しゅうろんできたら
あだちさんにおくる!

8/23
最終バージョン

No. 1
Date 2012. 8. 28

Notes on the conjecture of Demailly and Kollár

$X \underset{\text{closed}}{\subset} \mathbb{P}^N$; cpx mfd.

$L \to X$: hol. line bdl

次の (1), ..., (4) は、$H^0(X, L^{\otimes m})$ の元たちの共通ゼロ点に関する情報をもつ.

(1) min. sing. metric $h_{min} = e^{-\varphi_{min}}$

local triv. を固定するごとに $x \in X$, $\xi, \eta \in L|_x$,

$$(\xi, \eta)_{h_{min}, x} = e^{-\varphi_{min}(x)} \xi \cdot \bar{\eta}$$

↑ local weight.

◎ local weight が必ずしも conti. でなく、値 $-\infty$ をとることも認めた metric (sing. herm. metric) を考える.

◎ sing. herm. metric h に対しても、曲率 current $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta_h$ $(= dd^c \underset{h\text{のlocal weight}}{\varphi})$ が定義される.

eg $t_1, \dots, t_n \in H^0(X, L^{\otimes m})$

$\rightsquigarrow$ $(\xi, \eta)_x = \dfrac{\xi \cdot \bar{\eta}}{\left(\sum_{j=1}^{n} |t_j(x)|^2\right)^{\frac{1}{m}}}$ なる L の sing. herm. metric が定まる.

↑ loc. triv に従って hol. func. とみなす.

$$(\text{local weight}) = \frac{1}{m} \log \sum_{j=1}^{n} |t_j|^2 \ ; \ \text{psh}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta \geq 0$$

◎ L! psd. eff. のとき.
L には $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta \geq 0$ なる sing. herm. metric が存在する.
このようなものの内、singularity が最小なものを $h_{min} = e^{-\varphi_{min}}$ とかく.

No.
Date . .

(2) divisorial Zariski decomposition.

… $\{L\} = P(L) + \{\underline{N(L)}\}$
φ_{min}のpoleの情報をもつ<u>divisor</u>

◎ birat'lに(X, L)をとりかえて
$P(L)$をnefにできるとき, Lは Z.D.可. という
‖
"φ_{min}のpoleは, だいたい代数的に把握できる" //

(3) $\mathcal{J}(\varphi_{min})$
… $\mathcal{O}_X$のideal sheaf,
$\mathcal{J}(\varphi_{min})_x = \{ f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid x$まわり $|f|^2 e^{-\varphi_{min}}$ はint'ble$\}$ //

(4) $\underline{\mathcal{J}(\|L\|)}$, $\mathcal{J}_+(\varphi_{min})$
└ 代数的に定義される$\mathcal{O}_X$のideal sheaf,
$\mathcal{J}(\varphi_{min})$に近い情報をもつ.

<u>応用例</u> L: big $\Rightarrow$ ${}^\forall m$, ${}^\forall j > 0$ $H^j(X, \mathcal{O}(K_X) \otimes L^{\otimes m} \otimes \mathcal{J}(\|L^{\otimes m}\|)) = 0$

<u>c.f</u> L: positive $\Rightarrow$ ${}^\forall m$, ${}^\forall j > 0$. $H^j(X, \mathcal{O}(K_X) \otimes L^{\otimes m}) = 0$

◎ $\mathcal{J}((1+\varepsilon)\varphi_{min})$は$\varepsilon \to 0$で増大する.
内, 極大なものを$\mathcal{J}_+(\varphi_{min})$とかく.

◎ $\mathcal{J}_+(\varphi_{min})$は$\mathcal{J}(\|L\|)$の解析的類似 //

<u>Conj</u> (Demailly – Kollár, "openess conj"の弱い形, Lehmann)
L: big $\Rightarrow$ $\mathcal{J}_+(\varphi_{min}) = \mathcal{J}(\|L\|) = \mathcal{J}(\varphi_{min})$ //

fact (Lehmann 等, ---)

L: big, Z.D. 可 $\Rightarrow$ $\mathcal{J}(\|L\|) = \mathcal{J}_+(\varphi_{min}) = \mathcal{J}(\varphi_{min})$ //

では. Z.D. 不可なときには?

実は. 今知られているこの様な例は. 以下の例のみ.

eg (中山)

E: general な sm. ellipt. curve.

$V := E \times E$

L_1, L_2, L_3 ; V上の (具体的な) line bdl.
ample, not psd eff.

$X := \mathbb{P}(L_1 \oplus L_2 \oplus L_3)$ $\quad L := \mathcal{O}_{\mathbb{P}(-)}(1)$

$\rightsquigarrow$ Lは Z.D. 不可 //

Mainthm

X: cpx torus 上の toric bdl の全空間.

