Minimal singular metrics of a line bundle admitting no Zariski-decomposition

(ザリスキー分解不可能なある種の直線束の最小特異計量)

小池 貴之

東京大学

March 23, 2013

研究の動機

- X：コンパクト Kähler 複素多様体
- L：X 上の（巨大）正則直線束

L が nef になるための障害が, 代数的な方法のみで把握しきれないような状況
（$\Leftrightarrow$ L がザリスキー分解不可能な状況）
が存在しうることが知られている.

研究を行っていた時点で, 知られているザリスキー分解不可能な例は中山による例 [N] のみだった.
→この場合に, L が nef になるための障害を解析的に調べたい.

最小特異エルミート計量

定義 1 (最小特異エルミート計量 [DPS01])

L の特異エルミート計量 $h_{\min,L} = e^{-\varphi_{\min,L}}$ が最小特異エルミート計量であるとは, 次が成り立つときをいう.

(i) $dd^c\varphi_{\min,L} \geq 0$

(ii) L の任意の特異エルミート計量 $h = e^{-\psi}$ が $dd^c\psi \geq 0$ を満たせば, $\varphi_{\min,L}$ は ψ より発散が穏やかである.

つまり, X の各点の十分近傍である定数 C が存在して, $\psi \leq \varphi_{\min,L} + C$ が成立する.

$h_{\min,L}$ の特異部分には, L が nef になるための障害の情報が集約されている.

先行研究と主結果

- [DPS01]... 最小特異エルミート計量の定義と, その存在証明.
- [DPS94]... ある楕円曲線上の $\mathbb{P}^1$ 束 X に対して, X 上の特別な直線束 L の $h_{\mathrm{min},L}$ は具体的な表示.

主結果

X が複素トーラス上の非特異射影的トーリック束である時に, その上の巨大直線束 L の最小特異エルミート計量 $h_{\mathrm{min},L}$ を具体的に構成した.

- このクラスは『中山の例』[N] を含む点で重要.
- 構成した $\varphi_{\mathrm{min},L}$ は, X の『標準的な局所座標系』を用いて, 関数として明示的に書き下せる.

『中山の例』の設定

- 以降では主結果を，『中山の例』に絞って具体的に記述する．
- この場合の X は，あるアーベル曲面 V 上の直線束 L_j を用いて $\mathbb{P}(L_0 \oplus L_1 \oplus L_2)$ と書かれる $\mathbb{P}^2$ 束．
- この場合の L は，相対超平面束 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(L_0 \oplus L_1 \oplus L_2)}(1)$．
- 『中山の例』(X, L) の『標準的な局所座標系』$([x^0; x^1, x^2], z^1, z^2)$ は，次のようになる．
  つまり，(z^1, z^2) はアーベル曲面 V の普遍被覆 $\mathbb{C}^2$ の座標であり，$[x^0; x^1; x^2]$ はファイバー $(\cong \mathbb{P}^2)$ の斉次座標になる．
- $\{x^j = x^k = 0\} = \mathbb{P}(L_l) \subset X$ $(\{j, k, l\} = \{0, 1, 2\})$．

定理 2 (中山の例の $h_{\min,L}$)

上記の (X, L) では, L の最小特異エルミート計量 $h_{\min,L} = e^{-\varphi_{\min,L}}$ は

- $\{x^1 = x^2 = 0\}$ の外では, $\varphi_{\min,L}$ は連続
- $\{x^1 = x^2 = 0\}$ の各点上
  $\varphi_{\min,L} = \log \max_{(\alpha,\beta)\in H} \left(|x^1|^{2\alpha} \cdot |x^2|^{2\beta}\right) + \mathcal{O}(1)$

となる.

ただしここで, $(x^1, x^2, z^1, z^2) = ([1; x^1, x^2], z^1, z^2)$ を局所座標として用いており, また H は双曲線の一部

$$\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha, \beta \geq 0,\ a^2(\alpha+\beta)^2 = (1-\alpha)^2+(1-\beta)^2\}$$

である.

H について

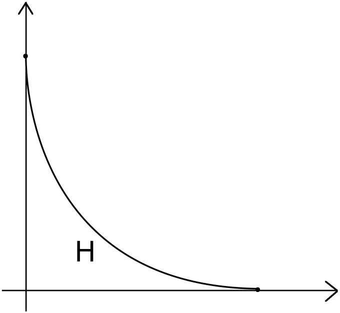


Figure : H の概形

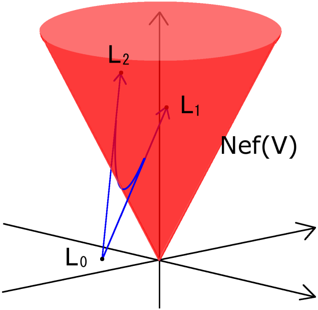


Figure : H と V の nef cone

応用

- X：複素トーラス上の非特異射影的トーリック束
- L：X 上の巨大直線束

での L の最小特異エルミート計量 $h_{\mathrm{min},L}$ の具体的な構成結果を応用することで, 凸図形の組み合わせ論的考察に基づいて, L が nef になるための障害に関するいくつかの量が記述できる様になった.

以下例として, 乗数イデアル層

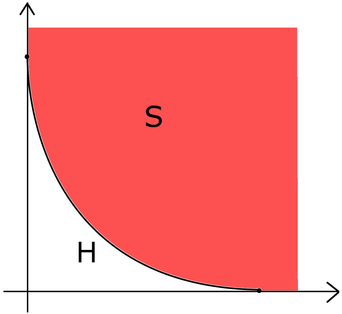
$$\mathcal{J}(h^t_{\mathrm{min},L})_x = \left\{ f \in \mathcal{O}_{X,x} \;\middle|\; \begin{array}{l} |f|^2 e^{-t\varphi_{\mathrm{min},L}} \text{は} \\ x \text{まわりで局所可積分} \end{array} \right\}$$

の記述を, 『中山の例』で述べる ($t > 0$).

中山の例に於ける $\mathcal{J}(h^t_{\min,L})$

- $x \in X \setminus \{x^1 = x^2 = 0\}$ の時は, $\mathcal{J}(h^t_{\min,L})_x = \mathcal{O}_{X,x}$.
- $x \in \{x^1 = x^2 = 0\}$ の時は,

$$\mathcal{J}(h^t_{\min,L})_x = \left\langle (x^1)^a (x^2)^b \,\middle|\, (a+1, b+1) \in tS \cap \mathbb{Z}^2 \right\rangle.$$



[D] J.-P. Demailly, Analytic methods in algebraic geometry, (July 2012), 2009.

[DK] J.-P. Demailly and J. Kollár, *Semi-continuity of complex singularity exponents and Kahler-Einstein metrics on Fano orbifolds*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **34** (2001), 525-556.

[DPS94] J.-P. Demailly, T. Peternell, M. Schneider, Compact complex manifolds with numerically effective tangent bundles, J. Algebraic Geom. **3** (1994) 295-345.

[DPS01] J.-P. Demailly, T. Peternell and M. Schneider, Pseudo-effective line bundles on compact Kähler manifolds, Internat. J. Math. **12**(6), 689-741 (2001)