曲がった世界での “正多面体” について

小池 貴之

東京大学

November 22, 2014

目次

正多面体とは？

全ての面が同じ正多角形でできていて、かつ各頂点に対し, それを共有する面の数が等しいような凸多面体のこと.

正多面体とは？

全ての面が同じ正多角形でできていて、かつ各頂点に対し, それを共有する面の数が等しいような凸多面体のこと. 実は正多面体は, 以下の五種類しか存在しないことが知られている (図は wikipedia より).

凸多面体とは？

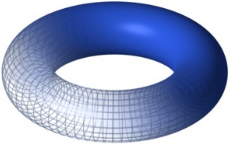
- 凸多面体とは, 多面体の内凸なもののこと.

凸多面体とは？

- 凸多面体とは, 多面体の内凸なもののこと.
- 多面体が凸であるとは, その任意の二点に対して, それを繋ぐ直線がその内側に入っていること.

凸多面体とは？

- 凸多面体とは, 多面体の内凸なもののこと.
- 多面体が凸であるとは, その任意の二点に対して, それを繋ぐ直線がその内側に入っていること.
- 参考：以下は凸でない例 (図は wikipedia より)



“凸” 多面体だと, 何が特別なのか?

- 凸多面体は, それがゴム膜でできていると思ってふくらませると, 球面にすることができる.

“凸” 多面体だと, 何が特別なのか?

- 凸多面体は, それがゴム膜でできていると思ってふくらませると, 球面にすることができる.
- 例えば正四面体からは. “三角形 4 つに分割された球面” を得ることができる.

“凸” 多面体だと, 何が特別なのか?

- 凸多面体は, それがゴム膜でできていると思ってふくらませると, 球面にすることができる.
- 例えば正四面体からは. “三角形 4 つに分割された球面” を得ることができる.
- このように凸多面体からは, 球面の “多面体分割” が得られる.

"凸" 多面体だと, 何が特別なのか?

- 凸多面体は, それがゴム膜でできていると思ってふくらませると, 球面にすることができる.
- 例えば正四面体からは. "三角形 4 つに分割された球面" を得ることができる.
- このように凸多面体からは, 球面の "多面体分割" が得られる.
- また, 凸多面体のオイラー数は必ず 2 になる.

オイラー数の計算例

オイラー数 = 面の数 − 辺の数 + 頂点の数.

正 n 面体	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 12$	$n = 20$
面の数	4	6	8	12	20
辺の数	6	12	12	30	30
頂点の数	4	8	6	20	12

では "凸" でない多面体では?

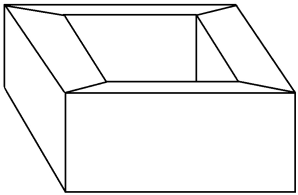
- 凸多面体からは, 球面の "多面体分割" が得られた.

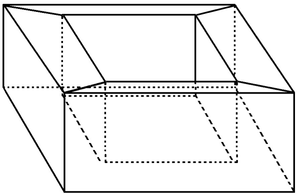
では“凸” でない多面体では?

- 凸多面体からは, 球面の “多面体分割” が得られた.
- “凸” でない多面体の例として, ドーナツの表面の” 多面体分割” を考える.

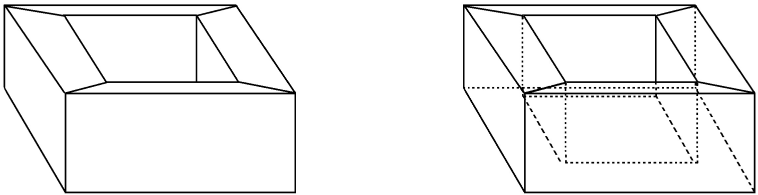
では “凸” でない多面体では?

- 凸多面体からは, 球面の “多面体分割” が得られた.
- “凸” でない多面体の例として, ドーナツの表面の” 多面体分割” を考える.

