Variables Aleatorias

1 Concepto de variable aleatoria

2 Variables aleatorias discretas y continuas

- Función de probabilidad
- Función de distribución
- Función de densidad

3 Medidas características de una variable aleatoria

- Esperanza, varianza, percentiles
- Medidas de forma

4 Transformaciones de variables aleatorias

Variables Aleatorias

Objetivos del tema:

Al final del tema el alumno será capaz de:

- **Comprender el concepto de variable aleatorias**
- **Calcular probabilidades a partir de la función de densidad, función de probabilidad o función de distribución**
- **Calcular esperanzas y varianzas de variables aleatorias**
- **Obtener la función de densidad o probabilidad y las medidas características de una variable aleatoria transformada**

Variables Aleatorias

1 Concepto de variable aleatoria

2 Variables aleatorias discretas y continuas

- Función de probabilidad
- Función de distribución
- Función de densidad

3 Medidas características de una variable aleatoria

- Esperanza, varianza, percentiles
- Medidas de forma

4 Transformaciones de variables aleatorias

1 Concepto de variable aleatoria

En ocasiones, describir todos los posibles resultados de un experimento aleatorio no es suficiente

- Lanzar una moneda 3 veces: {(CCC), (CCX), …}
- Lanzar un dado dos veces: {(1,1), (1,2), (1,3), …}

A veces es útil asociar un número a cada resultado del experimento

↓

Definir una variable

No conocemos el resultado del experimento antes de realizarlo
No conocemos el valor que va a tomar la variable antes del experimento

⬇

Variable aleatoria

1 Concepto de variable aleatoria

En ocasiones, describir todos los posibles resultados de un experimento aleatorio no es suficiente

- Lanzar una moneda 3 veces: {(CCC), (XCX), …}
- Lanzar un dado dos veces: {(1,1), (1,2), (1,3), …}

X = Número de caras en el primer lanzamiento X[(CCC)]=1, X[(XCX)]=0, …

Y = Suma de las puntuaciones Y[(1,1)]=2, Y[(1,2)]=3, …

⬇

Variable aleatoria

1 Concepto de variable aleatoria

Una **variable aleatoria** es una función que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral

Las variables aleatorias se representan por letras mayúsculas, normalmente empezando por el final del alfabeto: X,Y, Z, etc.

Los posibles valores que puede tomar la variable se representan por letras minúsculas,

- x=1 es un posible valor de X
- y=3.2 es un posible valor de Y
- z=-7.3 es posible valor de Z

1 Concepto de variable aleatoria

Ejemplos

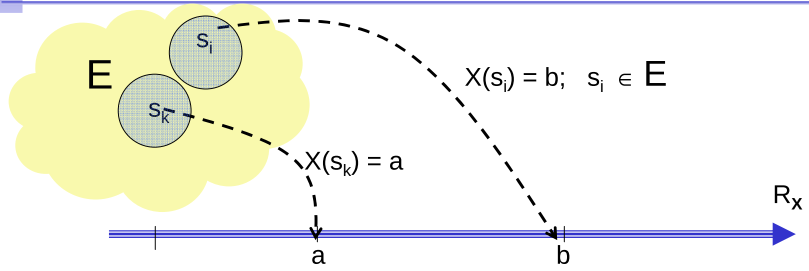
Número de unidades defectuosas en una muestra aleatoria de 5 unidades

Número de defectos superficiales en un cm^2 de cierto material

Tiempo de duración de una bombilla

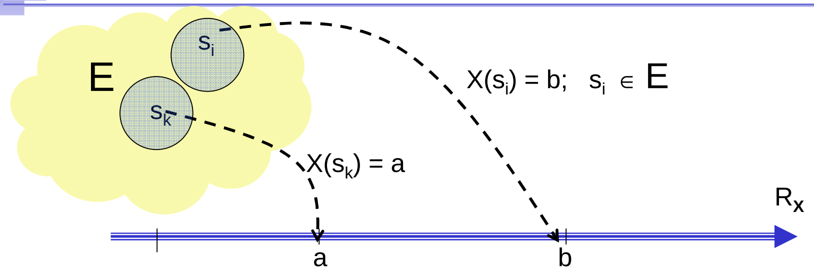
Resistencia a la compresión de un material de construcción

1 Concepto de variable aleatoria



- El espacio R_X es el conjunto de TODOS los posible valores de X(s).
- A cada posible suceso de E le corresponde un valor en R_X
- En cierto sentido podemos considerar R_x como otro espacio muestral

1 Concepto de variable aleatoria



Si sobre los elementos de *E* existe una distribución de probabilidad, esta se transmite a los valores que toma la variable *X*. Es decir, toda v.a. conserva la estructura probabilística del experimento aleatorio que describe:

$$\Pr(X = x) = \Pr(s \in E : X(s) = x)$$

Variables Aleatorias

1 Concepto de variable aleatoria

2 Variables aleatorias discretas y continuas

- Función de probabilidad
- Función de distribución
- Función de densidad

3 Medidas características de una variable aleatoria

- Esperanza, varianza, percentiles
- Medidas de forma

4 Transformaciones de variables aleatorias

2Variables aleatorias discretas y continuas

El **rango** de una variable aleatoria es el conjunto de valores que puede tomar la variable.

