APLICACIONES DEL CÁLCULO MATRICIAL

Julián de la Horra
Departamento de Matemáticas U.A.M.

1 Introducción

En el capítulo dedicado a funciones de una variable, estudiamos el modelo de evolución geométrica, que constituye uno de los modelos más sencillos de dinámica de poblaciones. Pero, muchas veces, estamos interesados en estudiar una población estructurada en edades, es decir, estamos interesados en distinguir, dentro de la población, entre varios grupos de edad o generaciones. Por ejemplo, podemos considerar tres grupos de hembras: el grupo de hembras jóvenes que todavía no son fértiles, el grupo de hembras en edad de reproducirse, y el grupo de hembras que ya no son aptas para la reproducción.

En general, consideremos una población en la que clasificamos a sus individuos en segmentos homogéneos de edad (generaciones). De cada grupo de edad conocemos (aproximadamente) su tasa de supervivencia y su tasa de natalidad. Nos interesaría saber la forma en que evoluciona esta población (a partir de una determinada composición), y si se produce algún tipo de estabilización en su composición a largo plazo.

Este tipo de problemas van a poder ser abordados y estudiados, de manera relativamente sencilla, mediante el cálculo matricial, es decir, utilizando el modelo matemático de las matrices y sus herramientas asociadas.

Por este motivo, en este capítulo estudiaremos, en primer lugar, el concepto de matriz y sus operaciones básicas. Utilizaremos la estructura matricial para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, y estudiaremos los conceptos de autovalores y autovectores. Finalmente, aplicaremos todas estas herramientas al estudio de la dinámica o evolución de poblaciones, y a las cadenas de Markov.

2 Matrices

Definición.- Una matriz $m \times n$ es un modelo matemático que proporciona una ordenación rectángular de números organizados en m filas y n columnas:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Una matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas. •

Operaciones con matrices:

(a) Si queremos **multiplicar un número por una matriz**, se multiplica el número por cada elemento de la matriz. Por ejemplo:

$$2\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

(b) Si queremos **sumar dos matrices**, se suman elemento a elemento. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \\ 8 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \\ 12 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

Para poder sumar dos matrices es necesario que tengan las mismas dimensiones.

(c) El **producto de dos matrices** es algo más complicado. Supongamos que $A = (a_{ik})$ es una matriz $m \times l$ y que $B = (b_{kj})$ es una matriz $l \times n$. Entonces, $C = AB$ es una matriz $m \times n$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}.$$

De manera resumida (y menos precisa) podemos decir que el elemento ij de la matriz producto se obtiene de multiplicar la fila i de la primera matriz por la columna j de la segunda matriz.

Por ejemplo, supongamos que

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$C = AB = \begin{pmatrix} (3)(6) + (5)(4) + (-1)(8) & (3)(10) + (5)(-2) + (-1)(4) \\ (2)(6) + (-1)(4) + (3)(8) & (2)(10) + (-1)(-2) + (3)(4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & 16 \\ 32 & 34 \end{pmatrix}$$

Para poder multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda. El orden de multiplicación importa. En el ejemplo anterior, BA habría sido una matriz con 3 filas y 3 columnas. Otras veces es posible hallar AB pero no BA.

(d) La **inversa** de una matriz cuadrada A es una matriz cuadrada A^{-1} (de las mismas dimensiones) tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

donde I es la matriz identidad (matriz con unos en la diagonal principal y ceros en el resto).

Comprobar si una matriz es o no es la inversa de otra es relativamente fácil: basta con multiplicarlas y ver lo que sale. Sin embargo, hallar la inversa de una matriz es más complicado y bastante más pesado. Más adelante se dará un algoritmo sencillo para obtener la inversa, que podrá utilizarse si la dimensión de A es pequeña. Para dimensiones grandes conviene recurrir a programas de ordenador.

(e) No todas las matrices cuadradas tienen inversa. Una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada tenga inversa es que su **determinante** sea distinto de cero. El determinante de matrices 2×2 y 3×3 es fácil de obtener:

$$det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (3)(-1) - (2)(5) = -13.$$

$$det \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

= (3)(-1)(-3) + (4)(5)(3) + (2)(2)(-1) - (4)(-1)(-1) - (2)(5)(-3) - (3)(2)(3)
= 73.

Para dimensiones mayores conviene recurrir a programas de ordenador.

3 Sistemas de ecuaciones lineales

En esta sección vamos a abordar el problema de resolver un sistema de varias ecuaciones lineales con varias incógnitas. Se nos presentan tres posibilidades:

- Puede haber una única solución
- Puede haber infinitas soluciones
- Puede no haber ninguna solución

En general, si el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas "suele" haber una única solución, si el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas "suele" haber infinitas soluciones, y si el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas "no suele" haber ninguna solución. Ahora bien, esto es solamente una indicación previa que nos puede servir de orientación, pero de ninguna manera es una regla que se cumpla siempre.

Existen diferentes métodos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales. Todos ellos son válidos siempre que se apliquen correctamente. Repasaremos brevemente dos de estos procedimientos: el método de sustitución (en mi opinión, el más cómodo) y el método de Gauss (que nos permite, de paso, introducir la representación de un sistema de ecuaciones lineales en forma matricial). Este repaso de métodos se hará mediante la resolución de algunos ejemplos.

