Лабораторная работа №1
Файзуллин Кирилл Маратович
M3134
Последовательность:

$$x_n = \frac{3n+5}{6n-2} \cdot \arcsin\sqrt{\frac{2+(-1)^{n}}{4}}$$

~~Вы~~ Аналитический метод

Выделим подпоследовательности:

• При $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$)

$$x_{2k} = \frac{6k+5}{12k-2} \cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Д-м, что данная подпосл. сходится. Для этого по т. Вейерштрасса нужно д-ть, что она монотонна и огр.

- Монотонна:

$$x_{2k} - x_{2(k+1)} = \frac{6k+5}{12k-2} \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} -$$

$$- \frac{6k+11}{12k+10} \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{6k+5}{12k-2} - \frac{6k+11}{12k+10} \right) =$$

$$= \underbrace{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}}_{>0} \cdot \frac{18}{\underbrace{36k^2+24k-5}_{>0}} \Rightarrow$$

$x_{2k} - x_{2(k+1)} > 0 \Rightarrow$

$x_{2k} - \downarrow$

- ограниченность.

$$\overbrace{\frac{6k+5}{\underbrace{12k-2}_{>0}}}^{>0} \cdot \underbrace{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}}_{>0} \Rightarrow x_{2k} > 0 \Rightarrow$$

огр.

Можно сделать вывод, что x_{2k} - сходится.

Найдем $\lim\limits_{k\to\infty}(x_{2k})$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{6k+5}{12k-2}\right)\cdot \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \lim \frac{6k+5}{12k-2}\cdot \lim \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \lim \frac{6+\frac{5}{k}}{12-\frac{2}{k}}\cdot \lim\frac{\pi}{3} = \frac{\lim(\ )}{\lim(\ )}\cdot\frac{\pi}{3} =$$

$$= \frac{6}{12}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

• При $n = 2k+1$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

$$X_{2k+1} = \frac{6k+8}{12k+4}\cdot \arcsin\sqrt{\frac{2+(-1)^{2k+1}}{4}} =$$

$$= \frac{6k+8}{12k+4}\cdot \arcsin\frac{1}{2}$$

· Рассм. X_{2k+1} на моноm. и огр.

- Моноm.:

$$X_{2k+1} - X_{2(k+1)+1} = \frac{6k+8}{12k+4}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{6k+14}{12k+16}\cdot\frac{\pi}{6} =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(\frac{6k+8}{12k+4} - \frac{6k+14}{12k+16}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\Pi}{6}}_{>0} \cdot \frac{\overbrace{9}^{>0}}{\underbrace{18k^2+30k+8}_{>0}} > 0 \Rightarrow$$

$$x_{2k+1} - x_{2(k+1)+1} > 0 \Rightarrow$$

подпосл. монот. убывает

- огр.:

$$x_{2k+1} = \frac{\overbrace{6k+8}^{>0}}{\underbrace{12k+4}_{>0}} \cdot \overbrace{\arcsin\frac{1}{2}}^{>0} \Rightarrow$$

$x_{2k+1} > 0 \Rightarrow$ огр. снизу

Можно сделать вывод, что подп. x_{2k+1} сходится по т. Вейерштрасса

Найдем $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{6k+8}{12k+4} \cdot \arcsin\frac{1}{2}\right)$

$$\lim(\ ) = \lim(\ ) \cdot \lim \arcsin\frac{1}{2} =$$

$$= \lim\left(\frac{6+\frac{8}{k}}{12+\frac{4}{k}}\right) \cdot \frac{\Pi}{6} = \frac{6}{12} \cdot \frac{\Pi}{6} = \frac{\Pi}{12}$$

Множество частичных пределов состоит из:

$L = \{ \lim(x_{2k}); \lim(x_{2k+1}) \}$

т. к. $x_{2k} \cup x_{2k+1} = x_n$

$L = \{ \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{6} \}$

Из получившегося мн-ва видно, что $\overline{\lim} x_n = \frac{\pi}{6}$ $\underline{\lim} x_n = \frac{\pi}{12}$

По теореме (критерий существования предела в терминах верхнего-нижнего пределов)

т. к. $\underline{\lim} x_n \neq \overline{\lim} x_n \Rightarrow$

x_n не имеет предела

Найдем $\sup x_n$, $\inf x_n$

~~а~~. расм. sup подпосл. и выберем макс.

