Ueda theory for compact curves with nodes

小池 貴之

京都大学

September 16, 2016

1. 設定と目標
2. 主結果
3. ネフ (数値的半正) 直線束上の半正曲率を持つエルミート計量の存在問題への応用

1. 設定と目標

2. 主結果

3. ネフ (数値的半正) 直線束上の半正曲率を持つエルミート計量の存在問題への応用

設定と目標

- X : 複素曲面 (非特異),
- $C \subset X$: コンパクト曲線 (node を持ち得る).

として, 法線束 $N_{C/X} := [C]|_C$ が位相的に自明であるようなものを考える.

目標

X 中 C の近傍には, どのような函数論的性質を持つものが存在するか?
または, C 近傍にはどのような *psh (多重劣調和)* 関数が存在するのか?

先行研究

本講演で扱う結果は, 以下の上田氏による結果の一般化/類似に相当する.

- [Ueda83]: C が滑らかなとき.
- [Ueda91]: C が node を一つ持つ有理曲線のとき.

問題 1

一般に C が *node* を持つ曲線である場合は?

以下, C は node のみを許すコンパクト曲線とする.

- $\mathcal{P}(C)$ を C 上の位相的に自明な正則直線束全体の集合とする.
- $\mathcal{P}_0(C)$ を C 上の Hermitian flat な (つまり変換関数が $U(1)$ 値局所定数関数としてとれるような) 直線束全体の集合とする: $\mathcal{P}_0(C) := H^1(C, U(1))$.

事実 2

- $\mathcal{P}_0(C) \subset \mathcal{P}(C)$.
- C が非特異であれば, $\mathcal{P}_0(C) = \mathcal{P}(C)$.

例 3

C が *node* を一つ持つ有理曲線のとき,
$\mathcal{P}(C) \cong \mathbb{C}^*, \mathcal{P}_0(C) \cong U(1)$.

主結果

[Ueda83] では, X 中での C の近傍と $N_{C/X}$ 中での 0 切断の近傍とを n-jet で比較することで, 障害類 $u_n(C, X) \in H^1(C, \mathcal{O}_C(N_{C/X}^{-n}))$ が定義されている.

定義 4 ([Ueda83])

- (C, X) 有限型:$\Leftrightarrow$ $\exists n \geq 1$ s.t. $u_n(C, X) \neq 0$
  $\Leftrightarrow$ C 近傍と 0 切断近傍とは有限 jet で異なる
- (C, X) 無限型:$\Leftrightarrow$ $\forall n \geq 1$, $u_n(C, X) = 0$

[K-15] では, C がノードを持つ場合にもこれらの定義を自然に拡張した上で, 有限型, 無限型のそれぞれの場合での上田の定理の (ある程度の技術的な仮定の下での) 類似として, 次を示した:

定理 5 (有限型についての定理の類似)

C が高々ノードを持つコンパクト曲線で, C の *dual graph* が *tree* であり, かつ $N_{C/X}$ が正則に自明なものとする. $u_n(C,X) \neq 0$ であり, さらに, C の各既約成分 C_ν に於いても $u_n(C,X)|_{C_\nu} \neq 0 \in H^1(C_\nu, \mathcal{O}_{C_\nu})$ なることを仮定する. このとき以下が成立する:

(*i*) 各 $\lambda > 1$ について, ある C の近傍 V について強 *psh* 関数 $\Phi_\lambda \colon V \setminus C \to \mathbb{R}$ として, $\Phi_\lambda(p) \to \infty$ かつ $\Phi_\lambda(p) = O(d(p,C)^{-\lambda n})$ $(p \to C)$ なるものが存在する.

(*ii*) C の各近傍 V について, $V \setminus C$ 上の *psh* 関数 Ψ が, ある $0 < \lambda < 1$ について $\Psi(p) = O(d(p,C)^{-\lambda n})$ $(p \to C)$ であったとする. このとき, ある C 近傍 V_0 上では $\Psi|_{V_0 \setminus C}$ は定数関数である.

定理 6 (無限型についての上田の定理の類似)

C が高々ノードを持つコンパクト曲線で, $N_{C/X} \in \mathcal{E}_0(C) \cup \mathcal{E}_1(C)$ なるものを考える. 正規化 $i\colon \widetilde{C} \to C$ について $i^*N_{C/X} \in \mathcal{E}_0(\widetilde{C})$ の成立, 及び $H^1(C, \mathbb{C}(N_{C/X}^{-n})) = 0$ を仮定する $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$. このとき, (C, X) が無限型であれば, ある C の近傍 V について多重調和関数 $\Phi\colon V \setminus C \to \mathbb{R}$ として, $\Phi(p) \to \infty$ かつ $\Phi(p) = O(-\log d(p, C))$ なるものが存在する.

