorów wsadowych zdefiniowanych dla danych spróbkowanych. Stanowią one zatem rekursywne odpowiedniki metod wsadowych (LS lub IV) i asymptotycznie (tj. dla liczby danych $N \to \infty$) charakteryzują się tymi samymi właściwościami statystycznymi co oryginalne metody wsadowe, odpowiednio, LS oraz IV.

W dalszej części rozważań zakładamy, że strukturę rzeczywistego systemu dynamicznego czasu dyskretnego *generującego* dane pomiarowe można zapisać w postaci regresyjnej, tzn.:

$$y(n) = G_{\mathrm{o}}(q^{-1}, \boldsymbol{p}_{\mathrm{o}})u(n) + v^*(n) \qquad \Rightarrow \qquad y(n) = \boldsymbol{\varphi}^\top(n)\, \boldsymbol{p}_{\mathrm{o}} + v(n), \tag{1}$$

gdzie $v^*(n)$ i $v(n)$ są zakłóceniami stochastycznymi (białymi lub kolorowymi), a $\boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}$ reprezentuje wektor rzeczywistych parametrów systemu.

Charakterystyczną cechą metod rekursywnych jest iteracyjny sposób realizacji obliczeń estymat parametrów, gdzie w każdym kroku iteracji aktualizacja estymat jest wyznaczana na podstawie bieżącej pary pomiarów wejścia i wyjścia identyfikowanego systemu. Estymata parametrów $\hat{\boldsymbol{p}}(n)$ w dyskretnej chwili n-tej jest zatem uaktualniana według następującego ogólnego schematu:

$$\hat{\boldsymbol{p}}(n) = \hat{\boldsymbol{p}}(n-1) + \boldsymbol{k}(n)\, \varepsilon(n), \tag{2}$$

gdzie $\boldsymbol{k}(n)\, \varepsilon(n)$ jest poprawką, którą określa się na podstawie nowej pary pomiarów $\{y(n), u(n)\}$. Wielkość $\varepsilon(n) = y(n) - \boldsymbol{\varphi}^\top(n)\, \hat{\boldsymbol{p}}(n-1)$ jest bieżącą wartością błędu predykcji (obliczaną na podstawie estymaty parametrów z poprzedniej iteracji), natomiast $\boldsymbol{k}(n) \in \mathbb{R}^d$ jest wektorowym wzmocnieniem zależnym od aktualnej macierzy kowariancyjnej. Należy zaznaczyć, że pomimo zapisu równania aktualizacji (2) w dziedzinie czasu dyskretnego, symbol n może alternatywnie oznaczać po prostu numer iteracji, jeżeli obliczenia nie są wykonywane w czasie rzeczywistym a raczej jako szeregowe przetwarzanie wsadu danych pomiarowych $\mathrm{Z}^N = \{y(n), u(n)\}_{n=0}^{N-1}$.

Pełny schemat obliczeń rekursywnej metody LS (czyli metody RLS) w dziedzinie czasu dyskretnego jest następujący:

$$\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}(n) = \hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}(n-1) \; + \; \boldsymbol{k}(n)\,\varepsilon(n), \tag{3}$$

$$\varepsilon(n) = y(n) \; - \; \boldsymbol{\varphi}^{\top}(n)\,\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}(n-1), \tag{4}$$

$$\boldsymbol{k}(n) = \boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}(n)\,\boldsymbol{\varphi}(n), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}(n) = \boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}(n-1) - \frac{\boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}(n-1)\boldsymbol{\varphi}(n)\boldsymbol{\varphi}^{\top}(n)\boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}(n-1)}{1+\boldsymbol{\varphi}^{\top}(n)\boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}(n-1)\boldsymbol{\varphi}(n)}, \tag{6}$$

przy czym ze względu na ciąg przyczynowy obliczenia wykonuje się w każdym kroku w kolejności (6)→(5)→(4)→(3). Warto zwrócić uwagę, iż (w odróżnieniu od metody wsadowej) równanie (3) definiuje pewien proces obliczeniowy, którego wynik poczynając od warunków początkowych $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}(0)$, $\boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}(0)$ będzie ewoluował w czasie dyskretnym poprzez stany przejściowe aż do stanu ustalonego (teoretycznie osiąganego dla $n \to \infty$). Po zaniknięciu stanów przejściowych (w praktyce przyjmujemy, że nastąpi to w przybliżeniu w czasie skończonym $n \to N-1$ dla dostatecznie dużej wartości N) estymata $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}(N-1)$ winna odpowiadać (przynajmniej w sensie statystycznym) wartości etymatora LS metody wsadowej uzyskanej dla zbioru N pomiarów. Warunki początkowe $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}(0)$ oraz $\boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}(0)$ dla rekursji (3)-(6) można wybrać na różne sposoby, np.:

- wybór na podstawie wiedzy wstępnej o możliwym zakresie wartości parametrów $\boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}$,
- wybór arbitralny np.: $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}(0) := \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}(0) := \rho \cdot \boldsymbol{I}$, gdzie $\rho \gg 0$, a $\boldsymbol{I} \in \mathbb{R}^{d_p \times d_P}$ jest macierzą jednostkową, natomiast $d_p = \dim(\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}})$.

