

Laboratorium identyfikacji systemów

Instytut Automatyki i Robotyki (IAR)
Politechnika Poznańska (PP)
opracowanie: Maciej M. Michałek

C3 WSADOWA PARAMETRYCZNA IDENTYFIKACJA SYSTEMÓW

Ćwiczenie poświęcone jest wybranym metodom wsadowej identyfikacji parametrycznej, a mianowicie metodzie najmniejszych kwadratów (w skrócie: LS, zwanej też metodą błędu równaniowego) oraz metodzie zmiennych instrumentalnych (w skrócie: IV). Podczas ćwiczenia przyjęte zostanie założenie o znajomości struktury identyfikowanego systemu przy nieznaności wartości jego parametrów (model i identyfikacja typu GREY-BOX). Wsadowe metody identyfikacji wykorzystują jednocześnie wszystkie dostępne dane pomiarowe (tj. cały *wsad* danych) do oszacowania wartości parametrów modelu.

1 Identyfikacja systemu statycznego metodą LS

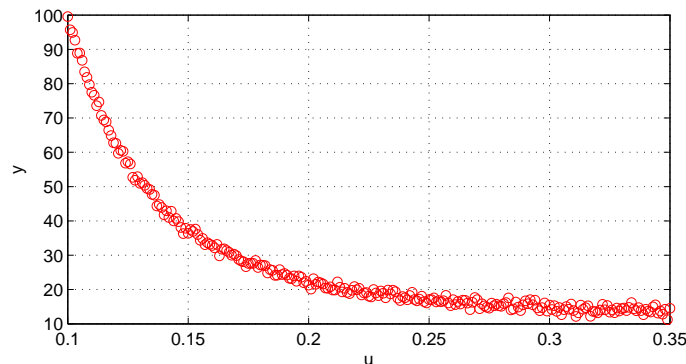
Systemem *statycznym* nazywamy:

- system *pozbawiony dynamiki* – wartość *ustalona* odpowiedzi y takiego systemu pojawia się na wyjściu natychmiast po podaniu pobudzenia u (brak stanów przejściowych) lub
- zależność pomiędzy wartościami wejścia sterującego u a wartościami odpowiedzi/wyjścia y rozważanego systemu dynamicznego **w stanie ustalonym**, tj. po zaniknięciu składowych przejściowych (stany przejściowe istnieją lecz nas nie interesują w procesie modelowania).

Przykładowy zbiór danych pomiarowych w postaci par *wartość wejścia u wraz z odpowiadającą jej ustaloną wartością wyjścia y* prezentuje wykres z rysunku 1. System statyczny będziemy traktować jako odwzorowanie (liniowe bądź nieliniowe) między wejściem u i wyjściem y , które można opisać równaniem:

$$y = f_o(u, \mathbf{p}_o) + v, \quad \mathbf{p}_o = [p_{1o} \ p_{2o} \ \dots \ p_{d_{po}}]^\top, \quad (1)$$

gdzie \mathbf{p}_o jest wektorem *prawdziwych* (nieznanych) parametrów systemu, $f_o(u, \mathbf{p}_o)$ reprezentuje prawdziwe odwzorowanie wejścia w wyjście systemu, natomiast v jest zakłóceniem stochastycznym obecnym w pomiarach wyjścia y . W ramach identyfikacji parametrycznej poszukujemy parametrów $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{d_p}]^\top$ dla modelu $f(u, \mathbf{p})$, którego struktura jest zgodna (z założenia) ze strukturą odwzorowania $f_o(u, \mathbf{p}_o)$. Parametryzację modelu $f(\cdot)$ można przeprowadzić



Rysunek 1: Przykładowy zbiór par (u_n, y_n) , $n = 1, \dots, N$, pomiarów wynikający ze statycznej zależności między wejściem u a wyjściem y pewnego systemu

na różne sposoby. W ćwiczeniu rozważać będziemy tylko parametryzacje liniowe, czyli takie które prowadzą do modelu w postaci regresji liniowej (model zapisany jako liniowa kombinacja parametrów p_i , $i = 1, 2, \dots, d_p$ oraz wybranych funkcji bazowych):

$$f(u, \mathbf{p}) \triangleq \sum_{i=1}^{d_p} p_i \cdot F_i(u) \quad \Rightarrow \quad \hat{y}_m = \sum_{i=1}^{d_p} p_i \cdot F_i(u). \quad (2)$$

Model (2) można zapisać w postaci regresji liniowej $\hat{y}_m = \boldsymbol{\varphi}^\top(u) \mathbf{p}$, dla $\mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_{d_p}]^\top$, i w konsekwencji model mający wyjaśniać dane pomiarowe generowane przez równanie (1) przyjmie postać:

$$y = f(u, \mathbf{p}) + v \quad \Rightarrow \quad y = \boldsymbol{\varphi}^\top(u) \mathbf{p} + v, \quad (3)$$

gdzie $\boldsymbol{\varphi}(u) = [F_1(u) \ F_2(u) \ \dots \ F_{d_p}(u)]^\top$ jest wektorem regresji zależnym, poprzez funkcje bazowe $F_i(u)$, od deterministycznego wejścia u . Zastosowanie metody najmniejszej sumy kwadratów tzw. błędów równaniowych $\varepsilon_n(\mathbf{p}) \triangleq y_n - \boldsymbol{\varphi}_n^\top(u) \mathbf{p}$, zapisanych dla numerów pomiaru $n \in [1, N]$ na podstawie wzoru (3), prowadzi do estymatora metody LS:

$$\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}} = (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{y}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}_1^\top(u) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}_N^\top(u) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times d_p}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad (4)$$

gdzie $\boldsymbol{\Phi}$ jest (z założenia) deterministyczną macierzą regresji zależną jedynie od deterministycznego wejścia u . Stopień ufności jakim możemy obdarzyć uzyskany wynik estymacji¹ wynika z macierzy kowariancji estymat $\text{Cov}[\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}]$, którą przy nieskorelowanym zakłóceniu $v \equiv e$ możemy oszacować na podstawie N par pomiarów $\{u_n, y_n\}_{n=1}^N$ jak następuje:

