特異点セミナー

No. 1

Date . .

§1. 概要
§2. 解析からの準備
§3. §2の諸概念と代数との関係
§4. 主定理について
§5. 主定理の応用について

$\mathcal{J}(p|L|)$

$\{\mathcal{J}(\frac{1}{p}|pL|)\}$

$p \in \mathbb{N}$

§1. 概要

$\left\| \begin{array}{l} X: \text{sm. proj. var}/\mathbb{C} \\ L: \text{big hol. line bdl}/X \end{array} \right.$

<u>主定理</u> X: 特別な toric bdl である時に
Lの minimal singular Herm. metric $h_{\min, L}$ を
具体的に構成した。

‖① Lが nef になるための障害の情報

§2. 解析からの準備

<u>Def</u> (plurisubharmonic function, or "psh")

$\Omega \subset \mathbb{C}^n$: dom

$\varphi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \circ\ \varphi: \text{upper-semiconti} \\ \circ\ \forall L \subset \mathbb{C}^n: \text{line},\ \varphi|_{\Omega \cap L}: \text{subharmonic}, \\ \circ\ \not\equiv -\infty \end{array} \right.$

<u>Properties</u> ∘ ~~φ: psh, f: hol $\rightsquigarrow \varphi \circ f$: psh~~

~~$\rightsquigarrow U \subset X$: 開集合に対し "$\varphi$: U上 psh"~~ は well-def.

∘ φ: psh $\Rightarrow \varphi: L^1_{loc}$

$\rightsquigarrow \varphi$: psh $\Longrightarrow dd^c\varphi \geq 0$

$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}$

"(1,1)-current"

$\Longleftarrow$ 〃 + φ: upper semi conti.

L^1_{loc}

No.

Date

hol (ideal) $\rightsquigarrow$ psh

Zero $\rightsquigarrow$ "$-\infty$"

eg

- ~~f: hol. $\rightsquigarrow$ $\log|f|^2$: psh. on Ω~~
  ~~$dd^c\log|f|^2 = [\mathrm{div}(f)] :=$~~ "$\int_{f=0}$ —"
- $f_1, \cdots, f_N$: hol, $t>0$
  $\rightsquigarrow$ $t\log\sum|f_j|^2$: psh.

X : cpx mfd.
L : line bdl$/X$

Def (singular Herm. metric)

h : singular Herm. metric on L

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, h_\infty$: C^∞ Herm. metric on L
$\exists\, \psi$: L^1_{loc} on X
s.t. $h = h_\infty \cdot e^{-\psi}$ //

Rmk ① $h \underset{\text{local}}{=} e^{-\varphi}$ を h の local weight と呼ぶ。

② $dd^c\varphi$'s glue up to define the curvature current $\sqrt{-1}\Theta_h$ assoc. to h //

eg

h_∞ : L の sm. metric
$s_1, \cdots, s_N \in H^0(X, L^{\otimes m})$
$\rightarrow \left(\dfrac{1}{\sum|s_j(x)|^2_{h_\infty}}\right)^{\frac{1}{m}} \cdot h_\infty|_x$ で L_x の "metric" を定める
$\rightsquigarrow$ これは (h_∞ によらず) sing Herm. metric.
local weight $= \underbrace{\frac{1}{m}\log\sum|f_j|^2}_{\text{psh}}$. ($f_j$: s_j を local に hol. func. とみたもの)
$\rightsquigarrow$ $\sqrt{-1}\Theta_h \geq 0$

fact L : psh. eff $\Longleftrightarrow$ $\exists\, h$: sing Herm. metric on L, s.t. $\sqrt{-1}\Theta_h \geq 0$ //

Def (minimal sing. Herm. metric)

$h_{min,L} = e^{-\varphi_{min,L}}$; sing. Herm. metric on L
が min. sing. Herm. metric とは

(i) $dd^c \varphi_{min,L} \geq 0$

(ii) $\forall h = e^{-\psi}$; sing. Herm. metric on L, with $dd^c \psi \geq 0$,
$\forall x$, $\exists C > 0$, $\psi \leq \varphi_{min,L} + C$ around x //

Thm (Demailly, Peternell, Shneider)

L : psd. eff $\Rightarrow$ $\exists h_{min,L}$: min. sing. Herm. metric on L //

27分

§3 §2の諸概念と代数との関係

◎ φ : psh on $\underset{x}{\Omega} \underset{\text{dom}}{\subset} \mathbb{C}^n$

$J(\varphi)$: multiplier ideal sheaf を
$J(\varphi)_x := \{ f \in \mathcal{O}_{\Omega,x} \mid |f|^2 e^{-\varphi}$: loc. intble around $x \}$ で def

$\longrightarrow$ $f_1, \cdots, f_N$: Ω上 hol $\mathfrak{a} := (f_1, \cdots, f_N) \subset \mathcal{O}_\Omega$ とし
$t > 0$ に対して

$$J(t \log \sum |f_j|^2) = J(\mathfrak{a}^t)$$
//

◎ **Thm** (Boucksom)