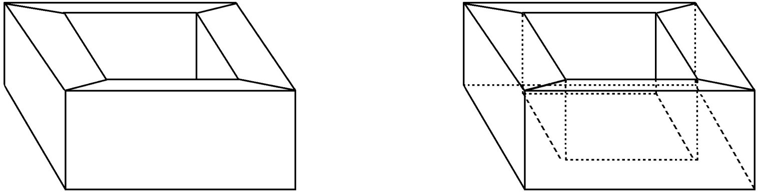




トーラスの "多面体分割" のオイラー数の計算

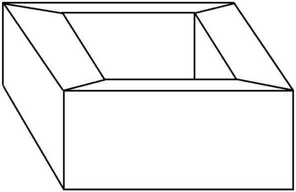


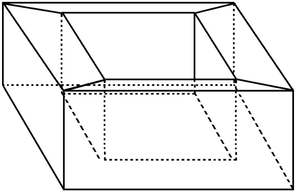
トーラスの“多面体分割”のオイラー数の計算



- 面は 16, 辺は 32, 点は 16.

トーラスの“多面体分割”のオイラー数の計算

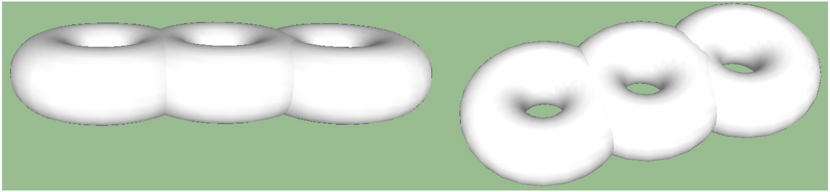




- 面は16, 辺は32, 点は16.
- オイラー数は0.

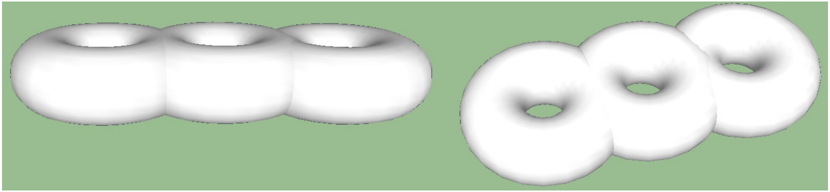
オイラー数に関する公式

より一般に, “g 人乗り浮き輪” の “多面体分割” を考える (図は $g = 3$ の例).



オイラー数に関する公式

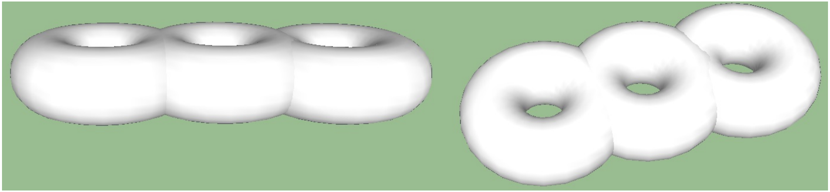
より一般に, “g 人乗り浮き輪” の “多面体分割” を考える (図は $g = 3$ の例).



- 実はオイラー数は, 多面体分割の方法によらずに決まることが知られている.

オイラー数に関する公式

より一般に, “g 人乗り浮き輪” の “多面体分割” を考える (図は $g = 3$ の例).



- 実はオイラー数は, 多面体分割の方法によらずに決まることが知られている.
- その値は, 実は $2 - 2g$ に等しい.

1章のまとめ

- 凸多面体からは, 球面の “多面体分割” が得られる.

1章のまとめ

- 凸多面体からは, 球面の "多面体分割" が得られる.
- 次章からはその一般化として, g 人乗り浮き輪の "多面体分割" を扱う.

1章のまとめ

- 凸多面体からは, 球面の “多面体分割” が得られる.
- 次章からはその一般化として, g 人乗り浮き輪の “多面体分割” を扱う.
- (面の数)−(辺の数)+(頂点の数)$= 2 - 2g$.

凸でない多面体の作り方

- ここでは特に, 球面以外の曲面の多面体分割に対応する多角形について考える.