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}] \approx \hat{\sigma}^2 (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - d_p} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2(\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}), \quad \varepsilon_i(\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}) \triangleq y_i - \boldsymbol{\varphi}_i^\top(u) \hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}, \quad (5)$$

przy czym $\hat{\sigma}^2$ jest estymatą wariancji zakłócenia $v \equiv e$, d_p jest liczbą estymowanych parametrów, natomiast $\varepsilon_i(\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}})$ jest tzw. błędem resztowym. Gdy v jest zakłóceniem skorelowanym o zerowej wartości oczekiwanej, wówczas macierz kowariancji estymat

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}] = (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{P}_v \boldsymbol{\Phi} (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1} \approx (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^\top \hat{\mathbf{P}}_v \boldsymbol{\Phi} (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1} \quad (6)$$

wymaga znajomości macierzy \mathbf{P}_v lub oszacowania $\hat{\mathbf{P}}_v$ dla wektora zakłóceń $\mathbf{v} = [v_1 \ \dots \ v_N]^\top$.

1.1 Identyfikacja systemu statycznego metodą LS.

- Plik `IdentWsadowaStat.mat` zawiera dwa zbiory danych pomiarowych $\mathbf{Z}^N = \{u_n, y_n\}_{n=1}^N$ zebrane z wejścia i wyjścia obiektu statycznego i zapisane w macierzach `DaneStatW`, `DaneStatC`, przy czym pierwsza z nich zawiera pomiary zakłócone zakłóceniem nieskorelowanym e , a druga zakłóceniem skorelowanym v . Wprowadzić dane pomiarowe do przestrzeni roboczej Matlaba instrukcją `load IdentWsadowaStat.mat`; wyświetlić dane pomiarowe i dokonać ich oglądu.
- Przyjmując następującą strukturę modelu odwzorowania statycznego

$$f(u, \mathbf{p}) = p_1 + \sum_{i=2}^4 \frac{p_i}{u^{i-1}} \quad (7)$$

zapisać powyższy model w postaci regresji liniowej i przeprowadzić identyfikację parametryczną stosując wzór (4). Obliczenia wykonać niezależnie dla przypadku zakłócenia danych zakłóceniem e oraz zakłóceniem v .

¹Należy pamiętać, że estymator (4) jest zmienną losową.

- Wykreślić na wspólnym wykresie dane pomiarowe oraz zidentyfikowane odwzorowanie $\hat{y}_m = f(u, \mathbf{p})$ dla $\mathbf{p} = \hat{\mathbf{p}}_N^{LS}$. Ocenic jakość identyfikacji.
- Sprawdzić wpływ liczby N danych pomiarowych na jakość identyfikacji – wybrać do obliczeń podzbiór dostępnych danych pomiarowych z całego zakresu zmienności u , np. co dziesiątą parę $\{u_j, y_j\}$ ze zbioru $Z^N = \{u_n, y_n\}_{n=1}^N$.
- Oszacować macierz kowariancji (5) (tylko dla danych z zakłóceniem e) i określić na jej podstawie przedziały ufności dla poszczególnych estymat parametrów (patrz Uwaga 1, str. 7). O czym mówi macierz $\text{Cov}[\hat{\mathbf{p}}_N^{LS}]$ i przedziały ufności?

2 Identyfikacja pośrednia systemu dynamicznego czasu ciągłego metodami LS oraz IV

Identyfikacja pośrednia systemu dynamicznego czasu ciągłego polega na estymacji parametrów systemu czasu dyskretnego, będącego aproksymacją oryginalnego systemu czasu ciągłego, a następnie na przekształceniu uzyskanego modelu czasu dyskretnego do modelu czasu ciągłego. Dlatego rozważania w tym miejscu skupione będą na estymacji parametrów systemów czasu dyskretnego.

Rozważmy rzeczywisty system dynamiczny czasu dyskretnego

$$y(n) = G_o(q^{-1}, \mathbf{p}_o)u(n) + v(n) = \frac{B_o(q^{-1}, \mathbf{p}_o)}{A_o(q^{-1}, \mathbf{p}_o)}u(n) + v(n), \quad (8)$$

gdzie $G_o(q^{-1}, \mathbf{p}_o)$ reprezentuje nieznaną dynamikę toru sterowania rzeczywistego systemu o nieznanach rzeczywistych parametrach \mathbf{p}_o , oraz jego model czasu dyskretnego klasy ARX:

$$A(q^{-1}, \mathbf{p})y(n) = B(q^{-1}, \mathbf{p})u(n) + e(n) \quad \Rightarrow \quad y(n) = G(q^{-1}, \mathbf{p})u(n) + v(n), \quad (9)$$