W interpretacji statystycznej odwrotność macierzy $\boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}(0)$ reprezentuje stopień wiarygodności jakim obdarzamy początkową estymatę $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}(0)$. Ponadto przy zgodności struktury modelu ze strukturą systemu oraz jeżeli zakłócenie $v(n)$ w (1) jest szumem białym o wariancji σ_{o}^2, wówczas

$$\mathrm{Cov}[\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}] = \sigma_{\mathrm{o}}^2 \boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}. \tag{7}$$

Zwróćmy uwagę na ważną właściwość macierzy kowariancyjnej obliczanej na podstawie równania (6), a mianowicie:

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}(n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{0}, \tag{8}$$

co oznacza, że przy założeniu nieustannego pobudzania systemu estymata $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}(n)$ będzie dla $n \to \infty$ zmierzała do pewnej stałej wartości granicznej $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}_{\mathrm{lim}}$ (zbieżność wg prawdopodobieństwa). Wartość graniczna $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}_{\mathrm{lim}}$ będzie odpowiadała prawdziwym parametrom $\boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}$, jeżeli spełnione będą założenia dotyczące białości zakłócenia $v(n)$ w strukturze (1) oraz zgodności struktury modelu ze strukturą identyfikowanego systemu, a sygnał wejściowy $u(n)$ będzie nieustannie pobudzający.

Metoda zmiennych instrumentalnych (IV) wykazuje odporność na niespełnienie założenia o białości zakłócenia $v(n)$ w równaniu (1). Rekursywna wersja metody IV (tj. metoda RIV) jest opisana następującym zestawem równań:

$$\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{IV}}(n) = \hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{IV}}(n-1) \; + \; \boldsymbol{k}(n)\,\varepsilon(n), \tag{9}$$

$$\varepsilon(n) = y(n) \; - \; \boldsymbol{\varphi}^{\top}(n)\,\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{IV}}(n-1), \tag{10}$$

$$\boldsymbol{k}(n) = \boldsymbol{P}^{\mathrm{IV}}(n)\,\boldsymbol{z}(n), \tag{11}$$

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{IV}}(n) = \boldsymbol{P}^{\mathrm{IV}}(n-1) - \frac{\boldsymbol{P}^{\mathrm{IV}}(n-1)\boldsymbol{z}(n)\boldsymbol{\varphi}^{\top}(n)\boldsymbol{P}^{\mathrm{IV}}(n-1)}{1+\boldsymbol{\varphi}^{\top}(n)\boldsymbol{P}^{\mathrm{IV}}(n-1)\boldsymbol{z}(n)}, \tag{12}$$

gdzie $\boldsymbol{z}(n)$ jest wektorem zmiennych instrumentalnych obliczanych tak, aby zapewnić ich (silne) skorelowanie ze elementami wektora regresji $\boldsymbol{\varphi}(n)$ oraz nieskorelowanie z zakłóceniem $v(n)$ z równania (1). Także tutaj kolejność obliczeń jest następująca: (12)→(11)→(10)→(9). Zastosowanie metody zmiennych instrumentalnych umożliwia uzyskanie zgodnego estymatora parametrów (tj. $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{IV}}(n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}$ wg prawdopodobieństwa) pomimo, iż zakłócenie $v(n)$ w równaniu

(1) nie jest szumem białym. Jakość estymacji metodą RIV zależy, między innymi, od sposobu generowania zmiennych w wektorze $\boldsymbol{z}(n)$. Jednym ze sposobów wyznaczania zmiennych instrumentalnych jest przyjęcie następującej definicji

$$\boldsymbol{z}(n) \triangleq [-x(n-1) \ \ -x(n-2)\dots -x(n-n_a) \quad u(n-1)\ u(n-2)\dots u(n-n_b)]^\top, \qquad (13)$$

gdzie $x(k)$, $k=n-1,\dots,n-n_a$, jest próbką odpowiedzi modelu symulowanego w chwili k-tej, obliczaną z wykorzystaniem estymaty parametrów z poprzedniej iteracji algorytmu RIV:

$$x(n) := G(q^{-1}, \hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{IV}}(n-1))u(n) \qquad (14)$$

$$\Downarrow$$

$$A(q^{-1}, \hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{IV}}(n-1))x(n) = B(q^{-1}, \hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{IV}}(n-1))u(n).$$