Ejemplo 1 (método de sustitución).- Consideramos el siguiente sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas:

$$\begin{aligned} 3x + 5y - z &= 8 \\ 2x - y + 3z &= 1 \\ 4x + 2y - 3z &= 6 \end{aligned}$$

Primer paso: Despejamos una de las incógnitas de una de las ecuaciones:

$$z = 3x + 5y - 8$$

Segundo paso: Sustituimos el valor obtenido en las otras dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - y + 3(3x + 5y - 8) &= 1 \\ 4x + 2y - 3(3x + 5y - 8) &= 6 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 11x + 14y &= 25 \\ -5x - 13y &= -18 \end{aligned}$$

Tercer paso: Despejamos una de las incógnitas de una de las ecuaciones:

$$x = \frac{25 - 14y}{11}$$

Cuarto paso: Sustituimos el valor obtenido en la otra ecuación, la resolvemos y obtenemos la solución:

$-5\left(\frac{25-14y}{11}\right) - 13y = -18 \qquad \Rightarrow \qquad y = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$
$\Rightarrow \qquad z = 0$

En resumen, este sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas tiene una única solución (algo que no siempre ocurre). •

Ejemplo 1 (método de Gauss).- Consideramos el mismo sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.

El método de Gauss consiste básicamente en representar el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial, e ir sustituyendo el sistema por otros equivalentes hasta llegar a un sistema inmediato de resolver.

Primer paso: Representación matricial del sistema:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Segundo paso: Se escribe la matriz aumentada o ampliada del sistema:

$$\left|\begin{array}{rrr|r|l} 3 & 5 & -1 & 8 & F_1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & F_2 \\ 4 & 2 & -3 & 6 & F_3 \end{array}\right.$$

Tercer paso: Combinamos linealmente las filas de la matriz para conseguir que, en la primera columna, todos los elementos bajo la diagonal principal sean ceros:

$$\begin{array}{r|rrr|r|l} F_1 & 3 & 5 & -1 & 8 & F_4 \\ 2F_1 - 3F_2 & 0 & 13 & -11 & 13 & F_5 \\ 2F_2 - F_3 & 0 & -4 & 9 & -4 & F_6 \end{array}$$

Cuarto paso: Combinamos linealmente las filas de la matriz para conseguir que, en la segunda columna, todos los elementos bajo la diagonal principal sean ceros (sin perder los ceros anteriormente conseguidos):

$$\begin{array}{r|rrr|r|l} F_4 & 3 & 5 & -1 & 8 & F_7 \\ F_5 & 0 & 13 & -11 & 13 & F_8 \\ 4F_5 + 13F_6 & 0 & 0 & 61 & 0 & F_9 \end{array}$$

Quinto paso: Una vez que en la matriz principal todos los elementos bajo la diagonal principal son ceros, escribimos el sistema equivalente resultante:

$$\begin{aligned} 3x + 5y - z &= 8 \\ 13y - 11z &= 13 \\ 61z &= 0 \end{aligned}$$

Sexto paso: Ahora es trivial resolver el sistema:

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{0}{61} = 0 \\
y &= \frac{1}{13}(11z + 13) = \frac{1}{13}[11(0) + 13] = 1 \\
x &= \frac{1}{3}(-5y + z + 8) = \frac{1}{3}[-5(1) + (0) + 8] = 1 \qquad \bullet
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2 (método de sustitución).- Consideramos el siguiente sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas:

$$
\begin{aligned}
x - 3y + z &= 4 \\
x - 2y + 3z &= 6 \\
2x - 5y + 4z &= 10
\end{aligned}
$$

Primer paso: Despejamos una de las incógnitas de una de las ecuaciones:

$$x = 4 + 3y - z$$

Segundo paso: Sustituimos el valor obtenido en las otras dos ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
(4 + 3y - z) - 2y + 3z &= 6 \\
2(4 + 3y - z) - 5y + 4z &= 10
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
y + 2z &= 2 \\
y + 2z &= 2
\end{aligned}
$$

Tercer paso: Despejamos una de las incógnitas de la única ecuación que nos ha quedado (ya que las dos son iguales):

$$y = 2 - 2z$$

Cuarto paso: Para cualquier valor que demos a z obtenemos una solución:

$$z = t \qquad \Rightarrow \qquad y = 2 - 2t \qquad \Rightarrow \qquad x = 4 + 3(2 - 2t) - t = 10 - 7t$$

En resumen, este sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas tiene infinitas soluciones. $\bullet$

Ejemplo 2 (método de Gauss).- Consideramos el mismo sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.

Primer paso: Representación matricial del sistema:

$$
\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}
$$

Segundo paso: Se escribe la matriz aumentada o ampliada del sistema:

$$\left|\begin{array}{ccc|c|c} 1 & -3 & 1 & 4 & F_1 \\ 1 & -2 & 3 & 6 & F_2 \\ 2 & -5 & 4 & 10 & F_3 \end{array}\right.$$

Tercer paso: Combinamos linealmente las filas de la matriz para conseguir que, en la primera columna, todos los elementos bajo la diagonal principal sean ceros:

$$\begin{array}{r|rrr|r|l} F_1 & 1 & -3 & 1 & 4 & F_4 \\ F_2 - F_1 & 0 & 1 & 2 & 2 & F_5 \\ F_3 - 2F_2 & 0 & -1 & -2 & -2 & F_6 \end{array}$$

