

Laboratorium identyfikacji systemów

Instytut Automatyki i Robotyki (IAR)

Politechnika Poznańska (PP)

opracowanie: Maciej M. Michałek

C2 POZYSKIWANIE WIEDZY WSTĘPNEJ O SYSTEMIE

Ćwiczenie poświęcone jest wybranym metodom pozyskiwania wiedzy wstępnej o systemie dynamicznym. W tym celu rozważane będą wybrane deterministyczne oraz nieparametryczne metody identyfikacji. Omawiane metody deterministyczne polegają na bezpośredniej analizie odpowiedzi czasowych identyfikowanych systemów. Przez metody *nieparametryczne* należy rozumieć takie sposoby identyfikacji, które na żadnym etapie obliczeń nie wymagają stosowania sparametryzowanego modelu analizowanego procesu. Wynikiem zastosowania klasycznych metod nieparametrycznych, takich jak analiza korelacyjna i analiza widmowa są, odpowiednio, model w postaci ciągu próbek odpowiedzi impulsowej oraz model w postaci zbioru punktów charakterystyki Bodego (lub równoważnej). Na podstawie modeli niesparametryzowanych można próbować oceniać charakter oraz rząd dynamiki systemu, a także cechy charakterystyczne dynamiki systemu (np. znak wzmocnienia statycznego, (nie-)minimalnofazowość, obecność lub brak modów oscylacyjnych, obecność lub brak opóźnienia itp.).

1 Identyfikacja poprzez analizę odpowiedzi czasowych

Klasyczne deterministyczne metody identyfikacji polegają na aproksymacji opisu dynamiki systemu pewną transmitancją operatorową $G(s)$ wyznaczaną na podstawie dostępnej odpowiedzi skokowej systemu – zwykle w postaci sekwencji próbek $\{h(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ lub w postaci graficznej jako wykres odpowiedzi w dziedzinie czasu. Powszechnie spotykane systemy w automatyce procesowej mają dynamikę wysokiego rzędu (z ewentualnym opóźnieniem) o monotonicznej odpowiedzi skokowej. Przykładowy przebieg odpowiedzi skokowej takiego systemu przedstawiono na rysunku 1. Dysponując modelem w postaci odpowiedzi skokowej można dokonać aproksymacji dynamiki systemu na różne sposoby w zależności od celu późniejszego wykorzystania modelu. Rozważymy dwa wybrane sposoby prowadzące do transmitancji wieloinercyjnej $G_{m1}(s)$ oraz inercyjnej z opóźnieniem $G_{m2}(s)$, gdzie:

$$G_{m1}(s) = \frac{K}{(Ts + 1)^p} \quad G_{m2}(s) = \frac{K}{Ts + 1} e^{-sT_0}, \quad (1)$$

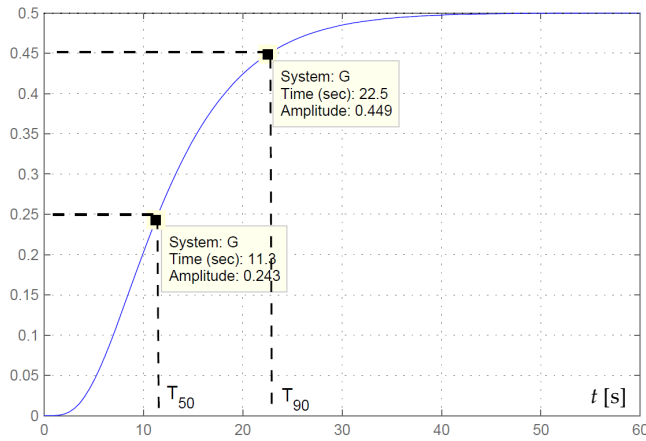
przy czym p określa rząd dynamiki, K jest wzmocnieniem statycznym, T jest zastępczą stałą czasową, natomiast T_0 jest zastępczym opóźnieniem.