Atendiendo al rango las variables se pueden clasificar como:

Variables aleatorias **discretas**: Aquellas en las que el rango es finito o infinito numerable

Variables aleatorias **continuas**: Aquellas en las que el rango es un intervalo de números reales

2Variables aleatorias discretas y continuas

Ejemplos de variables aleatorias discretas

Número de defectos en la superficie de un cristal

Proporción de piezas defectuosas en una muestra de 1000

Número de bits transmitidos que se reciben correctamente

Frecuentemente cuentan el número de veces que ocurre algo

Ejemplos de variables aleatorias continuas

Corriente eléctrica

Longitud

Frecuentemente miden una magnitud

Temperatura

Peso

2Variables aleatorias discretas

Los valores de una variable aleatoria cambian de un experimento a otro al cambiar los resultados del experimento

Una v.a. está definida por

Los valores que toma.
La probabilidad de tomar cada uno de esos valores .

Función de probabilidad

Es una función que indica las probabilidad de cada posible valor

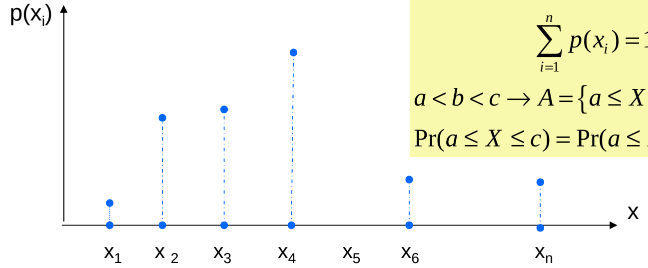
$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

2Variables aleatorias discretas

Las propiedades de la función de probabilidad se deducen de forma

Inmediata de los axiomas de la probabilidad:

1. $0 \le P(A) \le 1$ 2. $P(E)=1$
3. $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$



Propiedades

$$0 \le p(x_i) \le 1$$

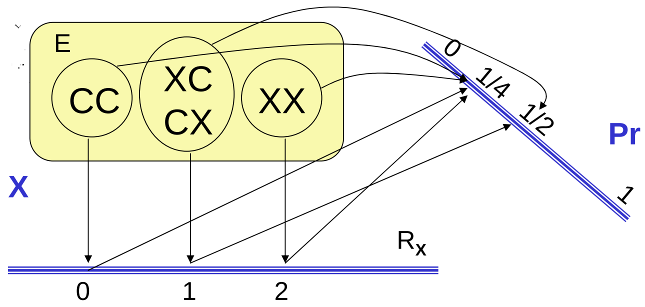
$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

$$a < b < c \rightarrow A = \{a \le X \le b\} \quad B = \{b < X \le c\}$$

$$\Pr(a \le X \le c) = \Pr(a \le X \le b) + \Pr(b < X \le c)$$

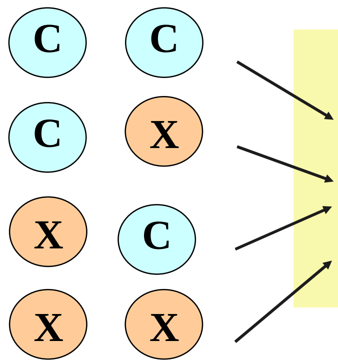
2Variables aleatorias discretas

Experimento: Lanzar 2 Monedas.
X=Número de cruces.



2Variables aleatorias discretas

Experimento: Lanzar 2 Monedas.
X=Número de cruces.

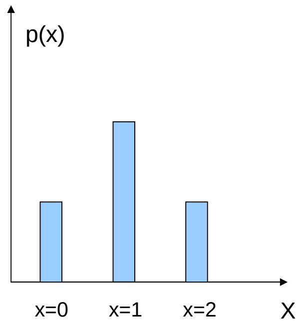


X	P(X=x)
0	1/4
1	1/2
2	1/4

2Variables aleatorias discretas

Experimento: Lanzar 2 Monedas.

X=Número de caras.