Cuarto paso: Combinamos linealmente las filas de la matriz para conseguir que, en la segunda columna, todos los elementos bajo la diagonal principal sean ceros (sin perder los ceros anteriormente conseguidos):

$$\begin{array}{r|rrr|r|l} F_4 & 1 & -3 & 1 & 4 & F_7 \\ F_5 & 0 & 1 & 2 & 2 & F_8 \\ F_5 + F_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_9 \end{array}$$

Quinto paso: Una vez que en la matriz principal todos los elementos bajo la diagonal principal son ceros, escribimos el sistema equivalente resultante:

$$\begin{array}{rcl} x - 3y + z & = & 4 \\ y + 2z & = & 2 \\ 0z & = & 0 \end{array}$$

Sexto paso: Ahora es trivial resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcl} z & = & t \\ y & = & -2z + 2 = -2t + 2 \\ x & = & 3y - z + 4 = 3(-2t + 2) - (t) + 4 = -7t + 10 \end{array} \qquad \bullet$$

Para sistemas con más de tres ecuaciones, recurriremos habitualmente a programas de ordenador.

Los sistemas de ecuaciones en los que el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas son especialmente interesantes:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ ... ... & ... & ... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

En este tipo de sistemas, la matriz de coeficientes A de la representación matricial es una matriz cuadrada:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

En este caso, si $det(A) \neq 0$, existe la matriz inversa A^{-1}, y tenemos:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1}A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Es decir, cuando $det(A) \neq 0$, existe una única solución.

Un caso de especial interés, como veremos más adelante, es el de un sistema de ecuaciones en el que todos los términos independientes son cero:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, tenemos la siguiente situación:

(a) Si $det(A) \neq 0$, el sistema tiene una única solución, que es la solución trivial: $x_1 = 0$,..., $x_n = 0$.
(b) Si $det(A) = 0$, el sistema tiene infinitas soluciones no triviales.

4 Algoritmo para obtener matrices inversas

Como se ha indicado anteriormente, comprobar si una matriz es inversa de otra es relativamente sencillo. Consideremos, por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Para comprobar que la matriz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

es su inversa, basta con multiplicarlas y verificar que se obtiene la matriz identidad:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo que resulta más complicado es encontrar la matriz inversa de una matriz dada. A continuación, se explica, utilizando la matriz A, un algoritmo sencillo para obtener la matriz inversa. Consideremos, por tanto, la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Buscamos una matriz

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

tal que:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Este problema se puede descomponer en tres problemas más sencillos:

Primer problema: Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o lo que es equivalente:

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 - z_1 &= 1 \\ 2x_1 - y_1 + z_1 &= 0 \\ -x_1 + y_1 - z_1 &= 0 \end{aligned}$$

Es muy fácil obtener la solución de este sistema de ecuaciones, utilizando cualquiera de los métodos disponibles:

$$x_1 = 0 \qquad ; \qquad y_1 = -1/2 \qquad ; \qquad z_1 = -1/2$$

Segundo problema: Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o lo que es equivalente:

$$\begin{aligned} x_2 - y_2 - z_2 &= 0 \\ 2x_2 - y_2 + z_2 &= 1 \\ -x_2 + y_2 - z_2 &= 0 \end{aligned}$$

Nuevamente, es muy fácil obtener la solución de este sistema de ecuaciones, utilizando cualquiera de los métodos disponibles:

$$x_2 = 1 \qquad ; \qquad y_2 = 1 \qquad ; \qquad z_2 = 0$$

Tercer problema: Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o lo que es equivalente:

$$\begin{aligned} x_3 - y_3 - z_3 &= 0 \\ 2x_3 - y_3 + z_3 &= 0 \\ -x_3 + y_3 - z_3 &= 1 \end{aligned}$$

Una vez más, es muy fácil obtener la solución de este sistema de ecuaciones, utilizando cualquiera de los métodos disponibles:

$$x_3 = 1 \qquad ; \qquad y_3 = 3/2 \qquad ; \qquad z_3 = -1/2$$

Este procedimiento es asequible para matrices 2×2 y 3×3. Para dimensiones mayores conviene recurrir a programas de ordenador.

5 Autovalores y autovectores

Consideremos una matriz cuadrada, A, de dimensiones $n \times n$. En las aplicaciones que veremos posteriormente aparece, de forma natural, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para cada valor de λ, nos enfrentamos a un sistema diferente de ecuaciones. Estaremos interesados en aquellos sistemas que tienen infinitas soluciones no triviales. Para esto, como ya hemos dicho anteriormente, es necesario que $det(A - \lambda I) = 0$. Todo esto nos lleva a las siguientes definiciones:

Definiciones.-
(a) Los **autovalores** de la matriz cuadrada A son todos los valores de λ para los cuales el sistema

$$(A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

tiene infinitas soluciones no triviales.

Expresado de forma equivalente, los **autovalores** de la matriz cuadrada A son todos los valores de λ para los cuales $det(A - \lambda I) = 0$.

Si la matriz A es $n \times n$, tendrá n autovalores. Estos autovalores pueden estar repetidos, y también pueden ser números complejos.

