Лабораторная работа по математическому анализу

Студент: Файзуллин Кирилл Маратович.
Группа: M3134

30 мая 2025 г.

1 Аналитическая часть

1.1 Нахождение стационарных точек

Рассмотрим функцию $f(x, y)$. Стационарные точки находятся из системы

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) \end{pmatrix} \begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему по координатам, получили кандидатов на экстремум. Кроме того, в список кандидатов была добавлена точка $(0, 0)$ как точка недифференцируемости функции, так как по необходимому условию она также может быть точкой экстремума.

1.2 Вторые производные и матрица Гессе

Вычислили вторые частные производные $f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy}$ и составили матрицу Гессе:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{xy}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Далее для каждого кандидата проверили определённость соответствующей квадратичной формы с помощью критерия Сильвестра.

1.3 Анализ вырожденных случаев

Для множеств $(0, t)$ и $(t, 0)$ матрица Гессе оказалась вырожденной:

$$\det H_f(0,t) = 0, \quad \det H_f(t,0) = 0.$$

Анализ квадратичной формы второго дифференциала функции показал, что она полуопределённая, что не даёт точного ответа о наличии экстремума. В связи с этим был проведён дополнительный анализ поведения функции в окрестности этих точек. По результатам анализа (аналогично практике у Д. Юрьевича) установлено, что множества $(t, 0)$, $(0, t)$ и точка $(0, 0)$ не являются экстремумами функции: в любой их окрестности можно найти точки, в которых f принимает как большие, так и меньшие значения.

2 Численный метод

Реализация градиентного спуска

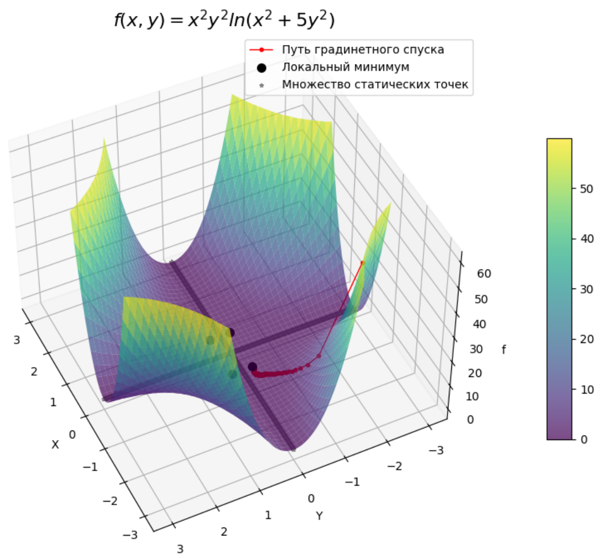
Для численного поиска минимумов реализована процедура градиентного спуска. Зададим начальную точку $(x^{(0)}, y^{(0)})$ и шаг $\alpha > 0$. На k-м шаге:

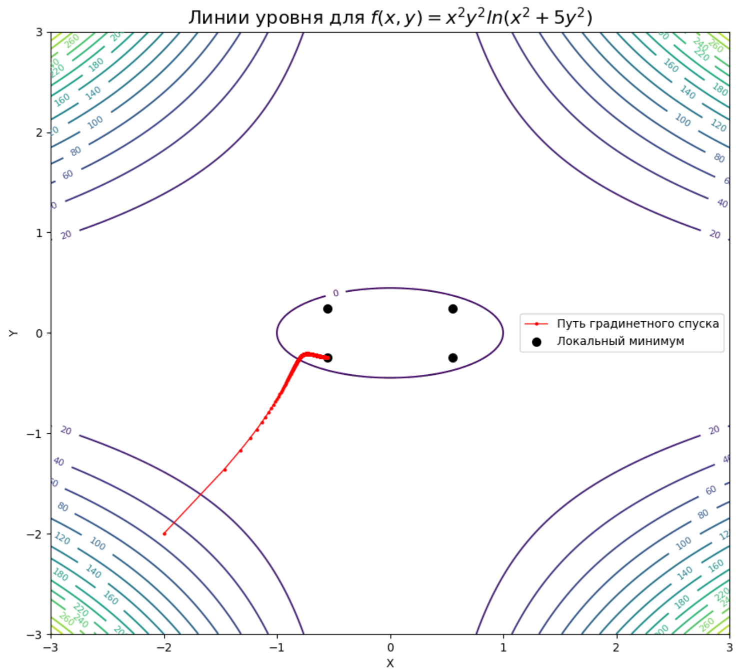
$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} f_x\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) \\ f_y\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right) \end{pmatrix}.$$

Реализованы два условия останова:

1. $\Delta f = \left| f(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) - f(x^{(k)}, y^{(k)}) \right| < \varepsilon.$
2. $\|(|x^{(k+1)} - x^{(k)}|, |y^{(k+1)} - y^{(k)}|)\| < \varepsilon.$

На моей функции метод показал хорошую скорость сходимости (5 тысяч итераций против 12 тысяч) при первом условии останова Δf, так как функция не является «пологой» и не имеет «плато». В противном случае целесообразно было бы использовать норму изменения аргумента.





Результаты градиентного спуска

Параметры и итоговые результаты:

Начальная точка	$(-2, -2)$
Шаг градиентного спуска α_k	0.01
Число итераций до сходимости	5357
Значение Δf на выходе	1.00×10^{-7}
Найденная точка минимума	$(-0.5507578, -0.24626717)$
Значение функции в найденной точке	-0.00919698571180252
Аналитически найденная точка минимума	$(-0.550695314903, -0.246278431803)$
Разница (погрешность)	$(6.248 \times 10^{-5},\ 1.127 \times 10^{-5})$
Время работы алгоритма	0.2290 с