数値的半正な正則直線束のエルミート計量と部分多様体の近傍

小池 貴之　(大阪市立大学)*

1. 正則直線束の (半) 正値性とエルミート計量

本講演で述べる一連の研究の動機は, 複素多様体上の**数値的半正** (numerically effective, nef. 以下**ネフ**と表記する) な正則直線束に入るエルミート計量の研究にある. 以下, X を簡単のため滑らかでかつコンパクトな (又は射影的な) 複素多様体, L を X 上の正則直線束とする.

まずLが十分な正値性をもつケースについては, 小平の埋め込み定理と中井–Moishezon の判定法から, 次の三条件の同値性が知られている:

- L は**豊富**である. つまり, 十分大きい $n>0$ について, $L^n := L^{\otimes n}$ の大域切断は十分に存在し, それによって X を射影空間に埋め込むことができる (**代数幾何学的**な正値性).
- L は**正**である. つまり, L に C^∞ エルミート計量であって, その曲率テンソルが各点上で正なものが存在する (**複素幾何学的**な正値性).
- 任意の d 次元部分代数多様体 $Y \subset X$ に対して, $(L^d.Y) := \int_Y c_1(L)^d$ は正である (**交点数理論的**な正値性).

一方で, 以上の代数幾何学的・複素幾何学的・交点数理論的それぞれの観点からの正値性条件の "極限的" な状況として, 以下の三通りの方法で直線束の半正値性条件が定義できる:

- L は**半豊富**である. つまり, 十分大きい $n>0$ について, L^n の大域切断は (それなりに) 十分に存在し, それによって X から射影空間への射を定義することができる (**代数幾何学的**な半正値性).
- L は**半正**である. つまり, L に C^∞ エルミート計量であって, その曲率テンソルが各点上で半正なものが存在する (**複素幾何学的**な半正値性).
- L は**ネフ**である. つまり, 任意の 1 次元部分代数多様体 $C \subset X$ に対して, $(L.C) := \int_C c_1(L)$ は非負である (**交点数理論的**な半正値性).

一方で以上の三条件は, 「L: 半豊富 $\Rightarrow$ L: 半正 $\Rightarrow$ L: ネフ」という関係を持つものの, それぞれの "$\Rightarrow$" の逆については反例が存在し, この意味でそれぞれ別の条件であることが分かっている. これら三条件の差異の記述が, 本講演で述べる一連の研究の動機である.

2. 部分多様体の近傍

2.1. 概要

もう一方の本講演のテーマは, 部分複素多様体の近傍に関する多変数函数論である. 簡単に述べると, 以下のような問を扱う:

本研究は科研費 (No. 25-2869, 28-4196) の助成を受けたものである。

* e-mail: tkoike@sci.osaka-cu.ac.jp

問題 1 X を複素多様体, $Y \subset X$ を X に *(正則に埋め込まれた)* コンパクト部分複素多様体とする. このとき, X の中での *(十分小さい)* Y の近傍 W はどのような複素構造を持つか? $\square$

特に函数論的な観点から述べれば, 問題中の記号を用いて

W 又は $W \setminus Y$ にはどのような多重劣調和関数が存在するか?

を考えることが重要と言える. 以下簡単のため, X が二次元で Y が一次元である場合について述べる.

まず注意したいのが, Y の近傍 W として, 法線束 $N_{Y/X}$ の零切断の近傍と双正則なもの (以下 "**正則管状近傍**" と呼ぶ) は, **必ずしも存在しない**という点である[1]. 例えば次の例では, f_1, f_2 を線形化可能な関数として選べば X 中 Y は正則管状近傍を持つ一方で, f_1, f_2 が線形化不可能な関数である場合には Y は正則管状近傍を持ちえない (この事実は, 小川竜氏との進行中の共同研究に基づく).

例 1 ([21, §5.4] の例に基づく) $\tau \in \mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ 及び $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{\mathbb{C},0}$ として, $f_j(0) = 0$ かつ $|f_j'(0)| = 1$ *$(j = 1, 2)$* であり, さらに原点近傍で $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ なるものを固定する. $\widetilde{X} \in \mathbb{C}^2$ を $\mathbb{C} \times \{0\} \subset \mathbb{C}^2$ の近傍とする. $\widetilde{X}$ の点の間の関係 $\sim$ を, 各点 $(z, w) \in \widetilde{X}$ に対して

$$(z, w) \sim (z + 1, f_1(w)) \sim (z + \tau, f_2(w))$$

によって生成されるものとして定める. $X := \widetilde{X}/\sim$ として, その部分多様体 Y を $Y := (\mathbb{C} \times \{0\})/\sim$ で定める. Y は楕円曲線であり, その近傍には局所的に "$\{w = \text{定数}\}$" を葉とみることによって葉層構造が定まる. 特に Y はコンパクト葉であり, それに沿ってのホロノミーは f_1 及び f_2 によって生成される.