L : big/X proj.s $\Rightarrow$ $B_-(L) \left(:= \bigcup_{\varepsilon > 0} SB(L + \varepsilon A)\right)$ A ample

$$= \{ x \in X \mid \nu(\varphi_{min,L}, x) > 0 \}$$

where $\varphi_{min,L}$; loc. weight of $h_{min,L}$

$\nu(\underset{\text{psh}}{\varphi}, x) := \liminf_{z \to x} \dfrac{\varphi(z)}{\log |z - x|^2}$; Lelong number

c.f. $\varphi = \log \sum |f_j|^2$,
$\mathfrak{a} = (f_1, \cdots, f_N) \longrightarrow \nu(\varphi, x) = \mathrm{Ord}_x \mathfrak{a}$ //

略

$\beta_i v^a$
$\Rightarrow \mathcal{O}_X(K_X+L+(n+1)B)\otimes \mathcal{J}(h_{min})$: gen. by global sec.

$\forall P$: nef big.
$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X+L+P)\otimes \mathcal{J}_+(h)) = 0$ for $\forall i>0$ ← $\mathcal{J}(\|L\|)$も.
(cf. 3.16)

◎ X: sm. proj. var/$\mathbb{C}$, L: big /X
$\mathcal{J}_+(h_{min,L}) := \mathcal{J}((1+\varepsilon)\varphi_{min,L})$ については. $(\varepsilon \ll 1)$

(cf) asymptotic multip. ideal sheaf
$\mathcal{J}(\|L\|) :=$ maximal elem. of $\{\mathcal{J}(\frac{1}{p}|pL|)\}_{p>0}$
と同様の vanishing thm. が成立 (Demailly, Ein, Lazarsfeld, 2000)

$\mathcal{J}_+(h_{min}) \subseteq \mathcal{J}(\|L\|) \subseteq \mathcal{J}(h_{min})$

Question ① B_-: Z-closed? --- negative (Lesieutre, 2012)
② $\mathcal{J}_+(h_{min,L}) = \mathcal{J}(h_{min,L})$? (Demailly-Kollár conj)

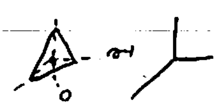
§4. 主定理について

--- $h_{min,L}$ の具体的な形について。 (33)

◎ L: ample $\Rightarrow h_{min,L}$ は sm にとれる (小平の埋め込み定理)
◎ L: birat'l Zariski-decomp. 可 --- neg. part で $\varphi_{min,L}$ の $-\infty$への発散が。
~~(i.e. $\exists f: \tilde{X} \to X$: proper modification, $f^*L_Y = P + f^*N_Y$: divisorial Z.D., P: nef.~~
~~$N = \sum r_i \operatorname{div}(g_i)$ として $\varphi_{min,L}$ の $-\infty$への発散は~~
~~ほとんど $\log \prod |g_i|^{2r_i}$ として扱える~~

→ Z.D. 不可能な場合は?
--- ◎ Nakayama --- X: abel. sur. 上の $\mathbb{P}^2$-bdl ← これについて
◎ Lesieutre --- X: $\mathbb{P}^3$ の 9点 b-up.

以下 X: sm. proj. toric bdl / cpx torus とする
つまり 以下のようなもの.



V: cpx torus $\dim = g$
$N := \mathbb{Z}^n$, $M := N^\vee$
Σ: N の fan, $0 \in \mathring{P}$ なる rat'l polyhed $P \subset N_\mathbb{R}$ から生成
$\mathcal{L}: \operatorname{Pic}(V) \longrightarrow M$: group hom.

を用いて $X := T_N(\Sigma, \mathcal{L}) \xrightarrow{\pi} V$: V 上の toric bdl が定まる.

定め方　$\sigma \in \Sigma$; cone

$\to \mathbb{T}_N(\sigma, \mathcal{L}) := \mathrm{Spec}_V \bigoplus_{m \in \sigma^\perp \cap M} \mathcal{L}^m$ のはりあわせて $\mathbb{T}_N(\Sigma, \mathcal{L})$ と def //

Rmk　$\sigma = \mathrm{cone}\{v_1, \cdots, v_n\}$ ($v_1, \cdots, v_n$ は N を生成)

$\rightsquigarrow s^1, \cdots, s^n$; $\mathcal{L}^{v^i}$ の local triv. とって，

$$\mathbb{T}_N(\sigma, \mathcal{L})|_z = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[s^1(z), \cdots, s^n(z)]$$
$$(z \in V) \quad = \prod \mathbb{C}\, s_j(z)$$

Rmk　$\mathcal{L}^{v^i}$; V 上 line bdl に対して
自然な局所自明化 s_j を選ぶことができる．
これを用いて local coord
$(x^1, \cdots, x^n, z) \longmapsto (x^1 s_1(z), \cdots, x^n s_n(z)) \in \prod \mathbb{C}\, s_j(z)$

