X: sm. proj. var $/\mathbb{C}$

L: big line bdl $/X$. , $R(X,L) := \bigoplus H^0(X, L^{\otimes m})$
; fin. gen.

主結果 このような ある種の (X,L) で
minimal singular metric $e^{-\varphi_{\min,L}}$ の
発散 の しかた を 特定 した. //

§1. 動機

§2. 主結果 と その 周辺について.

§3. 主結果の 証明について.

§1

$PE(X) := \overline{\mathrm{cone}\{c_1(L) \mid L: \mathrm{eff.\ l.b}\}} \subset H^{1,1}(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R}$

⇝ L: psd. eff $\underset{\mathrm{def}}{\iff} c_1(L) \in PE(X)$

L: big $\underset{\mathrm{def}}{\iff} c_1(L) \in \mathrm{Int}(PE(X))$.

fact L: psd. eff $\iff {}^{\exists} h = e^{-\varphi}$: L の singular Hermitian metric
s.t. φ: psh.

i.e ${}^{\exists}\psi$: X 上 L^1_{loc} な実関数
${}^{\exists}h_\infty$: L の sm. Hermitian metric
$h = e^{-\psi} \cdot h_\infty$

//

Def (D.P.S)

$h_{\min,L} = e^{-\varphi_{\min,L}}$; Lの sing. Herm. metric with $\varphi_{\min,L}$: psh.

が minimal singular metric であるとは次をみたすこと.

◎ $\forall h = e^{-\varphi}$: sing. Herm. metric of L with φ : psh,

$\forall x \in X$, $\exists C$,

xまわりで $\varphi \le \varphi_{\min,L} + C$ //.

Thm (D.P.S)

L : psd. eff $\Rightarrow$ $\exists h_{\min} = e^{-\varphi_{\min}}$; min. sing. metric //

(∵) $h_\infty = e^{-\varphi_\infty}$; Lの sm. Herm. metric, fix

$\tilde{\varphi} := \sup^* \{ \psi : X \to [-\infty, 0] \mid \psi + \varphi_\infty : \text{psh} \}$

$\rightsquigarrow$ $e^{-\tilde{\varphi}} \cdot h_\infty$: min. sing. metric //.

◎知られている結果 (以下, L: big).

(a), (b) … ハンドアウト.

(c) **Thm** (Boucksom)

$$\mathbb{B}_-(L) = \{ x \in X \mid \nu(\varphi_{\min,L}, x) > 0 \}.$$

とくに L: nef $\Rightarrow$ $\forall x \in X$, $\nu(\varphi_{\min,L}, x) = 0$. //

((c) つづき)

<u>しかし</u> L: nef (big) でも $\varphi_{\min,L}$: loc. bdd とは限らない ([BEGZ]) //

<u>(d)</u>

<u>Thm (Demailly, [BEGZ])</u>

$\{f_j\}_{j=1}^{(\infty)}$: $R(X,L)$ の generator,

$\log \sum \varepsilon_j |f_j|^{\frac{2}{m_j}}$ (ε_j : +らへる, $f_j \in H^0(X, L^{\otimes m_j})$)

という形 (siu 型) の loc. weight をもつ

metric が min. sig. metric になる.

$\Longleftrightarrow$

$R(X,L)$: fin. gen //

$\rightsquigarrow$ ハンドアウト ◯ が "$\underbrace{\overset{\text{min sing}}{\text{metric}}}_{\text{の発散のようす}}$ が alg にはあらくまれる" 十分条件.

$\rightsquigarrow$ <u>ここから外れると</u>, どのように $\varphi_{\min,L}$ は どこで, いつ, どのように 発散するのか?

algebraic には "外れかた" は おおまかには "σ-decomposition" で 記述される.

<u>Q1</u> σ-decomposition で 良い分解ができ<u>ない</u> 様子は, どう $\varphi_{\min,L}$ の 発散として ~~表現されるか~~ あらわれるか? ……①, ①'

<u>Q2</u> σ-decomposition で 良い分解ができた時には, $\varphi_{\min,L}$ は どのようなとき, どこで, どう 発散するか ……②, ②'

§2. 主結果とその周辺

① について

Boucksom によって、σ-decomposition で良く分解しない

(birat'l に 中山の意味で Zariski 分解不可能)

ことは、以下の(*)ように言いかえられている.

