1 Разбиение отрезка и суммы Дарбу

Пусть τ — равномерное разбиение на n частей отрезка $[-2, 2]$. Тогда:

$$\Delta x_i = \frac{4}{n}, \quad x_i = -2 + \frac{4i}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = x \ln 3 - 3^x.$$

Её производная:

$$f'(x) = \ln 3 - (\ln 3) \cdot 3^x = \ln 3(1 - 3^x).$$

Следовательно, функция $f(x)$:

- возрастает на отрезке $[-2, 0]$,
- убывает на отрезке $[0, 2]$.

Так как функция имеет разный характер монотонности на разных промежутках, то могут возникнуть две ситуации:

1. Точка 0 является точкой разбиения двух промежутков.
2. Точка 0 находится внутри одного из промежутков разбиения.

Рассмотрим, при каких условиях точка 0 становится точкой разбиения:

$$-2 + \frac{4i}{n} = 0 \implies i = \frac{n}{2}.$$

Поскольку $i \in \mathbb{Z}$, точка 0 становится точкой разбиения только при чётных n. Следовательно, вторая ситуация возможна при нечётных n.

Случай 1: n — чётное

Разобьём нижнюю сумму Дарбу на две суммы: до точки 0 и после неё. Пусть:

$$m_i^l = \text{значения в левых концах разбиения}, \quad m_i^r = \text{значения в правых концах разбиения}.$$

Тогда нижняя сумма Дарбу будет равна:

$$s_\tau(f) = \Delta x \left(\sum_{i=0}^{n/2-1} m_i^l + \sum_{i=n/2+1}^{n} m_i^r \right).$$

$$s_\tau(f) = \frac{4}{n} \left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \left(\left(-2 + \frac{4i}{n} \right) \ln(3) - 3^{-2+\frac{4i}{n}} \right) + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} \left(\left(-2 + \frac{4i}{n} \right) \ln(3) - 3^{-2+\frac{4i}{n}} \right) \right)$$

$$s_\tau(f) = \frac{4}{n} \left(-2\ln(3) \left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 1 + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} 1 \right) + \frac{4\ln(3)}{n} \left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} i + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} i \right) - 3^{-2} \left(\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 3^{\frac{4i}{n}} + \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n} 3^{\frac{4i}{n}} \right) \right)$$

Раскроем сумму $\sum 1$ и $\sum i$ как сумму арифметической прогрессии, а сумму $\sum 3^{\frac{4i}{n}}$ как сумму геометрической прогрессии, приведем подобные и получим:

$$s_\tau(f) = \frac{4}{n}\left(-2\ln(3)\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\right)+\frac{4\ln(3)}{n}\left(\frac{n(n-2)}{8}+\frac{n(3n+2)}{8}\right)-3^{-2}\left(\frac{-8}{1-3^{\frac{4}{n}}}+3^{2+\frac{4}{n}}\frac{1}{1-3^{\frac{4}{n}}}\right)\right)$$

$$s_\tau(f) = \frac{4}{n}\left(-2\ln(3)n+2\ln(3)n-3^{-2}\left(\frac{-8}{1-3^{\frac{4}{n}}}+3^{2+\frac{4}{n}}\frac{-8}{1-3^{\frac{4}{n}}}\right)\right)$$

$$s_\tau(f) = \frac{32}{9n}\left(\frac{1+3^{2+\frac{4}{n}}}{1-3^{\frac{4}{n}}}\right)$$

Для верхней суммы Дарбу аналогично разобьём сумму на две части: до точки 0 и после неё. Пусть:

$$M_i^l = \text{значения в правых концах разбиения}, \quad M_i^r = \text{значения в левых концах разбиения}.$$