$\mathbb{T}_N(\sigma, \mathcal{L})|_z = \prod \mathbb{C}\, s_j(z)$ が自然に定まる //

以下，L_0 を V 上の line bdl，
$h : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ を Σ の各 cone 上 lin. かつ $h(N) \subset \mathbb{Z}$ なるもの，
$L \cong \pi^* L_0 \otimes \mathcal{O}(D_h)$ とする
また，L : big とする．

Def　$\square(L) := \left\{ m \in M_{\mathbb{R}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in N_{\mathbb{R}},\ \langle m, x \rangle \geq h(x) \\ L_0 \otimes \mathcal{L}^m : \text{nef} \end{array} \right\}$ とする

$\rightsquigarrow \square(L)$: cpt, 凸，

$$\underset{\mathbb{T}_N(\Sigma, \mathcal{L})}{H^0(\overset{\shortparallel}{X}, L)} = \bigoplus_{m \in \square(L) \cap M} \chi^m\, \pi^* H^0(V, L_0 \otimes \mathcal{L}^m)$$

where $\chi^m(\underbrace{x^1, \cdots, x^n, z}_{\mathbb{T}_N(\sigma, \mathcal{L}) \subset X \text{ の loc. coord.}}) = \prod_{j=1}^{n} (x^j)^{\langle m - m_\sigma, v_j \rangle}$

($\{m_\sigma\}$: D_h の Cartier data, $\prod (x^j)^{\langle m_\sigma, v_j \rangle}$ で $\mathcal{O}(D_h)$ の loc. triv. を与えた時の表示)

$h_{min,L}$ について

$m \in \square(L)$

→ L の slg. Herm metric h_m を. $\pi_N(\Sigma, \mathcal{L})$ での local weight $\psi_{m,\sigma}$ が

$$\psi_{m,\sigma} = \log|\chi^m|^2 + \left(\begin{matrix}\pi^*(L_0 \otimes \mathcal{L}^m) \text{ による特別な} \\ \text{sm. semipositive metric}\end{matrix}\right)$$

となるように定まる

⇝ $\psi_\sigma := \max_{m\in\square(L)} \psi_{m,\sigma}$; psh.

$\{e^{-\psi_\sigma}\}_\sigma$ は はりあって slg Herm metric h を def.

Thm h は L の min. slg Herm. metric,

また $\psi_\sigma = \log \max_{m\in\square(L)} \prod_{j=1}^{n} (x^j)^{\langle m-m_\sigma, v_j\rangle} + O(1)$ //

§5. 応用　　Cor 上の class では $\mathbb{B}_-$: Z-closed.

Cor ———— , D.K. conj : affirmative

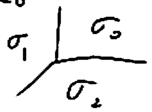
中山の例について … $V = E \times E$ gen sm. ellipc curve

$n = 2$

$\mathcal{L}$: $\mathrm{Pic}(V) \longrightarrow M = \mathbb{Z}v^1 \oplus \mathbb{Z}v^2$

$L_1 - L_0 \longmapsto v^1$

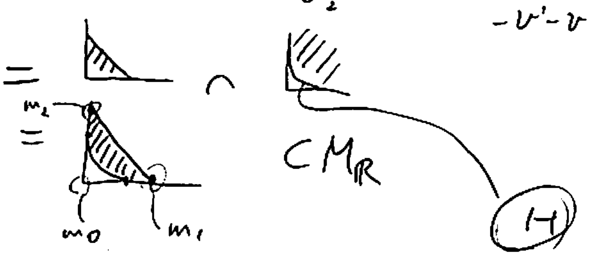
$L_2 - L_0 \longmapsto v^2$

$\Sigma =$ 

h: $v^1 \longmapsto 0$

$v^2 \longmapsto 0$

$-v^1 - v^2 \longmapsto -1$

⇝ $\square(L) =$ 

→ $\psi_{\sigma_1}, \psi_{\sigma_2}$: conti

$\psi_{\sigma_0} \sim \log \max_{(\alpha,\beta)\in H} |x^1|^{2\alpha}|x^2|^{2\beta}$

$\rightsquigarrow \mathcal{J}(h^{t}_{\min,L})_x \qquad (x \in \{x^1 = x^2 = 0\})$

$= \langle (x^1)^p (x^2)^q \mid (p+1, q+1) \in$  の内部 $\rangle$

1:07

$\rightsquigarrow \mathrm{Jump}(\varphi_{\min,L}, x) = \left\{ 4T^2 - 4pT - 7p^2 + q^2 \text{ の根} \;\middle|\; \begin{array}{l} p, q \in \mathbb{Z} \\ 0 \le q < p \\ p \equiv q \mod 2 \end{array} \right\}$

とくに $c_x(\varphi_{\min,L}) = 2\sqrt{2} + 1$ //

No.

Date . .

[DEL] -- Demailly, Ein, Lazarsfeld.

a subadditivity property of multiplier ideals

[DPS] -- pseudo-effective line bundles

on compact Kähler manifolds

Demailly Peternell Schneider.