(b) Sea λ_0 un autovalor de la matriz cuadrada A. Un **autovector de la matriz A (asociado a λ_0)** es cualquier solución $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ del sistema

$$(A - \lambda_0 I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que λ_0 ha sido elegido de forma que el sistema tiene infinitas soluciones no triviales. Por tanto, existen infinitos autovectores asociados a cada autovalor. $\bullet$

Ejemplo 3.- Vamos a hallar los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) En primer lugar, consideramos la matriz

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

Los autovalores serán las soluciones de la siguiente ecuación:

$$det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(4-\lambda) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = 4 \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 = 2$$

(b) Tomemos, por ejemplo, el autovalor $\lambda_1 = 4$. Para hallar los autovectores de A, asociados al autovalor $\lambda_1 = 4$, tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es inmediato obtener que las soluciones de este sistema son de la forma:

$$x_2 = t \qquad y \qquad x_1 = 2\ t$$

Por ejemplo, un autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 4$ sería:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De manera análoga, obtendríamos que los autovectores asociados al autovalor $\lambda_2 = 2$, serían de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bullet$$

Ejemplo 4.- Vamos a hallar los autovalores y autovectores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0,11 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) En primer lugar, consideramos la matriz

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0,11 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 0,11 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Los autovalores serán las soluciones de la siguiente ecuación:

$det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(-\lambda) - 4(0,11) = \lambda^2 - 2\lambda - 0,44 = 0 \quad \Rightarrow$
$\lambda_1 = 2,20 \quad$ y $\quad \lambda_2 = -0,20.$

(b) Tomemos, por ejemplo, el autovalor $\lambda_1 = 2,20$. Para hallar los autovectores de A, asociados al autovalor $\lambda_1 = 2,20$, tenemos que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(A - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,20 & 4 \\ 0,11 & -2,20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es inmediato obtener que las soluciones de este sistema son de la forma:

$$x_1 = t \qquad y \qquad x_2 = 0,05\ t$$

Por ejemplo, un autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 4$ sería:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9524 \\ 0,0476 \end{pmatrix}$$

que tiene la propiedad adicional de que sus componentes suman 1 (es un autovector normalizado). Los autovectores normalizados serán especialmente interesantes para las aplicaciones. •

Este procedimiento es asequible para matrices 2×2 y, con suerte, para matrices 3×3. Para dimensiones mayores conviene recurrir a programas de ordenador.

6 Utilización de R

En este capítulo vuelve a ser muy conveniente recurrir a programas informáticos para la resolución de sistemas de ecuaciones, y para el cálculo de determinantes, matrices inversas, autovalores y autovectores.

Uno de los muchos programas que se pueden utilizar es el programa R, *The R Project for Statistical Computing*, que se puede descargar y utilizar de forma gratuíta. Las instrucciones que necesitamos conocer para resolver los problemas que se acaban de señalar son pocas y muy sencillas. Lo primero que tenemos que aprender es a definir matrices y vectores en R.

Para definir una matriz en R, tenemos que proporcionarle al programa los elementos de la matriz (por columnas), y tenemos que indicarle cuántas filas y cuántas columnas queremos que tenga la matriz. Por ejemplo, la instrucción:

A= matrix(c(2, 1, 3, 1, 1, 2, 1, -1, -1), nrow=3, ncol=3)

producirá la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Para definir un vector, basta con recordar que un vector es una matriz con una fila o con una columna. Por ejemplo, la instrucción:

b= matrix(c(3, 0, 2), nrow=3, ncol=1)

producirá el vector:

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La estructura de estas instrucciones para definir matrices y vectores es bastante sencilla, y no necesita demasiadas explicaciones.

La multiplicación de matrices, la resolución de sistemas de ecuaciones, el cálculo de determinantes, la obtención de matrices inversas, y la obtención de autovalores y autovectores, es muy sencilla con R:

(a) Para multiplicar las matrices A y B, , la instrucción que le tenemos que dar a R es:

A%*%B

(b) Para resolver el sistema de ecuaciones Ax=b, la instrucción que le tenemos que dar a R es:

solve(A, b)

(c) Para calcular el determinante de A, la instrucción que le tenemos que dar a R es:

det(A)

(d) Para obtener la matriz inversa de A, la instrucción que le tenemos que dar a R es:

solve(A)

(e) Para obtener los autovalores y autovectores de A, la instrucción que le tenemos que dar a R es:

eigen(A)

7 Dinámica de poblaciones: matrices de Leslie

En esta sección vamos a ver cómo el cálculo matricial nos ayuda enormemente a contestar diferentes cuestiones que surgen en la dinámica de poblaciones.

Comenzamos recordando uno de los modelos sencillos que se utilizan en la dinámica de poblaciones: el modelo de evolución geométrica. Este modelo ya fue introducido y analizado en el capítulo dedicado a las funciones de una variable y lo recordamos brevemente a continuación.

Llamamos $N(t)$ al número de individuos de una población en la unidad de tiempo t, y suponemos que la evolución (aproximada) de esta población viene regulada de la siguiente forma:

Cada unidad de tiempo que pasa, el número de elementos varía un porcentaje fijo de un $\alpha\%$ (donde α puede ser positivo o negativo).

Si en el instante inicial ($t = 0$), el número de individuos en la población es $N(0)$, es muy fácil determinar el número de elementos en la población, $N(t)$, al cabo de t=1, 2, 3, ... unidades de tiempo:

$$
\begin{array}{ll}
t = 0 \Rightarrow & N(0), \\
t = 1 \Rightarrow & N(1) = N(0) + \frac{\alpha}{100}N(0) = N(0)(1 + \frac{\alpha}{100}), \\
t = 2 \Rightarrow & N(2) = N(1) + \frac{\alpha}{100}N(1) = N(1)(1 + \frac{\alpha}{100}) = N(0)(1 + \frac{\alpha}{100})^2, \\
t = 3 \Rightarrow & N(3) = N(2) + \frac{\alpha}{100}N(2) = N(2)(1 + \frac{\alpha}{100}) = N(0)(1 + \frac{\alpha}{100})^3.
\end{array}
$$

En general, al cabo de t unidades de tiempo, tenemos

$$N(t) = N(0)\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right)^t .$$

Este es un modelo sencillo que puede servir para predecir (aproximadamente) el número de individuos de una población durante un período de tiempo, a partir de su tasa de crecimiento o decrecimiento.