ここで, $\mathcal{E}_0(C)$ は $\mathcal{P}_0(C)$ の捻じれ元全体の集合であり, $\mathcal{E}_1(C)$ は, $L \in \mathcal{P}_0(C)$ として, ディオファントス条件 “$\log d(\mathcal{O}_C, L^n) = O(\log n)$ $(n \to \infty)$” を満たすもの全体の集合である.

定理 7 ([Ueda91] の結果の一般化)

C が高々ノードを持つコンパクト曲線で, *dual graph* が *cycle graph* であり, かつ $N_{C/X} \in \mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{P}_0(C)$ なるものとする. ($N_{C/X}$ の平坦接続を適切に選ぶことで) $n = 1, 2, 3$ について $u_n(C, X) = 0$ を仮定する. このとき以下が成立する:

(*i*) 各 $\lambda > 1$ について, ある C の近傍 V 上に強 *psh* 関数 $\Phi_\lambda \colon V \setminus C \to \mathbb{R}$ として, $\Phi_\lambda(p) \to \infty$ かつ $\Phi_\lambda(p) = O((-\log d(p, C))^{2\lambda})$ なるものが存在する.

(*ii*) C の各近傍 V について, $V \setminus C$ 上の *psh* 関数 Ψ が, ある $0 < \lambda < 1$ について $\Psi(p) = O((-\log d(p, C))^{2\lambda})$ ($p \to C$) であったとする. このとき, ある C 近傍 V_0 上では $\Psi|_{V_0 \setminus C}$ は定数関数である.

主結果を C が定める直線束 $[C]$ の (特異) 計量の言葉で解釈することで, 以下が従う:

系 8

X を滑らかな複素曲面, $C \subset X$ を有理曲線の *cycle* であって, 位相的に自明な法線束を持つものとする. このとき以下が成立する:

(*i*) $N_{C/X} \in \mathcal{E}_1(C)$ であれば, $[C]$ は半正である. つまり $[C]$ には, C^∞ エルミート計量として半正曲率を持つものが存在する.

(*ii*) $N_{C/X} \notin \mathcal{P}_0(C)$ であれば, $[C]$ は半正でない. より詳しく, $[C]$ の標準切断 f に対し, $|f|_h \equiv 1$ で定まるような特異計量 h が, $[C]$ の半正曲率を持つ特異エルミート計量の中で最も小さい特異性を持つものである.

系 8 は, 射影平面の 9 点爆発 X の反標準束 K_X^{-1} に応用できる.

例 9

X を相異なる 9 点 $\{p_1, p_2, \cdots, p_9\} \subset \mathbb{P}^2$ での $\mathbb{P}^2$ の爆発とする. $C_0 \subset \mathbb{P}^2$ を *degree* 3 の曲線であって, 9 点を含むものとする. $C \subset X$ を C_0 の強変換とする *($(C^2) = 3^2 - 9 = 0$ より $N_{C/X} \in \mathcal{P}(C)$ に注意).*

C_0 が滑らかな場合に知られている K_X^{-1} が半正なるための十分条件に関する結果 (Arnol'd-Ueda-Brunella) を, 系 8 (*i*) を用いることで, C_0 が一般の場合に拡張できる.

また, 系 8 (*ii*) からは, 以下が分かる:

系 10

9 点の配置 $\{p_j\}_{j=1}^9 \subset \mathbb{P}^2$ として, 上記の K_X^{-1} が半正でないようなものが存在する. □

実際, $C_0 \subset \mathbb{P}^2$ を node を一つ以上持つものとして, $\{p_j\}_{j=1}^9 \subset C_0$ を general に選ぶことで, K_X^{-1} が半正でないようなものが構成できる.
一方で, 以下については不明である:

問題 11

滑らかな楕円曲線 $C_0 \subset \mathbb{P}^2$ に対しては, $\{p_j\}_{j=1}^9 \subset C_0$ として K_X^{-1} が半正でないようなものは存在するか? □

- T. Koike, Ueda theory for compact curves with nodes, preprint.
- T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.
- T. Ueda, Neighborhood of a rational curve with a node, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **27** (1991), 681–693.