On the minimality of canonically attached singular Hermitian metrics on certain nef line bundles

小池 貴之　(東京大学)*

本講演は, 複素代数多様体上のネフ直線束の, 半正性判定に関するものである. Xを滑らかな複素代数多様体, LをX上の正則直線束とする. 小平の埋め込み定理によれば, 豊富という性質は, Lが正であること, つまりLに滑らかな計量であり曲率がいたるところ正であるものが存在するという性質と同値である. 今回の目標は, この小平の埋め込み定理をモデルケースとして, 直線束の代数幾何学的な正値性と複素幾何学的な正値性との関係を明らかにすることにある. 特に中心的に扱うのは, 豊富や正といった性質のある種の極限と見做せる, 半豊富やネフ, 半正といった正値性の条件たちの関係である. 初めにこれらについて述べる.

まずLが半豊富であるとは, 十分大きい自然数mとして$L^{\otimes m}$が大域切断で生成されることをいう. 次に, Lがネフであるとは, Xのどの部分代数曲線上に制限してもLの次数が非負であることを言う. 最後にLが半正であるとは, Lに滑らかな計量であり曲率がいたるところ非負であるものが存在するという.

以上三つの性質, 半豊富, ネフ, 及び半正は, 概言すれば, それぞれ豊富という性質の代数幾何学的, 数値幾何学的, 複素幾何学的な極限のような性質であり, 一見同じような性質にも見える. 事実, Lが半豊富であればLは半正であり, またLが半正であればLはネフであることは簡単に分かる. しかしこれらそれぞれの主張の逆については後述するようにそれぞれ反例が知られている. 従って実際には, 半豊富, ネフ, 半正はそれぞれ別の性質であると言える. 一方でLがXの標準直線束である場合には, これらは全て同値であることが予想されている (アバンダンス予想).

以前の年会で, 半豊富性と半正性との差異に関して重要なZariskiによる具体例について述べた. Zariskiは$\mathbb{P}^2$の適切な12点での爆発X上に, ネフだが半豊富でない直線束Lを構成した. このZariskiの例(X, L)は特に, 切断環$\bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(X, L^{\otimes m})$が非有限生成であるという意味でも代数幾何学的に病的であり, 重要な例である. 一方で, このLは, 実は半正であることが分かる[5, 1.1]. これの証明には, Grauertの判定法 ([3, Satz 7]) から, Lの線形系の固定点集合CがX中で正則な管状近傍を持つ (つまり法線束の零切断の管状近傍と双正則なCの近傍が存在する) ことが重要である. この例についての証明の手法は一般の次元の(X, L)についても, Lの線形系の固定点集合がXの滑らかな超曲面であるような場合には機能するので, ネフな直線束Lが半正となるための一つの十分条件を, Cの近傍の情報を用いて記述することができる. 簡単のため曲面の場合に述べれば, 以下のようになる:

定理 1 ([5]). *Xを滑らかな射影曲面, $C \subset X$を種数gの滑らかな部分曲線とする. X上のネフ直線束Lとして, $\deg_C(L|_C) = 0$なるものを考える. Lが半正直線束と$\mathcal{O}_X(C)$とのテンソルに分解するとき, Cの自己交点数が$\min\{0, 2-2g\}$未満であれば, Lは半正である.*

本研究は科研費 (課題番号:25-2869) 及び博士課程教育リーディングプログラムの助成を受けたものである.
2010 Mathematics Subject Classification: 32J25; 14C20.
* 〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: tkoike@ms.u-tokyo.ac.jp

本講演では, ネフな直線束がいつ半正にならないか, という問題を考える. 研究当初知られていたほぼ唯一のネフだが半正でない例は, Demailly, Peternell, Schneider による例であった [1, 1.7]. この例は滑らかな楕円曲線 C_0 上のある線織面 X 上のものである. 彼らは X に対応する階数 2 のベクトル束が自明束の自明束による非自明な拡張である場合に, 線織面の射 $X \to C_0$ の切断 C に対応する X 上のネフ直線束 $\mathcal{O}_X(C)$ が半正でないことを示した. しかしその証明は, この具体例の特殊事情を用いた具体的かつ詳細な複素解析に基づくものであり, 同じ方針では他の例についての半正性判定は望めない状態にあった. 一方で, この例における C の X 中での近傍が, 次の意味で非自明な複素構造を持つことに着目する: 複素曲面に埋め込まれた滑らかなコンパクト曲線の近傍の複素構造の非自明さ反映する理論に上田による理論 [8] がある. 上田は, 一般の複素曲面 X と, X に埋め込まれた滑らかなコンパクト曲線 C として法線束 $N_{C/X}$ が平坦束であるものの組 (C, X) を, C が X 中に有限次のジェットの段階で複雑な複素構造を持つ場合である "有限型" と, そうでない場合である "無限型" とに分類した. さらに上田は組 (C, X) が有限型である時に, C 近傍における多重劣調和関数の増大度に制限があることを示した [8, 2]. この定理を応用することで, 以下を得る:

定理 2 ([6, 1.1]). 組 (C, X) が有限型であるとする. このとき, $f_C \in H^0(X, \mathcal{O}_X(C))$ を *canonical section* として, $|f_C|^{-2}$ は直線束 $\mathcal{O}_X(C)$ の半正曲率を持つ特異計量の中で最も特異性の小さいものである. 特にこのとき, $\mathcal{O}_X(C)$ はネフだが半正でない.

この結果と Neeman による $u_n(C, X)$ の計算とを組み合わせることで, 上記の Demailly, Peternell, Schneider による結果の一般化を得 [6, 1.2], また線織面でない X 上にもネフだが半正でない L の例を得ることが出来た.

またこの結果の別の応用として, ネフよりより強い条件である強ネフという条件 (X のどの部分代数曲線上に制限しても L の次数が正であるという条件) に関する結果を得ることも出来た. L が強ネフであっても半豊富性とは限らないことは知られていたが [4, 10.6], 強ネフな L が半正であるかについては, 藤野によって強ネフだが半正でない例の候補が挙げられている [2, 5.9] のみで, まだ分かってはいなかった. 上記の結果を応用することで, 藤野による例が確かに強ネフだが半正でない例となっていることが示せる [6, 1.4].

参考文献

[1] J-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider, Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles, J. Algebraic Geom., **3** (1994), 295-345.

[2] O. Fujino, A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem II, J. Reine Angew. Math. **681** (2013), 149–174.

[3] H. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. **146** (1962), 331-368.

[4] R. Hartshorne, Ample subvarieties of algebraic varieties, Lecture Notes in Math. **156**, Springer-Verlag, Heidelberg (1970).

[5] T. Koike, "On minimal singular metrics of certain class of line bundles whose section ring is not finitely generated", to appear in Ann. Inst. Fourier (Grenoble).

[6] T. Koike, "On the minimality of canonically attached singular Hermitian metrics on certain nef line bundles", to appear in Kyoto J. Math.

[7] A. Neeman, Ueda theory: theorems and problems., Mem. Amer. Math. Soc. **81** (1989), no. 415.

[8] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.