一般の設定で, Y が正則管状近傍を持つための十分条件の記述は, $N_{Y/X}$ が負である場合について Grauert によって [9], また $N_{Y/X}$ が平坦でありかつ Y が楕円曲線である場合について Arnol'd によってなされた [1]. 内後者は, 以下のように主張される:

定理 1 ([1]) X を複素曲面, $Y \subset X$ を正則に埋め込まれた非特異楕円曲線とする. 法線束 $N_{Y/X}$ が位相的に自明であり, かつ $\mathrm{Pic}^0(Y)$ の点として, 次の意味でディオファントス条件を満たすことを仮定する: ある $A, \alpha > 0$ として, 各 $n \geq 0$ に対して $\mathrm{dist}(\mathbb{I}_Y, N_{Y/X}^n) \geq A \cdot n^{-\alpha}$ なるものが存在する (ここで $\mathbb{I}_Y$ は正則に自明な直線束, dist はユークリッド距離). このとき, Y は正則管状近傍を持つ.

この Arnol'd の定理の中で, 一般にはディオファントス条件は正則管状近傍の存在のための必要条件ではないものの, 簡単には緩めることのできない条件である. このような事情は, 例えば上記の例 1 に於いては, 一変数関数の中立的固定点周りでの線形化問題として観察される.

また, 「W 又は $W \setminus Y$ にはどのような多重劣調和関数が存在するか?」という点については, $N_{Y/X}$ が負である場合については W は強擬凸にとれることが [9], $N_{Y/X}$ が正で

[1] よく知られているように, Y の近傍 W として, 法線束 $N_{Y/X}$ の零切断の近傍と微分同相なものという意味では管状近傍が存在している状況ではある (管状近傍定理).

ある場合は $W \setminus Y$ に Y で正に発散する強多重劣調和関数が構成できることが [19] 知られていた．その一方で $N_{Y/X}$ が位相的に自明である, つまり $c_1(N_{Y/X}) = 0$ である場合は状況が複雑である．この場合の研究は上田により研究がなされた (次節参照).

2.2. 法束が平坦な場合について (上田理論)

X を非特異複素曲面, Y を X に正則に埋め込まれた非特異コンパクト曲線として, その法線束 $N_{Y/X}$ が位相的に自明であるようなものとする: $c_1(N_{Y/X}) = 0$. ここでは [21] に基づき, Y の近傍に関する上田による結果を簡単にまとめる.

上田による分類によれば, 組 (Y, X) は, Y が X 中に有限次のジェットの段階で複雑な複素構造を持つ場合である "有限型" と, そうでない場合である "無限型" の二種類に大別される．より詳しく述べる．Y の有限開被覆 $\{U_j\}$ を固定する．このとき, Y のコンパクトケーラー性から, $N_{Y/X}$ は $U(1)$-平坦である, つまりある定数 $t_{jk} \in U(1) := \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}$ を用いることで, その各 $U_{jk} := U_j \cap U_k$ 上での変換関数を t_{jk} と書くことができる．X 中の U_j の近傍 V_j をとり, $V := \bigcup_j V_j$ とする．V_j を適切に小さくとることで, その上での U_j の定義関数 w_j を $(w_j/w_k)|_{U_{jk}} \equiv t_{jk}$ となるようにとる事ができる．この定義関数系 $\{w_j\}$ について, $t_{jk}w_k|_{V_{jk}}$ の w_j についてのテイラー展開が, $n \geq 1$ について

$$t_{jk}w_k = w_j + f_{jk}^{(n+1)}(z_j) \cdot w_j^{n+1} + O(w_j^{n+2})$$

という形で書けていたとする ("type n の定義関数系", z_j は U_j の座標関数を拡張したもの)．このとき, $\{(V_{jk}, f_{jk}^{(n+1)})\}$ はコサイクル条件を満たすことが分かる．対応するコホモロジー類を $u_n(Y, X) := [\{(U_{jk}, f_{jk}^{(n+1)})\}] \in H^1(Y, N_{Y/X}^{-n})$ と記述する (n 次の上田類).

$u_n(Y, X) = 0$ である場合 (とそしてその場合に限り), 上記 type n の定義関数系 $\{w_j\}$ は, 新たな type $n+1$ の定義関数系へと改良できることが分かる．このことから, 組 (Y, X) について, 以下の二通りの現象の内のどちらか一方のみが起きるといえる:

- ある正整数 n として, 任意の $m \leq n$ については type m の定義関数系が存在して, また $m < n$ については $u_m(Y, X) = 0$ であり, さらに $u_n(Y, X) \neq 0$ となる.
- 任意の正整数 n について, type n の定義関数系が存在して, かつ $u_n(Y, X) = 0$ である.