т.к. подпослед-ти ↓, то макс. значение будет первым знач. подп-ти.

$\sup x_{2k} = \sup\limits_{\text{при } k=1} x_2 = \frac{11\pi}{30}$

$\sup x_{2k+1} = \sup\limits_{\text{при } k=0} x_1 = \frac{\pi}{3}$

$\sup x_n = \max(\sup x_{2k}, \sup x_{2k+1}) = \frac{11\pi}{30}$

$\inf x_n = \min(\lim x_{2k}, \lim x_{2k+1})$

т.к. inf ~~монот. ↓ посл~~. равен миним. пределу из множества част. пределов подпосл.

$\inf x_n = \frac{\pi}{12}$

Найдём inf и sup подп-ей:

$\inf x_{2k} = \frac{\pi}{6}$ (т.к. $x_{2k}\downarrow \Rightarrow \inf = \lim$)

$\inf x_{2k+1} = \frac{\pi}{12}$ (т.к. $x_{2k+1}\downarrow$: $\inf = \lim$)

$\sup x_{2k} = \frac{11\pi}{30}$

$\sup x_{2k+1} = \frac{\pi}{3}$ (было выч-но выше)

Так как последов. x_n монотонно убывает, то имеет только наиб. элем. в sup. ($\sup x_n = \frac{11\pi}{30}$)
Наим. эл. x_n не имеет

Д-м, ~~что~~ что $\lim x_{2k} = \frac{\pi}{6}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 > 0 : \forall k > k_0$

$$\left| x_{2k} - \frac{\pi}{6} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{6k+5}{12k-2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\pi}{3} \left(\frac{6k+5}{12k-2} - \frac{1}{2} \right) \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\pi}{3} \left(\frac{6}{12k-2} \right) \right| < \varepsilon \qquad \left| \frac{\pi}{6k-1} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{\pi}{6k-1} < \varepsilon \qquad k_0 = \left[\frac{\pi + \varepsilon}{6\varepsilon} \right] + 1$$

2 Численный метод

Для визуального представления графиков x_n использовал Python, и в частности библиотеку numpy, matplotlib и pandas. Для каждого из пунктов я реализовал соответствующие функции:

1. Построить график последовательности x_n (первые 100 точек). Отметить на графике найденные аналитические $\sup x_n$, $\inf x_n$, $\limsup x_n$, $\liminf x_n$.

   Для этого пункта были созданы методы:

   - `showSequence()` - вывод последовательности x_n
   - `showSup()` - вывод супремума
   - `showInf()` - вывод инфимума
   - `showUpperLim()` - вывод верхнего предела
   - `showLowerLim()` - вывод нижнего предела
   - `showLegend()` - вывод легенды графика

   Обобщает их метод `showTask1()`

2. Выделить одну сходящуюся подпоследовательность, отметить её точки на графике другим цветом.

   Для этого пункта был создан метод:

   - `showTask2()` - вывод подпоследовательности x_{2k}, где $k \in \mathbb{N}$

3. По данному $\varepsilon > 0$ найти номер n_0, начиная с которого члены выбранной подпоследовательности попадают в ε-окрестность предела. Подстроить график подпоследовательности, начиная с найденного номера по (100 точек), отметить на графике значение предела (горизонтальной линией).

   Для этого пункта был создан метод:

   - `showTask3(e)` - вывод подпоследовательности x_{2k}, начиная с какого-то n_0 при произвольном ε

4. Для исходной последовательности x_n, выберите одну из точных граничных точек $\sup x_n$, $\limsup x_n$ или $\lim x_n$, и найдите приближённое значение её предела. Проверьте выполнение условия для выбранного предела. Программа должна по заданному ε находить номер n_0 такой, что $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ (в аналогичном виде для x_{2k}). Отметьте найденную точку на графике из п. 2.1.

   Для этого пункта был создан метод:

   - `showTask4(e)` - вывод номера искомой точки при произвольном ε и отображение точки на вставном графике. В случае нахождения точки в пределах графика 2.1, дополнительное выделение искомой точки на графике из пункта 2.1

Ниже представлены графики для численного метода.

Графики для численного метода