On the semi-positivity of a nef line bundle and the neighborhood of the stable base loci

小池 貴之　(東京大学)*

1. 目標

本講演は複素代数多様体上の正則直線束の**極小特異エルミート計量**に関するものである．正則直線束 L の極小特異エルミート計量とは, L の特異エルミート計量 ($+\infty$ への発散等も認めたエルミート計量) で半正曲率を持つものの中で最も特異性 ($+\infty$ への増大の仕方) が小さい (マイルドである) もののことである．例えば, L が**半正**である, つまり L に滑らかなエルミート計量 h として曲率が半正なるものが存在するときには, この h は L の極小特異エルミート計量となっている．極小特異エルミート計量は一般的な存在証明がなされているのみであり, その証明からは具体的にどこでどのような特異性を持つのかは一切分からない．本講演で述べる研究の目標は, 代数幾何学的に重要ないくつかの状況に於いて, **極小特異エルミート計量を具体的に決定し, その特異性 ($+\infty$ への増大度など) について調べる**ことにある．

2. 知られていたこと

以下, X を滑らかな複素代数多様体, L を X 上の正則直線束とする．本講演で扱うのは, L が有効であり (つまり L が非自明な正則大域切断を持ち), かつ L が**数値的半正 (ネフ)** であるとき (つまり X の任意の閉曲線 C に対して交点数 $(L.C)$ が非負であるとき) である．尚, 上記の数値的半正という性質は, 半正性の数値幾何的な類似である．一方で半正性の代数幾何的な類似概念として, **半豊富**がある．L が半豊富であるとは, L の安定固定部分が空である (つまり適切な自然数 m に対して L^m の正則大域切断たちが共通零を持たない) ということである．これらの間には, 以下のような関係がある:

$$L:\ \text{半豊富} \implies L:\ \text{半正} \implies L:\ \text{数値的半正}$$

これらの逆は一般には成立しないことが知られている．従って数値的半正な L の極小特異エルミート計量の特異性は, L が半正 (又は半豊富) になるための障害の情報と見なせることに注意する．

L のある正則大域切断の零因子 S を固定する (つまり層として $L = \mathcal{O}_X(S)$)．我々の設定で主に興味があるのは, S **の法線束の第一チャーン類が消えている** (つまり L の S の台への制限が topologically trivial) である場合である．以下簡単のため S は被約であると仮定する: $S \subset X$．これまでの研究から我々は, 以上のような L の半正性や極小特異エルミート計量の研究を行う上では, X 中での S 近傍の複素解析幾何学的性質を調べることが重要であると考えている．実際, 以下の意味で S 近傍の複素構造が (L の安定固定部分近傍で) 簡単なものである場合には, L の半生性が従うことが分かっている:

定理 1 ([K3, Corollary 1] の証明中の議論, [B] 及び [K2, Corollary 3.5] も参照せよ)．X, L, S を上記のものとする．$C \subset S$ を部分多様体として, ある m に対して $\bigcap_{f\in H^0(X,L^m)}\{f=0\} \subset C$ となり, かつある C の X 中での近傍 W 上で直線束 $L|_W$

*e-mail: tkoike@ms.u-tokyo.ac.jp

が平坦である *(*つまり $L|_V \in H^1(V, U(1))$, $U(1) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$*)* とする．このときLは半正である． □

さらに以下で述べるとおり, S 近傍の複素構造が "複雑" である場合に, L が半正でないという旨の主張も得られる．ここで部分多様体近傍の複素構造の複雑さを記述/理解するために, 所謂**上田理論** [U83] の応用を考える．上田は, 複素曲面 X と, X に埋め込まれた滑らかな閉曲線 S として法線束がtopologically trivialなものの組 (S, X) を, S が X 中に有限次のジェットの段階で複雑な複素構造を持つ場合である "有限型" と, そうでない場合である "無限型" とに分類した．さらに上田は組 (S, X) が有限型であるときに, S 近傍における多重劣調和関数の増大度に制限があることを示した．この定理を応用することで, 次を得る:

定理 2 ([K2, Theorem 1]). *X, S, L を上記のものとして, さらに X が曲面, S が滑らかなものであることを仮定する．組 (S, X) が有限型であるとき, $f_S \in H^0(X, \mathcal{O}_X(S))$ をその標準切断 (零点が S となる切断) として, $|f_S|^{-2}$ は直線束 L の極小特異エルミート計量である (極小特異エルミート計量が S に沿って特異性を持っているので, 特にこのとき, 数値的半正直線束 L は半正ではない).* □

3. 余次元が2である場合の上田理論とその応用

まず, **上田理論の余次元が2である場合のアナロジー**についての考察を行う [K3]. 上田は X を複素多様体, S をその滑らかでケーラーなコンパクト超曲面で $c_1(N_{S/X}) = 0$ かつ組 (S, X) が無限型なるものとして, 直線束 $\mathcal{O}_X(S)$ が S の近傍で平坦直線束となるための十分条件を記述した ([U83, Theorem 3], X は曲面でなくより高次元でもよい). ここでは L の安定固定部分の余次元が高い場合を想定し, この上田の定理の余次元2版として, X を複素多様体, S をその滑らかな超曲面, C を S の滑らかでケーラーなコンパクト超曲面で $c_1(N_{S/X}|_C) = 0$ なるものとして, 直線束 $\mathcal{O}_X(S)$ が C の近傍でも平坦直線束となるための十分条件を記述する (S の法線束自体には仮定を付けず, その C 近傍での仮定のみを課していることに注意する).

上記のような三つ組み (C, S, X) に対し, 上田による障害類の余次元2でのアナロジーとして, 障害類 $u_{n,m}(C, S, X) \in H^1(C, N_{S/X}|_C^{-n} \otimes N_{C/S}^{-m})$ を定義し, 次を示した:

定理 3 ([K3, Theorem 1]). *X を複素多様体, S をその滑らかな超曲面, C を S の滑らかでケーラーなコンパクト超曲面として, 法線束 $N_{S/X}$ が S 中 C の近傍で平坦であるようなものとする．次の三条件の内のいずれかの成立を仮定する: (i) $N_{C/S} \in \mathcal{E}_0(C)$ かつ $N_{S/X}|_C \in \mathcal{E}_0(C)$, (ii) $N_{C/S}$ と $N_{S/X}|_C$ とは同型であり, 共に $\mathcal{E}_1(C)$ の元である, (iii) $N_{S/X}|_C \in \mathcal{E}_0(C)$ であり, かつ C の S 中 strongly 1-convex な近傍 V として, C が V の極大コンパクト部分多様体となっているようなものが存在する．このとき, 組 (C, S, X) が無限型であるならば (つまり, 任意の $n \geq 1, m \geq 0$ に対して $u_{n,m}(C, S, X) = 0$ であるならば), X 中 C の近傍 W として $\mathcal{O}_X(S)|_W$ が平坦なるものが存在する.* □

ここで $\mathcal{E}_0(C)$ は $\mathrm{Pic}^0(C)$ のねじれ元全体の集合であり, 集合 $\mathcal{E}_1(C)$ は

$$\mathcal{E}_1(C) := \{E \in \mathrm{Pic}^0(C) \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}_{>0} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{Z}_{>0},\ d(\mathcal{O}_C, E^n) \geq (2n)^{-\alpha}\}$$

で定義される集合である (d は $\mathrm{Pic}^0(C_0)$ のユークリッド距離). $\mathrm{Pic}^0(C)$ 中 $\mathcal{E}_1(C)$ はルベーグ全測度部分集合である一方で, 疎な閉集合の可算和として実現される部分集合である

ことが知られている. またCの次元が1である場合には, 定理3の条件(iii)は以下の条件と同値であることがGrauertの定理から分かる: $N_{C/S}$が負であり, かつ$N_{S/X}|_C \in \mathcal{E}_0(C)$である.