X	P(X=x)
0	1/4
1	1/2
2	1/4

2Variables aleatorias discretas

En ocasiones nos puede interesar la probabilidad de que una variable tome un valor menor o igual que una cantidad

Función de distribución

$F(x_0) = P(X \le x_0)$

$F(-\infty) = 0 \quad F(+\infty) = 1$

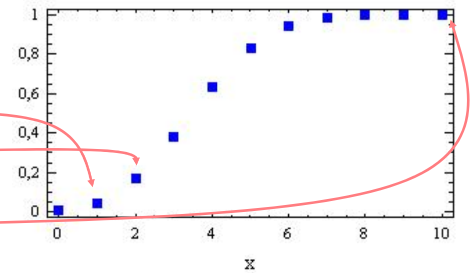
si X toma valores $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$:

$F(x_1) = P(X \le x_1) = p(x_1)$

$F(x_2) = P(X \le x_2) = p(x_1) + p(x_2)$

$\vdots$

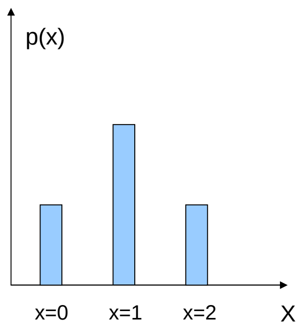
$F(x_n) = P(X \le x_n) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$



2Variables aleatorias discretas

Experimento: Lanzar 2 Monedas.

X=Número de caras.

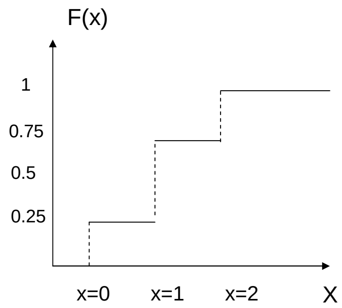


X	P(X=x)
0	1/4
1	1/2
2	1/4

2Variables aleatorias discretas

Experimento: Lanzar 2 Monedas.

X=Número de caras.



X	F(x)
0	1/4
1	3/4
2	1

2Variables aleatorias continuas

Cuando una variable es continua, no tiene sentido hacer la suma:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

ya que el conjunto de valores que toma la variable es no numerable

Lo natural es generalizar $\sum \rightarrow \int$

Introducimos un nuevo concepto que sustituye en variables continuas al de función de probabilidad en variables discretas

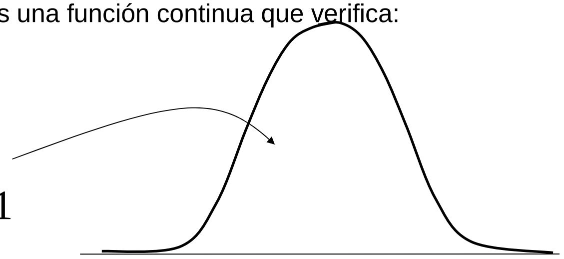
2Variables aleatorias continuas

La **función de densidad** describe la distribución de probabilidad de una variable continua. Es una función continua que verifica:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$



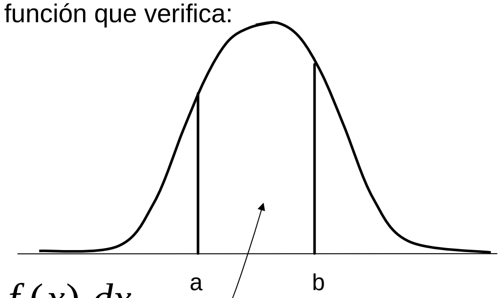
2Variables aleatorias continuas

La **función de densidad** describe la distribución de probabilidad de una variable continua. Es una función que verifica:

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

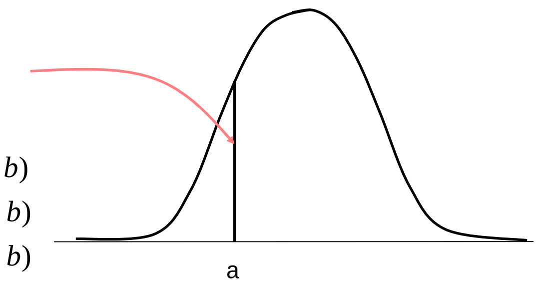


Área por debajo de ese trozo de curva

2Variables aleatorias continuas

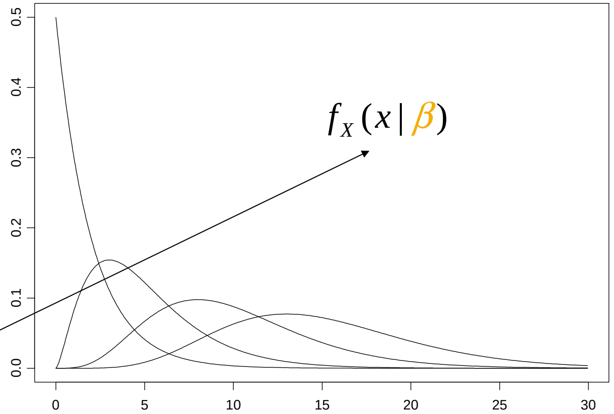
$$P(X = a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X \leq b) \\ &= P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X < b) \end{aligned}$$