Aby dokonać aproksymacji systemu transmitancją $G_{m1}(s)$ musimy oszacować rząd systemu p , wzmocnienie statyczne K oraz zastępczą stałą czasową T . Współczynnik wzmocnienia statycznego określamy na podstawie wartości odpowiedzi $y(\infty)$ w stanie *ustalonym* (w praktyce dla wystarczająco długiego czasu, tj. dla $y(t \gg 0)$, dla którego odpowiedź systemu nie ulega już znaczącej zmianie):

$$K = \frac{y(\infty)}{A_u} \approx \frac{y(t \gg 0)}{A_u} = \hat{K}, \quad (2)$$

gdzie A_u jest wartością amplitudy wymuszenia skokowego. Rząd dynamiki zastępczej można oszacować na podstawie wartości zebranych w tablicy z rys. 1¹. Z wykresu odczytujemy wartości chwil czasu T_{50} oraz T_{90} , w których odpowiedź systemu osiąga odpowiednio 50% oraz 90% wartości ustalonej. Z czwartej kolumny tablicy odczytujemy wartość najbliższą uzyskanemu ilorazowi T_{90}/T_{50} i odpowiadający mu rząd dynamiki p . Na podstawie kolumn drugiej

¹Tablica została zaczerpnięta z pracy: J. Kasprzyk et al. *Identyfikacja procesów*, WPS, Gliwice 2002.



rząd p	T_{50}/T	T_{90}/T	T_{90}/T_{50}
1	0.69	2.30	3.32
2	1.68	3.89	2.32
3	2.67	5.32	1.99
4	3.67	6.68	1.89
5	4.67	7.99	1.71
6	5.67	9.27	1.64
7	6.67	10.53	1.58
8	7.67	11.78	1.54
9	8.67	12.99	1.50
10	9.67	14.21	1.47

Rysunek 1: Przykładowa odpowiedź skokowa systemu z zaznaczonymi chwilami T_{50} i T_{90} (strona lewa) oraz tabela wartości do wyznaczania modelu wieloinercyjnego (strona prawa)

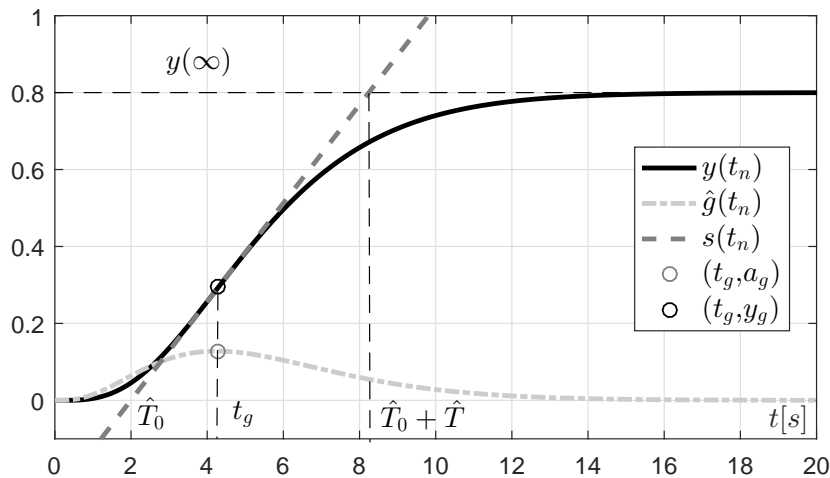
lub trzeciej obliczamy szacowaną wartość \hat{T} stałej czasowej inercji wykorzystując T_{50} lub T_{90} (można także wziąć średnią arytmetyczną wyników z obu kolumn).

Aproksymacja transmitancją $G_{m2}(s)$, dla której należy oszacować wzmocnienie statyczne K , zastępczą stałą czasową inercji T oraz zastępczy czas opóźnienia T_0 , wymaga następującej sekwencji operacji.

Współczynnik wzmocnienia statycznego określamy na podstawie wartości odpowiedzi w stanie ustalonym wg wzoru (2). Oszacowanie stałych T i T_0 wymaga znalezienia równania stycznej przechodzącej przez punkt przegięcia odpowiedzi skokowej $h(t)$ (odpowiedź skokowa $h(t)$ jest tu szczególnym przypadkiem odpowiedzi $y(t)$ systemu). Punkt przegięcia odpowiada lokalnemu ekstremum odpowiedzi impulsowej $g(t)$, dla którego odczytujemy współrzędne t_g oraz a_g (patrz rysunek 2). Pamiętając, że $dh(t)/dt = g(t)$ równanie stycznej w punkcie przegięcia przyjmie postać:

$$s(t) = a_g t + b, \quad \text{gdzie} \quad b = s_g - a_g \cdot t_g, \quad (3)$$

przy czym składnik b określono podstawiając do powyższego wzoru współrzędne (t_g, s_g) punktu przegięcia, gdzie $s_g = s(t_g) \equiv h(t_g)$ (wartość s_g odczytujemy z przebiegu $h(t)$ dla $t = t_g$). Teraz