[U83, Theorem 3] の代数幾何学的な状況への重要な応用の一つとして, 射影平面$\mathbb{P}^2$の9点爆発Xの反標準束K_X^{-1}が半正であるための十分条件の記述がある ([B] も参照). このアナロジーとして, 定理3には次のような応用がある:

系 4. $C_0 \subset \mathbb{P}^3$を互いに横断的に交わる二つの二次曲面の交差とする. 互いに相異なる8点$p_1, p_2, \ldots, p_8 \in C_0$を固定する. 直線束$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1 + p_2 + \cdots + p_8)$が$\mathcal{E}_0(C_0) \cup \mathcal{E}_1(C_0)$の元である場合には, $\mathbb{P}^3$の$\{p_j\}_{j=1}^8$での爆発Xの反標準束K_X^{-1}は半正である. 特に$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1 + p_2 + \cdots + p_8) \in \mathcal{E}_1(C_0)$なる場合には, K_X^{-1}は半豊富でないが半正である. □

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1 + p_2 + \cdots + p_8) \in \mathcal{E}_0(C_0)$なる場合には$K_X^{-1}$は半豊富であり, ここから直ちに半正でもあることが分かることに注意する. その一方で$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1 + p_2 + \cdots + p_8) \notin \mathcal{E}_0(C_0)$なる場合には, K_X^{-1}の安定固定部分はC_0の強変換$C \subset X$と一致し, (数値的半正だが) 半豊富ではない例となっていることが分かる.

表 1: $\mathbb{P}^3$の8点爆発Xの反標準束K_X^{-1}の性質 ($N := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1+p_2+\cdots+p_8)$).

	N : torsion	N : non-torsion
固定部分 $\mathbb{B}(K_X^{-1})$	$\emptyset$ or C	C
半豊富性	半豊富	半豊富でない
飯高次元	2	1

Lesieutre・Ottem両氏は, 十分に一般の8点配置に対して$\mathbb{P}^3$の8点爆発Xの反標準束K_X^{-1}が以下の性質を満たすことを示した: K_X^{-1}は数値的半正である一方で, $(K_X^{-1}.C) = 0$なるXの曲線Cは可算無限個である ([LO], これはTotaro氏の問題に回答を与えている). この結果と系4とを組み合わせることで次が分かる: 三次元射影的多様体X上の直線束Lとして, Lは数値的半正である一方で$(L.C) = 0$なるXの曲線Cが可算無限個であるような例が存在する (十分に一般の8点配置に対して$\mathbb{P}^3$の8点爆発Xとその上の反標準束$L := K_X^{-1}$がこのような例となっている).

4. 高々ノードを持つ曲面に関する上田理論とその応用

以上はSが滑らかである場合についてであるが, Xが曲面である場合については, Sが高々ノード特異点を持つ場合のアナロジーも得ている [K4]. この場合について, 上田による障害類のアナロジーとして障害類$u_n(C, S) \in H^1(C, N_{S/X}|_C^{-n})$を定義し, 上田の定理 [U83, Theorem 1, 2, 3], [U91, Theorem 1, 2] のアナロジーを得た. それらと上記の定理1や定理2の証明の議論を組み合わせることで, 例えば以下を得る:

定理 5. Xを滑らかな複素曲面, $S \subset X$を有理曲線のサイクルであって$L := \mathcal{O}_X(S)$のSへの制限$L|_S =: N_{S/X}$が*topologcally trivial*であるものとする.
(i) $N_{S/X}$が平坦であり, さらに$N_{S/X} \in \mathcal{E}_1(S)$である場合には, Lは半正である.
(ii) $N_{S/X}$が平坦でない場合には, $f_S \in H^0(X, \mathcal{O}_X(S))$をその標準切断として, $|f_S|^{-2}$は直線束Lの極小特異エルミート計量である *(*極小特異エルミート計量がSに沿って特異性を持っているので, 特にこのとき, 数値的半正直線束Lは半正ではない*)*. □