2Variables aleatorias continuas

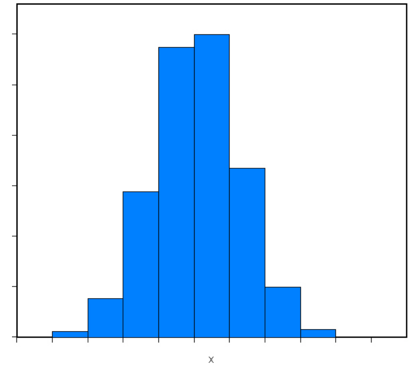
La función de densidad no tiene por qué ser simétrica, ni estar definida para toda la recta real



La forma de la curva dependerá de uno o más parámetros

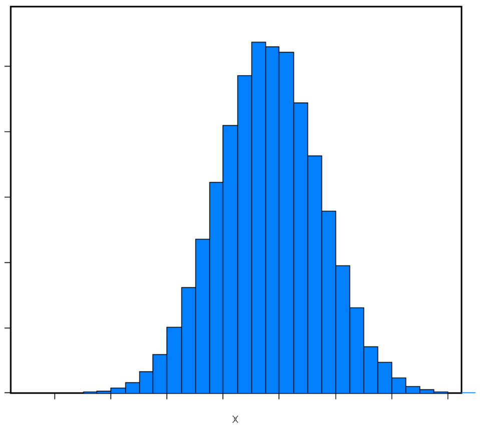
2Variables aleatorias continuas

Si medimos una variable continua y la representamos e un histograma:



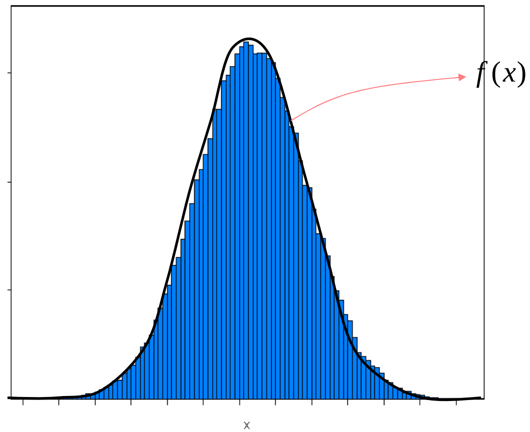
Si hacemos las clases cada vez más pequeñas:

2Variables aleatorias continuas



2Variables aleatorias continuas

El polígono de frecuencias tenderá a un curva:

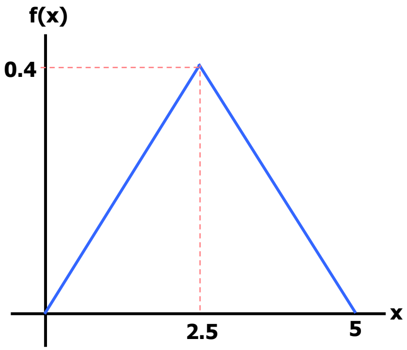


2Variables aleatorias continuas

Ejemplo

- La función de densidad para el tiempo de uso de un tipo de máquinas durante un año (en horas x100):

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{0.4}{2.5}x, & 0<x<2.5\\ 0.8-\dfrac{0.4}{2.5}x, & 2.5\le x<5\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}$$



2Variables aleatorias continuas

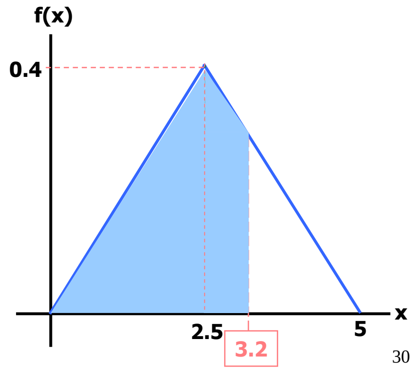
Ejemplo

- ¿Cuál es la probabilidad de que una máquina elegida al azar haya funcionado durante menos de 320 horas?

$$P(X<3.2)=$$

$$=\int_0^{2.5}\left(\frac{0.4}{2.5}x\right)dx+\int_{2.5}^{3.2}\left(0.8-\frac{0.4}{2.5}x\right)dx$$

$$=0.74$$

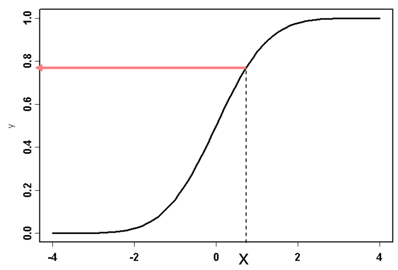


2Variables aleatorias continuas

Al igual que en el caso de variables discretas, podemos describir la distribución de una variable aleatoria continua mediante la **Función de Distribución**:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du \qquad -\infty<x<\infty$$