凸でない多面体の作り方

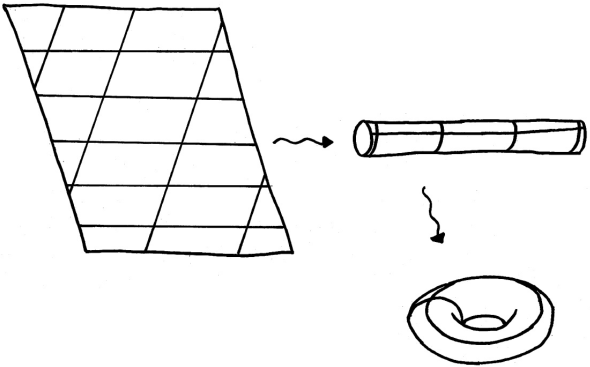
- ここでは特に, 球面以外の曲面の多面体分割に対応する多角形について考える.
- ここでは“平面のタイル張りからドーナツの表面の多面体分割を誘導する”という方法を紹介する.

平面とドーナツの表面

平面からは, 以下のようにしてドーナツの表面が作れる.

平面とドーナツの表面

平面からは, 以下のようにしてドーナツの表面が作れる.

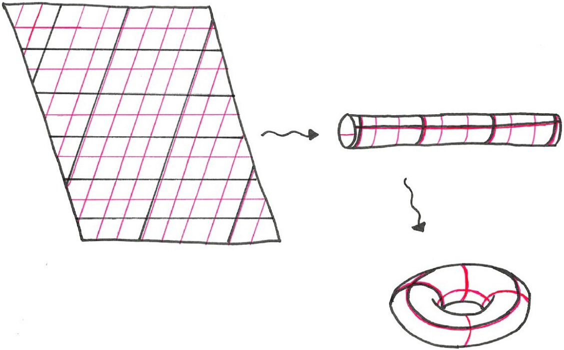


平面のタイル張りとドーナツの表面の多角形分割

平面の (適切な) タイル張りは, 以下のようにドーナツの表面の多角形分割を誘導する.

平面のタイル張りとドーナツの表面の多角形分割

平面の (適切な) タイル張りは, 以下のようにドーナツの表面の多角形分割を誘導する.



二人以上乗り浮き輪の場合

- ドーナツの表面 (=1 人乗り浮き輪) は, 平面を折り曲げて作ることができた.

二人以上乗り浮き輪の場合

- ドーナツの表面 (=1 人乗り浮き輪) は, 平面を折り曲げて作ることができた.
- 一方で $g > 1$ のとき, g 人乗り浮き輪は, 平面の代わりに, 次章で説明する "双曲円盤" を折り曲げて作ることができる.

2章のまとめ

- ドーナツの表面 (=1人乗り浮き輪) は, 平面を折り曲げて作れる.

2章のまとめ

- ドーナツの表面 (=1 人乗り浮き輪) は, 平面を折り曲げて作れる.
- 平面の (適切な) タイル張りから, ドーナツの表面 (=1 人乗り浮き輪) の多面体分割が誘導される.

2章のまとめ

- ドーナツの表面 (=1 人乗り浮き輪) は, 平面を折り曲げて作れる.
- 平面の (適切な) タイル張りから, ドーナツの表面 (=1 人乗り浮き輪) の多面体分割が誘導される.
- 一方で $g \geq 2$ のときは, g 人乗り浮き輪は “双曲円盤” を折り曲げて作られる.

双曲円盤とは

- 双曲円盤とは, 所謂普通の単位円盤 Δ のこと:

$$\Delta := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z \text{ と原点との距離は } 1 \text{ 未満}\}.$$

双曲円盤とは

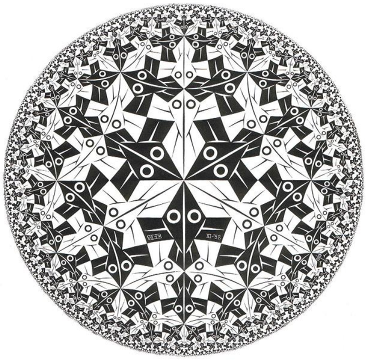
- 双曲円盤とは, 所謂普通の単位円盤 Δ のこと:

$$\Delta := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid z \text{ と原点との距離は } 1 \text{ 未満}\}.$$

- しかし "双曲円盤" では, ユークリッド的でない " 計量" (長さなどの定義) を採用する.