組 (Y, X) は**有限型** (又はより詳しく "type n") であるとは前者の場合であり, また**無限型**であるとは後者の場合を指す．例えば, Y が正則管状近傍を持つ場合には, (Y, X) は無限型である．より一般に, Y が X 中で**擬平坦近傍系を持つ場合** (すなわち Y の基本近傍系であって, その各々の境界がレビ平坦であるものが存在する場合) には, (Y, X) は無限型である．一方で上田は, 無限型だが擬平坦近傍系を持た**ない**例を構成している (例 1 も参照)．一方で以下が上田によって示されている:

定理 2 ([21, Theorem 3]) 組 (Y, X) が無限型である場合, $N_{Y/X} \in \mathrm{Pic}^0(Y)$ が torsion であるか又はディオファントス条件を満たすときには, Y は擬平坦近傍系を持つ.

また, 有限型の (Y, X) については, Y 近傍における強多重劣調和関数の存在, 及び多重劣調和関数の増大度の制限が示されている:

定理 3 ([21, Theorem 1, 2]) 組 (Y, X) が有限型であり, type n であるときに, 以下が成立する:

(i) 任意の$a > n$について, あるYの近傍V及び$V \setminus Y$上の強多重劣調和関数Φとして, $\Phi(p) = O(\mathrm{dist}(p, Y)^{-a})$ ($p \to Y$, dist は局所的なユークリッド距離) なるものが存在する.
(ii) VをYの近傍とする. nより小なる任意の正数a及び$V \setminus Y$上の任意の多重劣調和関数Ψとして$\Psi(p) = o(\mathrm{dist}(p, Y)^{-a})$ $(p \to Y)$ なるものに対して, あるYの近傍V_0が存在して, $\Psi|_{V_0 \setminus Y}$は定数関数となる.

2.3. 上田理論の高 (余) 次元化と特異版

前節で述べた上田理論を応用することで, 私は, 次節で述べる手法に基づき, ネフ正則直線束が半正でないことの十分条件を得ることができた (定理 7, 後述). 詳しくは次節で述べるが, この応用では, 前節の様な複素曲面X内の曲線Yを, Xの因子と見なし, それが定める直線束$L := [Y]$を考察している[2]. ここで用いた手法によって一般のネフ直線束のエルミート計量を研究しようとすると, まず直面するのが次の問題である: **一般に複素多様体X上のネフ直線束Lが与えられたときに, そのエルミート計量に関する研究のために着目すべき部分複素多様体$Y \subset X$は何であるべきか?**

まず自然にYの候補を挙げることができるケースとしては, $\dim H^0(X, L^m) \equiv 1 (\forall m \geq 1)$ なる場合である. この時には, Lに対応する因子Yは自然に決まっていると考えることができる (つまりLの大域切断の零因子をYと定めればよい). 先ほどの方針に従えば, このYの近傍に着目をすればよいことになるが, この場合にも**YはXの非特異な部分多様体とは限らない (重複度や特異部分があるかもしれない)**という問題点が残る.

次に, mの増加に伴い, L^mの大域切断がある程度数多くとれる場合を考える. この場合に先述の手法を適用することを考えると, Yは切断環$\bigoplus_{m=1}^{\infty} H^0(X, L^m)$の元たちの共通零部分として選ぶべきであると私は考えている (§3.1 での考察を参照). この場合には, **YのXの中での余次元が, もはや1であるとは限らない**という問題が生じる.

最後に, $m \geq 1$をどのように選んでも$H^0(X, L^m) \equiv 0$となるようなネフ直線束も存在することに注意する. この場合には, Yに相当するXの部分集合の近傍に着目するという方針は諦め, 別の方針を考えなければならないであろう. この最後の難点を今回は忘れることとしても, 上記の二つの難点に対処する必要がある. 言いかえれば,

1. $Y \subset X$が重複度や特異部分を認める一般の因子である場合
2. $Y \subset X$がひとまずは非特異であるとしても, 余次元は一般な部分多様体である場合

という二つの方向への上田理論の一般化が必要となる.

まずY**が特異性を持つ場合**について述べる. この場合については, まずYがノードを一つ持つ有理曲面である場合についての上田による研究がある [22]. この結果を一般化する形で, 幾つかの技術的な仮定の下ではあるものの, Yがノードのみを許すコンパクト曲線である場合についての結果を得た [15]. その結果, 例えば次を得る:

定理 4 ([15]) Xを非特異曲面, YをXに正則に埋め込まれた有理曲線のサイクル (被約, ノードのみを許す) とする. さらに法線束$N_{Y/X} := [Y]|_Y$は, 位相的に自明だが$U(1)$-平坦**ではない**と仮定する. このとき, 以下が成立する:
(i) 任意の$a > 1$について, あるYの近傍V及び$V \setminus Y$上の強多重劣調和関数Φとして,

[2] つまりLはX上の正則直線束であり, その大域正則切断$f_Y \in H^0(X, L)$として, Yに沿ってのみ1位の零を持つようなもの (“標準切断”) が存在するようなものである. $c_1(N_{Y/X}) = 0$という仮定は, Lがネフであるという設定を反映している.