L: X上 big line bdl

$\Rightarrow \mathcal{J}_+(\varphi_{min}) = \mathcal{J}(\varphi_{min})$ //

Cor 中山の例 (X, L)について.

$\mathcal{J}_+(\varphi_{min}) = \mathcal{J}(\varphi_{min})$ //

No.

Date

証明の方針 … h_{min} の具体的な表示を得た.

カンタンのため中山の例で述べる.

X の loc. coord を

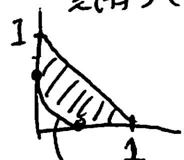
$$(x, y, \underbrace{z}_{V\text{の loc.coord}}) \longmapsto [x e^1(z) + y e^2(z) + e^3(z)]$$

(e^j ; L_j^{-1} の loc. triv.) とって

$H^0(X, mL)$ の共通零点は $\{x=y=0\} (= \mathbb{P}(L_3))$

$$\left(\because \quad \| \quad \{(x,y,z) \mapsto x^a y^b f(z) \mid a,b,c \geq 0,\ a+b+c=m.\ f \in H^0(V, L_1^{\otimes a} \otimes L_2^{\otimes b} \otimes L_3^{\otimes c}) \right)$$

$$\rightsquigarrow \square := \{ \underbrace{(\alpha, \beta)}_{\text{気持ち} (\frac{a}{m}, \frac{b}{m})} \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} \mid \alpha+\beta \leq 1,\ L_1^{\otimes \alpha} \otimes L_2^{\otimes \beta} \otimes L_3^{\otimes (1-\alpha-\beta)} : \text{psd. eff} \}$$

$=$ 

$\rightsquigarrow$ 各 $p \in \square$ ごとに Sing. herm. metric $h_p = e^{-\psi_p}$ を

$$\begin{cases} \psi_p \sim_{(0,0,0)\text{まわり}} \log |x|^{2\alpha} |y|^{2\beta} \quad (p = (\alpha, \beta)) \\ (x,y,z,p) \longmapsto \psi_p(x,y,z) \ ; \ \log(\text{conti}) \text{ の形} \end{cases}$$

なるよう作った.

$\rightsquigarrow$ $\max_{p \in \square} \psi_p$ を weight としてもつ Sig. herm. metric が min. Sig. metric なることを示した.

$$\rightsquigarrow \mathcal{J}(t\varphi_{min}) = (x^a y^b)_{(a+1, b+1) \in \mathrm{Int}(\ \ )}$$

8/23、最終バージョン

Notes on the conjecture of Demailly and Kollár

小池 貴之　(東京大学 M２)*

$\boxed{\text{状況設定}}$ Xを$\mathbb{P}^N$の閉部分複素多様体, LをX上の正則直線束とする. Lにはしばしば**pseudo effective**（effectiveな直線束で近似できるという条件）や, またはより強く**big**（$\dim H^0(X, mL)$がmに従って十分増えるという条件）といった性質を仮定する. 尚, LにC^∞エルミート計量hとして曲率テンソル$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta_h$が正であるものが存在するときに$L$はpositiveであると言うことにすると,

$$\text{positive} \Leftrightarrow \text{ample} \Rightarrow \text{big} \Rightarrow \text{pseudo effective}$$

である.

$\boxed{\text{準備}}$ 以下の四つの対象/操作は, mL $(m \in \mathbb{N})$の正則大域切断たちの共通零点に関連する情報を持つものと考えられる.

(1) 最小特異エルミート計量$h_{\min} = e^{-\varphi_{\min}}$ LのC^∞エルミート計量hとは, 局所自明化を固定するごとにC^∞級な$\mathbb{R}$値関数φ（これをlocal weightと呼ぶ.）を用いて点xのファイバーに於ける内積が

$$(\xi, \eta)_h = e^{-\varphi(x)}\xi\overline{\eta} \quad (\xi, \eta \in L|_{\{x\}})$$

と書けるようなものであった. その一般化として, local weightに課す条件を（C^∞級であるという条件から）局所可積分であるという条件に変えたものを, **特異エルミート計量**と呼ぶ. 特に, 特異エルミート計量においてはlocal weightは値$-\infty$をとることが認められる.

Lがpseudo effectiveであるときには, Lの特異エルミート計量$h = e^{-\varphi}$（等式は局所的なものである.）として, 曲率カレント$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta_h = dd^c\varphi$が半正である（つまり, 各$\varphi$は多重劣調和関数である）ものが存在する. このような特異エルミート計量の内, 次の意味で最小な特異性を持つもの（つまり, 各local weightが値$-\infty$をとる場所が最も少なく, また発散の度合いが最もおとなしいもの）を**最小特異エルミート計量**と呼び, 記号$h_{\min} = e^{-\varphi_{\min}}$で表す.