Należy zwrócić uwagę, że model symulowany (14) jest uaktualniany w każdej chwili n (w każdej iteracji algorytmu RIV) poprzez wykorzystanie do obliczeń najbardziej aktualnej estymaty wektora parametrów, tj. $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{IV}}(n-1)$. Wybór warunków początkowych $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{IV}}(0)$ i $\boldsymbol{P}^{\mathrm{IV}}(0)$ dla rekursji (9)-(12) wynika z analogicznych przesłanek jak dla metody RLS (patrz wyżej).

1.1 Identyfikacja systemu dynamicznego czasu dyskretnego metodą RLS.

- Plik `SystemARMAX.mdl` zawiera blok reprezentujący system dynamiczny czasu dyskretnego o następującej strukturze:

$$y(n) = \underbrace{\frac{b_{2\mathrm{o}}q^{-2}}{1+a_{1\mathrm{o}}q^{-1}+a_{2\mathrm{o}}q^{-2}}}_{G_\mathrm{o}(q^{-1},\boldsymbol{p}_\mathrm{o})}u(n) + \underbrace{\frac{1+c_{1\mathrm{o}}q^{-1}}{1+a_{1\mathrm{o}}q^{-1}+a_{2\mathrm{o}}q^{-2}}}_{H_\mathrm{o}(q^{-1},\boldsymbol{p}_\mathrm{o})}e(n), \qquad (15)$$

  gdzie $a_{1\mathrm{o}}, a_{2\mathrm{o}}, b_{2\mathrm{o}}$ i $c_{1\mathrm{o}}$ reprezentują rzeczywiste parametry systemu, a $e(n)$ jest szumem białym. Model systemu (15) należy do rodziny ARMAX o postaci ogólnej: $Ay(n) = Bu(n) + Ce(n) \ \Rightarrow \ y(n) = Gu(n) + He(n), \quad G = B/A, \ H = C/A$. Jeżeli w systemie $c_{1\mathrm{o}} = 0$, wówczas struktura modelu odpowiadająca systemowi (15) redukuje się do typu ARX. Dla $c_{1\mathrm{o}} \neq 0$ zakłócenie $(1+c_{1\mathrm{o}}q^{-1})e(n)$ jest już kolorowe z wszelkimi konsekwencjami tego faktu.

- Zapisać model rzeczywistego systemu (15) w postaci regresji liniowej przyjmując $v(n) := (1+c_{1\mathrm{o}}q^{-1})e(n)$.

- Zainicjować następujące zmienne globalne: `Tp = 0.1, Tend = 1000, Td = 1500`, które oznaczają (w sekundach), odpowiednio: okres próbkowania, horyzont czasowy symulacji oraz czas, po którym nastąpi zmiana wartości parametru $b_{2\mathrm{o}}$ (tutaj `Tend < Td`, więc zmiana nie nastąpi wcale – identyfikowany system będzie miał stałe parametry w całym horyzoncie symulacji). **Uwaga**: Wszystkie bloki obliczeniowe należy synchronizować tym samym okresem próbkowania `Tp`, a w ustawieniach symulacji wymusić: `Type: Fixed-step, Solver: discrete (no continuous states)`. Wewnątrz bloku ARMAX w pliku `SystemARMAX.mdl` przełącznik wyboru rodzaju zmiany parametru $b_{2\mathrm{o}}$ należy ustawić w pozycję 'skokowe zmiany parametru'.

- Zainicjować wartość parametru $c_{1\mathrm{o}} = 0$ (utworzyć w tym celu zmienną globalną `c1o` w środowisku Matlab) w celu wymuszenia zakłócenia $v(n) \equiv e(n)$ w równaniu regresji. Przeprowadzić identyfikację parametryczną toru sterowania systemu (15) metodą RLS przyjmując jako wejście pobudzające $u(n)$ sygnał prostokątny (symetryczny względem zera) o amplitudzie jednostkowej i częstotliwości $f_u = 0.025\,\mathrm{Hz}$. Przyjąć zerowy warunek początkowy dla estymat.

- Przeanalizować przebiegi estymat $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}(n)$ dla wartości $\rho \in \{10,\ 1,\ 0.1\}$ używanych do inicjalizacji macierzy $\boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}(0)$.