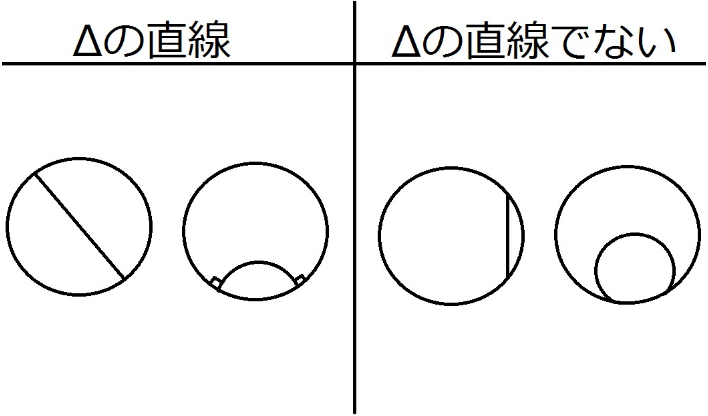
参考:双曲円盤 Δ に於ける絵

次のスライドから説明を始める双曲円盤 Δ は,
M.C.Escher の絵 “Circle Limit” の世界である.



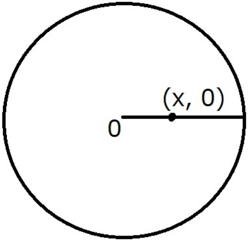
双曲円盤 Δ に於ける直線

双曲円盤 Δ に於ける直線とは, Δ の中心を通る ($\mathbb{R}^2$ の) 直線の一部か, または単位円と直行する ($\mathbb{R}^2$ の) 円の一部を指す.



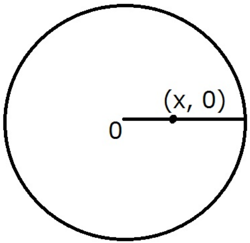
双曲円盤 Δ に於ける長さ (その 1)

簡単のため, “原点からの距離” について述べる.



双曲円盤 Δ に於ける長さ (その 1)

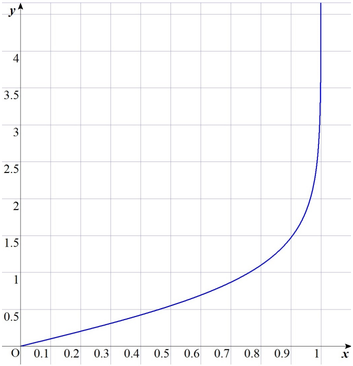
簡単のため, "原点からの距離" について述べる.



$$\text{原点と } (x,0) \text{ との距離} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \quad (0 \leq x < 1)$$

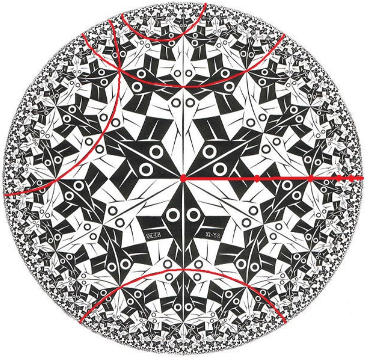
双曲円盤Δに於ける長さ (その2)

$$y = \text{原点と}\ (x, 0)\ \text{との距離} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \quad (0 \leq x < 1)$$



参考:双曲円盤 Δ に於ける絵 (再掲)

双曲円盤 Δ 上の絵としての, M.C.Escher“Circle Limit”.



補足その1：双曲円盤と“平行線公準”

- 以上の意味での双曲円盤上の直線たちは, 平面上での通常の幾何学の性質 (ユークリッド平面幾何学の公理) を, “だいたい” 満たす.

補足その1：双曲円盤と "平行線公準"

- 以上の意味での双曲円盤上の直線たちは, 平面上での通常の幾何学の性質 (ユークリッド平面幾何学の公理) を, "だいたい" 満たす.
- 例えば, Δ の二点を直線で繋ぐことができたり, "直角" の概念があったり, 線分を延長することができたりする.

