レポート② 解答例.

$\mathbb{C}$上の有理型関数 $f(z) := \dfrac{1}{1+z^6}$ を考える.

fの極は $z^6=-1$ なる点, つまり $z = e^{\frac{2m+1}{6}\pi i}$ $(m=0,1,2,\cdots,5)$ で,
また各 $m=0,1,\cdots,5$ について $a_m = e^{\frac{2m+1}{6}\pi i}$ とすると

a_mまわり
$$f(z) = \frac{1}{(z-a_0)(z-a_1)\cdots(z-a_5)}$$
$$= \frac{1}{(z-a_m)}\cdot g_m(z)$$
と書ける $\left(g_m := \prod_{\substack{k\neq m \\ k\in\{0,1,\cdots,5\}}} \frac{1}{z-a_k}\right)$

g_mはa_mの近傍で正則であり, また

$$\frac{1}{g_m(a_m)} = \lim_{z\to a_m}\frac{1}{f(z)(z-a_m)} = \lim_{z\to a_m}\frac{(z^6+1)-\overbrace{(a_m^6-1)}^{0に注意}}{z-a_m}$$
$$= \frac{d}{dz}\Big|_{z=a_m}(z^6+1) = 6\cdot a_m^5$$

よってa_mを中心とするg_mのTaylor展開を
$$g_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(m)}\cdot(z-a_m)^n$$
とすると,
$$C_0^{(m)} = g_m(a_m) = (6\cdot a_m^5)^{-1} = \frac{1}{6}\cdot e^{-\frac{5}{6}(2m+1)\pi i} = \frac{1}{6}e^{\frac{2m-5}{6}\pi i}$$
と分かる.

$$f(z) = \frac{1}{z-a_m}\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{(m)}(z-a_m)^n = \frac{C_0^{(m)}}{z-a_m} + \sum_{n=0}^{\infty}C_{n+1}^{(m)}(z-a_m)^n$$
はfの$z=a_m$まわりのLaurent展開を与えるため,

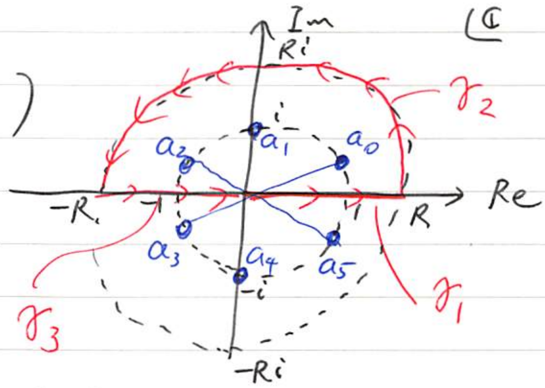
$$\mathrm{Res}(f;a_m) = C_0^{(m)} = \frac{1}{6}\underbrace{e^{\frac{2m-5}{6}\pi i}}_{(実は\ -a_m)}$$
を得る.

さて, $R>1$ なる実数 R に対して, path $\gamma_j = \gamma_j^{(R)}$ $(j=1,2,3)$ を

$\gamma_1 : [0, R] \longrightarrow \mathbb{C}$; $\gamma_1(t) := t$ で定まるもの,
$\gamma_2 : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$; $\gamma_2(t) := R \cdot e^{i\theta}$ 〃 ,
$\gamma_3 : [-R, 0] \longrightarrow \mathbb{C}$; $\gamma_3(t) := t$ で 〃 とする.

明らかに
- $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ は $\mathbb{C}$ の Jordan 閉曲線であり, ←(i)
- γ の内部にある f の pole は a_0, a_1, a_2 のみであり, ←(ii)
- $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_3} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^6} =: I$ である. (iii)

ことが分かる.
(Image $\gamma_k \cap \{a_j\}_{j=0}^{5} = \phi$ $(k=1,2,3)$ に注意)



よって

これと(i),(ii)より

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{m=0}^{2} 2\pi i \,\mathrm{Ind}(\gamma; a_m)\cdot \mathrm{Res}(f; a_m)$$

$$= \sum_{m=0}^{2} 2\pi i \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} e^{\frac{2m-5}{6}\pi i}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{6} e^{-\frac{5}{6}\pi i} + \frac{1}{6}\cdot(-i) + \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{6}\pi i} \right)$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{6} \left(-i - i \cdot 2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \frac{\pi i}{3} \cdot (-2i) = \frac{2}{3}\pi . \quad \text{——}(*)$$

一方で
$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{R \cdot i \cdot e^{it}}{1 + R^6 \cdot e^{6it}}\,dt \right|$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{R}{R^6 - 1}\,dt \longrightarrow 0 \quad \text{as } R \to \infty \text{ より},$$

これと(iii)より

$$2 \cdot I = \lim_{R\to\infty} \int_\gamma f(z)\,dz \underset{(*)より}{=} \frac{2}{3}\pi .$$

よって $\underline{I = \frac{\pi}{3}}$ //