Rysunek 2: Sposób deterministycznej identyfikacji systemu modelem $G_{m2}(s)$ na podstawie jego odpowiedzi skokowej $y(t) = h(t)$ oraz oceny $\hat{g}(t_n)$ jego odpowiedzi impulsowej $g(t)$; na rysunku $y(\infty)$ oznacza odpowiedź systemu w stanie ustalonym, natomiast $y_g = y(t_g) \equiv h(t_g)$ jest odpowiedzią w chwili $t = t_g$

możemy już analitycznie wyznaczyć punkty przecięcia stycznej $s(t)$ z osią t oraz z asymptotą (por. (2)) $y(\infty) \approx A_u \hat{K} = y(t \gg 0)$ i oszacować poszczególne stałe czasowe na podstawie (3) w następujący sposób:

$$s(\hat{T}_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{T}_0 = \frac{a_g t_g - s_g}{a_g}, \quad (4)$$

$$s(\hat{T}_0 + \hat{T}) = A_u \hat{K} \quad \Rightarrow \quad \hat{T} = \frac{A_u \hat{K} - s_g + a_g t_g}{a_g} - \hat{T}_0 = \frac{A_u \hat{K}}{a_g}. \quad (5)$$

1.1 Aproksymacja systemu dynamicznego modelem wieloinercyjnym.

- W pliku `ProcessStepResponse.mat` zapisano sekwencję próbek czasu $\{t_n\} = \{t_0, t_1, \dots, t_{N-1}\}$ oraz odpowiadającą jej sekwencję $\{h(t_n)\}_{n=0}^{N-1}$ próbek odpowiedzi skokowej pewnego systemu dynamicznego (system pobudzano skokiem jednostkowym: $u(t_n) = \mathbf{1}(t_n)$). Dane zapisano w postaci dwukolumnowej macierzy \mathbf{S} , w której pierwsza kolumna zawiera wektor próbek czasu wyrażonych w sekundach, a druga wektor próbek zarejestrowanej odpowiedzi skokowej.
- Załadować zarejestrowane dane do przestrzeni roboczej Matlaba. Wykreślić sekwencję próbek odpowiedzi skokowej i oszacować wzmocnienie statyczne systemu. Stosując wartości zawarte w tablicy z rys. 1 oszacować rząd dynamiki oraz parametry zastępcze modelu $G_{m1}(s)$. Porównać odpowiedzi skokowe oraz impulsowe systemu oraz modelu $G_{m1}(s)$. Odpowiedź impulsową $g(t_n)$ systemu oszacować stosując różnice skończone:

$$\hat{g}(t_n) = \frac{h(t_n) - h(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} \approx g(t_n). \quad (6)$$

Co można powiedzieć na temat efektywności powyższej metody identyfikacji?

- Powtórzyć powyższą procedurę identyfikacji dla przypadku danych zakłóconych zebranych w macierzy `nS` z pliku `NoisyProcessStepResponse.mat`. Co można powiedzieć na temat efektywności metody w przypadku danych zakłóconych?

1.2 Aproksymacja systemu dynamicznego modelem inercyjnym z opóźnieniem.

- Stosując wzory (2)-(5) dokonać identyfikacji systemu z użyciem modelu $G_{m2}(s)$. Porównać odpowiedzi skokowe oraz impulsowe systemu oraz modelu $G_{m2}(s)$. Odpowiedź impulsową $g(t_n)$ systemu oszacować stosując różnice skończone jak we wzorze (6). Co można powiedzieć na temat efektywności tej metody identyfikacji?
- Powtórzyć powyższą procedurę identyfikacji dla przypadku danych zakłóconych zebranych w macierzy `nS` z pliku `NoisyProcessStepResponse.mat`. Co można powiedzieć na temat efektywności metody w przypadku danych zakłóconych?