- Sprawdzić przebieg śladu macierzy $\boldsymbol{P}^{\mathrm{LS}}(n)$ podczas estymacji (funkcja `trace()`).
- Zaimplementować bloki wyznaczające odpowiedź modelu symulowanego oraz odpowiedź predyktora jednokrokowego dla systemu (15) tak, aby oba bloki wykorzystywały do obliczeń aktualne estymaty parametrów. Sprawdzić jakość identyfikacji porównując (w czasie rzeczywistym podczas estymacji i przy tym samym pobudzeniu $u(n)$):
  - odpowiedź modelu symulowanego $y_m(n)$ z odpowiedzią niezakłóconą $y_{\mathrm{o}}(n)$ systemu (oznaczenie 'yo(n)' w bloku z pliku `SystemARMAX.mdl`),
  - odpowiedź predyktora jednokrokowego $\hat{y}(n|n-1)$ z zakłóconą odpowiedzią $y(n)$ systemu,
  - odpowiedź modelu symulowanego $y_m(n)$ z odpowiedzią $y(n)$ systemu.

  Które z powyższych porównań sygnałów jest najbardziej miarodajne z punktu widzenia oceny jakości identyfikacji? Czy wszystkie powyższe porównania można wykonać w praktyce?
- Zainicjować wartość parametru $c_{1\mathrm{o}} = 0.7$ w celu wymuszenia zakłócenia kolorowego $v(n) = (1 + c_{1\mathrm{o}}q^{-1})e(n)$ w równaniu regresji. Ponownie przeprowadzić identyfikację parametryczną metodą RLS i przeanalizować zbieżność estymat $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{LS}}(n)$.

1.2 Identyfikacja systemu dynamicznego czasu dyskretnego metodą RIV.

- Zainicjować wartość parametru $c_{1\mathrm{o}} = 0.7$ w celu wymuszenia zakłócenia kolorowego w równaniu regresji. Przeprowadzić identyfikację parametryczną toru sterowania systemu (15) stosując metodę RIV ze zmiennymi instrumentalnymi $\boldsymbol{z}(n)$ obliczanymi zgodnie z regułą (13)-(14). Przeanalizować zbieżność estymat $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{IV}}(n)$.
- Sprawdzić jakość identyfikacji porównując (w czasie rzeczywistym podczas estymacji i przy tym samym pobudzeniu $u(n)$):
  - odpowiedź modelu symulowanego $y_m(n)$ z odpowiedzią niezakłóconą $y_{\mathrm{o}}(n)$ systemu (oznaczenie 'yo(n)' w bloku identyfikowanego systemu z pliku `SystemARMAX.mdl`),
  - odpowiedź modelu symulowanego $y_m(n)$ z odpowiedzią $y(n)$ systemu.

  Czy oba powyższe porównania umożliwiają podobną ocenę jakości identyfikacji i czy oba porównania można wykonać w praktyce?
- Sprawdzić przebieg śladu macierzy kowariancyjnej $\boldsymbol{P}^{\mathrm{IV}}(n)$ podczas identyfikacji.

2 Adaptacyjna identyfikacja niestacjonarnego systemu dynamicznego czasu dyskretnego

Można podać wiele przykładów systemów, których parametry ulegają zmianie bądź w sposób gwałtowny (np. co pewien interwał czasowy), bądź powolny lecz ustawiczny[1] (mówi się wtedy o tzw. dryfie parametrów); opis regresyjny systemu niestacjonarnego przyjmuje postać:

$$y(n) = \boldsymbol{\varphi}^{\top}(n)\boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}(n) + v(n). \tag{16}$$

W przypadku systemu niestacjonarnego algorytmy identyfikacji powinny mieć zdolność do śledzenia (w czasie rzeczywistym) zmian wartości parametrów systemu tak, aby wyznaczany

[1] Rozważamy zmiany wyłącznie parametrów zakładając, że struktura systemu nie ulega zmianie.

model był w danym momencie jak najbardziej aktualny – mówimy w tym przypadku o *identyfikacji adaptacyjnej*. Podstawowe metody RLS i RIV rozważane w poprzednim punkcie nie mają zdolności adaptacyjnych, ponieważ ślad macierzy kowariancyjnej zbiega z upływem czasu asymptotycznie do zera i tym samym zdolność do korekty wektora estymat parametrów jest z biegiem czasu coraz mniejsza.