$\Phi(p)=O((-\log d(p,C))^{2a})$ $(p\to Y)$ なるものが存在する.
(ii) V を Y の近傍とする. $V\backslash Y$ 上の任意の多重劣調和関数 Ψ として $\Psi(p)=o((-\log d(p,C))^{2a})$ $(p\to Y,\ 0<a<1)$ なるものに対して, ある Y の近傍 V_0 が存在して, $\Psi|_{V_0\backslash Y}$ は定数関数となる.

尚ここで, (Y が非特異コンパクト曲線である場合については, その上の位相的に自明な直線束は必ず $U(1)$-平坦になるのに対して) Y が特異的な場合については, その上の位相的に自明な直線束は必ずしも $U(1)$-平坦ではないことに注意する.

次に, **高 (余) 次元化について**述べる. まず, Y の余次元が 1 である場合については, 上田による障害類や分類, 及び定理 2 はそのままの形で成立する. 一方で高 (余) 次元の場合については, 定理 3 の成立は (少なくともそのままの形では) 望めない. そこでまず問題となるのは, Y の余次元が 1 より大なる場合についての定理 2 の一般化である. この問題について, Y が非特異である場合について考える. 初めに Y の余次元が 2 である場合についての考察を, 小川竜氏との共同研究で行った[3] [17] (§3.2 も参照). さらにその後, [14] に於いて, Y の余次元が一般であり, かつ法束がユニタリ平坦束である (つまり変換関数がユニタリ行列で記述できる) 場合についての考察を行った. この場合には上田類 $u_n(Y,X)$ の定義は, 自然な方法で $H^1(Y, N_{Y/X}\otimes S^{n+1}N^*_{Y/X})$ の元として一般化でき, それに基づいて有限/無限型の定義も拡張できる.

定理 5 ([14]) X を非特異複素多様体, Y を X の余次元 r のコンパクト非特異部分複素多様体とする. 法束 $N_{Y/X}$ が (下で定義する) $\mathcal{E}_0^{(r)}(Y)\cup\mathcal{E}_1^{(r)}(Y)$ の元であると仮定する. (Y,X) が無限型であるとき, Y のある近傍には, Y を一つの葉とする余次元 r の非特異正則葉層 $\mathcal{F}$ として, Y に沿ってのホロノミーが基本群のユニタリ表現になっているものが存在する.

ここで, 基本群のユニタリ表現 ρ に対応する階数 r のユニタリ平坦束を E_ρ と書くことにして, $\mathcal{E}_0^{(r)}(Y)$ は集合 $\{E_\rho \mid \#(\mathrm{Image}\,\rho)<\infty\}$ を表しており, また $\mathcal{E}_1^{(r)}(Y)$ は集合

$$\left\{E_\rho \,\middle|\, \pi^*E_\rho\in\mathcal{S}_A^{(r)}(\widetilde{Y}) \text{ for some finite normal covering } \pi\colon\widetilde{Y}\to Y \text{ and } A>0\right\},$$

として定めている. ここで $\mathcal{S}_A^{(r)}(\widetilde{Y})$ は集合

$$\left\{\bigoplus_{\lambda=1}^{r} L_\lambda \,\middle|\, L_\lambda\in\mathcal{P}(\widetilde{Y}),\ d\left(\mathbb{I}_{\widetilde{Y}}^{(1)},\ \bigotimes_{\lambda=1}^{r} L_\lambda^{a_\lambda}\right)\geq\frac{1}{(2|a|)^A} \text{ for } a=(a_\lambda)_\lambda\in\mathbb{Z}^r \text{ with } |a|\geq 1\right\}$$

のこととしている ($|a|:=a_1+a_2+\cdots+a_r$, $\mathcal{P}(\widetilde{Y})$ は $\widetilde{Y}$ 上 $U(1)$-平坦な直線束全体).

3. 部分多様体の近傍理論の応用

3.1. 正則直線束のエルミート計量に関する研究への応用

ここではまず, 当初の動機であった (ネフ) 正則直線束のエルミート計量に関する研究に, どのようにして部分多様体の近傍に関する多変数函数論的研究が応用できるのかについて述べる.

---

[3] それ以前に [13] で考察を行っていたが, こちらにはミスがあったことが後に判明した. [13] の主定理を修正したものが, [17, Theorem 1.4, Remark 3.14] である.

以下, X を滑らかな複素代数多様体, L を X 上の (ネフ) 正則直線束として, (簡単のため) $\dim H^0(X,L)>0$ なるものとする. 大域切断 $f_1,f_2,\dots,f_N\in H^0(X,L)$ をとり, それらの共通零部分を $Y\subset X$ とする. 以下常に Y のコンパクト性を仮定する.