El problema que queremos abordar ahora es un poco más complejo. Muchas veces, estamos interesados en estudiar una población estructurada en edades, es decir, distinguimos dentro de la población entre varios segmentos de edad o generaciones, y se quiere estudiar la evolución de esta población en cada uno de estos grupos de edad. Evidentemente, para poder hacer este estudio, necesitamos disponer de cierta información sobre cada grupo. Todo esto se formaliza a continuación.

En primer lugar, elegimos un período de tiempo adecuado, y dividimos a sus individuos en varios grupos de edad definidos por ese período de tiempo. Para cada **grupo de edad** o **intervalo de proyección**, necesitamos disponer de dos tipos de información:

- **Tasa de supervivencia**: porcentaje de individuos que sobreviven y pasan por tanto al siguiente grupo de edad.
- **Tasa de natalidad**: número medio de nuevos individuos que genera cada uno de ellos, en ese período de tiempo.

A partir de esta información, estaremos interesados en dar respuesta a diferentes cuestiones que se pueden agrupar de la siguiente forma:

- **Evolución a corto plazo de la población**:

  A partir de una composición inicial de la población, ¿cuántos individuos de cada grupo habrá (aproximadamente) al cabo de 1, 2, 3,... períodos de tiempo?

- **Evolución a largo plazo de la población**:

  ¿Qué ocurre con la población a largo plazo? ¿Es razonable esperar algún tipo de estabilización en su composición? En caso afirmativo, ¿se puede saber de alguna manera sencilla?

En los siguientes ejemplos, vamos a trabajar de la siguiente forma. En primer lugar, plantearemos las ecuaciones de evolución de la población a partir de las tasas de supervivencia y de natalidad. Después, utilizaremos la representación matricial de estas ecuaciones, y veremos que las herramientas del cálculo matricial ayudan enormemente a estudiar la evolución de la población, tanto a corto como a largo plazo.

Ejemplo 5.- Consideramos una población en la que sus individuos sólo viven 2 años. Estructuramos esta población en dos grupos de edad. El período común de tiempo para cada grupo es de 1 año. Cada individuo del primer grupo produce (en promedio) 2 individuos al año. Cada individuo del segundo grupo produce (en promedio) 4 individuos al año. La tasa de superviviencia anual del primer grupo de edad es del 11%. Ningún individuo del segundo grupo sobrevive al año siguiente.

Al comenzar el estudio hay 100 ejemplares de cada grupo de edad.

Con toda esta información podemos hacer un estudio muy completo de la evolución de esta población a corto y a largo plazo.

Representación matricial.- Llamaremos Grupo 1 al primer grupo de edad (todos ellos tienen menos de 1 año), Grupo 2 al segundo grupo de edad (todos ellos tienen más de 1 año y menos de 2), $N_1(t)$ al número de individuos del Grupo 1 en el instante t y $N_2(t)$ al número de individuos del Grupo 2 en el instante t. El vector que representa la composición de la población en el instante t se define de la siguiente manera:

$$N(t) = \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{pmatrix}$$

En primer lugar, escribiremos las ecuaciones que describen la transición de un período t al período siguiente $t+1$. Estas ecuaciones expresan el número de individuos de cada grupo de edad en el instante $t+1$, en función del número de individuos de cada grupo de edad en el instante t y de la información disponible sobre las tasas de supervivencia y de natalidad:

$$\begin{aligned} N_1(t+1) &= 2N_1(t) + 4N_2(t) \\ N_2(t+1) &= \frac{11}{100}N_1(t) = 0,11N_1(t) \end{aligned}$$

A continuación expresamos estas ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0,11 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \end{pmatrix}$$

De este modo, toda la información relativa a la evolución de esta población queda recogida en la matriz

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0,11 & 0 \end{pmatrix}$$

que recibe el nombre de matriz de evolución del sistema, matriz de transición o **matriz de Leslie** en honor de Patrick Leslie quien las introdujo en 1945 para el estudio de la evolución de poblaciones estructuradas en edades. Son matrices cuadradas en las cuales todos los elementos son cero excepto, quizá, los situados en la primera fila y los situados en la primera subdiagonal debajo de la diagonal principal. De manera abreviada, podemos escribir:

$$N(t+1) = L\ N(t)$$

El interés de recurrir a una representación matricial radica en que podemos obtener, fácilmente, información muy interesante sobre la evolución de la población a corto y a largo plazo, utilizando las herramientas del cálculo matricial.