Aby zagwarantować gotowość algorytmu identyfikacyjnego do śledzenia zmiennych w czasie parametrów systemu należy zapewnić, by ślad macierzy kowariancyjnej $\boldsymbol{P}(n)$ nie zbiegał do zera. Właściwość tę można uzyskać stosując jeden z trzech klasycznych mechanizmów:

- wprowadzenie do równania aktualizacji macierzy $\boldsymbol{P}(n)$ tzw. *współczynnika zapominania* $\lambda \in (0; 1)$ (zwykle w celu **śledzenia parametrów wolnozmiennych**); równania estymacji rekursywnej przyjmują w tym przypadku następującą postać:

$$\hat{\boldsymbol{p}}(n) = \hat{\boldsymbol{p}}(n-1) \ + \ \boldsymbol{k}(n)\,\varepsilon(n), \tag{17}$$

$$\varepsilon(n) = y(n) \ - \ \boldsymbol{\varphi}^\top(n)\,\hat{\boldsymbol{p}}(n-1), \tag{18}$$

$$\boldsymbol{k}(n) = \boldsymbol{P}(n)\,\boldsymbol{\zeta}(n), \tag{19}$$

$$\boldsymbol{P}(n) = \frac{1}{\lambda}\left[\boldsymbol{P}(n-1) - \frac{\boldsymbol{P}(n-1)\boldsymbol{\zeta}(n)\boldsymbol{\varphi}^\top(n)\boldsymbol{P}(n-1)}{\lambda + \boldsymbol{\varphi}^\top(n)\boldsymbol{P}(n-1)\boldsymbol{\zeta}(n)}\right], \tag{20}$$

  przy czym dla $\boldsymbol{\zeta}(n) := \boldsymbol{\varphi}(n)$ otrzymamy metodę RLS$_\lambda$, natomiast dla $\boldsymbol{\zeta}(n) := \boldsymbol{z}(n)$ możemy mówić o algorytmie RIV$_\lambda$,

- poprzez *resetowanie* macierzy kowariancyjnej w celu **śledzenia gwałtownych lecz sporadycznych zmian parametrów** systemu; resetowanie polega na przypisywaniu do macierzy $\boldsymbol{P}$ założonej macierzy nieujemnie określonej, gdy spełniony zostanie odpowiedni warunek resetowania:

  R1. resetowanie okresowe (z okresem $T > 0$)

$$\boldsymbol{P}(n) := \mathrm{diag}\{\rho_1, \ldots, \rho_{d_p}\}, \qquad \text{gdy} \qquad n = kT,\ k = 1, 2, \ldots$$

  R2. resetowanie z warunkiem na wartość błędu predykcji ε lub błędu wyjściowego $\varepsilon_{\mathrm{OE}}$

$$\boldsymbol{P}(n) := \mathrm{diag}\{\rho_1, \ldots, \rho_{d_p}\}, \qquad \text{gdy} \qquad |\varepsilon(n)| > \varepsilon_{\max} \quad \text{lub} \quad |\varepsilon_{\mathrm{OE}}(n)| > \varepsilon_{\max}$$

  R3. resetowanie z warunkiem na wartość śladu macierzy kowariancyjnej

$$\boldsymbol{P}(n) := \mathrm{diag}\{\rho_1, \ldots, \rho_{d_p}\}, \qquad \text{gdy} \qquad \mathrm{tr}(\boldsymbol{P}(n)) < P_{\min}$$

  przy czym $d_p = \dim(\hat{\boldsymbol{p}})$, natomiast $\rho_i \geqslant 0$, $T > 0$, $\varepsilon_{\max} > 0$ oraz $P_{\min} > 0$ są parametrami projektowymi; powyższe warunki resetowania można łączyć (np. stosując koniunkcję warunków) lub modyfikować w zależności od zastosowania i warunków identyfikacji systemu,

- wykorzystanie koncepcji filtracji Kalmana w celu **śledzenia ustawicznych zmian parametrów** $\boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}(n)$ o charakterze tzw. *błądzenia losowego*, które można opisać za pomocą następującego równania różnicowego

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}(n) = \boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}(n-1) + \boldsymbol{w}(n-1), \qquad \mathrm{Cov}[\boldsymbol{w}(n)] = \boldsymbol{V}_{\mathrm{o}} = \mathrm{diag}\{\mathrm{v}_{1\mathrm{o}}, \ldots, \mathrm{v}_{d_p\mathrm{o}}\}, \tag{21}$$

  gdzie $\boldsymbol{w}(n)$ jest wektorem (pomiarowo niedostępnych) nieskorelowanych zaburzeń losowych o jednakowym rozkładzie normalnym i diagonalnej macierzy kowariancji $\boldsymbol{V}_{\mathrm{o}}$; w takim przypadku równania rekursywnej estymacji parametrów przyjmują postać:

$$\hat{\boldsymbol{p}}(n) = \hat{\boldsymbol{p}}(n-1) \ + \ \boldsymbol{k}(n)\,\varepsilon(n), \tag{22}$$

$$\varepsilon(n) = y(n) \ - \ \boldsymbol{\varphi}^\top(n)\,\hat{\boldsymbol{p}}(n-1), \tag{23}$$