まず, Y が正則管状近傍 $W\subset X$ を持つ場合 (または, Y が擬平坦基本近傍系を持つなど, それに近い状況) を考える. この場合, 構造層係数の 1 次のホモロジーの間の制限写像 $H^1(W,\mathcal{O}_W)\to H^1(Y,\mathcal{O}_Y)$ を通じて, W 及び Y それぞれへの L の制限 $L|_W$ 及び $L|_Y$ の比較を行うことが, いくつかの状況下で有効である. 例えば, 簡単のため制限写像 $H^1(W,\mathcal{O}_W)\to H^1(Y,\mathcal{O}_Y)$ が同型で, かつ W から Y への正則な全射 π として $\pi|_Y=\mathrm{id}_Y$ なるものが取れたとする. さらに $L|_Y$ が半正であることを仮定する. この場合には, π での引き戻しを考えることで, $L|_Y$ の半正曲率を持つエルミート計量 h_Y を, $L|_W$ 上のエルミート計量 $h_W:=\pi^*h_Y$ へと拡張することができる. 一方で, $(\sum_{j=1}^N|f_j|^2)^{-1}$ を計量と見做すことで, $L|_{X\setminus Y}$ 上には C^∞ エルミート計量 $h_{X\setminus Y}$ を入れることができる. 簡単な考察から, この $h_{X\setminus Y}$ も半正曲率を持っていることが分かる. この計量は Y に近づくにつれて発散するため, このままでは X 全体の上での L の C^∞ エルミート計量を定めない (**特異エルミート計量**). そこで先述の $L|_W$ の計量 h_W と組み合わせ, また十分大きい正の数 $M>0$ を用いることで, 新しい計量 $h:=\min\{h_{X\setminus Y},\ M\cdot h_W\}$ を考える. ここで M を大きくとることで W の境界近傍では $h_{X\setminus Y}<M\cdot h_W$ とすることができ, この意味で h は X 全体の上で L の連続なエルミート計量を定めていることに注意する. この計量は, 関数 "min" の適切な regularization [5, §5.E] を考えることで C^∞ 級な計量へと改良することができる. この改良後の計量の曲率も半正としてよいことが簡単な考察からわかり, 結果 L の半正性が示される. 尚, 以上の様な L の半正性を示す議論は, 次の具体例については, 本質的には Brunella によって [3] の中で既に行われていたことに注意する:

例 2 (Arnol'd-上田-Brunella の例 [1], [3], [21]) 滑らかな平面楕円曲線 $C\subset\mathbb{P}^2$ を固定する. C から 9 点 $Z:=\{p_1,p_2,\dots,p_9\}\subset C$ をとる. $X:=\mathrm{Bl}_Z\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2$ を射影平面の Z での爆発として, $Y:=\pi_*^{-1}C$ を C の強変換とする.

この例では, 法線束 $N_{Y/X}$ は自然に $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)|_C\otimes\mathcal{O}_C(-p_1-p_2-\cdots-p_9)$ と同型である. 従って 9 点配置 Z を変えるごとに, 法線束は (Y と C との自然な同一視を介して) $\mathrm{Pic}^0(C)$ のどの値をも取り得る. 特にディオファントス条件を満たすような 9 点配置の場合については, Y が定める直線束 ($=K_X^{-1}$: 反標準束) の半正性が分かる [3].

その他にこの手の考察が巧く機能する具体例としては, **Zariski による例**が挙げられる. この例は複素射影平面 $\mathbb{P}^2$ の適切な 12 点での爆発 X 上の数値的半正な直線束 L であって, 半豊富と呼ばれる代数幾何学的な半正値性を満たさない例である. この Zariski の例 (X,L) は特に, 切断環 $\bigoplus_{m=0}^\infty H^0(X,L^{\otimes m})$ が非有限生成であるという意味でも病的であり, 重要な例である. 上記の方法に基づく議論から, この例に於ける L に滑らかで半正曲率を持つ計量を構成し, 従ってこの L が半正であることを示すことができる [11].

また, §2.3 で述べた上田理論の高余次元版の主張を用いることで, 上記 $\mathbb{P}^2$ の 9 点爆発の例の高次元への一般化を得る. 一般に n 次元では, n 次元の次数 1 の del Pezzo 多様体の一点での爆発上のある直線束について例ができるが, 特に 3 次元については, 次のような形でも記述できる:

定理 6 ([14]). $C_0 \subset \mathbb{P}^3$ を, 2つの二次曲面の完全交差となっているような滑らかな楕円曲線として, その上の相異なる8点 $p_1, p_2, \dots, p_8 \in C_0$ を, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1 + p_2 + \dots + p_8)$ が $\mathrm{Pic}^0(C_0)$ のねじれ元であるか, 又はディオファントス条件を満たすものとする. このとき $\mathbb{P}^3$ の $\{p_j\}_{j=1}^8$ での爆発 X の反標準直線束 K_X^{-1} は半正である.

