期末テスト案 (複素解析 II)
2019 年 12 月 24 日

答案には, 用いた全ての用紙に必ず氏名等を明記すること．これを忘れた答案については採点をしない (即ち, 氏名等の明記がない又は読み取れない状態にある用紙に書いてある内容に関しては, 自動的に 0 点とする).

以下, $\mathbb{C}$ を複素数全体の集合 (及びそれを複素平面と同一視したもの) とする他, 講義で用いた記号を用いる．また, 以下 Δ で単位開円盤 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を表わすこととする.

問 1 単位開円盤 Δ 上の関数 $f\colon \Delta \to \mathbb{C}$ を

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$$

によって定めることを考える (ここで $n!$ は n の階乗である．また $0! := 1$ とする).

(1) 上記べき級数によって, 確かに Δ 上の正則関数が定義できていることを示せ (ヒント: 何らかの方法で級数の Δ 上広義一様収束性を示せばよいのであった).

(2) 任意の有理数 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して次を示せ: ある点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \Delta$ として, $n \to \infty$ で x_n は $\exp 2\pi\sqrt{-1}\theta$ へ収束し, かつ $|f(x_n)|$ は $n \to \infty$ で $+\infty$ に発散するようなものが存在する.

(3) 任意の開集合 $U \subset \mathbb{C}$ として $U \cap \Delta \neq \emptyset$ かつ $U \setminus \Delta \neq \emptyset$ なるものに対して次を示せ: f を $\Delta \cup U$ へ解析接続することは不可能 (つまり $\Delta \cup U$ 上の正則関数 $\widetilde{f}$ として $\widetilde{f}|_{\Delta} = f$ なるものは存在しえない). $\square$

問 2. Rouché の定理を応用することで, 次の各小問 (1), (2), (3) に答えよ:

(1) 定数 λ を $\lambda > 1$ なるものとする．このとき, 方程式 $e^{z-\lambda} = z$ は, Δ 上で重複度を込めて何個の解を持つか? (ヒント: $g(z) := z$, $h(z) := -e^{z-\lambda}$ で定まる二つの正則関数を考えよ)

(2) 方程式 $e^z = 2z + 1$ は, Δ 上で重複度を込めて何個の解を持つか? (ヒント: $g(z) := -z$, $h(z) := e^z - z - 1$ で定まる二つの正則関数を考えよ)

(3) 代数学の基本定理 ("複素係数 n 次多項式は, 複素平面上に重複度を込めて n 個の根をもつ" という命題) を示せ (ヒント: 複素係数 n 次多項式は, 一般性を失わず, 複素定数 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ を用いて, $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ と書けるものとしてよい．$g(z) := z^n$, $h(z) := a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ で定まる二つの正則関数を, 十分大きい正の実数 R を半径として持つ原点中心の開円板上で考えよ). $\square$

問 3. $f\colon \Delta \to \Delta$ を正則写像とする．このとき, 次の不等式 (Schwarz-Pick の定理) を示せ:

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \quad (z \in \Delta)$$

尚, この問では Schwarz の補題を認めて良い (ヒント: $z = 0$ かつ $f(z) = 0$ なる場合には, これは単に Schwarz の補題である．Δ の適切な自己同型 (即ち自身への双正則写像) $h_1, h_2\colon \Delta \to \Delta$ を用いて定義される新たな正則写像 $g := h_1 \circ f \circ h_2$ を考えることで, この場合へと問題を帰着させることができる). $\square$

問 4. 正定数 R を固定する．原点を中心として半径が R であるような開円板から原点を除いた補集合 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < R\}$ をここでは D と書くこととする．この領域 D 上の正則関数 f が次の条件を満たすとき, 原点 0 は f の除去可能特異点であることを, 次の小問 (1), (2), (3) の示唆する流れに則って示せ.

条件 各正整数 n に対して D 上の正則関数 f_n を $f_n(z) := f(z/n)$ によって定めたとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正規族である. $\square$

以下, f は上記条件を満足するような D 上の正則関数とする.

(1) 正整数たちのある狭義単調増大列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ (即ち, 各 n_k は正整数であり, $k < \ell$ ならば $n_k < n_\ell$ なるもの), 正の実数 M, 及び 0 より大きく R より小さい正実数 r として, 次を満たすものの存在を示せ: 任意の正整数 k に対して,

$$\sup\{|f_{n_k}(z)| \mid z \in \mathbb{C},\ |z| = r\} \leq M$$

が成立する (上記条件を用いよ. r は実は $0 < r < R$ なる正実数ならなんでもよい (つまりそれに応じてうまく M を構成できる) のでこれを勝手に固定し, 条件から考えられる適切な $\{f_n\}$ の部分列の $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$ 上での振る舞いについて考察せよ).