2 Nieparametryczna identyfikacja metodą analizy korelacyjnej

Identyfikacja metodą analizy korelacyjnej pozwala na oszacowanie próbek odpowiedzi impulsowej $g_o(n)$ asymptotycznie stabilnego liniowego systemu dynamicznego opisanego równaniem różnicowym:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{\infty} g_o(i)u(n-i) + v(n) = G_o(q^{-1})u(n) + v(n), \quad n, i \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

gdzie $u(n)$ jest wejściowym sygnałem pobudzającym, a $v(n)$ jest składnikiem zakłócającym nieskorelowanym z wejściem $u(n)$. Korzystając z równania Wienera-Hopfa można (przy stosownych założeniach) zapisać zależność będącą podstawą metody korelacyjnej, mianowicie:

$$\hat{r}_{yu}(\tau) = \sum_{i=0}^{M-1} \hat{g}_M(i) \hat{r}_{uu}(\tau - i) \quad \xleftarrow{\text{zał.}} \quad g_o(i) = 0 \quad \text{dla} \quad i \geq M, \quad (8)$$

przy czym \hat{r}_{yu} i \hat{r}_{uu} są estymatorami funkcji korelacji wzajemnej i własnej odpowiednich sygnałów, $\tau \in \mathbb{N}$, a nieskończoną granicę sumy zastąpiono skończoną wartością $M - 1$ uzyskując równanie dla tzw. obciętego ciągu wagowego $\hat{g}_M(i)$. Obcięcie takie jest zasadne przy spełnieniu założenia podanego po prawej stronie wzoru (8). Dobór horyzontu M należy do projektanta modelu i powinien zapewniać wystarczającą widoczność stanu przejściowego identyfikowanego systemu (dobór M może być wykonywany iteracyjnie, metodą prób i błędów).

Zapisując równanie (8) dla $\tau = 0, 1, \dots, M - 1$ i korzystając z własności parzystości funkcji autokorelacji (tj. $r_{uu}(-\tau) = r_{uu}(\tau)$) otrzymujemy następujący skończenie-wymiarowy układ równań:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{r}_{yu}(0) \\ \hat{r}_{yu}(1) \\ \vdots \\ \hat{r}_{yu}(M-1) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{r}}_{yu}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{r}_{uu}(0) & \hat{r}_{uu}(1) & \hat{r}_{uu}(2) & \dots & \hat{r}_{uu}(M-1) \\ \hat{r}_{uu}(1) & \hat{r}_{uu}(0) & \hat{r}_{uu}(1) & \dots & \hat{r}_{uu}(M-2) \\ \hat{r}_{uu}(2) & \hat{r}_{uu}(1) & \hat{r}_{uu}(0) & \dots & \hat{r}_{uu}(M-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{r}_{uu}(M-1) & \hat{r}_{uu}(M-2) & \hat{r}_{uu}(M-3) & \dots & \hat{r}_{uu}(0) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{R}}_{uu}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{g}_M(0) \\ \hat{g}_M(1) \\ \vdots \\ \hat{g}_M(M-1) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{g}}_M}. \quad (9)$$

Jeżeli macierz $\hat{\mathbf{R}}_{uu}$ jest nieosobliwa, a estymaty funkcji korelacyjnych wyznaczone zostaną na podstawie dostępnego zbioru pomiarów $\{y(n), u(n)\}_{n=0}^{N-1}$, wówczas rozwiązanie powyższego układu względem elementów wektora $\hat{\mathbf{g}}_M$ przyjmie postać:

$$\hat{\mathbf{g}}_M = \hat{\mathbf{R}}_{uu}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{yu} \quad \text{lub} \quad \hat{\mathbf{g}}_M = (\hat{\mathbf{R}}_{uu}^\top \hat{\mathbf{R}}_{uu})^{-1} \hat{\mathbf{R}}_{uu}^\top \hat{\mathbf{r}}_{yu}, \quad (10)$$

przy czym zastosowanie lewostronnej pseudoodwrotności macierzy $\hat{\mathbf{R}}_{uu}$ dotyczy przypadku, gdy równanie (9) rozszerzymy o kolejne wiersze dla $i \geq M$, dla których (na podstawie założenia z (8)) przyjmujemy $\hat{g}_M(i) = 0$ (otrzymamy w ten sposób nadokreślony układ równań).