w którym $v(n) = H(q^{-1}, \mathbf{p})e(n)$ jest zakłóceniem kolorowym (filtrowanym szumem białym), $e(n)$ jest (z założenia) szumem białym, $G(q^{-1}, \mathbf{p}) = \frac{B(q^{-1}, \mathbf{p})}{A(q^{-1}, \mathbf{p})}$ oraz $H(q^{-1}, \mathbf{p}) = \frac{1}{A(q^{-1}, \mathbf{p})}$ są operatorami transmitancyjnymi, odpowiednio, toru sterowania i toru zakłócenia modelu, natomiast $A(q^{-1}, \mathbf{p})$ oraz $B(q^{-1}, \mathbf{p})$ są wielomianami operatora q^{-1} , odpowiednio, stopnia n_a i n_b . Zakładając, że struktura operatora $G(q^{-1}, \mathbf{p})$ jest taka sama jak struktura $G_o(q^{-1}, \mathbf{p}_o)$, zasadniczym celem identyfikacji parametrycznej będzie estymacja parametrów \mathbf{p} modelu (9) na podstawie zbioru pomiarowego $Z^N = \{y(nT_p), u(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ z wykorzystaniem wsadowych metod LS oraz IV.

Struktura (9) pozwala na przepisanie równania modelu, a w konsekwencji także na wyrażenie błędu równaniowego ε , jako liniowej funkcji szukanych parametrów:

$$y(n) = \boldsymbol{\varphi}^\top(n) \mathbf{p} + e(n), \quad \varepsilon(n, \mathbf{p}) \triangleq y(n) - \boldsymbol{\varphi}^\top(n) \mathbf{p}, \quad (10)$$

przy czym wektor regresji

$$\boldsymbol{\varphi}^\top(n) = [-y(n-1) \ \dots \ -y(n-n_a) \ u(n-1) \ \dots \ u(n-n_b)] \quad (11)$$

nie jest tutaj funkcją deterministyczną ale stochastyczną (w wyniku auto-regresji modelu klasy ARX). Zastosowanie metody LS do błędów równaniowych (10) dla $n \in [1, N]$ prowadzi do klasycznej postaci estymatora LS parametrów modelu:

$$\hat{\mathbf{p}}_N^{LS} = (\boldsymbol{\Phi}^\top \boldsymbol{\Phi})^{-1} \boldsymbol{\Phi}^\top \mathbf{y}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}^\top(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varphi}^\top(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times d_p}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad (12)$$

przy czym Φ jest tym razem stochastyczną macierzą regresji zależną od poprzednich próbek wyjścia y oraz wejścia u systemu. Jeżeli dane pomiarowe Z^N spełniają założenie poczynione w modelu (9), że zakłócenie v w rzeczywistym systemie (8) wynika z filtracji

$$v(n) = \frac{1}{A_o(q^{-1}, \mathbf{p}_o)} e(n), \quad (13)$$

wówczas macierz kowariancji estymat parametrów dla skończonej liczby danych ($N < \infty$) szacujemy następująco:

$$\text{Cov}[\hat{\mathbf{p}}_N^{LS}] \approx \hat{\sigma}^2 (\Phi^\top \Phi)^{-1}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - d_p} \sum_{n=1}^N \varepsilon^2(n, \hat{\mathbf{p}}_N^{LS}), \quad \varepsilon(n, \hat{\mathbf{p}}_N^{LS}) \triangleq y(n) - \varphi^\top(n) \hat{\mathbf{p}}_N^{LS}, \quad (14)$$

gdzie $\varepsilon(n, \hat{\mathbf{p}}_N^{LS})$ jest tzw. błędem resztowym w chwili n , natomiast d_p jest liczbą estymowanych parametrów. Jeżeli założenie (13) jest spełnione i jednocześnie macierz $\Phi^\top \Phi$ jest nieosobliwa (jest pełnego rzędu równego d_p), wówczas estymator (12) jest zgodny, tzn. zachodzi $\text{plim}_{N \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{p}}_N^{LS} - \mathbf{p}_o) = \mathbf{0}$ (zbieżność wg prawdopodobieństwa).

Jeśli założenie (13) nie jest spełnione przez dane pomiarowe Z^N , tj. hipoteza o białości błędu równaniowego i tym samym zakłócenia w równaniu (10) nie jest prawdziwa, to równanie modelu należy zapisać w bardziej ogólnej postaci

$$y(n) = \varphi^\top(n) \mathbf{p} + v(n), \quad (15)$$

gdzie $v(n)$ ma teraz charakter szumu kolorowego skorelowanego ze zmiennymi regresyjnymi zależnymi od wyjścia y , tj. zachodzi $E[\varphi(n)v(n)] \neq \mathbf{0}$. W takim przypadku estymator (12) jest generalnie obciążony, a wyznaczone na jego podstawie estymaty parametrów mogą istotnie różnić się od \mathbf{p}_o . Aby poprawić jakość estymacji parametrycznej w takim przypadku można zastosować alternatywną metodę identyfikacji parametrycznej, bardziej odporną na właściwości zakłóceń obecnych w danych pomiarowych Z^N , a mianowicie metodę zmiennych instrumentalnych (IV). Istota tej metody sprowadza się do znalezienia i wykorzystania do obliczeń takiego wektora zmiennych pomocniczych $\mathbf{z}(n)$, który spełnia dwa warunki:

- (w1) jest nieskorelowany z zakłóceniem $v(n)$, tj. $E[\mathbf{z}(n)v(n)] \equiv \mathbf{0}$,
- (w2) jest (silnie) skorelowany ze zmiennymi regresji w wektorze $\varphi(n)$, co oznacza, że macierz $E[\mathbf{z}(n)\varphi^\top(n)]$ jest nieosobliwa.

