Minimal singular metrics of a line bundle admitting no Zariski-decomposition

小池 貴之　(東京大学大学院数理科学研究科 (M2))*

$\mathbb{C}$ 上の滑らかな射影代数多様体 X と, その上の巨大直線束 L を考える. 本講演で扱うのは, L が nef になるための障害に関連する問題である. この種の情報は, L の最小特異エルミート計量 $h_{\min,L}$ を研究することで得られることが知られている.

定義 1 *L の特異エルミート計量 $h_{\min,L}$ が最小特異エルミート計量であるとは, 曲率カレントが半正なる L の任意の特異エルミート計量 h に対し, 次が成り立つときをいう. つまり, 任意の点 $x \in X$ に対し, $h_{\min,L}$ の x 近傍での local weight function を φ_L, h の x 近傍での local weight function を ψ としたとき, φ_L は x まわりで, 多重列調和函数として, ψ より強くない特異性を持つ. つまり, x の十分近傍で, ある定数 C に対して, $\psi \leq \varphi_L + C$ が成立する.*

L の最小特異エルミート計量 $h_{\min,L}$ を用いれば, 今回扱う問題は, $h_{\min,L}$ の特異部分に関する問題であるといえる. 具体的には, 次の二つの問題を扱う.

問題 2 *L の non-nef locus $\mathrm{NNef}(L)$ は, どのような形をしているか. 特に, Zariski 閉集合か.*

問題 3 *(Demailly, Kollár の openness conjecture([DK]) の弱い形) $t > 1$ とする. 乗数イデアル層 $\mathcal{J}(h^t_{\min,L})$ は, t が十分 1 に近いとき, $\mathcal{J}(h_{\min,L})$ と一致する.*

この種の問題においては, L が, 双有理的な意味で Zariski 分解可能である場合が基本的である. 実際, この場合には, $h_{\min,L}$ の特異部分の様子は, ほとんど代数的な状況として記述できるため, 上の二つの問題は簡単になる.

命題 4 *L が双有理的に Zariski 分解可能であるならば, $\mathrm{NNef}(L)$ は Zariski 閉集合である. またこのとき, 問題 3 の予想は正しい.*

従って, これらの問題を考察する上では, L が双有理的にも Zariski 分解不可能な場合が本質的となる. その様な L の例は, 中山 [N] によって, 複素トーラス上の完備で滑らかな射影的トーリック束の全空間 X 上の巨大直線束として構成された. 現在, 双有理的にも Zariski 分解不可能な例は, 未だ本質的にはこの一例しか構成されていないようである.

以上の様な意味で, このようなトーリック束上の巨大直線束は, 上記の様な問題を考える上で, 最も基本的な非自明な場合であるといえるであろう. 次の定理は本講演の主結果であり, このような X, L に於ける結果である.

定理 5 *X を複素トーラス上の完備で滑らかな射影的トーリック束の全空間とする. X 上の巨大直線束 L に対しては, $\mathrm{NNef}(L)$ は Zariski 閉集合である. またこのとき, 問題 3 の予想は正しい.*

* 〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学 大学院数理科学研究科
e-mail: `tkoike@ms.u-tokyo.ac.jp`

このような X, L に対しては, 実はより詳しく, $h_{\min,L}$ の具体的な表示や $\mathrm{NNef}(L)$ 自体を求める方法を我々は得ている. 以下では例として, 中山 [N] の例 (X, L) に於ける $h_{\min,L}$ の特異部分の様子について述べる.

中山 [N] の例に於ける X は, 十分一般的な滑らかな楕円曲線二つの直積として書けるような Abel 曲面 V 上の $\mathbb{P}^2$ 束として記述される. より詳しく, V 上の特殊な直線束 L_1, L_2, L_3 を用いて, $X = \mathbb{P}(L_1 \oplus L_2 \oplus L_3)$ と書ける. L はその, 相対超平面束である.

このときの $\mathrm{NNef}(L)$ は, X の部分集合 $\mathbb{P}(L_3)$ であり, 確かに Zariski 閉集合である. そして $\mathrm{NNef}(L) = \mathbb{P}(L_3)$ の外に於いては, 今回構成した $h_{\min,L}$ は連続で, 特異部分を持たない. 一方で, 各 $x_0 \in \mathbb{P}(L_3)$ に於いては, $h_{\min,L}$ の local weight function φ_L は発散している. より詳しくは, $\mathbb{P}(L_3) = \{x = y = 0\}$ となるような x_0 近傍の X の局所座標 (x, y, z, w) を用いることで, x_0 の十分近傍では

$$\varphi_L(x, y, z, w) \sim \log \max_{(\alpha,\beta)\in H} (|x|^{2\alpha} \cdot |y|^{2\beta})$$

と書ける. ただしここで, H は, 下図のような, 双曲線の一部である. ここから, 同じく下図に記す S_t という凸集合を用いることで, 乗数イデアル層 $\mathcal{J}(h^t_{\min,L})$ は, x_0 では, 多項式の系

$$\{x^p y^q \mid (p+1, q+1) \in \mathrm{Int}(S_t) \cap \mathbb{Z}^2\}$$

によって生成されていることが分かる.

以上の結果を用いると, $h_{\min,L}$ に付随する乗数イデアル層に関して, jumping number や singularity exponent の計算も容易にでき, 代数的な乗数イデアル層に関するこれらの振る舞いとの相違 (有理的でない, 周期性が無い, 等) が確認できる.

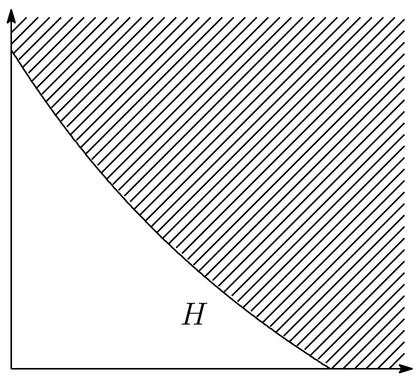

図 1: この図の斜線部が S_1 であり, 集合 S_t は, 点 $p \in \mathbb{R}^2$ の内, $\frac{p}{t} \in S_1$ なるもの全体の集合である.

参考文献

[DK] J.-P. Demailly and J. Kollár, *Semi-continuity of complex singularity exponents and Kahler-Einstein metrics on Fano orbifolds*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **34** (2001), 525-556.

[N] N. Nakayama, *Zariski-decomposition and abundance*, MSJ Memoirs **14**, 2004.