$P(X\le x)$



2Variables aleatorias continuas

Al igual que en el caso de variables discretas, podemos describir la distribución de una variable aleatoria continua mediante la **Función de Distribución**:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du \qquad -\infty<x<\infty$$

En el caso discreto la diferencia entre dos valores consecutivos de F(x) proporcionan la función de probabilidad. En el caso de variables continuas:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$$

2Variables aleatorias continuas

La función de distribución verifica las siguientes propiedades:

Propiedades

$a < b \Rightarrow F(a) \le F(b)$ Es no decreciente

Es continua

Definimos los sucesos disjuntos:

$$\{X \le a\} \quad \{a < X \le b\} \rightarrow \{X \le a\} \cup \{a < X \le b\} = \{X \le b\}$$

$$\Pr(X \le b) = \Pr(X \le a) + \underbrace{\Pr(a < X \le b)}_{\ge 0} \ge F(a)$$

Primer axioma de la probabilidad

Tercer axioma de la probabilidad

2Variables aleatorias continuas

La función de distribución verifica las siguientes propiedades:

Propiedades

$a < b \Rightarrow F(a) \le F(b)$ Es no decreciente

$F(-\infty) = 0 \quad F(+\infty) = 1$ Es continua

$$F(-\infty) = \Pr(X \le -\infty) = \int_{-\infty}^{-\infty} f(x)dx = 0$$

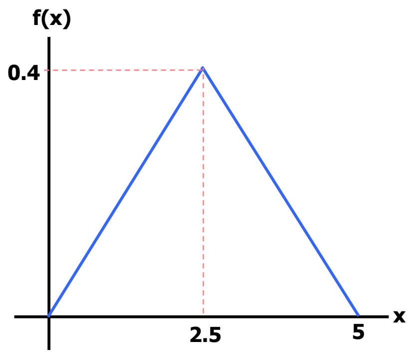
$$F(+\infty) = \Pr(X \le +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

2Variables aleatorias continuas

Ejemplo

- La función de densidad para el tiempo de uso de un tipo de máquinas durante un año (en horas x100):

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{0.4}{2.5}x, & 0 < x < 2.5 \\ 0.8 - \dfrac{0.4}{2.5}x, & 2.5 \le x < 5 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$



2Variables aleatorias continuas

Ejemplo

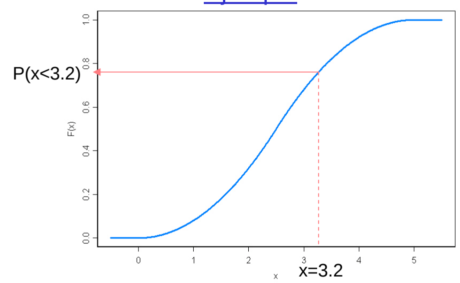
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{0.4}{2.5}x, & 0 < x < 2.5 \\ 0.8 - \dfrac{0.4}{2.5}x, & 2.5 \le x < 5 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$\Pr(0 < X < 2.5)$ $\Pr(2.5 \le X < x)$

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \dfrac{0.4}{2.5}u\,du & 0 < x < 2.5 \\ \int_0^{2.5} \dfrac{0.4}{2.5}u\,du + \int_{2.5}^x 0.8 - \dfrac{0.4}{2.5}u\,du, & 2.5 \le x < 5 \\ 1 \rightarrow \Pr(X \le 5) & x \ge 5 \end{cases}$$

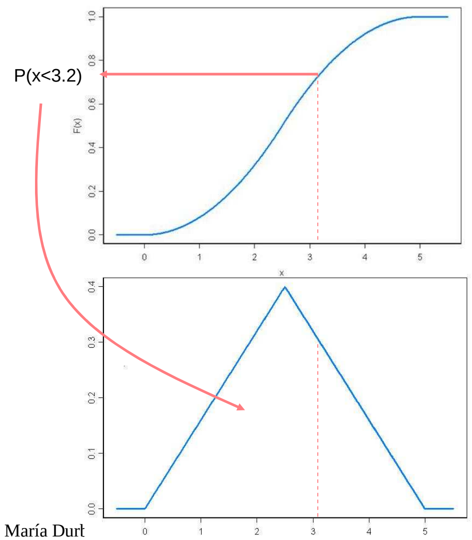
2Variables aleatorias continuas

Ejemplo



$$F(x)=\begin{cases} 0.08x^2 & 0<x<2.5 \\ -1+0.8x-0.08x^2 & 2.5\le x<5 \\ 1 & x\ge 5 \end{cases}$$