次に, Y が擬平坦基本近傍系を持たない場合を考える. 特に顕著なのは, 定理 3 のような形の多重劣調和関数の増大度制限がある場合である. この場合, $L := [Y]$ にもし C^∞ エルミート計量 h として半正曲率をもつものが存在してとすると, L の標準切断 $f_Y \in H^0(X, L)$ を用いて定義される関数 $\Psi(p) := -\log|f_Y(p)|_h$ を考え矛盾が導かれる (簡単な考察から, Ψ は Y で $-\log \mathrm{dist}(p, Y)$ 程度に発散する多重劣調和関数であることが分かるため). 以上のような議論を応用することで, ネフ直線束が半正でないための十分条件の上田理論的記述が可能となる:

定理 7 ([12]) Y を複素曲面 X に正則に埋め込まれたコンパクト非特異曲線として, 法線束が位相的に自明であり, かつ組 (Y, X) が有限型であるものとする. このとき, $L := [Y]$ に入れることができる半正曲率を持つ計量は, 特異的なものを許したとしても, Y 近傍に於いて $|f_Y|^{-2}$ の定数倍の形をしているものしか存在しえない ($f_Y \in H^0(X, [Y])$ は標準切断). 特にこのとき, L はネフだが半正でない.

尚, この研究当時知られていた, ネフだが半正でなく, かつその特異エルミート計量が具体的に記述されていた例は, Demailly, Peternell, Schneider [6] による例のみであった. 上記定理 7と Neeman [18] による $u_n(Y, X)$ の計算とを組み合わせることで, ネフだが半正でない L の具体例を数多く得る [12]. その他, Y が特異的である場合についての結果 [22], [15] を活用することでもネフ直線束が半正でないための十分条件の記述がほぼ同様の議論に基づき可能となる. 例えば:

定理 8 ([15]) X を非特異曲面, $Y \subset X$ を有理曲線のサイクル (ノードのみを許す, 被約) であって, その法線束が位相的に自明であるものとする. このとき以下が成立する:
(i) $N_{Y/X}$ が $U(1)$-平坦であるとする. このとき, 法線束がディオファントス条件を満たす場合には, $L := [Y]$ は半正である.
(ii) $N_{C/X}$ が $U(1)$-平坦でないとする. このときには, $L := [Y]$ はネフだが半正でない.

特に具体例としては, 例 2で三次曲線 C が特異的である場合が興味深い. この場合に上記結果を適用することで, 例えば平面9点配置 $Z = \{p_j\}_{j=1}^9 \subset \mathbb{P}^2$ として, Z での $\mathbb{P}^2$ の爆発 X について, K_X^{-1} がネフだが半正でないようなものの存在が分かる [15].

またこの種の議論の応用として, ネフよりより強い条件である強ネフという条件 (X のどの部分代数曲線上に制限しても L の次数が正であるという条件) に関する結果を得ることができる. L が強ネフであっても半豊富とは限らないことは知られていた [10] が, 強ネフな L が半正であるかについては, 藤野 [8] によって強ネフだが半正でない例の候補が挙げられているのみで, まだ分かってはいなかった. 上記の結果を応用することで, 藤野による例が確かに強ネフだが半正でない例となっていることが示される [12].

3.2. その他の応用その1 (レビ平坦葉層付き多様体の埋め込み可能性問題)

この節の内容は, 小川竜氏との共同研究に基づく. 先述の通り, [17] では余次元2の場合について, 上田の定理の類似を得ている:

定理 9 X を複素多様体, S を X の (コンパクトとは限らない) 非特異複素超曲面, Y を S に埋め込まれた非特異コンパクト複素超曲面として, 以下の三条件を満たすものとする:
(i) $N_{S/X}$ は S 中 Y のある近傍 V 上では, $U(1)$-平坦束として torsion であり,
(ii) V 上ある正則関数 f として, Y に沿ってのみ零を持つようなものが存在し,
(iii) 任意の $n \geq 1$ に対し f は, 十分小さい Y 近傍 $V_n \subset V$ に制限すれば, X 中 V_n に沿ってのある n-jet へと拡張し (“jet 拡張条件”), かつ
(vi) Y 近傍に於いては, 組 (S, X) は無限型である [4].
このとき, ある X 中での Y の近傍 W 上では, 直線束 $L := [S]$ は $U(1)$-平坦である.

この結果は, 一般の余次元に関する定理 5 に包含されるものでは**ない**. 実際, 中間的な超曲面 S の存在を用いて条件を記述している点で定理 5 とは使い勝手を異にするものであり, この点は**レビ平坦葉層付き多様体の埋め込み可能性問題**を考察する上で大きな利点となる.

