Complex K3 surfaces containing Levi-flat hypersurfaces

小池 貴之

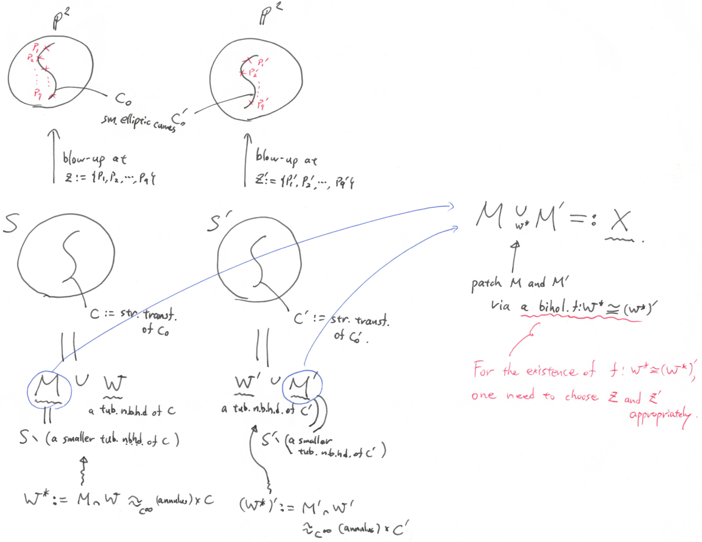
京都大学

2017 年 9 月 12 日

本講演の目標:

K3 曲面 X を, 二つの開複素曲面 M 及び M' を正則に貼り合わせることで構成する.

- M (M') は, $\mathbb{P}^2$ の適切な 9 点での爆発 S (S') に含まれる開部分多様体として得られる. 具体的には, M (M') は, S (S') のある楕円曲線の近傍の補集合.
- S も S' も, 所謂 "general" な方の 9 点配置から得られるものであり, つまり楕円曲面では**ない**.
- M と M' とを正則に貼り合わせるためには, 楕円曲線の近傍を巧く選ばなければならない. そのために, 9 点配置を適切に選ぶ必要がある.
- そのために, "よい近傍" の存在についての, 複素力学系由来の手法を応用する (Arnol'd の定理).


$\mathbb{P}^2$
p_1, p_2, p_9
C_0
sm. elliptic curves
C_0'
$\mathbb{P}^2$
p_1', p_2', p_9'
blow-up at $Z := \{p_1, p_2, \cdots, p_9\}$
blow-up at $Z' := \{p_1', p_2', \cdots, p_9'\}$
S
S'
$C :=$ str. transf. of C_0
$C' :=$ str. transf. of C_0'.
$M \cup W$
W: a tub. nbhd of C
$W' \cup M'$
W': a tub. nbhd. of C'
$M = S \setminus$ (a smaller tub. nbhd. of C)
$M' = S' \setminus$ (a smaller tub. nbhd. of C')
$W^* := M \cap W \approx_{C^\infty} (\text{annulus}) \times C$
$(W^*)' := M' \cap W' \approx_{C^\infty} (\text{annulus}) \times C'$
$M \cup_{W^*} M' =: X$.
patch M and M' via a bihol. $f: W^* \cong (W^*)'$
For the existence of $f: W^* \cong (W^*)'$, one need to choose Z and Z' appropriately.

補足と先行研究

- S, S' が楕円曲面であるような場合には, 同様の K3 曲面の構成が知られている. このとき出来上がった K3 曲面も楕円曲面となる.
- 土井氏による先行研究によれば, 任意の Z 及び Z' からも, M, M' の微小な複素構造の変形を許せば K3 曲面が貼り合わせで構成できる.

  (Doi, Mamoru, Gluing construction of compact complex surfaces with trivial canonical bundle. J. Math. Soc. Japan 61 (2009), no. 3, 853–884)
- Arnol'd 型の定理を用いた貼り合わせ構成の手法は, 辻氏による先行研究でも用いられており, それによって $S^3 \times S^3$ の複素構造について研究がなされている.