Jeżeli sygnał wejściowy $u(n)$ będzie szumem białym o wariancji σ_o^2 , wówczas rozwiązanie równania (9) względem poszczególnych próbek $\hat{g}_M(i)$ można uzyskać w uproszczony sposób zgodnie z równaniem:

$$\hat{g}_M(i) = \frac{\hat{r}_{yu}(i)}{\hat{r}_{uu}(0)} = \frac{\hat{r}_{yu}(i)}{\sigma_o^2} \quad \text{lub} \quad \hat{g}_M(i) = \frac{\hat{r}_{yu}(i)}{\hat{r}_{uu}(0)} = \frac{\hat{r}_{yu}(i)}{\hat{\sigma}^2}, \quad i \in [0; M-1], \quad (11)$$

gdzie wykorzystano własność funkcji autokorelacji szumu białego, dla którego $r_{uu}(0) = \sigma_o^2$ oraz $r_{uu}(\tau) = 0$ dla $\tau \neq 0$. Prawy wzór w (11) prezentuje pragmatyczny sposób postępowania wynikający z faktu, że w praktyce na wejście systemu można podać sygnał $u(n)$ będący aproksymacją szumu białego.

Uwaga. Zależności (10) oraz (11) są słuszne dla systemów czasu dyskretnego przy przyjęciu znormalizowanego okresu próbkowania $T_p = 1$. Jeżeli dane pomiarowe $\{y(nT_p), u(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ pochodzą z systemu czasu ciągłego, opisanego równaniem $y(t) = \int_0^\infty g(\theta)u(t - \theta)d\theta + v(t)$, wówczas model czasu dyskretnego można traktować jako dyskretną aproksymację rzeczywistego systemu czasu ciągłego. W takim przypadku należy uwzględnić okres próbkowania T_p z jakim próbkowano sygnały analogowe i w efekcie właściwie przeskalować estymowany ciąg wagowy $\hat{g}_M(i)$, aby można było umożliwić porównanie wyniku analizy korelacyjnej z odpowiedzią systemu czasu ciągłego. Przeskalowanie wzorów z (10) i (11) ma postać:

$$\hat{\mathbf{g}}_M = \frac{1}{T_p} \hat{\mathbf{R}}_{uu}^{-1} \hat{\mathbf{r}}_{yu}, \quad \hat{g}_M(iT_p) = \frac{1}{T_p} \frac{\hat{r}_{yu}(i)}{\hat{r}_{uu}(0)}, \quad i \in [0; M-1]. \quad (12)$$

Pierwsze M próbek odpowiedzi skokowej $h_o(t)$ systemu czasu ciągłego o ciągłej odpowiedzi impulsowej $g_o(t)$ można aproksymować na podstawie oszacowanych wcześniej przeskalowanych próbek ciągu wagowego z równania (12) w następujący sposób:

$$\hat{h}_M(nT_p) = T_p \sum_{i=0}^n \hat{g}_M(iT_p) \quad \text{dla } n \in [0; M-1], \quad (13)$$

przy założeniu zerowego warunku początkowego: $h_o(0) = 0$.