$$\boldsymbol{k}(n) = \boldsymbol{P}(n|n-1)\boldsymbol{\varphi}(n)[1 + \boldsymbol{\varphi}^\top(n)\boldsymbol{P}(n|n-1)\boldsymbol{\varphi}(n)]^{-1}, \tag{24}$$

$$\boldsymbol{P}(n) = \boldsymbol{P}(n|n-1) - \boldsymbol{k}(n)\boldsymbol{\varphi}^\top(n)\boldsymbol{P}(n|n-1), \tag{25}$$

$$\boldsymbol{P}(n|n-1) = \boldsymbol{P}(n-1) + \hat{\boldsymbol{V}}^*, \tag{26}$$

gdzie dobierana doświadczalnie macierz $\hat{\boldsymbol{V}}^* := \mathrm{diag}\{\hat{\mathrm{v}}_1^*, \ldots, \hat{\mathrm{v}}_{d_p}^*\}$, $\hat{\mathrm{v}}_i^* \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, d_p$ posiada niezerowe elementy na tych pozycjach diagonali, które odpowiadają zmiennym w czasie parametrom modelu. Macierz $\hat{\boldsymbol{V}}^*$ jest oszacowaniem ilorazu $\boldsymbol{V}_{\mathrm{o}}/\sigma_{\mathrm{o}}^2$, gdzie σ_{o}^2 reprezentuje wariancję białego zakłócenia $v(n) \equiv e(n)$ z równania systemu (16) (w ujęciu Kalmana jest to jednocześnie *równanie wyjścia* stowarzyszone z *równaniem stanu* (21), gdzie $\boldsymbol{p}_{\mathrm{o}}$ pełni rolę wektora stanu).

Koszt wprowadzenia jakiegokolwiek z powyższych mechanizmów jest zwykle związany ze zwiększoną fluktuacją estymat parametrów podczas procesu estymacji. Zatem stopień modyfikacji wprowadzany przez powyższe mechanizmy (wynikający z doboru wartości parametrów λ, $\hat{\mathrm{v}}_i^*, \rho_i, T, \varepsilon_{\max}, P_{\min}$) powinien wynikać z kompromisu między zdolnością estymatora do śledzenia zmian parametrów systemu a poziomem fluktuacji estymat parametrów.

2.1 Adaptacyjna identyfikacja systemu dynamicznego czasu dyskretnego.

- Dostosować schemat obliczeń z punktu 1 poprzez zainicjowanie parametrów `Tend = 1500, Td = 500` – skokowa zmiana wartości parametru $b_{2\mathrm{o}}$ systemu (16) nastąpi dla chwilach $t_1 = n_1 T_p = 500\,\mathrm{s}$ oraz $t_2 = n_2 T_p = 1000\,\mathrm{s}$. Wewnątrz bloku ARMAX w pliku `SystemARMAX.mdl` przełącznik wyboru rodzaju zmiany parametru $b_{2\mathrm{o}}$ należy ustawić w pozycję 'skokowe zmiany parametru'.

- Przyjąć parametr $c_{1\mathrm{o}} = 0$ (zakładamy zakłócanie szumem białym w równaniu regresyjnym).

- Stosując metodę RLS$_\lambda$ wg wzorów (17)-(20) przeprowadzić identyfikację parametryczną toru sterowania systemu (16) przyjmując współczynnik λ z zakresu $[0.98; 0.999]$. Szczególną uwagę zwrócić na zdolność estymatora do śledzenia zmian parametru $b_{2\mathrm{o}}(n)$ systemu (zmianę wartości $b_{2\mathrm{o}}(n)$ można obserwować wyświetlając wyjście 'b2o' bloku identyfikowanego systemu w pliku `SystemARMAX.mdl`). Sprawdzić przebieg śladu macierzy kowariancyjnej $\boldsymbol{P}(n)$ podczas identyfikacji.

- Sprawdzić wpływ wartości współczynnika $\lambda \in (0; 1)$ na jakość identyfikacji i fluktuacje estymat parametrów.

- Przeanalizować jakość identyfikacji adaptacyjnej stosując mechanizm resetowania macierzy kowariancyjnej $\boldsymbol{P}(n)$ – zastosować połączone kryteria R2 do R3, tj.:

  $$\text{IF} \quad [|\varepsilon_{\mathrm{OE}}| > \varepsilon_{\max}] \;\wedge\; [\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}) < P_{\min}] \quad \text{THEN} \quad \boldsymbol{P} := \mathrm{diag}\{\rho_1, \ldots, \rho_{d_p}\} \quad \text{END}.$$

  Sprawdzić wpływ wartości parametrów ρ_i na jakość identyfikacji i fluktuacje estymat parametrów biorąc do operacji resetowania następujące macierze:

  $$\boldsymbol{P} := \mathrm{diag}\{10, 10, 10\}, \quad \boldsymbol{P} := \mathrm{diag}\{0, 0, 10\}, \quad \boldsymbol{P} := \mathrm{diag}\{0, 0, 1\}.$$

- Sprawdzić jakość identyfikacji stosując metodę RIV$_\lambda$ oraz RIV z resetowaniem macierzy kowariancyjnej dla $c_{1\mathrm{o}} = 0.7$ (zakłócenie kolorowe w równaniu regresyjnym systemu).