(2) 因子的ザリスキー分解 Lの因子的ザリスキー分解とは, Lのコホモロジー類$\{L\}$の分解

$$\{L\} = P(L) + \{N(L)\}$$

である. ここで$N(L)$は, 各素因子Γに対し, その係数を$\nu(\varphi_{\min}, \Gamma)$（Lelong number, Γに於けるPoleの位数の概念の一般化）として足し合わせた因子である.

(3) 乗数イデアル層$\mathcal{J}(\varphi_{\min})$ $\mathcal{O}_X$のイデアル層$\mathcal{J}(\varphi_{\min})$とは, $x \in X$に於ける茎が

$$\mathcal{J}(\varphi_{\min})_x = \{f \in \mathcal{O}_{X,x} \mid x\text{の十分近傍で}|f|^2 e^{-\varphi_{\min}}\text{は可積分.}\}$$

---

* 〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学 大学院数理科学研究科
e-mail: tkoike@ms.u-tokyo.ac.jp

なるものである.

(4) Asymptotic multiplier ideal $\mathcal{J}(\|L\|)$ 及びその解析的類似 定義は省略するが $J(\|L\|)$ も $\mathcal{O}_X$ のイデアル層であり, 乗数イデアル層 $J(\varphi_{\min})$ と類似の情報を持つと考えられる. 一方で $\mathcal{J}(\varphi_{\min})$ は最小エルミート計量や可積分性という非常に解析的な言葉を用いて定義されるが, $\mathcal{J}(\|L\|)$ は純代数的に定義できる対象であるという違いがある. 応用としては, いくつかの種類の消滅定理が Asymptotic multiplier ideal を用いた形で知られている ([DEL], [Laz]). $\mathcal{J}(\|L\|)$ の代わりにイデアル層 $\mathcal{J}_+(\varphi_{\min})$ ($\{\mathcal{J}((1+\varepsilon)\varphi_{\min})\}_{\varepsilon>0}$ の極大元) を用いても, 類似の消滅定理が成立することが知られている ([DEL]). **この意味で $\mathcal{J}_+(\varphi_{\min})$ は $\mathcal{J}(\|L\|)$ の解析的類似と考えられる.**

$\boxed{\text{問題とする予想}}$ 次の予想は, Demailly, Kollár の openness conjecture([DK]) の弱い形と, Lehmann によるその類似の予想 ([Leh]) である.

予想 L が big であれば, $\mathcal{J}(\|L\|)$, $\mathcal{J}_+(\varphi_{\min})$ 及び $\mathcal{J}(\varphi_{\min})$ は一致する. □

ある X の modification $f:\tilde{X}\to X$ が存在して, 直線束 f^*L の因子的ザリスキー分解に登場するコホモロジー類 $P(f^*L)$ が nef と呼ばれる性質を満たすとき, L は**ザリスキー分解可能**であると言う. この時には mL たちの共通零点に関する代数的な情報と解析的な情報との差が余りないと解釈でき, そのため予想の成立が期待される. 実際, Lehmann などにより次の事実が分かっている.

事実 L がザリスキー分解可能であるときには, 予想は成立する. □

$\boxed{\text{主定理}}$ 上記の事実から, 問題は L がザリスキー分解可能でないときに帰着される. 一方で, ザリスキー分解が不可能であるような L の例は, 中山による例 ([N]) が知られているのみである. 次に述べる結果は, この中山の例を含むクラスについて, openness conjecture (の弱い形) の成立を主張している.

主定理 X を複素トーラス上の ([N] の意味での) トーリック束の全空間とする. X 上の正則直線束 L が big であれば, $\mathcal{J}_+(\varphi_{\min})$ と $\mathcal{J}(\varphi_{\min})$ は一致する. とくに中山の例に於いて $\mathcal{J}_+(\varphi_{\min})$ と $\mathcal{J}(\varphi_{\min})$ は一致する. □

尚, 主定理の証明にあたって, 主張の様な X, L に於ける $h_{\min}$ 及び各正の実数 t に対しての $\mathcal{J}(t\varphi_{\min})$ の具体的な表示を得ている. この表示を用いることで, 主定理の主張の様な X, L については, 関連する他の量 (singularity exponent など) についての詳細な計算も可能となっている.

参考文献

[DEL] J.-P. Demailly, L. Ein, and R. Lazarsfeld, *A subadditivity property of multiplier ideals*, Michigan Math. J. **48** (2000), 137-156.

[DK] J.-P. Demailly and J. Kollár, *Semi-continuity of complex singularity exponents and Kahler-Einstein metrics on Fano orbifolds*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **34** (2001), 525-556.

[Laz] R. Lazarsfeld, *Positivity in Algebraic Geometry I, II*, Springer, 2004.

[Leh] B.Lehmann, *Algebraic bounds on analytic multiplier ideals*, arXiv:1109.4452.

[N] N. Nakayama, *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Memoirs **14**, 2004.