Тогда верхняя сумма Дарбу будет равна:

$$S_\tau(f) = \Delta x\left(\sum_{i=1}^{n/2} M_i^l + \sum_{i=n/2}^{n-1} M_i^r\right).$$

$$S_\tau(f) = \frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(\left(-2+\frac{4i}{n}\right)\ln(3)-3^{-2+\frac{4i}{n}}\right)+\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1}\left(\left(-2+\frac{4i}{n}\right)\ln(3)-3^{-2+\frac{4i}{n}}\right)\right)$$

Аналогичными преобразованиями получаем:

$$S_\tau(f) = \frac{4}{n}\left(-2\ln(3)\left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}1+\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1}1\right)+\frac{4\ln(3)}{n}\left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}i+\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1}i\right)-3^{-2}\left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}3^{\frac{4i}{n}}+\sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1}3^{\frac{4i}{n}}\right)\right)$$

После упрощения получаем:

$$S_\tau(f) = \frac{32}{9n}\left(\frac{9+3^{\frac{4}{n}}}{3^{\frac{4}{n}}-1}\right)$$

Случай 2: n — нечётное

В этом случае точка 0 находится внутри одного из промежутков разбиения, и суммы Дарбу вычисляются аналогично, но с учётом того, что точка 0 не совпадает с точкой разбиения. $\frac{n}{2}$ подразумевает целочисленное деление с округлением вниз.

Тогда нижняя сумма Дарбу не изменится с ситуацией (1).

Для верхней суммы Дарбу аналогично разобьём сумму на две части: до разбиения, в которое попал 0, разбиение с 0 и разбиения после него. Пусть:

$$M_i^l = \text{значения в правых концах разбиения}, \quad M_i^r = \text{значения в левых концах разбиения}.$$

Тогда верхняя сумма Дарбу будет равна:

$$S_\tau(f) = \Delta x\left(\sum_{i=1}^{n/2-1} M_i^l + f(0) + \sum_{i=n/2+2}^{n-1} M_i^r\right).$$

$$S_\tau(f) = \frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(\left(-2+\frac{4i}{n}\right)\ln(3) - 3^{-2+\frac{4i}{n}}\right) - 1 + \sum_{i=\frac{n}{2}+2}^{n-1}\left(\left(-2+\frac{4i}{n}\right)\ln(3) - 3^{-2+\frac{4i}{n}}\right)\right)$$

Аналогичными преобразованиями после упрощения получаем:

$$S_\tau(f) = \frac{4\left(-72 + 9^{\frac{4+n}{n}} - 17 \cdot 81^{\frac{1}{n}}\right)}{9\left(-1 + 81^{\frac{1}{n}}\right)n} - \frac{16\ln(3)}{n^2}$$

2 Исследуем интегрируемость функции

Проверим интегрируемость функции по критерию Римана.

Для любого $\epsilon > 0$ существует δ такая, что верхняя сумма Дарбу минус нижняя сумма Дарбу меньше ϵ:

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) < \epsilon.$$

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \frac{4}{n}\left(\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\left(\left(-2+\frac{4i}{n}\right)\ln(3) - 3^{-2+\frac{4i}{n}}\right) - \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1}\left(\left(-2+\frac{4i}{n}\right)\ln(3) - 3^{-2+\frac{4i}{n}}\right)\right.$$

$$\left. + \sum_{i=\frac{n}{2}}^{n-1}\left(\left(-2+\frac{4i}{n}\right)\ln(3) - 3^{-2+\frac{4i}{n}}\right) - \sum_{i=\frac{n}{2}+1}^{n}\left(\left(-2+\frac{4i}{n}\right)\ln(3) - 3^{-2+\frac{4i}{n}}\right)\right).$$

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \frac{4}{n}\left(-1 - (-2\ln(3) - \frac{1}{9}) + (-2\ln(3) - \frac{1}{9}) - (2\ln(3) - 9)\right)$$

$$S_\tau(f) - s_\tau(f) = \frac{-8\ln(3) + 32}{n}.$$

Найдем такое n_0, что:

$$\frac{-8\ln(3) + 32}{n} < \epsilon.$$

Следовательно:

$$n > \frac{-8\ln(3) + 32}{\epsilon}.$$

Тогда:

$$n_0 = \left\lfloor \frac{-8\ln(3) + 32}{\epsilon} \right\rfloor + 1.$$

Таким образом, функция интегрируема.