- Wewnątrz bloku ARMAX w pliku `SystemARMAX.mdl` przełącznik wyboru rodzaju zmiany parametru $b_{2\mathrm{o}}$ należy ustawić w pozycję 'błądzenie losowe parametru'. Stosując metodę filtracji Kalmana przeprowadzić identyfikację parametryczną toru sterowania systemu (16) z wykorzystaniem aktualizacji (22)-(26) biorąc:

  $$\hat{\boldsymbol{V}}^* := \mathrm{diag}\{1, 1, 1\} \cdot 10^{-4}, \quad \hat{\boldsymbol{V}}^* := \mathrm{diag}\{0, 0, 0.001\}, \quad \hat{\boldsymbol{V}}^* := \mathrm{diag}\{0, 0, 0.01\}.$$

  Zwrócić uwagę na zdolność estymatora do śledzenia zmiennego parametru $b_{2\mathrm{o}}(n)$ oraz na zbieżność i poziom fluktuacji estymat wszystkich parametrów.

3 Identyfikacja bezpośrednia systemu dynamicznego czasu ciągłego metodą RIV

Bezpośrednia rekursywna identyfikacja systemu czasu ciągłego

$$[y(t)] = G_\mathrm{o}(s, \boldsymbol{p}_\mathrm{o})[u(t)] + [v(t)] = \frac{B_\mathrm{o}(s, \boldsymbol{p}_\mathrm{o})}{A_\mathrm{o}(s, \boldsymbol{p}_\mathrm{o})}[u(t)] + [v(t)], \tag{27}$$

gdzie $[v(t)] = H_\mathrm{o}(s)[e(t)]$ reprezentuje (jako filtrowany szum biały) zakłócenie stochastyczne o nieznanej charakterystyce, wymaga zapisu modelu systemu

$$[y(t)] = G(s, \boldsymbol{p})[u(t)] + [v(t)] = \frac{B(s, \boldsymbol{p})}{A(s, \boldsymbol{p})}[u(t)] + [v(t)]. \tag{28}$$

Model (28) można zapisać, z wykorzystaniem filtracji SVF, w postaci regresyjnej np. jako

$$\mathcal{Y}(nT_p) = \underbrace{\left[-y_F^{(n_a-1)}(nT_p) \ \ldots \ -y_F(nT_p) \quad u_F^{(n_b)}(nT_p) \ \ldots \ u_F(nT_p)\right]}_{\boldsymbol{\varphi}^\top(nT_p)} \boldsymbol{p} + \xi_F(nT_p), \tag{29}$$

przy czym

$$\mathcal{Y}(nT_p) \triangleq y_F^{(n_a)}(nT_p) \tag{30}$$

jest **umownym wyjściem** w modelu regresyjnym (29), $\xi_F(nT_p)$ jest wypadkowym zakłóceniem w równaniu regresji (29), $[\xi(t)] = A(s, \boldsymbol{p})[v(t)]$, n_b i $n_a \geqslant n_b$ są stopniami wielomianów $B(s, \boldsymbol{p})$ i $A(s, \boldsymbol{p})$ modelu, natomiast indeks 'F' oznacza sygnały filtrowane wg następującej reguły:

$$\chi_F^{(i)}(nT_p) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F_\mathrm{SVF}^i(s)[\chi(t)]\right\}\Big|_{t=nT_p}, \qquad \chi \in \{y, u, \xi\}, \tag{31}$$

z wykorzystaniem filtrów SVF postaci

$$F_\mathrm{SVF}^i(s) \triangleq \frac{s^i}{(1 + sT_F)^n}, \quad n \geqslant n_a, \quad T_F > 0. \tag{32}$$

Przy odpowiednio dobranej wartości stałej czasowej T_F filtry SVF mogą jednocześnie pełnić rolę filtrów antyaliasingowych.