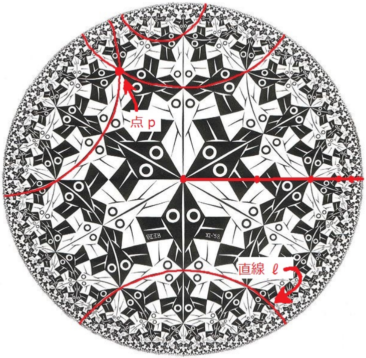
補足その1：双曲円盤と“平行線公準”

- 以上の意味での双曲円盤上の直線たちは, 平面上での通常の幾何学の性質 (ユークリッド平面幾何学の公理) を, “だいたい”満たす.
- 例えば, Δ の二点を直線で繋ぐことができたり, “直角”の概念があったり, 線分を延長することができたりする.
- 一方でユークリッド平面幾何学の“平行線公準”「直線 ℓ とその上にない一点 p に対して, p を通り ℓ と交わらない直線がただ一つ存在する」は満たさない.

補足その1：双曲円盤と“平行線公準”

- 以上の意味での双曲円盤上の直線たちは, 平面上での通常の幾何学の性質 (ユークリッド平面幾何学の公理) を, “だいたい”満たす.
- 例えば, Δ の二点を直線で繋ぐことができたり, “直角”の概念があったり, 線分を延長することができたりする.
- 一方でユークリッド平面幾何学の“平行線公準”「直線 ℓ とその上にない一点 p に対して, p を通り ℓ と交わらない直線がただ一つ存在する」は満たさない.
- この意味で双曲円盤の幾何学は, “非ユークリッド幾何学” (≒ “曲がった”幾何学) である.

“平行線公準” 「直線 ℓ とその上にない一点 p に対して，p を通り ℓ と交わらない直線がただ一つ存在する」を確かに満たしていない p, ℓ の例:



補足その2：双曲三角形の内角の和と面積の公式

- 平面での通常の幾何では, 三角形の内角の和は 180 度だった.

補足その2：双曲三角形の内角の和と面積の公式

- 平面での通常の幾何では，三角形の内角の和は180度だった．
- 一方で双曲円盤 Δ では，三角形の内角の和は必ず180度より小さい．

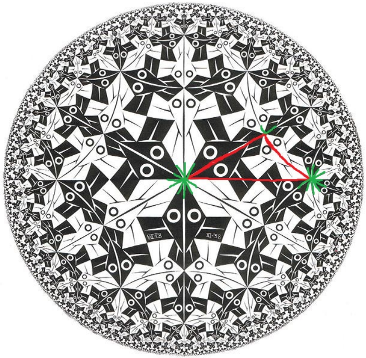
補足その2：双曲三角形の内角の和と面積の公式

- 平面での通常の幾何では, 三角形の内角の和は 180 度だった.
- 一方で双曲円盤 Δ では, 三角形の内角の和は必ず 180 度より小さい.
- 三つの内角がそれぞれ α 度, β 度, γ 度であるような三角形の面積は,

$$\text{面積} = \frac{\pi}{180}(180 - \alpha - \beta - \gamma)$$

で与えられる.

下図の三角形は, 内角がそれぞれ 30 度, 30 度, 90 度であり, 内角の和 150 は確かに 180 より小さい.



3章のまとめ

- 双曲円盤 Δ は, モノとしてはただの円盤だが, (ユークリッド) 平面中の円盤とは異なる計量が入っている.

3章のまとめ

- 双曲円盤 Δ は, モノとしてはただの円盤だが, (ユークリッド) 平面中の円盤とは異なる計量が入っている.
- 早い話が, M.C.Escher "Circle Limit" の世界.

3章のまとめ

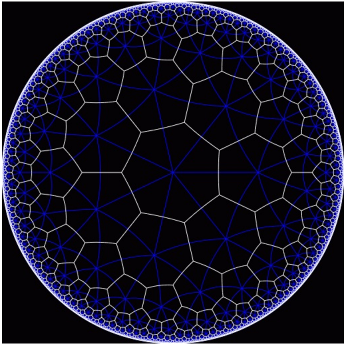
- 双曲円盤 Δ は, モノとしてはただの円盤だが, (ユークリッド) 平面中の円盤とは異なる計量が入っている.
- 早い話が, M.C.Escher“Circle Limit” の世界.
- 次章からはこれを折り曲げることで, $g \geq 2$ に対して g 人乗り浮き輪の多面体分割を考える.