Założmy chwilowo, że taki wektor zmiennych instrumentalnych $\mathbf{z}(n)$ istnieje i możemy go utworzyć. Wówczas estymator wsadowy metody IV przyjmuje następującą postać:

$$\hat{\mathbf{p}}_N^{IV} = (\mathbf{Z}^\top \Phi)^{-1} \mathbf{Z}^\top \mathbf{y}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^\top(1) \\ \vdots \\ \mathbf{z}^\top(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times d_p}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad (16)$$

gdzie \mathbf{Z} jest macierzą zmiennych instrumentalnych, $\dim(\mathbf{z}) = \dim(\varphi) = d_p$, natomiast Φ jest macierzą regresji skonstruowaną analogicznie jak w metodzie LS. Jeżeli sygnał wejściowy $u(n)$ oraz zakłócenie $v(n)$ z równania (15) są wzajemnie nieskorelowane (co wymusza brak obecności sprzężenia zwrotnego między sygnałami u i y), wówczas estymator (16) jest zgodny, tj. zachodzi $\text{plim}_{N \rightarrow \infty} (\hat{\mathbf{p}}_N^{IV} - \mathbf{p}_o) = \mathbf{0}$ (zbieżność wg prawdopodobieństwa) pomimo niespełnienia założenia (13).

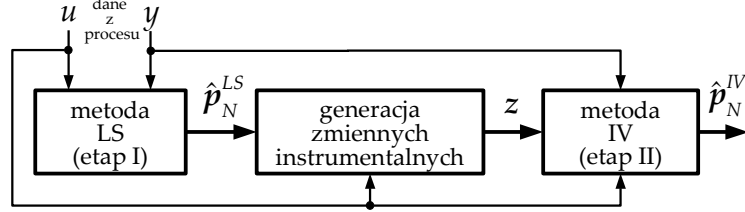
Istnieje szereg sposobów wyznaczania zmiennych instrumentalnych $\mathbf{z}(n)$. Poniżej przytoczymy jeden z nich, który dalej będzie wykorzystany w ćwiczeniu. Założmy, że przeprowadziliśmy identyfikację parametryczną metodą LS dla modelu (9) w przypadku, w którym założenie (13) nie jest spełnione przez dane Z^N . Otrzymaliśmy zatem wektor obciążonych estymat $\hat{\mathbf{p}}_N^{LS}$. Do wyznaczenia zmiennych instrumentalnych można wykorzystać wektor $\hat{\mathbf{p}}_N^{LS}$ prowadząc następujące obliczenia

$$x(n) \triangleq G(q^{-1}, \hat{\mathbf{p}}_N^{LS}) u(n), \quad (17)$$

gdzie $G(q^{-1}, \hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}) = B(q^{-1}, \hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}})/A(q^{-1}, \hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}})$ jest operatorem transmitacyjnym z modelu (9). Wektor zmiennych instrumentalnych ma teraz postać:

$$\mathbf{z}^\top(n) \triangleq [-x(n-1) \ -x(n-2) \ \dots \ -x(n-n_a) \ u(n-1) \ u(n-2) \ \dots \ u(n-n_b)], \quad (18)$$

którego struktura jest analogiczna do struktury wektora regresji $\boldsymbol{\varphi}^\top(n)$, z tą różnicą, że próbki wyjścia y zostały podmienione próbkami x liczonymi wg wzoru (17). Z równania (17) wynika, że



Rysunek 2: Schemat dwuetapowej procedury identyfikacji metodą IV, gdy zmienne instrumentalne $\mathbf{z}(n)$ wyznaczone są na podstawie definicji (18) i wzoru (17)

$x(n)$ jest po prostu bieżącą próbką odpowiedzi modelu symulowanego obliczaną na podstawie przyjętej struktury modelu (9) z wejściem $u(n)$ brany z wejścia systemu i z wektorem estymat obliczonym uprzednio na podstawie metody LS. Zatem identyfikacja ma tutaj charakter dwuetapowy LS→IV|LS zilustrowany na rys. 2. Definicja (18) pozwala na skuteczne zastosowanie metody IV i uzyskanie estymat $\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{IV}}$ bliższych wartościom prawdziwym \mathbf{p}_o (w porównaniu z $\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}$) pomimo, że zakłócenie $v(n)$ w (15) nie jest szumem białym.

Informacje na temat danych pomiarowych zawartych w pliku IdentWsadowaDyn.mat:

- postaci macierzy z danymi: DaneDynW=[u yw], DaneDynC=[u yc]
 - horyzont czasowy symulacji: t=0:Tp:(N-1)*Tp, N=4001, okres próbkowania Tp=0.01 s
 - struktura transmitancji toru sterowania systemu: $G_o(s, \mathbf{p}_o^c) = k_o/(1+sT_o) = k_o/A_o(s, T_o)$
 - prawdziwe parametry identyfikowanego systemu czasu ciągłego: $k_o = 2.0$, $T_o = 0.5$
 - zastosowany sygnał pobudzający: $u(t) = 0.2 \sin(5t) + 0.1 \sin(2t) + 0.5 \cos(2t)$
 - sposób generowania zakłócenia białego dla danych pomiarowych: $[v(t)] = H(s)[e_E(t)]$, gdzie $H(s) := 1/A_o(s, T_o) \Rightarrow \mathbf{v} = \text{lsim}(H, \mathbf{e}, t, \text{'zoh'})$, $\mathbf{e} = \text{randn}(N, 1)$
 - sposób generowania zakłócenia kolorowego dla danych pomiarowych: $[v(t)] = H(s)[e_E(t)]$ dla $H(s) := 0.5/(1 + 0.05s) \Rightarrow \mathbf{v} = \text{lsim}(H, \mathbf{e}, t, \text{'zoh'})$, $\mathbf{e} = \text{randn}(N, 1)$
 - sposób generowania zakłóconej odpowiedzi systemu: $\mathbf{y} = \text{lsim}(G_o, \mathbf{u}, t, \text{'zoh'}) + \mathbf{v}$
-