(*)
$$\left[\begin{array}{l} {}^{\forall}\pi : \tilde{X} \longrightarrow X \ : \ \text{proper modification} \\ \pi^* L \otimes \mathcal{O}\Big(-\displaystyle\sum_{\substack{\Gamma \subset \tilde{X} \\ \text{div} \\ \text{prime}}} \nu_\Gamma \Gamma\Big) \ : \ \text{not nef} . \end{array}\right.$$

w/ $\nu_\Gamma := \nu(\varphi_{\min,L}, \Gamma)$

(c.f. (c))

(*) なる例

ex.①-1 中山の例 ('04?)

… 後述.

ex ①-2 Lesieutre の例 ('12)

…. X : 4-dim.

$\mathbb{B}_-(L)$: 可算コの curve

ただし L : $\mathbb{R}$-divisor.

Q L : (big) ($\mathbb{Q}$-) line bdl は常に

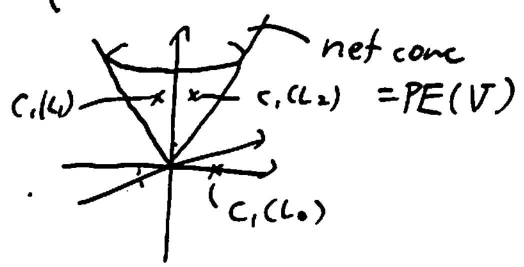
$\mathbb{B}(L)$: Zariski closed か?

◎ 中山の例について.

V : 2-dim sm. abelian var.

$L_0, L_1, L_2 \to V$: line bdls $/V$

ハンドアウト p.2 のようなもの.



$X := \mathbb{P}(L_0 \oplus L_1 \oplus L_2)$,

$L := \mathcal{O}(1)$ $\rightsquigarrow$ L : big, (X, L) は ①-1の例.

$\mathbb{B}_-(L) = \mathbb{P}(L_0) \subset X$.

$\mathbb{P}(L_0)$ まわり X の loc. coord を次のようにとる.

$U \subset V$: open, $x = (x^1, x^2)$: U の coord.

$(z^1, z^2, x) := [s^0(x) + z^1 s^1(x) + z^2 s^2(x)] \in \pi^{-1}(U)$

where s^i : (L_i^{-1}) の U 上 loc. triv.

$\boxed{\text{Main theorem}}$ この coord. open set 上

$$\varphi_{\min, L}(z^1, z^2, x) = \log \max_{(\alpha,\beta)\in H} |z^1|^{2\alpha} |z^2|^{2\beta} + (\text{conti})$$

$\subset \mathbb{R}^2$ (ハンドアウト p.3 (i))

とくに $\varphi_{\min,L}$ は $(\{z^1 = z^2 = 0\} =)$ $\mathbb{P}(L_0)$ の外では continuous にとれ, $\mathbb{P}(L_0)$ の各点まわりで analytic singularity をもたない //.

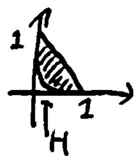
§3. 主結果の証明について

---- Step 1. (min) sing. metric $e^{-\psi}$ を具体的に構成

Step 2. $\forall e^{-\varphi}$: sing. metric with φ: psh. に対し $\forall x \in \mathbb{P}(L_0)$, $\exists C$, xまわり $\varphi \le \psi + C$ を示す.

Step 1　$e^{-\psi}$の構成

材料;

□(L) := 

$e^{-\varphi_0}, e^{-\varphi_1}, e^{-\varphi_2}$; L_0, L_1, L_2 の sm. Herm. metric ハンドアウト p.3 (ii)のもの

◎ $m \in \square(L)$ $\left(= (\alpha, \beta)\right)$ に対し $e^{-\psi_m}$; L の sing. Herm. metric を次のように定める.

· $f_j \in H^0(X, \mathbb{P}(L_k \oplus L_\ell))$　$(\{j, k, \ell\} = \{1, 2, 3\})$ を $\mathbb{P}(L_k \oplus L_\ell)$ でのみきえる section とする.

今の coord (z^1, z^2, x) 上

$$f_0(z^1, z^2, x) = 1.$$

$$f_1(z^1, z^2, x) = z^1$$

$$f_2(z^1, z^2, x) = z^2$$

としてよい.

