# On the minimality of canonically attached singular Hermitian metrics on certain nef line bundles

小池 貴之

東京大学

March 24, 2015

1. 興味
2. 主結果について
3. 応用について

# 興味

- $X$ : (射影的) 非特異複素多様体
- $L$ : $X$ 上の正則直線束

### 定義 1

$L$ が (強) ネフであるとは, 任意のコンパクト曲線 $C \subset X$ に対し, 交点数 $L.C$ が非負 (正) なること.

### 定義 2

$L$ が半正であるとは, $L$ の $C^\infty$ エルミート計量であって, 半正曲率を持つものが存在すること.

## 事実 3

$L$ : 半正 $\Longrightarrow$ $L$ : ネフ.

## 例 4 ([DPS94], ネフ $\not\Rightarrow$ 半正 )

非特異楕円曲線 $C$ 上の自明束 $1_C$ の $1_C$ による非自明な拡大を $E$ とする. $E$ に対応する線織面 $X := \mathbb{P}(E)$ 上の相対超平面束 $L$ は, ネフだが半正でない.

## 問題 5

ネフ直線束 $L$ は, いつ半正となるか? さらに $L$ が半正でないとき, その **"極小特異エルミート計量"** はどのような特異性をもつか?

# 知られていたこと/主結果

- [DPS01]... 極小特異エルミート計量の定義と, その存在証明 ($X$ がコンパクトで $L$ が擬有効なとき).
- [DPS94]... 例 4 の $L$ に入る, 半正曲率を持つ特異エルミート計量全てを決定.

## 主結果

$X$ を非特異複素曲面, $C \subset X$ を埋め込まれたコンパクト複素曲線として, $c_1(N_{C/X}) = 0$ なるものとする. この $(C, X)$ が上田 [$U$83] の意味で有限型であるならば, 直線束 $[C]$ の特異エルミート計量 $|f_C|^{-2}$ は極小特異エルミート計量である. ここで $f_C \in H^0(X, [C])$ は標準切断である. 特に, $[C]$ は半正でない.

- “$(C, X)$ が上田 [$U$83] の意味で有限型である” とは, $C$ の管状近傍 $V$ に対し, $\widetilde{N}|_C = N_{C/X}$ なる $V$ 上の平坦束 $\widetilde{N}$ と直線束 $[C]$ とが, $C$ まわり有限次の jet のレベルで相異なるということ.
- 主結果を証明するためには, 一般の半正曲率を持つ $[C]$ の特異エルミート計量 $h$ と, $|f_C|^{-2}$ との特異性の比較を行うことが必要.
- そのために, 関数 $\Psi := -\log \frac{h}{|f_C|^{-2}}$ が, $X \setminus C$ 上定義された多重劣調和関数となることに着目.
- この $\Psi$ に, ($C$ 近傍)$\setminus C$ 上の多重劣調和関数の, $C$ での増大度に関する上田の定理 [$U$83] を適用することで, 主結果が示される.

# 応用その1 ([DPS94] の例の一般化)

## 定理 6 (Neeman)

次の $(C, X)$ は, 上田 [$U$83] の意味で有限型である.

- 非特異コンパクト曲線 $C_0$ 上の $c_1(F) = 0$ なる直線束 $F$ による自明束 $\mathbb{1}_{C_0}$ の拡大を $E$ とする: $0 \to F \to E \to \mathbb{1}_{C_0} \to 0$. この完全列が分裂しないとき, $X := \mathbb{P}(E)$ と $X \to C_0$ の切断 $C$.
- $C_0$ を種数 2 の非特異コンパクト曲線, $C_0 \hookrightarrow Y$ をその *Jacobian* とする. 超楕円対合で移りあう二点 $p, q \in C_0$ での $Y$ の爆発 $X$ と, $C_0$ の強変換 $C$.

主結果からの帰結として, 以上の $(C, X)$ に対し, 直線束 $[C]$ はネフだが半正でないことが分かる.

# 応用その2 (半正 v.s. 強ネフ)

## 問題 7 (藤野)

*$L$ が強ネフなとき, $L$ は半正か?*

- [F13] で藤野は, 三次元射影多様体 $X$ とその上の強ネフ直線束 $L$ として, "強ネフだが半正でない例の候補" を構成 ([F13, Example 5.9]).

## 問題 8 ([F13, Question 5.10])

*[F13, Example 5.9] の $L$ は半正か?*

- 主結果の応用として, [F13, Example 5.9] の $L$ の極小特異エルミート計量が決定でき, 結果としてこの $L$ が半正でないことが分かった.