3 Найдем пределы сумм Дарбу

n — чётное

Найдем нижнюю сумму Дарбу:

$$s_\tau(f) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{32}{9n}\left(\frac{1+3^{2+\frac{4}{n}}}{1-3^{\frac{4}{n}}}\right)\right) = -\frac{80}{9\ln(3)}$$

Найдем верхнюю сумму Дарбу:

$$S_\tau(f) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{32}{9n}\left(\frac{9+3^{\frac{4}{n}}}{3^{\frac{4}{n}}-1}\right)\right) = -\frac{80}{9\ln(3)}$$

n — нечётное

Найдем верхнюю сумму Дарбу:

$$S_\tau(f) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\left(-72+9^{\frac{4+n}{n}}-17\cdot 81^{\frac{1}{n}}\right)}{9\left(-1+81^{\frac{1}{n}}\right)n} - \frac{16\ln(3)}{n^2}\right) = -\frac{80}{9\ln(3)}$$

Итог:

В пункте 2, мною была доказана интегрируемость функции. Исходя из этого можно утверждать что:

$$I_* = \sup s_\tau = -\frac{80}{9\ln(3)} \quad \left(s_\tau < -\frac{80}{9\ln(3)} \quad \&\& \lim_{n\to\infty} s_\tau = -\frac{80}{9\ln(3)}\right)$$

$$I^* = \inf S_\tau = -\frac{80}{9\ln(3)} \quad \left(S_\tau < -\frac{80}{9\ln(3)} \quad \&\& \lim_{n\to\infty} S_\tau = -\frac{80}{9\ln(3)}\right)$$

$$\Rightarrow I_* = I^* = I = -\frac{80}{9\ln(3)}$$

4 Докажем интегрируемость функции с помощью достаточного условия

$$f(x) = x\ln 3 - 3^x$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x\ln 3 - 3^x$ на монотонность.

Функция $f(x)$ является конечной суммой элементарных функций (многочлен и показательная функция).

Теорема 1. *Сумма или разность и произведение конечного числа непрерывных на некотором множестве функций есть функция, непрерывная на этом множестве.*

Доказательство. Доказательство следует из основных теорем о пределах. □

Так как $g(x) = x\ln 3$ и $h(x) = 3^x$ непрерывны на $[-2;2]$, следовательно, $f(x) = g(x) - h(x)$ непрерывна на $[-2;2]$.

Теорема 2 (Достаточное условие интегрируемости)**.** *Всякая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция интегрируема на этом отрезке.*

Следовательно, $f(x)$ интегрируема на $[-2;2]$.

5 Проверим результат с помощью формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_{-2}^{2} x \cdot \ln(3) - 3^x \, dx$$

$$\int_{-2}^{2} x \cdot \ln(3) \, dx + \int_{-2}^{2} -3^x \, dx$$

$$\ln(3) \cdot \int_{-2}^{2} x \, dx - \int_{-2}^{2} 3^x \, dx$$

$$\ln(3) \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^{2} - \frac{3^x}{\ln(3)} \Big|_{-2}^{2}$$

$$\left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^{2} = \frac{2^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = 0$$

$$\left(\frac{3^x}{\ln(3)} \right) \Big|_{-2}^{2} = \frac{3^2}{\ln(3)} - \frac{1}{3^2 \cdot \ln(3)} = \frac{80}{9 \ln(3)}$$

Окончательный результат, имеет вид:

$$\int_{-2}^{2} \left(x \ln 3 - 3^x \right) \, dx = -\frac{80}{9 \cdot \ln(3)}$$

Посчитав значение интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница, удостоверились в правильности вычислений в пункте 3.