2.1 Analiza korelacyjna.

- Dany jest plik `AKident.mdl` zawierający schemat blokowy eksperymentu pomiarowego z dwoma systemami dynamicznymi reprezentowanymi transmitancjami operatorowymi $G_o(z)$ oraz $G_o(s)$, z których pierwsza definiuje system czasu dyskretnego, a druga system czasu ciągłego. Na wejściu systemu $G_o(s)$ umieszczono blok ekstrapolatora zerowego rzędu `Zero-Order Hold`. Oba systemy będą pobudzane sygnałem aproksymującym szum biały $e(nT_p)$ o rozkładzie normalnym i wariancji $\sigma_u^2 = 0.5$. Po uruchomieniu schematu blokowego próbki stosownych sygnałów zostaną zapisane (z okresem próbkowania T_p) do macierzy `Zdata`. Przed uruchomieniem schematu należy zainicjować wartości trzech zmiennych: `Tp` (okres próbkowania), `tend` (czas symulacji) oraz `sigma2v` (wariancja zakłócenia v).
- Wybrać system $G_o(z)$, uruchomić schemat blokowy `AKident.mdl` i zebrać dane pomiarowe $\{y(n), u(n)\}_{n=0}^{N-1}$ dla $N = 1001$ przyjmując $T_p = 1$ s oraz wariancję zakłócenia `sigma2v` równą zero. Wyświetlić dane pomiarowe w dziedzinie czasu.
- Stosując niezależnie wzory (10) oraz (11) przeprowadzić nieparametryczną identyfikację systemu $G_o(z)$ metodą analizy korelacyjnej. Do obliczeń można wykorzystać funkcję `Covar(D, tau)`; funkcja pseudoinwersji w Matlabie to `pinv()`. Przyjąć wstępnie $M = 20$.
 - Porównać wyniki analizy korelacyjnej uzyskane z wykorzystaniem wzorów (10) oraz (11) z (nieznaną w praktyce) odpowiedzią $g_o(n)$ systemu $G_o(z)$.
 - Sprawdzić wpływ wariancji zakłócenia na jakość identyfikacji dla wartości parametru `sigma2v` ze zbioru $\{0.0, 0.001, 0.01, 0.1\}$.
- Wybrać system $G_o(s)$, uruchomić schemat blokowy `AKident.mdl` i zebrać dane pomiarowe $\{y(nT_p), u(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ dla $N = 1001$ przyjmując $T_p = 1$ s oraz wariancję zakłócenia `sigma2v` równą 0.001. Wyświetlić dane pomiarowe w dziedzinie czasu.
- Stosując wzory (12) przeprowadzić nieparametryczną identyfikację systemu czasu ciągłego $G_o(s)$ metodą analizy korelacyjnej. Przyjąć wstępnie $M = 30$.
 - Porównać wyniki analizy korelacyjnej uzyskane z wykorzystaniem wzorów (12) z (nieznaną w praktyce) odpowiedzią $g_o(t)$ systemu $G_o(s)$.
 - Sprawdzić wpływ wartości okresu próbkowania na jakość identyfikacji dla $T_p \in \{2.0, 1.0, 0.5, 0.25\}$ s (przy zmianie T_p należy dobrać horyzont M).
 - Sprawdzić wpływ wariancji zakłócenia na jakość identyfikacji dla parametru `sigma2v` ze zbioru $\{0.0, 0.001, 0.01, 0.1\}$ (przyjąć $T_p = 1$ s).
- Wyznaczyć estymaty próbek odpowiedzi skokowej obiektu $G_o(s)$ stosując zależność (13). Na podstawie wyznaczonych próbek $\hat{h}_M(nT_p)$ ocenić cechy dynamiki i strukturę modelu identyfikowanego systemu czasu ciągłego. Jaką wiedzę wstępną o systemie można w ten sposób pozyskać?

3 Nieparametryczna identyfikacja metodą analizy widmowej

Analiza widmowa jest nieparametryczną metodą identyfikacji systemu w dziedzinie częstotliwości. Pozwala ona na oszacowanie charakterystyk częstotliwościowych identyfikowanego systemu dynamicznego, w szczególności na oszacowanie zbioru punktów charakterystyk Bodego. Analiza widmowa często zakłada opis systemu w dyskretnej dziedzinie czasu w postaci równania

$$y(n) = G_o(q^{-1})u(n) + v(n), \quad G_o(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{\infty} g_o(i)q^{-i}, \quad (14)$$

gdzie $u(n)$ jest sygnałem pobudzającym, a $v(n)$ jest składnikiem zakłócającym nieskorelowanym z wejściem $u(n)$. Właściwości częstotliwościowe systemu można określić na podstawie tzw. estymatora transmitancji, który może przyjąć jedną z dwóch klasycznych postaci – jako

$$\hat{G}_N^*(j\Omega_k) = \frac{Y_N(j\Omega_k)}{U_N(j\Omega_k)}, \quad \Omega_k = \frac{2\pi}{N}k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (15)$$

zwanego w literaturze *doświadczalnym estymatorem transmitancji* (w języku ang. znanym jako *Empirical Transfer Function Estimate*), lub jako iloraz estymatorów gęstości widmowych mocy:

$$\hat{G}_N(j\Omega_k) = \frac{\hat{\Phi}_{yu}^s(j\Omega_k)}{\hat{\Phi}_{uu}^s(\Omega_k)}, \quad \Omega_k = \frac{2\pi}{\Gamma}k, \quad k = 0, 1, \dots, \Gamma-1, \quad \Gamma = 2\gamma + 1, \quad (16)$$