  (H. Tsuji, Complex structures on $S^3 \times S^3$, Tohoku Math. J. (2) Volume 36, Number 3 (1984), 351–376)

主結果

K3 曲面の構成を, 独立な 18 個のパラメータを許容する形で行った. その構成の結果として, 以下を得る:

Theorem (K-, arXiv:1703.03663)

18 次元の多様体 B 上の K3 曲面の変形空間 $\pi\colon \mathcal{X} \to B$ として, Kodaira-Spencer 写像が単射であり, かつ各ファイバー $X_b := \pi^{-1}(b)$ が以下のような正則写像 $F_b\colon \mathbb{C} \to X_b$ を持つようなものが存在する: 像 $F_b(\mathbb{C})$ の Euclidean な閉包は X_b のコンパクトなレビ平坦曲面. 特に $F_b(\mathbb{C})$ は Zariski 位相では稠密だが, Euclidean 位相では稠密でない. また general な $b \in B$ では, X_b は Kummer 曲面ではない.

尚, $F_b(\mathbb{C})$ の Euclidean な閉包は, $S^1 \times S^1 \times S^1$ に微分同相である.

最近の上原崇人氏との共同研究で, 先述の構成で得られる K3 曲面に対し, K3 格子の 22 個の生成元をサイクルとして具体的に記述した. さらに, 内 20 個のサイクルについて, nowhere vanishing な正則 2-form σ の積分値を具体的に計算することに成功し, その結果として主結果は以下のように改良できた:

Theorem (K-, Uehara (in progress))

19 次元の多様体 B 上の *K3* 曲面の変形空間 $\pi\colon \mathcal{X} \to B$ として, *Kodaira-Spencer* 写像が単射であり, かつ各ファイバー $X_b := \pi^{-1}(b)$ が以下のような正則写像 $F_b\colon \mathbb{C} \to X_b$ を持つようなものが存在する*:* 像 $F_b(\mathbb{C})$ の *Euclidean* な閉包は X_b のコンパクトなレビ平坦曲面. 特に $F_b(\mathbb{C})$ は *Zariski* 位相では稠密だが, *Euclidean* 位相では稠密でない. また *general* な $b \in B$ では, X_b は *Kummer* 曲面ではなく, 射影的でもない.

- S: 非特異な曲面
- C: S に正則に埋め込まれた楕円曲線であって, $(C^2) := \deg N_{C/S} = c_1(N_{C/S}) = 0$ なるもの.

S 中 C は, 管状近傍 W をもつ (管状近傍定理). W は, $N_{C/S}$ のゼロ切断のある近傍に 微分同相 だが, 双正則とは限らない.

興味

いつ C は 正則管状近傍 を持つか? つまり, いつ W は $N_{C/S}$ のゼロ切断のある近傍に双正則なるものとしてとれるか?

特に興味のある例:

滑らかな楕円曲線 $C_0 \subset \mathbb{P}^2$ を固定し, その上の 9 点配置 $Z := \{p_1, p_2, \ldots, p_9\} \subset C_0$ を考える.

- $S := \mathrm{Bl}_Z \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^2$: Z での爆発
- $C := \pi_*^{-1} C_0$: C_0 の強変換

ここで $N_{C/S} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(-p_1 - p_2 - \cdots - p_9)$ である. 特に Z を変えると $N_{C/S}$ は $\mathrm{Pic}^0(C)$ のどの値をもとり得る.

Question

この例で, C はいつ正則管状近傍を持つか?

Theorem (Arnol'd (1976))

一般に非特異曲面 S に埋め込まれた楕円曲線 C は, $N_{C/S} \in \mathrm{Pic}^0(C)$ が *Diophantine* である (つまり, $\exists A, \alpha > 0$ *such that* $\mathrm{dist}(\mathbb{I}_C, N_{C/S}^{\otimes n}) \geq A \cdot n^{-\alpha}$ *for* $\forall n > 0$, ここで dist は $\mathrm{Pic}^0(C)$ の *Euclidean* な距離). このとき C は正則管状近傍を持つ.

