On minimal singular metrics of certain class of line bundles whose section ring is not finitely generated

小池 貴之

東京大学

March 16, 2014

- X : 射影的複素代数多様体
- L : X 上の正則直線束

L が ample な時には, L には滑らかなエルミート計量 h として $\sqrt{-1}\Theta_h > 0$ なるものが存在する.

L が nef
($\iff$ $c_1(L)$ が ample class の極限として書ける
$\iff$ 任意の曲線 $C \subset X$ に対し $L.C \geq 0$)
である時には, 滑らかなエルミート計量 h として
$\sqrt{-1}\Theta_h \geq 0$ なるものが存在するであろうか?

定義 1

L が semi-positive とは, L に滑らかなエルミート計量 h として $\sqrt{-1}\Theta_h \geq 0$ なるものが存在すること.

知られている事実

事実 2

L : *semi-positive* $\Rightarrow$ L : *nef.*

定理 3 (Demailly-Peternell-Schneider, '94)

滑らかな楕円曲線上の *ruled surface* X とその曲線 C の組として, 直線束 $\mathcal{O}_X(C)$ が *nef* であるが *semi-positive* でない例が存在する.

目標：nef 直線束が semi-positive になるかどうかを, L の stable base locus 近傍の複素解析から判定する.

主結果

定理 4 (主結果)

$D \subset X$ を滑らかな超曲面とする.

- $L \otimes \mathcal{O}_X(-D)$: *semi-positive*, $c_1(L|_D) = 0$.
- $\mathcal{O}_X(-D)|_D$: *ample*,
- $\mathcal{O}_D(-K_D - D|_D)$: *nef and big*,
- D は *holomorphic tubular neighborhood* を持つ

なるとき, L も *semi-positive*.

「D は holomorphic tubular neighborhood を持つ」とは
ある X に於ける D の近傍 U と
ある $N_{D/X}$ 於ける 0 切断の近傍 U' として,
$U \cong U'$ (双正則) なるものが存在するということ.

主結果の応用

系 5 (主結果の応用)

$C_0 \subset \mathbb{P}^2$ を滑らかな三次曲線, $\{p_j\}_{j=1}^{12} \subset C_0$ を *general* な 12 点, $\pi\colon X \to \mathbb{P}^2$ を $\{p_j\}_{j=1}^{12}$ での爆発, $C := (\pi^{-1})_* C_0$ を強変換とする. この時, *nef* 直線束 $L := \pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \otimes \mathcal{O}_X(C)$ は *semi-positive.*

この X, L は Zariski による

- $\forall m \geq 1, |L^{\otimes m} \otimes \mathcal{O}_X(-C)|$: 大域切断で生成される.
- $\forall m \geq 1, \mathrm{Bs}|L^{\otimes m}| = C$.

なる例. 特に切断環 $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, L^{\otimes m})$ は非有限生成.
尚, 12 点配置が special な時には L は semi-ample ($\Rightarrow$ semi-positive).

証明の概略

簡単のため Zariski の例での証明の概略を述べる.

- $\pi\colon X \to \mathbb{P}^2$; general 12 点爆発.
- $\quad C \to C_0$: 楕円曲線.
- $L := \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \otimes \mathcal{O}_X(C)$, $c_1(L|_C) = 0$.

C は次の定理から holomorphic tubular neighborhood U を持つことが分かる.

定理 6 (Grauert, '62)

X を滑らかな曲面, $C \subset X$ を埋め込まれた滑らかな種数 g の曲線とする. $(C^2) < \min\{0, 4-4g\}$ ならば, C は holomorphic tubular neighborhood を持つ.

$N_{C/X}$: negative より, U は 1-convex にとれる.

補題 7

$p\colon U \to C$ を $N_{C/X} \to C$ から誘導されるものとして，$p^*(L|_C) \cong L|_U$.

$\mathcal{O}_U(-C-K_U)|_C = \mathcal{O}_C(-K_C)$: semi-positive より，大沢の消滅定理が用いられる; $\forall q > 0, H^q(U, \mathcal{O}_U(-C)) = 0$.
補題は，これと完全列 $H^1(U, \mathcal{O}_U(-C)) \to H^1(U, \mathcal{O}_U) \to H^1(C, \mathcal{O}_C) \to H^2(U, \mathcal{O}_U(-C))$, 及び以下の可換図式から得られる.

$$\begin{tikzcd}
H^1(U, \mathcal{O}_U) \arrow[r, "\alpha"] & H^1(U, \mathcal{O}_U^*) \arrow[r, "\delta"] & H^2(U, \mathbb{Z}) \\
H^1(C, \mathcal{O}_C) \arrow[u, "p^*"] \arrow[r, "\beta"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & H^1(C, \mathcal{O}_C^*) \arrow[u, "p^*"] &
\end{tikzcd}$$

前頁の補題から, $L|_U$ には滑らかなエルミート計量 h_U として $\sqrt{-1}\Theta_{h_U} \geq 0$ なるものが存在する．一方で

- $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ の Fubini-Study 計量 h_{FS}
- $f_C \in H^0(X, \mathcal{O}_X(C))$: C でのみ零点を持つ切断

に対して $(\pi^* h_{FS}) \otimes |f_C|^{-2}$ は, $L = \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \otimes \mathcal{O}_X(C)$ の (C で発散する) 計量であり, $\sqrt{-1}\Theta_{(\pi^* h_{FS})\otimes|f_C|^{-2}} \geq 0$.
計量 $\min\{(\pi^* h_{FS}) \otimes |f_C|^{-2}, Mh_U\}$ $(M >> 1)$ を考えて, 主張を得る.