ここで, **レビ平坦葉層付き多様体**とは, $2n-1$ 次元の C^∞ 多様体 M とその実余次元 1 の C^∞ 葉層 $\mathcal{F}$, 及び横断的に滑らかな leafwise 複素構造 $J_{\mathcal{F}}$ の三つ組みのことである. このようなレビ平坦葉層付き多様体が, ある n 次元複素多様体 X の中のレビ平坦超曲面として実現できるか (つまり, M の X への滑らかな埋め込みであって, 葉ごとに正則なものが存在するかどうか) は自然な疑問である. この種の問題については, Barrett, 稲葉による Reeb component (又は Reeb 葉層付き三次元球面) の埋め込み不可能性の結果, 及び埋め込み可能性のための位相的制約に関する結果が重要なものとして挙げられるが, その中では上田理論が重要な役割を果たす [2], [4]. これらで用いられている議論に定理 9 を組み合わせることで, Barrett の定理の高次元化, 特に埋め込み不可能性の局所的判定法を得ることができる. 例えば, M の実次元が 5 である場合については:

定理 10 ([17]) $(M, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ を実 5 次元のレビ平坦葉層付き多様体, L を $\mathcal{F}$ の葉, Y を L に正則に埋め込まれた楕円曲線とする. M 中 Y の近傍 $\mathcal{U}$ として, 次の三条件を満たすものの存在を仮定する:
(i) ホロノミー群 $\mathcal{H}(\mathcal{U} \cap L)$ は $\mathbb{Z}$ と同型であり, Y の基本群のある元に沿っての C^∞-flat contracting holonomy によって生成され,
(ii) ある C^∞ なレトラクション $p: \mathcal{U} \to \mathcal{U} \cap L$ として各葉は局所双正則かつ全射なるものが存在し, かつ
(iii) $\mathcal{U} \cap L$ 上の正則関数として, Y に沿ってのみ零を持つものが存在する.
このとき, $(M, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ はどのような 3 次元複素多様体の中であっても, レビ平坦超曲面として実現不可能である.

尚, 上記定理の条件は, 全て楕円曲線 Y の近傍に関する条件として記述されており, そのため $(M, \mathcal{F}, J_{\mathcal{F}})$ を Y 近傍に小さくしたとしても仮定は崩れないことに注意する. この意味でこの結果は, 埋め込み不可能性の局所的判定法であると言える. また, この判定法の局所性により, コンパクト葉を持たないレビ平坦葉層付き多様体に対しても実現可能性判定が可能となったことにも注意する. この応用として, 次の三条件を満たす様

---

[4] 今は S のコンパクト性を仮定しておらず, このような場合には一般には上田類の well-definedness に問題が生じ, その結果 “無限型” という用語は普通は意味をなさない. 一方で [17] では, “jet 拡張条件” の下でこれらの well-definedness を示している.

な二つの実5次元のレビ平坦葉層付き多様体$(M_i, \mathcal{F}_i, J_{\mathcal{F}_i})$ $(i = 1, 2)$が構成できる:
(i) $(M_1, \mathcal{F}_1, J_{\mathcal{F}_1})$はどのような3次元複素多様体の中であっても, レビ平坦超曲面として実現不可能であるが,
(ii) 一方で$(M_2, \mathcal{F}_2, J_{\mathcal{F}_2})$は, $\mathbb{C}^3$のレビ平坦超曲面として実現可能であり,
(iii) leafwise複素構造を無視すると, $(M_1, \mathcal{F}_1)$と$(M_2, \mathcal{F}_2)$とはC^∞葉層付き多様体として同一のものである.

3.3. その他の応用その2 (K3曲面の貼り合わせ構成)

この節の内容は, 上原崇人氏との共同研究に基づく.

Sを複素射影平面$\mathbb{P}^2$の適切な9点$Z := \{p_1, p_2, \dots, p_9\} \subset \mathbb{P}^2$での爆発とする. Zを一般的に選ぶことでZを含むような$\mathbb{P}^2$の滑らかな楕円曲線が一意的に定まるが, この強変換を$C \subset S$と書くことにする (例 2を参照). ディオファントス条件の仮定の下, Arnol'dの定理から存在が保証されるCの正則管状近傍を固定し, そのS内での補集合をMとする. 一方で$Z' := \{p'_1, p'_2, \dots, p'_9\} \subset \mathbb{P}^2$を別の9点配置として, ここから構成した別のモデル(S', C', M')を考える. これらM, M'は, 適切なパラメータの選択の下では, それぞれ境界付近で正則に貼り合わせてコンパクト複素曲面を新たに構成することができる. こうして新しく出来上がった曲面XはK3曲面であることが示される:

定理 11 ([16]) CとC'とは双正則であり, それぞれの法線束$N_{C/S}$及び$N_{C'/S'}$はその同型を介して互いに双対であり ($N_{C/S} \cong N_{C'/S'}^{-1}$), かつ$N_{C/S}$は$\mathrm{Pic}^0(C)$の中でディオファントス条件を満たすとする. このとき, MとM'はその境界近傍を正則に貼り合わせることができ, 結果としてできる複素曲面はK3曲面となる.

