Toward a higher codimensional Ueda theory

小池 貴之

東京大学

September 15, 2015

1. 目標と主結果について
2. 上田理論との比較
3. 応用について

1. 目標と主結果について
2. 上田理論との比較
3. 応用について

設定と目標

- X : 複素多様体 (非特異),
- S : X の超曲面 (非特異),
- C : S の超曲面 (非特異), コンパクト Kähler.

として, 法線束 $N_{S/X}$ が S 中 C のある近傍 V で平坦であるようなものを考える: つまり,

$$N_{S/X}|_V \in H^1(V, U(1)) \qquad (U(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}).$$

目標

因子 S が定める直線束 $[S]$ は, いつ X 中 C 近傍で平坦となるか?

ここで, $[S]|_S = N_{S/X}$ に注意する.

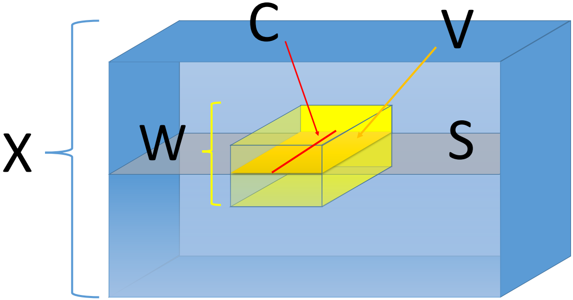
目標の言い換え

- W : X 中 C の管状近傍 ($\Longrightarrow$ $C \simeq W$)
- $\widetilde{N}$: 自然な同型 $H^1(C, U(1)) \cong H^1(W, U(1))$ で $N_{S/X}|_C$ に対応する W 上の平坦直線束.

$[S]|_V = \widetilde{N}|_V$ に注意すると, 先述の目標は, 以下のように言い換えられる:

目標

直線束 $[S]$ と $\widetilde{N}$ とは, いつ X 中 C 近傍で一致するか?



定義 1 (上田の意味での "無限型" [U83] の類似)

組 (C, S, X) が無限型であるとは, 任意の $n \geq 1, m \geq 0$ について, 以下が成立することとする:

$$[\mathcal{O}_W([S]) \otimes (\mathcal{O}_W/I_V^{n+1})] \otimes (\mathcal{O}_V/I_C^{m+1})$$
$$\cong [\mathcal{O}_W(\widetilde{N}) \otimes (\mathcal{O}_W/I_V^{n+1})] \otimes (\mathcal{O}_V/I_C^{m+1}).$$

($I_V \subset \mathcal{O}_W, I_C \subset \mathcal{O}_V$ は, それぞれ V, C の定義イデアル)

- $\mathcal{E}_0(C) := \{\mathrm{Pic}^0(C)$ の捻じれ元全体$\}$.
- $\mathcal{E}_1(C) := \{L \in \mathrm{Pic}^0(C) \mid \log d(\mathbb{I}_C, L^n) = O(\log n)\}$.

主結果 ([K, Theorem 1])

次の三条件の内のいずれかの成立を仮定する:
(i) $N_{C/S} \in \mathcal{E}_0(C)$ かつ $N_{S/X}|_C \in \mathcal{E}_0(C)$,
(ii) $N_{C/S}$ と $N_{S/X}|_C$ とは同型で, かつ共に $\mathcal{E}_1(C)$ の元,
(iii) $N_{S/X}|_C \in \mathcal{E}_0(C)$ であり, かつ C の S 中 *strongly 1-convex* な近傍 V として, C が V の極大コンパクト部分多様体となっているようなものが存在する.

このとき, 組 (C, S, X) が無限型であるならば, X 中 C の近傍 W として $[S]|_W$ が平坦なるものが存在する.

Theorem 1 ([U83, Theorem 3])

複素多様体 X のコンパクト Kählerで滑らかな超曲面 S として, $N_{S/X}$ が平坦なものを考える. さらに $N_{S/X} \in \mathcal{E}_0(S) \cup \mathcal{E}_1(S)$ を仮定する. 組 (S, X) が無限型であるならば, X 中 S の近傍 W として $[S]|_W$ が平坦なるものが存在する.

	上田の定理	今回の主結果
設定	$S \subset X$	$C \subset S \subset X$
余次元	1	それぞれ 1
法線束	$N_{S/X}$: 平坦	$N_{S/X}$: C 近傍で平坦
仮定	$N_{S/X}$ について	$N_{S/X}\|_C$, $N_{C/S}$ について
結論	$[S]$: S 近傍で平坦	$[S]$: C 近傍で平坦

1. 目標と主結果について
2. 上田理論との比較
3. 応用について

系 2 (主定理の応用)

$C_0 \subset \mathbb{P}^3$ を互いに横断的に交わる二つの二次曲面の交差とする．互いに相異なる 8 点 $p_1, p_2, \dots, p_8 \in C_0$ を固定する．直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1 + p_2 + \cdots + p_8)$ が $\mathcal{E}_0(C_0) \cup \mathcal{E}_1(C_0)$ の元である場合には, $\mathbb{P}^3$ の $\{p_j\}_{j=1}^8$ での爆発 X の反標準束 K_X^{-1} は半正である *(つまり K_X^{-1} には C^∞ 計量で半正曲率をもつものが存在する)*.

注意 3

この系は, 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の 9 点爆発の反標準束の半正性についての上田の定理の応用 *([B])* の類似である.

問題 4 (Totaro の問題 [T])

射影的複素多様体 X 上の直線束 L として, L がネフ (任意の X の閉複素曲線 C に対して $L.C \geq 0$) なものに対し, $A(L) := \{C \subset X \mid C : X$ の閉複素曲線, $L.C = 0\}$ は可算濃度を持ち得るか?

定理 5 (Lesieutre, Ottem [LO])

$\mathbb{P}^3$ の 8 点爆発 X について, 8 点配置が一般的な時には, $(X, L = K_X^{-1})$ は *Totaro* の問題のような例を与えている.

系 6 (主定理の系からの帰結)

射影的複素多様体 X は, K_X^{-1} がネフよりもより強く半正であっても, $A(K_X^{-1})$ は可算濃度を持ち得る.

- M. Brunella, On Kähler surfaces with semipositive Ricci curvature, Riv. Mat. Univ. Parma, **1**, 441–450 (2010).
- T. Koike, Toward a higher codimensional Ueda theory, Math. Z, doi: 10.1007/s00209-015-1516-6.
- T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.
- J. Lesieutre, J. C. Ottem, Curves disjoint from a nef divisor, arXiv:1410.4467.
- B. Totaro, Moving codimension-one subvarieties over finite fields, Amer. J. Math. **131** (2009), 1815–1833.