2Variables aleatorias continuas



Variables Aleatorias

1 Concepto de variable aleatoria

2 Variables aleatorias discretas y continuas

- Función de probabilidad
- Función de distribución
- Función de densidad

3 Medidas características de una variable aleatoria

- Esperanza, varianza, percentiles
- Medidas de forma

4 Transformaciones de variables aleatorias

3 Medidas características de una v.a.

Medidas de Centralización

Media

En el caso de una muestra de datos la media muestral:

$\bar{x}=\frac{1}{n}x_1+\frac{1}{n}x_2+\ldots+\frac{1}{n}x_n$ a cada valor se le asigna un peso 1/n

La media μ o **Esperanza** de una v.a. utiliza la probabilidad como peso:

$$\mu=E[X]=\sum_i x_i p(x_i) \longrightarrow \text{v.a. discreta}$$

$$\mu=E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \longrightarrow \text{v.a. continua}$$

3 Medidas características de una v.a.

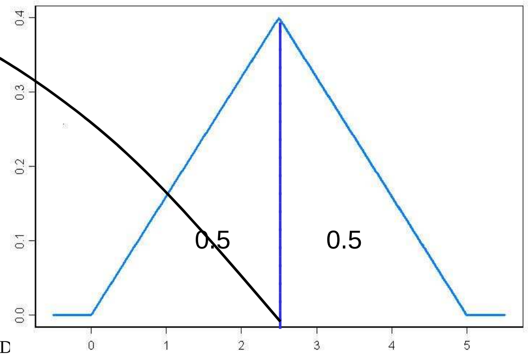
Medidas de Centralización

Mediana

Intuitivamente: **Mediana** = valor que divide a la probabilidad total en dos partes iguales

$$P(X \le m) = 0.5$$

$$F(m) \ge 0.5$$



2Variables aleatorias continuas

Ejemplo

- ¿Cuál es el tiempo medio de funcionamiento de las máquinas?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{0.4}{2.5}\mathrm{x}, & 0 < \mathrm{x} < 2.5 \\ 0.8 - \dfrac{0.4}{2.5}\mathrm{x}, & 2.5 \le \mathrm{x} < 5 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{2.5} \frac{0.4}{2.5} x^2 \mathrm{d}x + \int_{2.5}^{5} 0.8x - \frac{0.4}{2.5} x^2 \mathrm{d}x$$

$$= 2.5$$

2Variables aleatorias continuas

Ejemplo

- Si queremos saber el tiempo de funcionamiento tal que el 50% de las máquinas tiene una duración menor o igual a ese

$$F(m) = 0.5$$

$$F(x) = \begin{cases} 0.08x^2 & 0 < \mathrm{x} < 2.5 \\ -1 + 0.8x - 0.08x^2 & 2.5 \le \mathrm{x} < 5 \\ 1 & \mathrm{x} \ge 5 \end{cases}$$

$$0.08x^2 = 0.5 \rightarrow m = 2.5$$

$$-1 + 0.8x - 0.08x^2 = 0.5 \rightarrow m = 2.5$$

3 Medidas características de una v.a.

Medidas de posición

Percentiles

El percentil p de una variable aleatoria es el valor x_p que verifica:

$p(X < x_p) \le p$ y $p(X \le x_p) \ge p$ ⟶ v.a. discretas

$F(x_p) = p$ ⟶ v.a. continuas

Un caso particular son los **cuartiles** que dividen a la distribución en 4 partes iguales

$$Q_1 = p_{0.25}$$

$$Q_2 = p_{0.5} = \text{Mediana}$$

$$Q_3 = p_{0.75}$$

3 Medidas características de una v.a.

Ejemplo

Una empresa está interesada en fabricar un nuevo tipo de destornillador eléctrico. Se sabe que la distribución de probabilidad del número de vueltas para ajustar tornillos de 10cm es la siguiente:

x	p(x)
11	0.03
12	0.03
13	0.03
14	0.06
15	0.26
16	0.09
17	0.12
18	0.21
19	0.14
20	0.03

¿Cuántas vueltas habrá que dar al 70% de los tornillos?

¿Cuál es el percentil 70?