Question

先ほどの 9 点爆発の例 $(C_0, Z = \{p_1, p_2, \ldots, p_9\}, C, S)$ で, $N_{C/S} \in \mathrm{Pic}^0(C)$ が *Diophantine* でない場合には, C は正則管状近傍を持つか?

$(C_0, Z = \{p_1, p_2, \ldots, p_9\}, C, S)$ 及び
$(C'_0, Z' = \{p'_1, p'_2, \ldots, p'_9\}, C', S')$ を, 先述の 9 点爆発の例として, 以下を満たすものとする:

条件

- $\exists g \colon C \cong C'$
- $N_{C/S} = g^* N_{C'/S'}^{-1}$
- $N_{C/S} \in \mathrm{Pic}^0(C)$ は Diophantine

このとき, Arnol'd の定理から, C の正則管状近傍 $W \subset S$ 及び C' の正則管状近傍 $W' \subset S'$ が存在する.
二つ目の条件と "正則管状近傍" 性から,

- $M := S \setminus \overline{(W \text{ 中レビ平坦な境界を持つ } C \text{ の近傍})}$
- $M' := S' \setminus \overline{(W' \text{中レビ平坦な境界を持つ } C' \text{の近傍})}$

は正則に貼り合って, コンパクト複素曲面 X が出来る.

“$F_b\colon \mathbb{C} \to X$” の存在について

W^* を M と M' との “のりしろ” とする. W^* は W や W' の中の, 二つのレヴィ平坦超曲面で囲まれた領域と見做せる. W^* は (従って X も) 主結果の主張の様な $\mathbb{C}$ からの正則写像を許容する.

X が K3 なることの証明の概略

次を用いる:

Key Lemma

$H^0(W^*, \mathcal{O}_{W^*}) = \mathbb{C}$.

S (S') 上には, meromorphic 2-form η (η') として, $\mathrm{div}(\eta) = -C$ ($\mathrm{div}(\eta') = -C'$) なるものが存在する. Key Lemma から, η 及び η' の具体的な形が, “のりしろ” W^* 上で記述できる. このことから, 適切な正規化の下で $\eta|_M$ と $\eta'|_{M'}$ とは, W^* 上貼り合って, X 上に nowhere vanishing な正則 2-form σ を定めることが分かる.
また, 位相幾何学的な (簡単な) 議論から $\pi_1(X) = 0$ が分かり, 従って X が K3 曲面であることが分かる.

lattice	cycle	$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\sigma$	corresponding parameter
U	$A_{\beta,\gamma}$	τ	choice of C_0 (and C'_0)
	B_α	???	choice of w_j's (R, R',...)
U	$A_{\gamma,\alpha}$	1	—
	B_β	???	choice of w_j's (R, R',...)
$E_8(-1)$	$C_{1,2}$	"$p_2 - p_1$" in C	choice of $p_2 - p_1$
	$C_{2,3}$	"$p_3 - p_2$" in C	choice of $p_3 - p_2$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$C_{7,8}$	"$p_8 - p_7$" in C	choice of $p_8 - p_7$
	$C_{6,7,8}$	"$p_6 + p_7 + p_8$" in C	choice of $p_6 + p_7 + p_8$
$E_8(-1)$	$C'_{1,2}$	"$p'_2 - p'_1$" in C'	choice of $p'_2 - p'_1$
	$C'_{2,3}$	"$p'_3 - p'_2$" in C'	choice of $p'_3 - p'_2$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$C'_{7,8}$	"$p'_8 - p'_7$" in C'	choice of $p'_8 - p'_7$
	$C'_{6,7,8}$	"$p'_6 + p'_7 + p'_8$" in C	choice of $p'_6 + p'_7 + p'_8$
U	$A_{\alpha,\beta}$	$a_\beta - \tau \cdot a_\alpha$	choice of p_9 and p'_9 (i.e. $N_{C/S}$ and $N_{C'/S'}$)
	B_γ	"$p'_9 - g(p_9)$"	choice of $g\colon C \cong C'$