W przypadku zastosowania metody RIV zmienne instrumentalne dla modelu (29) można generować w następujący (tu: adaptacyjny) sposób:

$$\boldsymbol{z}(nT_p) = \left[-x_F^{(n_a-1)}(nT_p) \ \ldots \ -x_F(nT_p) \quad u_F^{(n_b)}(nT_p) \ \ldots \ u_F(nT_p)\right]^\top, \tag{33}$$

gdzie

$$x_F^{(i)}(nT_p) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F_\mathrm{SVF}^i(s)[x(t)]\right\}\Big|_{t=nT_p}, \tag{34}$$

natomiast

$$[x(t)] \triangleq G(s, \hat{\boldsymbol{p}}^\mathrm{IV}(n-1))[u(t)] \tag{35}$$

jest odpowiedzią modelu symulowanego $G(s, \hat{\boldsymbol{p}}^\mathrm{IV}(n-1)) \triangleq X(s)/U(s)$ korzystającego z estymat parametrów $\hat{\boldsymbol{p}}^\mathrm{IV}(n-1)$ wziętych z poprzedniej iteracji algorytmu RIV. Należy zauważyć, że przy powyższym zapisie równań (31) i (34) filtracja SVF odbywa się w **klasyczny** sposób, tj. PRZED próbkowaniem sygnałów branych do regresji liniowej (29) i do wektora zmiennych instrumentalnych (33).

Po spróbkowaniu sygnałów filtrowanych można wykorzystać równania (9)-(12) rekursywnej metody IV, zastępując w równaniu (10) pomiar wyjścia $y(n)$ wartością umownego wyjścia $\mathcal{Y}(nT_p)$ zdefiniowanego w (30). Estymator metody zmiennych instrumentalnych może być zgodny, nawet jeżeli zakłócenie ξ_F w równaniu regresji (29) nie jest szumem białym.

3.1 Bezpośrednia identyfikacja systemu czasu ciągłego metodą RIV.

- Plik `SystemSISOC.mdl` zawiera blok identyfikowanego systemu czasu ciągłego reprezentowanego równaniem (27), o którym wiadomo, że $n_a = 2$ i $n_b = 0$ (wiedza wstępna o strukturze transmitancji G_o). Zakłada się, że pomiarowo dostępne są sygnały $u(t)$ oraz $y(t)$, przy czym sygnał $y(t)$ zawiera zakłócenie stochastyczne.

- W przestrzeni roboczej środowiska Matlab zainicjować następujące parametry: `Tp = 0.05` s oraz `sigma2e = 0.1`. Do celów pobudzania identyfikowanego systemu wybrać sygnał prostokątny (symetryczny względem zera – blok `Signal Generator`) o jednostkowej amplitudzie i częstotliwości $f_u = 0.04\,\mathrm{Hz}$.

- W środowisku Simulink przygotować schemat blokowy eksperymentu identyfikacyjnego z odpowiednimi filtrami SVF minimalnego rzędu (należy użyć bloków transmitancji operatora Laplace'a s, aby uzyskać *analogową* wersję filtracji) oraz z modelem symulowanym czasu ciągłego z równania (35) działającymi w czasie rzeczywistym (tj. na bieżąco, podczas wykonywania symulacji). Implementację modelu symulowanego wykonać korzystając z metodyki tzw. analogowego modelowania równania różniczkowego z wykorzystaniem bloków całkujących.

- Czas symulacji dobrać tak, aby horyzont symulacji obejmował $N = 20000$ próbek. Przyjąć stałą czasową filtrów SVF: $T_F = 8T_p$. W ustawieniach symulacji wymusić: `Max step size = 0.01`, `Solver: ode45 (Dormand-Prince)`, `Type: Variable-step`.

- Stosując metodę RIV przeprowadzić w czasie rzeczywistym rekursywną identyfikację parametryczną toru sterowania systemu z pliku `SystemSISOC.mdl`. Obserwować przebieg estymat $\hat{\boldsymbol{p}}^{\mathrm{IV}}(nT_p)$ przy jednoczesnym wyświetlaniu wartości numerycznych estymat w bloku `Display`. Bloki obliczeń estymatora RIV należy zsynchronizować okresem próbkowania T_p.

- Na wspólnym wykresie porównać przebiegi sygnałów: $y(t)$, $y_o(t)$ oraz $y_m(t)$, gdzie $y_o(t)$ jest niezakłóconą odpowiedzią systemu (w praktyce niedostępną), natomiast $y_m(t)$ jest odpowiedzią modelu symulowanego na pobudzenie $u(t)$. **Uwaga**: dla zmiennych instrumentalnych zdefiniowanych w (33) i przy aktualizacji estymat parametrów symulatora w trybie on-line zachodzi $x(t) \equiv y_m(t)$.

- Sprawdzić wpływ stałej czasowej filtrów $T_F \in \{8T_p, 40T_p, 400T_p\}$ na jakość identyfikacji i stan przejściowy estymat parametrów.

$\square$