Evolución a corto plazo.- En efecto, la representación matricial es muy cómoda si queremos estudiar la evolución a corto plazo de la población a partir de la composición inicial de la población. Por ejemplo, al cabo de un año:

$$\begin{pmatrix} N_1(1) \\ N_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0,11 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Al cabo de dos años:

$$\begin{pmatrix} N_1(2) \\ N_2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0,11 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1244 \\ 66 \end{pmatrix}$$

Evolución a largo plazo.- ¿Podemos hacer una predicción a largo plazo sobre cómo será esa población al cabo de varios años, si se mantienen las mismas condiciones ambientales? Con bastante frecuencia, la composición de la población tiende a estabilizarse en el siguiente sentido:

(a) Para t suficientemente grande, las proporciones de cada grupo de edad (dentro de la población total) se estabilizan en unos valores límite, de modo que, cuando pasamos del instante t al instante $t+1$, estas proporciones prácticamente no varían.

(b) Para t suficientemente grande, cada grupo de edad aumenta o disminuye un $\alpha\%$, al pasar del instante t al instante $t+1$. Como las proporciones de cada grupo de edad (dentro de la población total) tienden a estabilizarse, este $\alpha\%$ es, necesariamente, el mismo para todos los grupos de edad.

Entonces, por un lado, sabemos que $N(t+1)$ siempre viene dado por:

$$N(t+1) = L\ N(t)$$

Por otro lado, si la población se estabiliza en el sentido indicado, tenemos que $N(t+1)$ será también (aproximadamente) de la forma:

$$N(t+1) = N(t) + \frac{\alpha}{100} N(t) = N(t)\left(1 + \frac{\alpha}{100}\right) = \lambda\ N(t)$$

donde $\lambda = 1 + \frac{\alpha}{100}$.

Por tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$L\,N(t) = \lambda\,N(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad L\,N(t) - \lambda\,N(t) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (L - \lambda I)N(t) = 0$$

De acuerdo con lo indicado en la Sección 5, λ es un autovalor de la matriz L, y $N(t)$ es un autovector correspondiente al autovalor λ. En concreto, si la composición de la población se estabiliza, tenemos los siguientes resultados:

(a) El máximo autovalor λ_0 de la matriz L (autovalor dominante) nos da el porcentaje de variación $\alpha_0\%$ de todos los grupos de la población y de la población total (a largo plazo), a partir de la relación:

$$\lambda_0 = 1 + \frac{\alpha_0}{100} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_0 = 100(\lambda_0 - 1)$$

(b) El autovector normalizado de L correspondiente al autovalor dominante λ_0 nos da las proporciones en las que se estabilizan los diferentes grupos de edad dentro de la población total (a largo plazo).

Los autovalores y autovectores de la matriz L ya fueron calculados en el Ejemplo 4. Obteníamos que el máximo autovalor era $\lambda_0 = 2,20$ y su correspondiente autovector normalizado era, aproximadamente:

$$\begin{pmatrix} 0,9524 \\ 0,0476 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{pmatrix}$$

Con estos resultados, podemos obtener las siguientes conclusiones a largo plazo:

(a) A partir del autovalor dominante, podemos decir que, a largo plazo, cada grupo multiplica su población por un factor 2,20 cada año. Expresado de otra forma, tenemos:

$$\lambda_0 = 2,20 = 1 + \frac{\alpha_0}{100} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_0 = 120$$

Es decir, a largo plazo, cada grupo aumenta su población un 120% cada año.

(b) A partir del autovector normalizado correspondiente al autovalor dominante, podemos decir que, a largo plazo, el 95% de la población estaría en el primer grupo de edad y el 5% en el segundo grupo de edad (aproximadamente).

Habíamos obtenido que, al cabo de 2 años, el número total de individuos sería 1244+66=1310. Las proporciones de los 2 grupos, al cabo de esos 2 años, serían:

$$\left(\frac{1244}{1310}\ ;\ \frac{66}{1310}\right) \simeq (0,95\ ;\ 0,05)$$

Por tanto, al cabo de sólo 2 años, la composición de la población se ha estabilizado en las proporciones predichas por el autovector normalizado. •

Ejemplo 6.- Consideramos ahora un caso un poco más complejo. Iremos detallando cada uno de los pasos necesarios para el estudio completo.

Grupos de edad.- En primer lugar, hay que especificar claramente los grupos de edad. En este ejemplo, vamos a considerar solamente las hembras de una especie, ya que esto es lo que se hace frecuentemente en los estudios de dinámica de poblaciones. Las dividimos en cuatro grupos de edad o intervalos de proyección:

- Grupo 1: las que han nacido durante ese año. Las existentes en un instante t se representan por $N_1(t)$.
- Grupo 2: las que ya tienen 1 año de edad. Las existentes en un instante t se representan por $N_2(t)$.
- Grupo 3: las que ya tienen 2 años de edad. Las existentes en un instante t se representan por $N_3(t)$.
- Grupo 4: las que ya tienen 3 años de edad. Las existentes en un instante t se representan por $N_4(t)$.

- Suponemos que no pueden sobrevivir más tiempo (en la práctica esto puede interpretarse como que el porcentaje de hembras con 4 años o más es insignificante).

Tasas de supervivencia y de fertilidad.- En segundo lugar, necesitamos disponer de dos tipos de información para cada grupo de edad de esta especie: la tasa de supervivencia anual y la tasa de reproducción anual.

- Las hembras que han nacido durante ese año sobrevivirán un 50% y no tienen todavía capacidad de reproduccion.

- Las hembras con 1 año de edad sobrevivirán un 40% y cada una de ellas producirá (en promedio) 2 nuevas hembras.

- Las hembras con 2 años de edad sobrevivirán un 20% y cada una de ellas producirá (en promedio) 1,5 nuevas hembras.