$\mathbb{P}(L_i \oplus L_k) \sim L - \pi^* L_k$

⇝ ここはLの s.H.m.

$$\rightsquigarrow \ \psi_m(z^1, z^2; x) := (1-\alpha-\beta)\,\overbrace{\left(\log|f_0|^2 + \varphi_0\right)} + \alpha\left(\log|f_1|^2 + \varphi_1\right) + \beta\left(\log|f_2|^2 + \varphi_2\right)$$

$$= \log|z^1|^{2\alpha}|z^2|^{2\beta} + \underbrace{\begin{pmatrix} (1-\alpha-\beta)\varphi_0 \\ +\alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \end{pmatrix}}_{m \in \square(L)\text{ より psh, sm.}}$$

$$\rightsquigarrow \ \psi := \max_{m \in \square} \psi_m \quad \cdots\ \text{psh}.$$

<u>Step 2</u> $e^{-\varphi}$; sing. Herm. metric on L, with φ : psh.

$$\rightsquigarrow \ W := \{ (z^1, z^2; x) \in \pi^{-1}(U) \mid |z^1| \le 1, |z^2| \le 1 \}$$

上で $^\exists C$, $\varphi \le \psi + C$ を示す.

<u>fact (Demailly)</u>

$^\exists\{m_\nu\}_\nu \subset \mathbb{N}$, $^\exists\{f_j^{(\nu)}\}_{j=1}^{N_\nu} \subset H^0(X, L^{\otimes m_\nu})$

$$\varphi_\nu := \frac{1}{m_\nu}\log\sum_{j=1}^{N_\nu}|f_j^{(\nu)}|^2 \quad \text{とくと.}$$

$$\begin{cases} \varphi_\nu \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \varphi \ \ \text{a.e. on } X \leftarrow X - B_+(L) \\ W\text{上} \ \ \varphi_\nu \le {}^\exists M_\varphi \leftarrow \nu\text{によらない}. \end{cases}$$

//.

⇝ 示すべきは W上 $\log\max_H |z^1|^{2\alpha}|z^2|^{2\beta}$

$$\forall \nu, \ \varphi_\nu \le \cancel{\psi} + \underbrace{M_\varphi}_{\nu\text{によらない}} \quad \text{で十分.}$$

$\boxed{\text{idea}}$ 各νで φ_ν を "birational" に

(psh その1) + (psh その2) に分解,

$$\underset{\displaystyle \log \max_{H} |z^1|^{2a}|z^2|^{2b}}{\wedge|} \qquad \underset{\displaystyle \exists C}{\wedge|}\ \text{max. principle}$$

を示す.

◎ ハンドアウト p.3~4. (iii) のような列

$$X =: X_0 \xleftarrow{\pi_1} X_1 \xleftarrow{\pi_2} X_2 \xleftarrow{\pi_3} \cdots\cdots ,$$

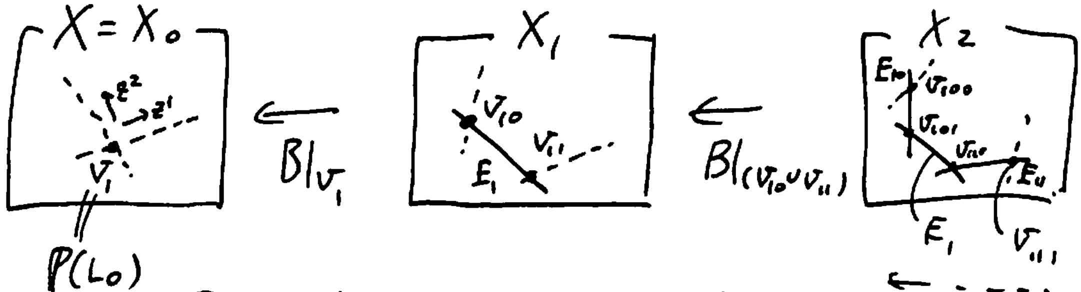
その合成 $\tilde{\pi}_n : X_n \longrightarrow X$,

$E_A \underset{\mathrm{codim}\,1}{\subset} X_n$ (A : n桁以下の2進数)

$V_B \underset{\mathrm{codim}\,2}{\subset} X_n$ (B : (n+1)桁以下の 〃)

(z_B^1, z_B^2, x) ; $(\pi\circ\tilde{\pi}_n)^{-1}(U) \cap V_B$ まわりの X_n の loc. coord.

をとる.



$W_B := \{ |z_B^1| \le 1,\ |z_B^2| \le 1 \}$.

φ_ν の分解

◎ $\exists n_\nu \in \mathbb{N}$ で、

$\tilde{\pi}_{n_\nu} : X_{n_\nu} \to X$ は

sheaf $(f_1^{(\nu)}, \cdots, f_{N_\nu}^{(\nu)})$ の

"z^1, z^2 方向 log resolution" を与える.