2.1 Identyfikacja parametrów modelu czasu dyskretnego metodą LS.

- Struktura transmitancji $G_o(s)$ toru sterowania pewnego rzeczywistego systemu czasu ciągłego i jego model czasu dyskretnego są opisane w następujący sposób:

$$G_o(s, \mathbf{p}_o^c) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k_o}{T_o s + 1} \xrightarrow{\text{dyskret.}} G(z, \mathbf{p}) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{k(1 - e^{-T_p/T})}{z - e^{-T_p/T}}, \quad (19)$$

gdzie $\mathbf{p}_o^c = [k_o \ T_o]^\top$ jest wektorem nieznanymi prawdziwych parametrów systemu, natomiast strukturę modelu czasu dyskretnego reprezentowanego transmitancją $G(z, \mathbf{p})$ wyznaczono metodą 'zoh' (transformacja skokowo-inwariantna). Na podstawie transmitancji $G(z, \mathbf{p})$ możemy zapisać model czasu dyskretnego systemu z użyciem operatora q^{-1} w postaci

$$y(n) = G(q^{-1}, \mathbf{p})u(n) + v(n), \quad (20)$$

gdzie $v(n)$ reprezentuje zakłócenie stochastyczne (o nieznanym właściwościach).

- Na podstawie transmitancji (19) zapisać model (20) i przepisać go w postaci regresji liniowej wyróżniając regresor oraz wektor parametrów zastępczych modelu.
- Plik `IdentWsadowaDyn.mat` zawiera dane pomiarowe $Z^N = \{u(nT_p), y(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ zapisane w dwóch macierzach `DaneDynW` i `DaneDynC`, przy czym pierwsza z nich zawiera pomiary z zakłóceniem białym, a druga z zakłóceniem kolorowym. Wprowadzić dane do przestrzeni roboczej Matlaba instrukcją `load IdentWsadowaDyn.mat`; wyświetlić dane pomiarowe i dokonać ich oglądu. Dane z obu macierzy podzielić na dwa podzbiory (np. w proporcji 50% do 50%): Z_{est} używane do estymacji parametrów (dane estymacyjne) oraz Z_{wer} używane do weryfikacji modelu (dane weryfikacyjne).
- Zapisując strukturę modelu (20) w klasie modeli ARX przeprowadzić identyfikację parametryczną modelu stosując estymator (12) oraz zbiór danych Z_{est} . Obliczenia wykonać niezależnie dla przypadku zakłócenia białego i kolorowego.
- Na podstawie wyznaczonego wektora $\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}$ zrekonstruować estymaty \hat{k} oraz \hat{T} parametrów systemu czasu ciągłego. Porównać \hat{k} i \hat{T} z parametrami k_o oraz T_o .
- Zilustrować na wspólnym wykresie (w dziedzinie czasu):
 - zmierzoną odpowiedź $y(n)$ systemu ze zbioru Z_{wer} ,
 - niezakłóconą odpowiedź $y_o(n)$ systemu (w praktyce niedostępną!) na wymuszenie $u(n)$ z danych Z_{wer} ,
 - odpowiedź predyktora jednokrokowego $\hat{y}(n|n-1)$ dla $y(n)$ oraz wymuszenia $u(n)$ wziętych z danych Z_{wer} ,
 - odpowiedź modelu symulowanego $y_m(n)$ na wymuszenie $u(n)$ z danych Z_{wer} .

Ocenić jakościowo oraz ilościowo wynik identyfikacji; do oceny ilościowej obliczyć wartości wskaźników:

$$V_p \triangleq \frac{1}{N_v} \sum_{n=1}^{N_v} [y(n) - \hat{y}(n|n-1)]^2, \quad V_m \triangleq \frac{1}{N_v} \sum_{n=1}^{N_v} [y_o(n) - y_m(n)]^2, \quad (21)$$

gdzie N_v oznacza liczbę danych ze zbioru Z_{wer} . Porównać obliczone wartości wskaźników dla identyfikacji na podstawie danych z macierzy `DaneDynW` i `DaneDynC`.

- Dla przypadku danych z zakłóceniem białym wyznaczyć i zinterpretować macierz kowariancji (14) oraz przedziały ufności dla estymat $\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}$ (patrz: Uwaga 1, str. 7).

2.2 Identyfikacja parametrów modelu czasu dyskretnego metodą IV.

- Wykorzystując dane pomiarowe zapisane w macierzy `DaneDynC` przeprowadzić identyfikację parametryczną systemu stosując model (20) i estymator IV ze wzoru (16) dla danych ze zbioru Z_{est} . W tym celu utworzyć wektor zmiennych instrumentalnych $\mathbf{z}(n)$ a następnie macierz \mathbf{Z} ; do uzyskania zmiennych instrumentalnych wykorzystać metodę opisaną wzorami (17)-(18).
- Na podstawie wyznaczonego wektora $\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{IV}}$ zrekonstruować estymaty \hat{k} oraz \hat{T} parametrów systemu czasu ciągłego. Porównać \hat{k} i \hat{T} z parametrami k_o oraz T_o .
- Dla wyników identyfikacji metodą IV (analogicznie jak w przypadku identyfikacji metodą LS) zilustrować na wspólnym wykresie (w dziedzinie czasu) przebiegi sygnałów: $y(n)$, $y_o(n)$, $\hat{y}(n|n-1)$ oraz $y_m(n)$ dla $y(n)$ oraz wymuszenia $u(n)$ wziętych z danych Z_{wer} . Ocenić jakościowo oraz ilościowo wynik identyfikacji; do oceny ilościowej obliczyć wskaźniki (21) i porównać ich wartości z tymi uzyskanymi po identyfikacji metodą LS (dla danych z macierzy `DaneDynC`).