尚, このようなArnol'dの定理を用いた貼り合わせ手法に基づくコンパクト複素多様体の構成は, [20]に於ける$S^3 \times S^3$の複素構造に関する研究にも用いられているものである. また, 本講演に於けるK3曲面の構成は, [7, Example 5.1]に於けるK3曲面の "gluing construction"の特別な場合とも見なせることに注意する. [7, Example 5.1]に於けるK3曲面の "gluing construction"では, M及びM'の複素構造を変形させることで貼り合わせを実現している. その一方で本講演の手法ではM及びM'の複素構造は変形させることなく正則な貼り合わせを実現しており, このことは今回の構成の一つの大きな特徴と言える. その結果として, 次を得る:

定理 12 ([16]及び上原氏との進行中の共同研究) K3曲面Xとして以下のようなコンパクトな (C^ω-級) レビ平坦超曲面の実一次元族$\{H_t\}_{t \in I}$を持つものが存在する: 各$t \in I$についてH_tは実三次元トーラスと同相であり, また任意の葉はH_t中で稠密である ($I \subset \mathbb{R}$はある開区間). また, H_tの各葉は, $\mathbb{C}$又は$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$のどちらかに同型である. さらにこのような$X$は, 以上の性質を保ちつつ複素19次元の自由度をもって変形可能であり, 特に一般のパラメータ設定の下では, Xは射影的ではなく, かつクンマー曲面でもない.

[1] V. I. Arnol'd, Bifurcations of invariant manifolds of differential equations and normal forms in neighborhoods of elliptic curves, Funkcional Anal. i Prilozen., 10-4 (1976), 1–12 (English translation : Functional Anal. Appl., 10-4 (1977), 249–257).

[2] D. E. Barrett, Complex analytic realization of Reeb's foliation of S^3, Math. Z., **203** (1990), 355–361.

[3] M. Brunella, On Kähler surfaces with semipositive Ricci curvature, Riv. Mat. Univ. Parma, **1** (2010), 441–450.

[4] D. E. Barrett, T. Inaba, On the Topology of Compact Smooth Three-Dimensional Levi-Flat Hypersurfaces, J. Geom. Anal., **2** (1992), no. 6, 489–497.

[5] J-P. Demailly, Complex Analytic and Differential Geometry, monograph, 2012, available at http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/demailly.

[6] J-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider, Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles, J. Algebraic Geom., **3** (1994), 295-345.

[7] M. Doi, Gluing construction of compact complex surfaces with trivial canonical bundle, J. Math. Soc. Japan, **61**, 3 (2009), 853–884.

[8] O. Fujino, A transcendental approach to Kollár's injectivity theorem II, J. Reine Angew. Math. **681** (2013), 149–174.

[9] H. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann., **146** (1962), 331–368.

[10] R. Hartshorne, Ample subvarieties of algebraic varieties, Lecture Notes in Math. **156**, Springer-Verlag, Heidelberg (1970).

[11] T. Koike, On minimal singular metrics of certain class of line bundles whose section ring is not finitely generated, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **65**, 5 (2015), 1953–1967.

[12] T. Koike, On the minimality of canonically attached singular Hermitian metrics on certain nef line bundles, Kyoto J. Math., **55**, 3 (2015), 607–616.

[13] T. Koike, Toward a higher codimensional Ueda theory, Math. Z., **281**, 3 (2015), 967–991, correction: `http://ktakayuki.github.io/correction_higher_codim_ueda_theory.pdf`.

[14] T. Koike, Higher codimensional Ueda theory for a compact submanifold with unitary flat normal bundle, arXiv:1606.01837.

[15] T. Koike, Ueda theory for compact curves with nodes, Indiana U. Math. J, **66**, 3 (2017), 845–876.

[16] T. Koike, Complex K3 surfaces containing Levi-flat hypersurfaces, arXiv:1703.03663.

[17] T. Koike, N. Ogawa, Local criteria for non embeddability of Levi-flat manifolds, to appear in J. Geom. Anal.

[18] A. Neeman, Ueda theory: theorems and problems., Mem. Amer. Math. Soc. **81** (1989), no. 415.

[19] O. Suzuki, Neighborhoods of a compact non-singular algebraic curve imbedded in a 2-dimensional complex manifold, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 11 (1975), 185–199.

[20] H. Tsuji, Complex structures on $S^3 \times S^3$, Tohoku Math. J. (2), **36**, 3 (1984), 351–376.

[21] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.

[22] T. Ueda, Neighborhood of a rational curve with a node, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **27** (1991), 681–693.