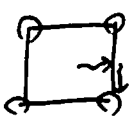
i.e. 各 $W_B \subset X_{n_\nu}$ 上 $\exists (p_B^{(\nu)}, q_B^{(\nu)}) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{cases} \tilde{\pi}^*_{n_\nu} \varphi_\nu \Big|_{W_B} = \dfrac{1}{m_\nu} \left(\underbrace{\tilde{\pi}^*_{n_\nu} \log |z^1|^{2p_B^{(\nu)}} |z^2|^{2q_B^{(\nu)}}}_{\text{psh (1)}} + \log \sum_{j=1}^{N_\nu} |\exists g_{B,j}^{(\nu)}|^2 \right) \\ \left(\dfrac{p_B^{(\nu)}}{m_\nu}, \dfrac{q_B^{(\nu)}}{m_\nu} \right) \in \square(L) \end{cases}$$

$\log |z_B^1|^{a} |z_B^2|^{b}$ の形.　　W_B 上 hol　psh (その2)

W_B 上

$$\frac{1}{m_\nu} \tilde{\pi}^*_{n_\nu} \log |z^1|^{2p_B^{(\nu)}} |z^2|^{2q_B^{(\nu)}} \underset{W_B 上}{\leq} \tilde{\pi}^*_{n_\nu} \log \max_{(\alpha,\beta)\in H} |z^1|^{2\alpha} |z^2|^{2\beta}.$$



$$\frac{1}{m_\nu} \log \sum |g_{B,j}^{(\nu)}|^2 \underset{\substack{\text{max. principle} \\ W_B 上}}{\leq} \max_{\substack{|z^1|=1 \\ |z^2|=1}} \frac{1}{m_\nu} \log \sum |g_{B,j}^{(\nu)}|^2.$$

$$\underset{\text{psh その2の形}}{=} \max_{\substack{|z^1|=1 \\ |z^2|=1}} \tilde{\pi}^*_{n_\nu} \varphi_\nu \leq M_\varphi.$$

B によらない

$\rightsquigarrow$ $\tilde{\pi}^{-1}_{n_\nu}(W_1) = \bigsqcup_B W_B$ より

$$\varphi_\nu \leq \log \max_H |z^1|^{2\alpha} |z^2|^{2\beta} + M_\varphi$$

//

No.

Date

(時間余ったら)

◎ Main thm の証明と同じことが
X : toric bundle / cpx torus.
$L \to X$: big. のときに展開できる.

Thm (K–)
(toric bdl の言葉を用いると)
$x \in \mathbb{T}(\sigma, \mathcal{L}) \subset X$ 上
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{toric 部による coord, } \underbrace{}_{\text{fiber}}}}{\varphi_{\min, L}}(z, \underset{\text{cpx torus の coord}}{x}) = \log \max_{\substack{m \in \underbrace{\square(L)_\sigma}_{\substack{\uparrow \\ \text{凸図形, } \subset \mathbb{R}^{\text{fiber dim}}}} \\ \| \\ (m_i)}} \prod |z^i|^{2m_i} + \text{conti}$$
//

◎ ハンドアウト p.1 の ② について.
(②')

Thm (K–)
X : sm. proj surf, L : big, $D \subset X$: sm. divisor.

Assume $L \otimes \mathcal{O}(-D)$: semiample,
$L \otimes \mathcal{O}(-D)|_D$: ample.

$$\Longrightarrow \varphi_{\min, L}|_D = \begin{cases} {}^\exists \varphi_{\min, L|_D} & \text{if } L|_D : \text{psd. eff} \\ -\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$ //

Rmk ◦ X : 高次でも. ${}^\exists D$: hol. tub. nbhd で示した.

◦ Thm ⇝ Zariski の例 に conti. な $\varphi_{\min, L}$ の存在 //.

(X, D) で.
${}^\forall m$, $|mL - D|$: free, $|mL| \supset D$ なる例.

[B] Boucksom. Divisorial Zariski decompositions on compact complex manifolds, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 37(1) (2004) 45-76

[BEGZ] Boucksom, Eyssidieux, Guedj, Zeriahi. Monge-Ampère equations in big cohomology classes Acta Math 205 (2010), 199-262.

[DPS] Demailly, Peternell, Schneider Pseudo-effective line bundles on cpt ~~kä~~ mfd. Internat. J. Math. 12(6) (2001), 689-741.

[N] Nakayama, Zariski decomposition and abundance. v.14 of MSJ Memoirs. 2004.