Uwaga 1 Dla nieobciążonego estymatora metody LS w przypadku regresora deterministycznego oraz dla danych zakłóconych szumem białym i przy założeniu bardzo dużej liczby pomiarów N (a w praktyce $N \geq 300$) możemy zapisać:

$$(\hat{\mathbf{p}}_N^{LS} - \mathbf{p}_o) \in \mathcal{N}(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{P}}_N) \quad \Rightarrow \quad (\hat{p}_{Ni}^{LS} - p_{io}) \in \mathcal{N}(0, \hat{P}_{Nii}), \quad i = 1, \dots, d_p \quad (22)$$

gdzie N jest liczbą danych użytych do estymacji, natomiast \hat{P}_{Nii} jest i -tym elementem diagonalnej macierzy $\hat{\mathbf{P}}_N = \hat{\sigma}^2(\mathbf{\Phi}^\top \mathbf{\Phi})^{-1}$ (jest to oszacowana macierz $\text{Cov}[\hat{\mathbf{p}}_N^{LS}]$ na podstawie N pomiarów, por. wzór (5)). Wiedząc, że dla zmiennej losowej $X \in \mathcal{N}(m, \text{var})$ zachodzą następujące związki:

$$P(|X - m| < 1.96\sqrt{\text{var}}) = 0.95, \quad P(|X - m| < 2.58\sqrt{\text{var}}) = 0.99$$

wzór na 95% przedział ufności parametru p_{io} przyjmuje (zgodnie z (22)) następującą postać:

$$PU_{95\%} : \left(\hat{p}_{Ni}^{LS} - 1.96\sqrt{\hat{P}_{Nii}} \quad ; \quad \hat{p}_{Ni}^{LS} + 1.96\sqrt{\hat{P}_{Nii}} \right). \quad (23)$$

Dla zgodnego estymatora metody LS w przypadku regresora stochastycznego, zakładając bardzo dużą (lecz skończoną) liczbę pomiarów N (a w praktyce $N \geq 300$), możemy zapisać:

$$\sqrt{N}(\hat{\mathbf{p}}_N^{LS} - \mathbf{p}_o) \in \mathcal{N}(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{P}}_\infty) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{N}(\hat{p}_{Ni}^{LS} - p_{io}) \in \mathcal{N}(0, \hat{P}_{\infty ii}) \quad (24)$$

gdzie N jest liczbą danych użytych do estymacji, natomiast $\hat{P}_{\infty ii}$ jest i -tym elementem diagonalnej macierzy $\hat{\mathbf{P}}_\infty = \hat{\sigma}^2(\sum_{n=1}^N \boldsymbol{\varphi}_n^\top \boldsymbol{\varphi}_n / N)^{-1} = N\hat{\sigma}^2(\mathbf{\Phi}^\top \mathbf{\Phi})^{-1}$ (jest to oszacowana na podstawie skończonej liczby N pomiarów teoretyczna macierz $\mathbf{P}_\infty = \sigma_o^2 [\mathbb{E}[\boldsymbol{\varphi}_n \boldsymbol{\varphi}_n^\top]]^{-1}$). Poprzez analogię do postaci (23), 95% przedział ufności parametru p_{0i} przyjmuje teraz postać:

$$PU_{95\%} : \left(\hat{p}_{Ni}^{LS} - 1.96\sqrt{\frac{\hat{P}_{\infty ii}}{N}} \quad ; \quad \hat{p}_{Ni}^{LS} + 1.96\sqrt{\frac{\hat{P}_{\infty ii}}{N}} \right). \quad (25)$$

$PU_{95\%}$ pokrywa wartość prawdziwą p_{io} z prawdopodobieństwem 0.95. Jeśli określony $PU_{95\%}$ dla parametru p_{io} zawiera wartość zerową, wówczas należy rozważyć eliminację danego parametru ze struktury modelu. Gdy wariancje są duże dla każdej estymaty \hat{p}_{Ni}^{LS} , to prawdopodobnie rząd modelu powinien zostać zredukowany.

3 Identyfikacja bezpośrednia systemu dynamicznego czasu ciągłego metodą LS

Identyfikacja bezpośrednia systemu czasu ciągłego

$$[y(t)] = G_o(s, \mathbf{p}_o^c)[u(t)] + [v(t)] = \frac{B_o(s, \mathbf{p}_o^c)}{A_o(s, \mathbf{p}_o^c)}[u(t)] + [v(t)], \quad (26)$$