(2) 数列 $\{n_k\}$, 正数 M 及び r を前小問 (1) のようなものとする. 各正整数 k に対し, 領域 D_k を $D_k := \{z \in \mathbb{C} \mid r/n_{k+1} < |z| < r/n_k\}$ によって定義する. このとき, 任意の正整数 k について, 不等式 $\sup_{D_k} |f| \leq M$ が成立することを示せ (ヒント: 最大値の原理を用いよ).

(3) 原点 0 は f の除去可能特異点であることを示せ. □

問 5. 複素平面内の領域 $D \subset \mathbb{C}$ が**長方形**であるとは, この問では次の意味で述べることとする: D はある Jordan 閉曲線 γ の内部として実現される領域であり, さらにこの γ (正確には γ の像) 内にある 4 点 p_1, p_2, p_3, p_4 が存在して, γ は p_1 と p_2 とをつなぐ線分 ℓ_{12}, p_2 と p_3 とをつなぐ線分 ℓ_{23}, p_3 と p_4 とをつなぐ線分 ℓ_{34}, p_4 と p_1 とをつなぐ線分 ℓ_{41} の和集合として実現される. さらに ℓ_{12} と ℓ_{23} とは点 p_2 のみで直角に交わり, ℓ_{23} と ℓ_{34} とは点 p_3 のみで直角に交わり, ℓ_{34} と ℓ_{41} とは点 p_4 のみで直角に交わり, ℓ_{41} と ℓ_{12} とは点 p_1 のみで直角に交わる. さらに長方形 D について, 上記の記号でいう (p_1, p_2, p_3, p_4) をその**頂点四ツ組**と呼ぶことにする.

次の小問 (1), (2), (3) の示唆する流れに則って, 次の主張を証明せよ:

主張 複素平面内の長方形領域 D 及び D' を考える. また, (p_1, p_2, p_3, p_4) を D の頂点四ツ組とする. 領域 D の閉包 $\overline{D}$ 上の連続関数 $f\colon \overline{D} \to \mathbb{C}$ として, 次を満たすようなものが存在することを仮定する: 関数 f は像への同相写像であり, $f(\overline{D}) = \overline{D'}$ であり, $(f(p_1), f(p_2), f(p_3), f(p_4))$ は D' の頂点四ツ組である. さらに, f の内部への制限 $f|_D$ は D から D' への双正則である. このとき, 等式

$$\frac{|p_1 - p_2|}{|p_2 - p_3|} = \frac{|f(p_1) - f(p_2)|}{|f(p_2) - f(p_3)|}$$

が成立する.

(1) 次の定理 (鏡像原理のバージョン) を証明せよ:

定理 複素平面内のある Jordan 閉曲線の内部として実現される領域 Ω として, 次のようなものを考える: ある複素平面内の直線 ℓ が存在して, Ω は $\mathbb{C} \setminus \ell$ の (二つの連結成分の内の) 片方の連結成分に含まれ, かつ Ω の境界と ℓ との交わりはある連結な空でない区間 $I \subset \ell$ である. Ω の閉包 $\overline{\Omega}$ 上の連続関数 $g\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ を, その内部への制限 $g|_\Omega$ が正則なものとする. g による Ω の像 $\Omega' := g(\Omega)$ について, 次を仮定する: ある複素平面内の直線 ℓ' が存在して, Ω は $\mathbb{C} \setminus \ell'$ の (二つの連結成分の内の) 片方の連結成分に含まれ, かつ Ω' の境界と ℓ' との交わりは $g(I)$ と一致する. このとき, Ω の ℓ についての鏡像を Ω^* とすると, g は $\Omega \cup \mathrm{Int}(I) \cup \Omega^*$ 上の正則関数 $\widetilde{g}$ へと解析接続され (つまり $\Omega \cup \mathrm{Int}(I) \cup \Omega^*$ 上のある正則関数 $\widetilde{g}$ として $\widetilde{g}|_\Omega = g|_\Omega$ なるものが一意的に存在, ここで $\mathrm{Int}(I)$ は I から端点を除いた開区間のこと), さらに $\widetilde{g}$ による Ω^* の像は, ℓ' についての Ω' の鏡像と一致する. □

(2) 領域 D, D', 及び射 f を "**主張**" の様なものとする. このとき, ある複素平面の双正則写像 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ として, $F|_D = f$ なるものが存在することを示せ.

(3) "**主張**" を証明せよ (ヒント: 複素平面の双正則写像は, 具体的な形が分かってしまっているのであった). □