おことわり

ここでご紹介する例は, F. Klein による 1878 年の論文 “Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen”, Mathematische Annalen **14** (3), 428–471. によるものです.
またこの章の図は, 特に断りのない限り全て, J. Baez の web サイト “Klein's Quartic Curve ”(http://math.ucr.edu/home/baez/klein.html, 2014/11/17 アクセス) にあるものをお借りして用います.
図の製作者についてはその都度図の近くに記す形でご紹介いたします.

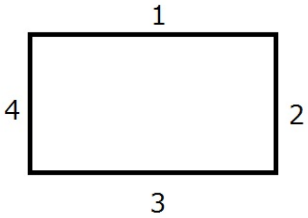
双曲正七角形による双曲円盤のタイル張り

ここでは, 以下の双曲正七角形による双曲円盤のタイル張りを用いて “双曲な正多面体” の例の構成について述べる (図は D. Hatch による).



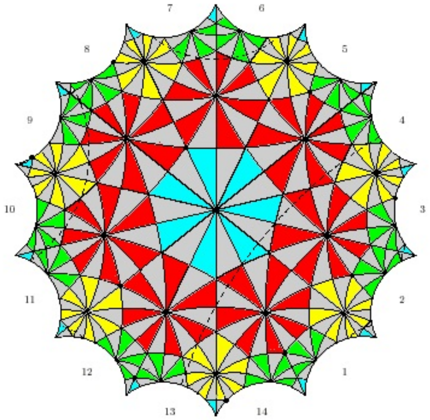
双曲円盤の折り曲げ方

まず, 平面を折り曲げて 1 人乗り浮き輪を作るときを復習すると, 次のような折り曲げ方をしていた.



1 と 3, 2 と 4 をそれぞれ重ねる.

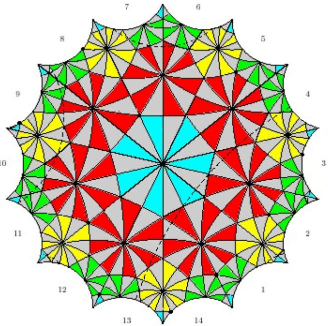
今回は次のように双曲円盤を折り曲げて曲面 R を作る (図は T. Smith による).



1 と 6, 3 と 8, 5 と 10, 7 と 12, 9 と 14, 11 と 2, 13 と 4 をそれぞれ重ねる.

g の決定

こうして作った曲面 R は, 何人乗り浮き輪の形をしているのであろうか?
オイラー数を数えて, これの決定を試みる.
まず, R は (双曲) 正七角形 24 個に多面体分割されていることが分かる.



- よって (面の数)$=24$.

- よって (面の数)$= 24$.
- それぞれの正七角形は七つの辺を持ち, それぞれの辺は二つの正七角形に共有されている. よって

$$\text{辺の数} = 24 \times 7/2 = 84.$$

- よって (面の数)$= 24$.
- それぞれの正七角形は七つの辺を持ち, それぞれの辺は二つの正七角形に共有されている．よって

$$\text{辺の数} = 24 \times 7/2 = 84.$$

- それぞれの正七角形は七つの頂点を持ち, それぞれの頂点は三つの正七角形に共有されている．よって

$$\text{頂点の数} = 24 \times 7/3 = 56.$$

- よって

$$
\begin{aligned}
2-2g &= \text{面の数} - \text{辺の数} + \text{頂点の数} \\
&= 24 - 84 + 56 \\
&= -4
\end{aligned}
$$

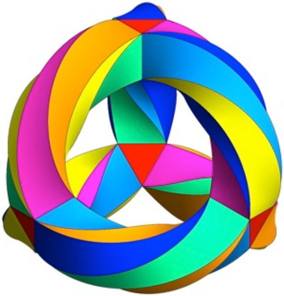
- よって

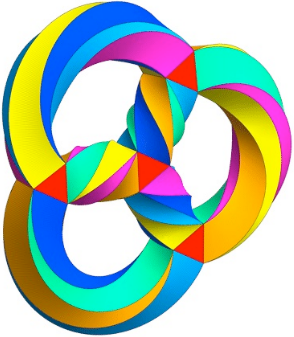
$$\begin{aligned} 2-2g &= \text{面の数} - \text{辺の数} + \text{頂点の数} \\ &= 24-84+56 \\ &= -4 \end{aligned}$$

- 従って $g=3$ を得るので, R は 3 人乗り浮き輪であることが分かる.