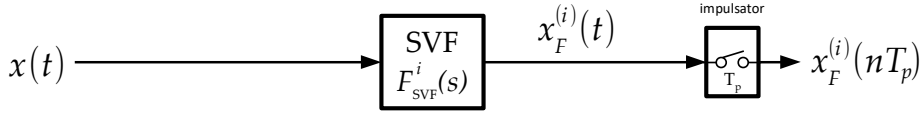
gdzie $\deg A_o = n_a$ i $\deg B_o = n_b$, nie wymaga użycia modelu czasu dyskretnego – parametry modelu czasu ciągłego są w tym podejściu estymowane bezpośrednio z danych spróbkowanych. W tym celu równanie różniczkowe modelu czasu ciągłego zapisuje się w postaci regresji liniowej

$$y^{(n_a)}(t) = [-y^{(n_a-1)}(t) \dots - y(t) \quad u^{(n_b)}(t) \dots u(t)]\mathbf{p} + v^*(t), \quad (27)$$

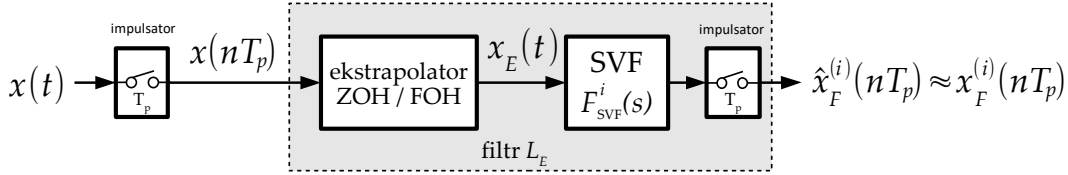
gdzie $\mathbf{p} = [a_1 \dots a_{n_a} \ b_0 \dots b_{n_b}]^\top$ jest wektorem parametrów modelu czasu ciągłego o wymiarze $\dim(\mathbf{p}) = n_a + n_b + 1$, a $v^*(t)$ jest zakłóceniem stochastycznym. Aby umożliwić praktyczną realizację obliczeń estymacji parametrycznej wprowadza się filtry SVF (ang. *State Variable Filter*)

$$F_{\text{SVF}}^i(s) \triangleq \frac{s^i}{(1 + sT_F)^n}, \quad T_F > 0, \quad n \geq n_a, \quad (28)$$

(a) schemat klasycznej filtracji SVF:



(b) schemat (aproksymowanej) filtracji SVF dla danych próbkowanych:



Rysunek 3: Porównanie klasycznej koncepcji analogowej filtracji SVF sygnału $x(t)$ (schemat (a)) z aproksymowaną filtracją SVF sekwencji próbek $\{x(nT_p)\}$ (schemat (b)); 'impuls.' oznacza impulsator, natomiast ZOH/FOH oznaczają ekstrapolację zerowego rzędu / pierwszego rzędu. Symbol $x_E(t)$ na schemacie (b) oznacza sygnał analogowy powstały z ekstrapolacji (interpolacji) sekwencji $\{x(nT_p)\}$

które (zastosowane do obu stron równania (27)) pozwalają na przepisanie równania (27) w postaci dogodnej do identyfikacji (z danymi próbkowanymi z częstotliwością $f_p = 1/T_p$):

$$\mathcal{Y}(nT_p) = \underbrace{[-y_F^{(n_a-1)}(nT_p) \ \dots \ -y_F(nT_p) \ \ u_F^{(n_b)}(nT_p) \ \dots \ u_F(nT_p)]}_{\varphi^\top(nT_p)} \mathbf{p} + \xi(nT_p), \quad (29)$$

gdzie

$$\mathcal{Y}(nT_p) \triangleq y_F^{(n_a)}(nT_p) \quad (30)$$

jest **umownym** (zatem nie jedynym możliwym!) wyjściem w modelu (29), a ponadto

$$\xi(nT_p) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ F_{SVF}^0(s) [v^*(t)] \right\} \Big|_{t=nT_p}$$

jest filtrowanym (dolnoprzepustowo) i spróbkowanym zakłóceniem stochastycznym (symbol \mathcal{L}^{-1} oznacza odwrotne przekształcenie Laplace'a), natomiast

$$y_F^{(i)}(nT_p) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ F_{SVF}^i(s) [y(t)] \right\} \Big|_{t=nT_p}, \quad i = 0, 1, \dots, n_a, \quad (31)$$

$$u_F^{(i)}(nT_p) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ F_{SVF}^i(s) [u(t)] \right\} \Big|_{t=nT_p}, \quad i = 0, 1, \dots, n_b, \quad (32)$$

są analogowo filtrowanymi sygnałami $y(t)$ oraz $u(t)$ (pochodzącymi z wyjścia i wejścia systemu czasu ciągłego) a następnie spróbkowanymi z okresem próbkowania T_p .

Zależności (31)-(32) wyjaśniają sposób generowania składowych wektora regresji oraz elementu \mathcal{Y} , zwanego **umownym wyjściem**, po lewej stronie równania (29). Generowanie wspomnianych sygnałów wymaga analogowej filtracji wyjścia $y(t)$ oraz wejścia $u(t)$, co może być niemożliwe lub uciążliwe w praktycznych zastosowaniach. Dlatego, jeżeli w praktyce dysponujemy zbiorem danych spróbkowanych $\mathbf{Z}^N = \{y(nT_p), u(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ i chcielibyśmy wykorzystać metodykę filtrów SVF, wówczas należy aproksymować filtrację analogową po stronie cyfrowej (w dziedzinie czasu dyskretnego). Do tego celu można użyć funkcji Matlaba `lsim(F,x,tn)`, gdzie pierwszy argument oznacza transmitancję analogowego filtra $F(s)$, drugi argument to wektor (sekwencja $\{x(nT_p)\}$) próbek sygnału x podlegającego filtracji, a trzeci to odpowiadający mu wektor (sekwencja) dyskretnych chwil czasu, dla których filtracja ma zostać wykonana (zatem drugi i trzeci argument funkcji `lsim()` są określone w dyskretniej dziedzinie czasu, natomiast struktura filtra F odpowiada ciągłej dziedzinie czasu). Porównanie analogowej filtracji SVF z jej wersją aproksymowaną wykonywaną dla danych spróbkowanych przedstawia rys. 3.