przy czym Γ jest liczbą próbek oszacowanych funkcji korelacji branych do obliczeń estymat gęstości widmowych mocy $\hat{\Phi}^s$ (interpretację γ podano poniżej). Estymaty widmowych gęstości mocy zastosowanych w (16) można wyznaczyć na podstawie N -elementowej sekwencji próbek $\{y(n)\}_{n=0}^{N-1}$ oraz $\{u(n)\}_{n=0}^{N-1}$ stosując następujące wzory:

$$\hat{\Phi}_{yu}^s(j\Omega_k) = T_p \sum_{\tau=-\gamma}^{\gamma} \hat{r}_{yu}(\tau)w(\tau)e^{-j\Omega_k\tau}, \quad \hat{\Phi}_{uu}^s(\Omega_k) = T_p \sum_{\tau=-\gamma}^{\gamma} \hat{r}_{uu}(\tau)w(\tau)e^{-j\Omega_k\tau}, \quad (17)$$

gdzie $\gamma \in \{M_w, N-1\}$ (przyjęcie $\gamma = N-1$ zachowuje maksymalną rozdzielczość częstotliwościową estymaty gęstości widmowej mocy), przy czym $M_w \leq N-1$ (zalecane: $M_w \leq N/5$) określa szerokość tzw. okna przesunięciowego $w(\tau)$, natomiast \hat{r}_{yu} oraz \hat{r}_{uu} są estymatorami funkcji korelacji (wzajemnej i własnej) sygnałów. Przywołajmy definicje dwóch popularnych rodzajów okien przesunięciowych – prostokątnego $w_P(\tau)$ i Hanninga $w_H(\tau)$:

$$w_P(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |\tau| < M_w \\ 0 & \text{dla } |\tau| \geq M_w \end{cases}, \quad w_H(\tau) = \begin{cases} 0.5 \left(1 + \cos \frac{\tau\pi}{M_w}\right) & \text{dla } |\tau| < M_w \\ 0 & \text{dla } |\tau| \geq M_w \end{cases}. \quad (18)$$

Wprowadzenie okien przesunięciowych dla $M_w < N-1$ służy zmniejszaniu wariancji estymatorów gęstości widmowych mocy² i tym samym wariancji estymatora (16), jednak wiąże się również z negatywnym zjawiskiem zniekształcania przebiegu estymaty. Zatem dobór wartości parametru M_w musi wynikać z kompromisu.

Należy pamiętać, że wykorzystanie wzoru (15) lub (16) prowadzi do obliczenia N liczb zespolonych $\hat{G}_N^*(j\Omega_k)$ dla $\Omega_k = \{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{N-1}\}$ lub Γ liczb zespolonych $\hat{G}_N(j\Omega_k)$ dla $\Omega_k = \{\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_{\Gamma-1}\}$, których moduły i argumenty stanowią zbiory punktów charakterystyk Bodego. Zbiory te są bezpośrednim rezultatem analizy widmowej. Na podstawie wykresu zbiorów takich punktów można dokonać oceny właściwości identyfikowanego systemu.

Analiza widmowa została przedstawiona dla modelu systemu czasu dyskretnego opisanego wzorem (14). Można ją jednak także stosować do nieparametrycznej identyfikacji procesów czasu ciągłego opisanych równaniem $[y(t)] = G_o(s)[u(t)] + [v(t)]$ wykorzystując do obliczeń zbiór danych $Z^N = \{y(nT_p), u(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ stanowiący skończony zbiór (spróbkowanych z okresem

²Pamiętajmy, że wartości estymatorów (17) są obliczane na podstawie sygnałów zakłócanych stochastycznie.

próbkowania T_p) próbek sygnałów $y(t)$ i $u(t)$ pochodzących z wejścia i wejścia systemu czasu ciągłego. W celu uniknięcia niepożądanego efektu aliasingu, w torach pomiarowych sygnałów $y(t)$ i $u(t)$ stosuje się zwykle (takie same) filtry antyaliasingowe.