3 Medidas características de una v.a.

Ejemplo

Una empresa está interesada en fabricar un nuevo tipo de destornillador eléctrico. Se sabe que la distribución de probabilidad del número de vueltas para ajustar tornillos de 10cm es la siguiente:

x	p(x)	F(x)
11	0.03	0.03
12	0.03	0.06
13	0.03	0.09
14	0.06	0.15
15	0.26	0.41
16	0.09	0.5
17	0.12	0.62
18	0.21	0.83
19	0.14	0.97
20	0.03	1

$$p(X < x_p) \leq 0.7 \text{ y } p(X \leq x_p) \geq 0.7$$

3 Medidas características de una v.a.

Medidas de dispersión

Varianza

$$Var[X] = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right]$$

En el caso de una muestra de datos la varianza muestral es una medida de la dispersión de los datos:

$$s^2 = \frac{1}{n}(x_1 - \bar{x})^2 + \frac{1}{n}(x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + \frac{1}{n}(x_n - \bar{x})^2$$

La **Varianza** de una v.a. utiliza la probabilidad como peso:

$$\sigma^2 = Var[X] = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i) \longrightarrow \text{v.a. discreta}$$

$$\sigma^2 = Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)\, dx \longrightarrow \text{v.a. continua}$$

3 Medidas características de una v.a.

Medidas de dispersión

Varianza

$$Var[X] = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right]$$

$$Var[X] = E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2$$

$$E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right] = E\left[X^2 + \left(E[X]\right)^2 - 2XE[X]\right]$$

$$= E\left[X^2\right] + \left(E[X]\right)^2 - 2E[X]E[X] \longrightarrow E[X] \text{ es una constante, no depende de } X$$

$$= E\left[X^2\right] - \left(E[X]\right)^2$$

Es un operador lineal

Desigualdad de Tchebychev

Si X es una variable aleatoria con:

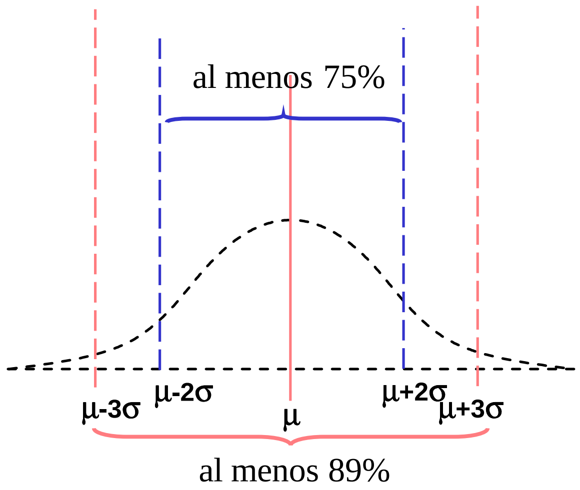
$$E[X]=\mu \quad Var[X]=\sigma^2$$

Se puede demostrar que gran parte de la distribución está situada en un intervalo centrado en μ y que tiene amplitud varias veces σ. En concreto:

$$\forall k>0 \qquad \Pr(\mu-k\sigma\le X\le\mu+k\sigma)\ge 1-\frac{1}{k^2}$$

Es decir, la probabilidad de realizar una observación de una variable y que esté en ese intervalo es mayor o igual que $1-1/k^2$

Desigualdad de Tchebychev



Medidas de forma

$$m_k=E\left[X^k\right]\to \text{Momento de orden k reapecto al origen}$$

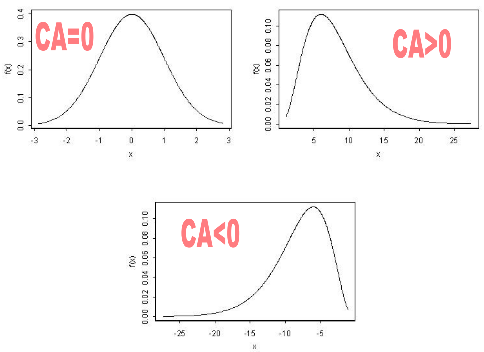
$$\mu_k=E\left[(X-\mu)^k\right]\to \text{Momento de orden k reapecto a la media}$$

$$m_1=E[X]$$

$$\mu_1=0 \quad \mu_2=\sigma^2=m_2-m_1^2$$

Coeficiente de asimetría

$$CA=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$$



Medidas de forma

$$m_k=E\left[X^k\right]\to \text{Momento de orden k reapecto al origen}$$

$$\mu_k=E\left[(X-\mu)^k\right]\to \text{Momento de orden k reapecto a la media}$$

Coeficiente de asimetría

$$CA=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Coeficiente de apuntamiento

$$CA_p=\frac{\mu_4}{\sigma^4} \text{ o } \frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$$

Variables Aleatorias

1 Concepto de variable aleatoria

2 Variables aleatorias discretas y continuas

- Función de probabilidad
- Función de distribución
- Función de densidad

3 Medidas características de una variable aleatoria

- Esperanza, varianza, percentiles
- Medidas de forma

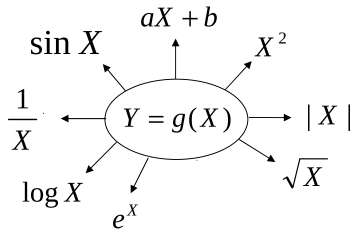
4 Transformaciones de variables aleatorias