R の図

以下の図は G. Egan による.





R は何モノ？

- R は, 長さや角度の情報を完全に保ったまま, 三次元ユークリッド空間内に実現することは不可能な図形.

R は何モノ？

- R は, 長さや角度の情報を完全に保ったまま, 三次元ユークリッド空間内に実現することは不可能な図形.
- その一方で, "二次元複素射影空間" と呼ばれる 4 次元の空間の中には自然に埋め込むことができる.

R は何モノ？

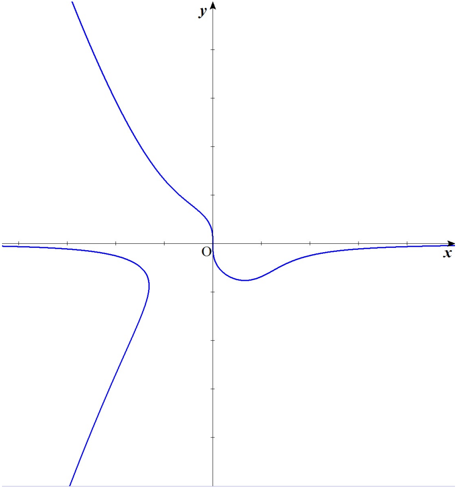
- R は, 長さや角度の情報を完全に保ったまま, 三次元ユークリッド空間内に実現することは不可能な図形.
- その一方で, “二次元複素射影空間” と呼ばれる 4 次元の空間の中には自然に埋め込むことができる.
- 簡単に言えば, R は複素数 $\mathbb{C}$ を座標軸として描いた曲線

$$x^3y + y^3 + x = 0$$

(クラインの四次曲線) の “コンパクト化” になっている.

クラインの四次曲線

クラインの四次曲線 $x^3y + y^3 + x = 0$ のグラフ．実際には次元が倍になる．



その他の “双曲な正多面体”

- “双曲な計量” をもった閉曲面の中では, R のように “双曲な正多面体” の構造を持つものは, 実は非常に珍しい.

その他の “双曲な正多面体”

- “双曲な計量” をもった閉曲面の中では, R のように “双曲な正多面体” の構造を持つものは, 実は非常に珍しい.
- その一方で “双曲な正多面体” は無数に存在する.

その他の "双曲な正多面体"

- "双曲な計量" をもった閉曲面の中では, R のように "双曲な正多面体" の構造を持つものは, 実は非常に珍しい.
- その一方で "双曲な正多面体" は無数に存在する.
- 例えばフェルマー曲線

$$x^n + y^n + 1 = 0 \quad (n \geq 4)$$

は, 双曲正 $2n$ 角形による正多面体構造を持った $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ 人乗り浮き輪の構造をもつ (H. Karcher, M. Weber '98).

R の対称性

図形がどれくらい高い対称性を持つかの基準の一つに, “その図形を自分自身に写す変換の数” がある.

R の対称性

図形がどれくらい高い対称性を持つかの基準の一つに, "その図形を自分自身に写す変換の数" がある.
例えば正四面体は, 「固定した正三角形を回転させる変換 3 通り」と「指定した正三角形を他の正三角形の場所に移動させる変換 4 通り」の組み合わせで,
$3 \times 4 = 12$ 通りの変換がある.

R の対称性

図形がどれくらい高い対称性を持つかの基準の一つに, "その図形を自分自身に写す変換の数" がある.
例えば正四面体は, 「固定した正三角形を回転させる変換 3 通り」と「指定した正三角形を他の正三角形の場所に移動させる変換 4 通り」の組み合わせで, $3 \times 4 = 12$ 通りの変換がある. 正多面体を自分自身に写す変換の数は, 以下の通りである.