Zapis modelu w postaci regresji liniowej (29), łącznie z użyciem (aproksymowanej) filtracji SVF, umożliwia zastosowanie estymatora LS z równania (12) zastępując wektor pomiarowy \mathbf{y} wektorem \mathcal{Y} wartości umownego wyjścia \mathcal{Y} zdefiniowanego w (30).

Stałą czasową T_F filtrów SVF należy wybrać doświadczalnie, np. zaczynając od wartości $T_F = 2T_p$ i zwiększając ją o wartość okresu próbkowania T_p aż do uzyskania zadowalających efektów estymacji parametrycznej. Generalnie, pasmo przenoszenia filtru $F_{SVF}^0(s)$ powinno być w przybliżeniu równe pasmu przenoszenia identyfikowanego systemu (26). Zatem jeżeli znamy (z wiedzy wstępnej) pulsację odcięcia ω_c systemu, wówczas możemy przyjąć $T_F \approx 1/\omega_c$.

3.1 Bezpośrednia identyfikacja parametrów modelu czasu ciągłego metodą LS.

- We wzorze (19) dany jest opis struktury toru sterowania $G_o(s, \mathbf{p}_o^c)$ prawdziwego systemu czasu ciągłego; równanie generujące dane ma postać (26).
- Zdefiniować filtry SVF (minimalnego rzędu) i zapisać model systemu czasu ciągłego w postaci regresji liniowej (29).
- Dla filtrów SVF wybrać wartość stałej czasowej $T_F = 50T_p$ (wartość T_F nie może być zbyt duża, aby nie usuwać z filtrowanych danych użytecznej informacji o identyfikowanym systemie!). Wykonać aproksymowane filtracje SVF danych pomiarowych ze zbioru Z_{est} wziętych z macierzy `DaneDynW` (plik `IdentWsadowaDyn.mat`). W tym celu skorzystać z funkcji `lsim()` Matlaba. Przy stosowaniu funkcji `lsim()` wymusić ekstrapolację 'foh' dla sekwencji próbek $\{y(nT_p)\}$ oraz $\{u(nT_p)\}$. Wektor dyskretnych chwil czasu, wymagany jako jeden z parametrów funkcji `lsim()`, należy utworzyć wiedząc, że dane próbkowano w okresie $T_p = 0.01$ s oraz liczba danych $N = 4001$ par próbek.
- Dla danych ze zbioru Z_{est} przeprowadzić bezpośrednią identyfikację parametryczną systemu stosując model (29) i estymator LS postaci $\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathcal{Y}$, gdzie $\mathcal{Y} = [\mathcal{Y}(t^* + T_p) \quad \mathcal{Y}(t^* + 2T_p) \quad \dots \quad \mathcal{Y}(t^* + MT_p)]^T$, $t^* = n^*T_p$, $n^* \geq 0$.
- Porównać otrzymaną estymatę $\hat{\mathbf{p}}_N^{\text{LS}}$ z parametrami prawdziwymi \mathbf{p}_o^c .
- Sprawdzić wpływ liczebności i zakresu danych w Z_{est} na jakość identyfikacji.
- Sprawdzić wpływ wartości $T_F \in \{5T_p, 50T_p, 500T_p\}$ na jakość identyfikacji.
- Sprawdzić wpływ rzędu filtrów SVF na jakość identyfikacji dla $n \in \{1, 2, 3\}$.
- Porównać jakość identyfikacji uzyskiwaną dla dwóch alternatywnych postaci regresji liniowej modelu – biorąc za umowne wyjście $\mathcal{Y} \triangleq y_F^{(1)}$ lub $\mathcal{Y} \triangleq y_F$.

Uwaga: Poniżej podano fragment kodu programu w języku Matlab ilustrujący sposób aproksymowanej filtracji SVF, tj. filtracji SVF interpolowanych sekwencji próbek ze zbioru Z_{est} .

```
%*****
%----- filtracja SVF interpolowanych danych spróbkowanych: -----
%*****
M = 3200; % wybór liczby danych do zbioru Ze
tE = Tp*(N-M:N)'; % wektor próbek chwil czasowych dla danych estymujących
uE = DaneDynW(N-M:N,1); % wybór wektora próbek sygnału pobudzającego u do zbioru Ze
yE = DaneDynW(N-M:N,2); % wybór wektora próbek sygnału wyjściowego y do zbioru Ze
s = tf('s'); % zmienna operatorowa Laplace'a
TF = 40*Tp; % wybór wartości stałej czasowej dla filtrów SVF
n = 1; % wybór rzędu dynamiki dla filtrów SVF
F0 = 1/(1+s*TF)^n; % definicja filtru SFV typu F^0
F1 = s/(1+s*TF)^n; % definicja filtru SFV typu F^1
yF = lsim(F0,yE,tE,'foh'); % filtracja SVF filtrem F^0 sekwencji yE z ekstrapolacją 'foh'
ypF = lsim(F1,yE,tE,'foh'); % filtracja SVF filtrem F^1 sekwencji yE z ekstrapolacją 'foh'
uF = lsim(F0,uE,tE,'foh'); % filtracja SVF filtrem F^0 sekwencji uE z ekstrapolacją 'foh'
%*****
```