- Las hembras con 3 años de edad no sobreviven y no producen nuevas hembras.

Representación matricial de la evolución.- Lo siguiente es expresar el número de hembras de cada grupo de edad en el instante $t+1$, en función del número de hembras de cada grupo de edad en el instante t y de la información dada en el apartado anterior:

$$\begin{aligned}
N_1(t+1) &= 2N_2(t) + 1,5N_3(t) \\
N_2(t+1) &= \frac{50}{100}N_1(t) = 0,5N_1(t) \\
N_3(t+1) &= \frac{40}{100}N_2(t) = 0,4N_2(t) \\
N_4(t+1) &= \frac{20}{100}N_3(t) = 0,2N_3(t)
\end{aligned}$$

Todo esto se puede expresar en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \\ N_4(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \\ N_4(t) \end{pmatrix}$$

De este modo, toda la información relativa a la evolución de esta población queda recogida en la siguiente matriz de Leslie:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix}$$

Evolución a corto plazo.- Supongamos, por ejemplo, que se desea repoblar una zona con esa especie y se introducen 100 hembras de cada grupo de edad. Es decir:

$$\begin{pmatrix} N_1(0) \\ N_2(0) \\ N_3(0) \\ N_4(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Al cabo de 1 año, la composición de la población de hembras será:

$$\begin{pmatrix} N_1(1) \\ N_2(1) \\ N_3(1) \\ N_4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 50 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Al cabo de 2 años, la composición de la población de hembras será:

$$\begin{pmatrix} N_1(2) \\ N_2(2) \\ N_3(2) \\ N_4(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1,5 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 350 \\ 50 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 \\ 175 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

De este modo, podemos saber (aproximadamente) cómo será la composición de la población de hembras de la especie en esa zona en años sucesivos.

Evolución a largo plazo.- Para poder saber fácilmente, si la composición de la población se estabiliza de alguna manera a largo plazo, necesitamos obtener el autovalor dominante y su autovector normalizado. Utilizando algún programa de ordenador adecuado (como, por ejemplo, R), obtendríamos que el máximo autovalor de la matriz L es $\lambda_0 \simeq 1,13$ y su autovector normalizado es, aproximadamente:

$$\begin{pmatrix} 0,61 \\ 0,27 \\ 0,10 \\ 0,02 \end{pmatrix}$$

Estos cálculos nos dicen dos cosas:

- A largo plazo, cada grupo de edad multiplica su población por un factor 1,13 cada año. Expresado de otra forma:

$$\lambda_0 = 1,13 = 1 + \frac{\alpha_0}{100} \qquad \Rightarrow \qquad \alpha_0 = 13$$

  Es decir, a largo plazo, cada grupo aumenta su población un 13%.

- A largo plazo, el primer grupo representará el 61% del total, el segundo grupo representará el 27% del total, el tercer grupo representará el 10% del total, y el cuarto grupo representará el 2% del total, aproximadamente.

Como, en general, la composición de la población al cabo de t años viene dada por $N(t) = L^t N(0)$, podríamos haber obtenido fácilmente la estructura de la población al cabo de, por ejemplo, 8, 9 y 10 años:

$$N(8) \simeq \begin{pmatrix} 507 \\ 254 \\ 76 \\ 17 \end{pmatrix} \qquad N(9) \simeq \begin{pmatrix} 621 \\ 254 \\ 102 \\ 15 \end{pmatrix} \qquad N(10) \simeq \begin{pmatrix} 660 \\ 311 \\ 101 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, en $N(10)$, podemos ver que la población total está formada por 660+311+101+20= 1092 individuos, y las proporciones de cada grupo son:

$$\begin{pmatrix} 660/1092 \simeq 0,60 \\ 311/1092 \simeq 0,29 \\ 101/1092 \simeq 0,09 \\ 20/1092 \simeq 0,02 \end{pmatrix}$$

Como se puede apreciar, las proporciones son ya muy parecidas a las predichas, a largo plazo, por el autovector normalizado del autovalor dominante. •

8 Cadenas de Markov

En esta sección abordamos otro problema relacionado con la dinámica de poblaciones, aunque algo diferente. Lo podemos describir, a grandes rasgos, de la siguiente forma:

Los individuos de una especie se reparten en varios hábitats de modo que, inicialmente, hay un cierto porcentaje del total en cada uno de los hábitats. De manera periódica, se producen migraciones entre los diferentes hábitats en porcentajes (aproximadamente) conocidos. A partir de toda esta información, nos gustaría conocer cómo va evolucionando el reparto de la especie en esos hábitats.

Nuevamente, el modelo matemático de las matrices y las herramientas del cálculo matricial nos proporcionan una ayuda inestimable para poder abordar este problema de una manera bastante sencilla. La forma concreta en que serán utilizadas estas herramientas se describe a través del siguiente ejemplo:

Ejemplo 7.- Los individuos de una determinada especie de aves se reparten entre 3 humedales, H_1, H_2 y H_3. Inicialmente, el 40% de las aves están en el humedal H_1, el 30% en H_2, y el 30% restante en H_3.

También sabemos que, cada año, se producen migraciones entre los tres humedales: un 10% de las aves de un humedal se va a cada uno de los otros dos humedales, y el 80% restante se queda donde estaba.