定理5で, Sが"有理曲線のサイクル"であるとは次の意味で言っている: Sは, その正規化の各既約成分が滑らかな有理曲線であるような, 高々ノードのみを許すコンパクト複素曲線であり, さらにその双対グラフ (頂点集合がSの既約成分全体の集合であり, 辺集合がSのノード全体であるようなグラフ) がサイクルグラフである (Sがただ一つのノードを持つ既約な有理曲線である場合も認めている). また, Sが滑らかであった場合には, S上のtopologically trivialな正則直線束は必ず平坦直線束であったのに対して, Sがノードを許す場合にはこの事実は一般には成立しないことに注意する.

先述の通り, 射影平面$\mathbb{P}^2$の9点爆発Xの反標準束K_X^{-1}の半正性に関する研究には, [U83, Theorem 3]が応用できることが知られている. このアナロジーとして, 定理5を応用することでより一般の9点配置についてのK_X^{-1}の半正性が考察できる. まず, どのような$\mathbb{P}^2$の9点配置に対しても, それら9点をすべて包含するような3次曲線$S_0 \subset \mathbb{P}^2$が存在することに注意する. 以下S_0の強変換をSと書く. [U83, Theorem 3]が応用できるのは, S_0が滑らかである (従ってSが滑らかである) 場合である. 上記定理5の前半の主張(i)からは, この応用の, S_0がノードを許す場合への自然な一般化を得る:

系 6. *X射影平面$\mathbb{P}^2$の9点爆発, $S \subset X$を上記のものとする. Sが滑らかであるか, または高々ノードのみを許すことを仮定する. また反標準束K_X^{-1}が数値的半正であることも仮定する. このとき, $N_{S/X} \in \mathcal{E}_0(S) \cup \mathcal{E}_1(S)$ならば, K_X^{-1}は半正である.* □

先述の[U83, Theorem 3]の応用 (つまり系6のS_0が滑らかである場合) に関連して, 以下のような問題がある:

問題 7 (Demailly, ...). X射影平面$\mathbb{P}^2$の9点爆発, $S \subset X$を上記のものとする. Sは滑らかであるとする. このとき, K_X^{-1}が半正でないような9点配置は存在するか? □

一方で定理5の後半の主張(ii)からは以下が従う:

系 8. *$\mathbb{P}^2$のある9点配置として, それらでの$\mathbb{P}^2$の爆発Xの反標準束K_X^{-1}が数値的半正だが半正でないようなものが存在する.* □

Corollary 8は上記の質問7に関連する結果ではあるが, 質問7そのものへの回答は与えられてはいない. これはSが滑らかである場合には, $N_{S/X}$はtopologically trivialならば必ず平坦になってしまう為である. その一方でSがノードを持つ場合には, $N_{S/X}$がtopologically trivialであるが平坦ではないような9点配置が存在するため, Corollary 8が得られるのである.

[B] M. Brunella, On Kähler surfaces with semipositive Ricci curvature, Riv. Mat. Univ. Parma, **1**, 441–450 (2010).

[K1] T. Koike, On minimal singular metrics of certain class of line bundles whose section ring is not finitely generated, to appear in Ann. Inst. Fourier (Grenoble).

[K2] T. Koike, On the minimality of canonically attached singular Hermitian metrics on certain nef line bundles, to appear in Kyoto J. Math.

[K3] T. Koike, Toward a higher codimensional Ueda theory, to appear in Math. Z.

[K4] T. Koike, Ueda theory for compact curves with nodes, preprint.

[U83] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.

[U91] T. Ueda, Neighborhood of a rational curve with a node, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **27** (1991), 681–693.

[LO] J. Lesieutre, J. C. Ottem, Curves disjoint from a nef divisor, arXiv:1410.4467.