3.1 Analiza widmowa.

- Plik **AWident.mdl** zawiera schemat blokowy eksperymentu pomiarowego z systemem dynamicznym czasu ciągłego reprezentowanym transmitancją $G_o(s)$. Na wejściu systemu $G_o(s)$ umieszczono szeregowe połączenie bloków **Sign-Gain**, które odpowiadają za transformację sygnału wejściowego na przebieg binarny o narzuconej amplitudzie. Sygnałem wejściowym do połączenia bloków **Sign-Gain** jest sygnał pobudzający aproksymujący szum biały $e(nT_p)$ o rozkładzie normalnym i wariancji $\sigma_u^2 = 0.5$. W torach pomiarowych sygnałów $y(t)$ i $u(t)$ umieszczono jednakowe filtry antyaliasingowe pierwszego rzędu o stałej czasowej $T_F = 2.5T_p/(2\pi)$. Po uruchomieniu schematu blokowego próbki stosownych sygnałów zostaną zapisane (z okresem próbkowania T_p) do macierzy **Zdata**. Przed uruchomieniem schematu należy zainicjować wartości parametrów: **TF** (stała czasowa filtrów), **Tp** (okres próbkowania), **tend** (czas symulacji) oraz **sigma2v** (wariancja zakłócenia v).
- Uruchomić schemat blokowy **AWident.mdl** i zebrać dane pomiarowe $\{y(nT_p), u(nT_p)\}_{n=0}^{N-1}$ dla $N = 1000$ przyjmując $T_p = 0.5$ s oraz wariancję zakłócenia **sigma2v** równą 0.001. Wyświetlić dane pomiarowe w dziedzinie czasu.
- Stosując estymatory transmitancji ze wzorów (15) oraz (16) przeprowadzić nieparametryczną identyfikację systemu czasu ciągłego $G_o(s)$ metodą analizy widmowej. Dla estymatora (16) przyjąć $M_w = 200$ i użyć okna Hanninga.
- Wykreślić zbiory estymat $(\omega_k, \text{Lm}(\omega_k))$ oraz $(\omega_k, \text{Arg}(\hat{G}(j\omega_k)))$ punktów charakterystyki Bodego uzyskane z wykorzystaniem obu estymatorów transmitancji, gdzie

$$\text{Lm}(\omega_k) \triangleq 20 \log |\hat{G}(j\omega_k)|, \quad \omega_k = \frac{\Omega_k}{T_p} = \frac{2\pi}{DT_p} k, \quad k = 0, 1, \dots, D^*,$$

gdzie $\hat{G}(j\omega_k) \stackrel{(15)}{=} \hat{G}_N^*(j\omega_k)$ lub $\hat{G}(j\omega_k) \stackrel{(16)}{=} \hat{G}_N(j\omega_k)$, przy czym $D^* = \frac{D}{2} - 1$ lub $D^* = \frac{D-1}{2}$, w zależności od parzystości lub nieparzystości liczby próbek $D \in \{N, \Gamma\}$ użytych do obliczeń DFT. Na wykresach wymusić logarytmiczną skalę pulsacji.

- Na podstawie oszacowanej charakterystyki Bodego ocenić właściwości zidentyfikowanego systemu. Jaką wiedzę wstępną o systemie można w ten sposób pozyskać?
- Porównać wyniki z przebiegiem prawdziwej (nieznanej w praktyce) charakterystyki Bodego transmitancji $G_o(s)$ systemu.
- Sprawdzić wpływ zastosowanego rodzaju okna czasowego (18) oraz wartości parametru M_w na jakość identyfikacji dla $M_w \in \{200, 100, 50\}$.
- Sprawdzić wpływ wartości okresu $T_p \in \{2.0, 1.0, 0.5, 0.1\}$ s na jakość identyfikacji.
- Sprawdzić wpływ wariancji zakłócenia pomiarowego v na jakość identyfikacji dla **sigma2v** ze zbioru $\{0.001, 0.01, 0.1\}$.
- Sprawdzić wpływ liczby $N \in \{1000, 100\}$ pomiarów na jakość identyfikacji.

Uwaga: Przygotowanie wektora wartości funkcji autokorelacji dla funkcji **fft()** Matlaba jest następujące: **Ruu = [ruuP(1:Mw+1) zeros(1,2*N-2*Mw-2) ruuP(Mw+1:-1:2)]**, przy czym we-

ktor `ruuP` zawiera wartości funkcji korelacji (wymnożone przez wartości funkcji okna) dla $\tau = 0, 1, \dots, M_w$. Takie przygotowanie nie zmienia oryginalnej rozdzielczości częstotliwościowej (długość wektora `Ruu` wynosi $2N-1$). Podobnie należy przygotować wektor wartości funkcji korelacji wzajemnej (jednak z uwzględnieniem jej własności!).

□