4 Transformaciones de variables aleatorias

En algunas situaciones necesitamos conocer la distribución de probabilidad de una función de una variable aleatoria

Ejemplos

Cambiar las unidades
Utilizar la escala logarítmica



4 Transformaciones de variables aleatorias

Sea *X* una v.a. cualquiera. Si realizamos el cambio de variable *Y*=*h*(*X*), tenemos una nueva v.a. :

Función de distribución

$$Y=h(X)$$

$$F_Y(y)=\Pr(Y\le y)=\Pr(h(X)\le y)=\Pr(x\in A)$$

$$A=\{x,h(x)\le y\}$$

4 Transformaciones de variables aleatorias

Ejemplo

Una empresa está interesada en fabricar un nuevo tipo de destornillador eléctrico. Se sabe que la distribución de probabilidad del número de vueltas para ajustar tornillos de 10cm es la siguiente:

x	p(x)	F(x)
11	0.03	0.03
12	0.03	0.06
13	0.03	0.09
14	0.06	0.15
15	0.26	0.41
16	0.09	0.5
17	0.12	0.62
18	0.21	0.83
19	0.14	0.97
20	0.03	1

$$¿\Pr(X^2\le 144)?$$

$A=\{x,x\le\sqrt{144}\}$

$\Pr(X^2\le 144)=\Pr(x\in A)\qquad A=\{x,x^2\le 144\}$

$\Pr\left(X\le 12\right)=0.06$

4 Transformaciones de variables aleatorias

$$Y = h(X)$$

En general:

Si h es continua y monótona creciente:

$$F_Y(y) = \Pr(h(X) \le y) = \Pr(X \le h^{-1}(y)) = F_X(h^{-1}(y))$$

Si h es continua y monótona decreciente:

$$F_Y(y) = \Pr(h(X) \le y) = \Pr(X \ge h^{-1}(y)) = 1 - F_X(h^{-1}(y))$$

4 Transformaciones de variables aleatorias

Función de densidad

Si *X* es una v.a. continua e Y=h(X),

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \frac{\partial F_x(\overbrace{h^{-1}(y)}^{x})}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{\partial F_X(x)}{dx}\dfrac{dx}{dy} & \text{creciente} \\ \dfrac{\partial(1-F_X(x))}{dx}\dfrac{dx}{dy} & \text{decreciente} \end{cases}$$

4 Transformaciones de variables aleatorias

Si *X* es una v.a. continua e Y=h(X), donde *h* es una función derivable e inyectiva,

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Para v.a. discretas:

$$p_Y(y) = \Pr(Y = y) = \sum_{h(x_i)=y} \Pr(X = x_i)$$

4 Transformaciones de variables aleatorias

Ejemplo

La velocidad de una partícula de gas es una v.a. V con función de densidad

$$f_V(v) = \begin{cases} (b^2/2)v^2 e^{-bv} & v > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La energía cinética de la partícula es $W = mV^2/2$. ¿Cuál es la función de densidad de W?

4 Transformaciones de variables aleatorias

Ejemplo

La velocidad de una partícula de gas es una v.a. V con función de densidad

$$f_V(v) = \begin{cases} (b^2/2)v^2 e^{-bv} & v > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$W = mV^2/2 \rightarrow v = \sqrt{2w/m} \quad \cancel{v = -\sqrt{2w/m}}$$

$$\frac{dv}{dw} = \sqrt{\frac{1}{2mw}} \qquad f_V(h^{-1}(w)) = (b^2/2)\left(\sqrt{2w/m}\right)^2 e^{-b\sqrt{2w/m}}$$

4 Transformaciones de variables aleatorias

Ejemplo

La velocidad de una partícula de gas es una v.a. V con función de densidad

$$f_V(v) = \begin{cases} (b^2/2)v^2 e^{-bv} & v > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$f_W(w) = \begin{cases} (b^2/2m)\sqrt{2w/m}\; e^{-b\sqrt{2w/m}} & w > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

4 Transformaciones de variables aleatorias

Esperanza

$$E\left[h(X)\right] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x)dx \\ \sum_{x_i, h(x_i)=y} h(x_i) p(X = x_i) \end{cases}$$

$Y = h(X)$
creciente

$$E\left[y\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x) \frac{dx}{dy} dy$$

4 Transformaciones de variables aleatorias

Esperanza

$$E\left[h(X)\right] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x)dx \\ \sum_{x_i, h(x_i)=y} h(x_i) p(X = x_i) \end{cases}$$

Transformaciones lineales

$$Y = a + bX$$

$$E\left[Y\right] = a + bE\left[X\right]$$

$$Var\left[Y\right] = b^2 Var\left[X\right]$$