A partir de estos datos, queremos dar respuesta a preguntas del siguiente tipo:

- **Evolución a corto plazo**:

  ¿Cuál es el porcentaje de aves que habrá en cada humedal dentro de 1 año? ¿Y dentro de 2 años?

- **Evolución a largo plazo**:

  ¿Se producirá algún tipo de estabilización de los porcentajes de reparto entre los 3 humedales, al cabo de varios años?

Los pasos que vamos a seguir a continuación son similares a los que se siguieron en los ejemplos de dinámica de poblaciones, con algunas pequeñas adaptaciones.

Vamos a trabajar con proporciones (tantos por uno) en vez de trabajar con porcentajes. Llamaremos $P_1(t)$ a la proporción de aves que hay en el humedal H_1 en el instante t, $P_2(t)$ a la proporción de aves que hay en el humedal H_2 en el instante t, y $P_3(t)$ a la proporción de aves que hay en el humedal H_3 en el instante t.

El vector que representa el reparto de proporciones en el instante t se define de la siguiente manera:

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix}$$

A continuación, escribiremos las ecuaciones que describen el paso de un período t al período siguiente $t+1$. Estas ecuaciones expresan la proporción de individuos en cada humedal en el instante $t+1$, en función de la proporción de individuos en cada humedal en el instante t y de la información disponible sobre los porcentajes anuales de migración de un humedal a otro:

$$\begin{aligned} P_1(t+1) &= \frac{80}{100}P_1(t) + \frac{10}{100}P_2(t) + \frac{10}{100}P_3(t) = 0,8P_1(t) + 0,1P_2(t) + 0,1P_3(t) \\ P_2(t+1) &= \frac{10}{100}P_1(t) + \frac{80}{100}P_2(t) + \frac{10}{100}P_3(t) = 0,1P_1(t) + 0,8P_2(t) + 0,1P_3(t) \\ P_3(t+1) &= \frac{10}{100}P_1(t) + \frac{10}{100}P_2(t) + \frac{80}{100}P_3(t) = 0,1P_1(t) + 0,1P_2(t) + 0,8P_3(t) \end{aligned}$$

Después, escribimos estas ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} P_1(t+1) \\ P_2(t+1) \\ P_3(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix}$$

De este modo, toda la información relativa a la evolución de las proporciones en los 3 humedales queda recogida en la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

que recibe el nombre de **matriz de transición de una cadena de Markov**. Este tipo de matrices son matrices cuadradas en las cuales los elementos de cada columna suman siempre uno. De manera abreviada, podemos escribir:

$$P(t+1) = T\ P(t)$$

A partir de la representación matricial, podemos responder a las preguntas planteadas, utilizando las herramientas del cálculo matricial.

Evolución a corto plazo.- La representación matricial es muy cómoda si queremos estudiar la evolución a corto plazo de los porcentajes de reparto en los 3 humedales, a partir de los porcentajes iniciales de reparto.

Por ejemplo, al cabo de un año, las proporciones de aves en cada humedal serían:

$$\begin{pmatrix} P_1(1) \\ P_2(1) \\ P_3(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,40 \\ 0,30 \\ 0,30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,38 \\ 0,31 \\ 0,31 \end{pmatrix}$$

Al cabo de 2 años, las proporciones de aves en cada humedal serían:

$$\begin{pmatrix} P_1(2) \\ P_2(2) \\ P_3(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,38 \\ 0,31 \\ 0,31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,366 \\ 0,317 \\ 0,317 \end{pmatrix}$$

Una vez que disponemos de las proporciones (tantos por uno), podemos pasar a los porcentajes sin ningún problema.

Evolución a largo plazo.- Para saber cómo se estabilizan los porcentajes de aves en cada humedal, a largo plazo, volvemos a utilizar los resultados que ya se indicaron para las matrices de Leslie de la dinámica de poblaciones, convenientemente adaptados:

(a) Para la dinámica de poblaciones teníamos:

"La tasa de variación de la población total y de los diferentes grupos de edad viene dada (a largo plazo) por el máximo autovalor de la matriz L".

Como ahora la suma de las componentes de cualquier vector de proporciones es una constante (suman 1), el máximo autovalor de la matriz T (en caso de estabilización) tiene que ser necesariamente $\lambda = 1$.

(b) Para la dinámica de poblaciones teníamos:

"Las proporciones de los diferentes grupos de edad dentro de la población global vienen dadas (a largo plazo) por el autovector normalizado correspondiente al máximo autovalor de la matriz L".

Por lo tanto, ahora (en caso de estabilización) las proporciones de los diferentes humedales vendrán dadas (a largo plazo) por el autovector normalizado de la matriz T correspondiente al autovalor $\lambda = 1$.

Aplicamos ahora estos resultados a nuestro ejemplo. En primer lugar, calculamos los autovalores y los autovectores de la matriz T. Tenemos que el máximo autovalor es, naturalmente, $\lambda = 1$, y su correspondiente autovector normalizado es

$$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

Es decir, a largo plazo, las aves se repartirán en los mismos porcentajes en los 3 humedales. Si echamos un nuevo vistazo a los vectores de proporciones que obteníamos para $t = 1$ y para $t = 2$, observamos que se parecen ya bastante al autovector. Al cabo de 6 años, las proporciones que obtendríamos serían

$$P(6) = T^6 P(0) = \begin{pmatrix} 0,3412 \\ 0,3294 \\ 0,3294 \end{pmatrix}$$

que ya se parecen muchísimo a las proporciones previstas a largo plazo. •