正 n 面体	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 12$	$n = 20$
変換の数	12	24	24	60	60

- クラインの四次曲線 R を自分自身に写す変換の候補としては, 以下のものが考えられる.

- クラインの四次曲線 R を自分自身に写す変換の候補としては, 以下のものが考えられる.
- 固定した正七角形を回転させる変換 7 通り.

- クラインの四次曲線 R を自分自身に写す変換の候補としては, 以下のものが考えられる.
- 固定した正七角形を回転させる変換 7 通り.
- 指定した正七角形を他の正七角形の場所に移動させる変換 24 通り.

- クラインの四次曲線 R を自分自身に写す変換の候補としては, 以下のものが考えられる.
- 固定した正七角形を回転させる変換 7 通り.
- 指定した正七角形を他の正七角形の場所に移動させる変換 24 通り.
- 実は “R を自分自身に写す変換の数” は, 以上の組み合わせ

$$7 \times 24 = 168$$

通りである.

クラインの四次曲線 R とフルビッツの定理

Theorem 1 (Hurwitz)

双曲な計量の入った g 人乗り浮き輪 $(g \geq 2)$ を自分自身に写す変換の数は, $84(g-1)$ 個以下である.

クラインの四次曲線 R とフルビッツの定理

Theorem 1 (Hurwitz)

双曲な計量の入った g 人乗り浮き輪 $(g \geq 2)$ を自分自身に写す変換の数は, $84(g-1)$ 個以下である.

このフルビッツの定理から, クラインの四次曲線 R は, 3 人乗り浮き輪の双曲構造の中で最も対称性の高いものになっていることが分かる.

4章のまとめ

- 双曲正七角形によるタイル張りをした双曲円盤 Δ をうまく折り曲げることで, 三人乗り浮き輪 R と, その正多面体分割を得た.

4 章のまとめ

- 双曲正七角形によるタイル張りをした双曲円盤 Δ をうまく折り曲げることで，三人乗り浮き輪 R と，その正多面体分割を得た．
- R は双曲正七角形 24 個を面として持つ．

4章のまとめ

- 双曲正七角形によるタイル張りをした双曲円盤 Δ をうまく折り曲げることで, 三人乗り浮き輪 R と, その正多面体分割を得た.
- R は双曲正七角形 24 個を面として持つ.
- R は三次元ユークリッド空間内に実現することは不可能な一方で, 適切な四次元の空間の中に, クラインの四次曲線 $x^3y + y^3 + x = 0$ として実現できる.

4章のまとめ

- 双曲正七角形によるタイル張りをした双曲円盤 Δ をうまく折り曲げることで, 三人乗り浮き輪 R と, その正多面体分割を得た.
- R は双曲正七角形 24 個を面として持つ.
- R は三次元ユークリッド空間内に実現することは不可能な一方で, 適切な四次元の空間の中に, クラインの四次曲線 $x^3y + y^3 + x = 0$ として実現できる.
- "双曲な多面体" は, "双曲な曲面" 全体の中では珍しいものの, フェルマー型の曲面など, 例は無数に存在する.

4章のまとめ

- 双曲正七角形によるタイル張りをした双曲円盤 Δ をうまく折り曲げることで, 三人乗り浮き輪 R と, その正多面体分割を得た.
- R は双曲正七角形 24 個を面として持つ.
- R は三次元ユークリッド空間内に実現することは不可能な一方で, 適切な四次元の空間の中に, クラインの四次曲線 $x^3y + y^3 + x = 0$ として実現できる.
- "双曲な多面体" は, "双曲な曲面" 全体の中では珍しいものの, フェルマー型の曲面など, 例は無数に存在する.
- R は, 3 人乗り浮き輪の双曲構造の中で最も対称性の高いものである.

最後に...

問題 1

フルビッツの定理は, $g \neq 3$ についても最良の評価を与えているか?
つまり, $g \neq 3$ についても, 実際に丁度 $84(g-1)$ 個の自分自身に写す変換を持つような双曲な計量の入った g 人乗り浮き輪は, 本当に存在するのか?