Toward a higher codimensional Ueda theory

小池 貴之　(東京大学)*

本講演では上田理論の余次元が2である場合のアナロジーについての考察を行う [2]. 上田はXを複素多様体, Cをその滑らかでケーラーなコンパクト超曲面で$c_1(N_{C/X})=0$なるものとして, 直線束$\mathcal{O}_X(C)$がCの近傍でも平坦直線束となるための十分条件を記述した [3, Theorem 3]. 本講演ではこの余次元2版として, Xを複素多様体, Sをその滑らかな超曲面, CをSの滑らかでケーラーなコンパクト超曲面で$c_1(N_{S/X}|_C)=0$なるものとして, 直線束$\mathcal{O}_X(S)$がCの近傍でも平坦直線束となるための十分条件を記述する.

Xを複素多様体, Sをその滑らかな超曲面, CをSの滑らかでケーラーなコンパクト超曲面として, 法線束$N_{S/X}$がS中Cの近傍で平坦である (変換関数系が$U(1):=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$に退化する) ようなものとする. 上田による障害類の余次元2でのアナロジーとして, このような三つ組み(C,S,X)に対し, 障害類$u_{n,m}(C,S,X)\in H^1(C,N_{S/X}|_C^{-n}\otimes N_{C/S}^{-m})$を定義し, 次を示した:

定理 1. *Xを複素多様体, Sをその滑らかな超曲面, CをSの滑らかでケーラーなコンパクト超曲面として, 法線束$N_{S/X}$がS中Cの近傍で平坦であるようなものとする. 次の三条件の内のいずれかの成立を仮定する: (i) $N_{C/S}\in\mathcal{E}_0(C)$かつ$N_{S/X}|_C\in\mathcal{E}_0(C)$, (ii) $N_{C/S}$と$N_{S/X}|_C$とは同型であり, 共に$\mathcal{E}_1(C)$の元である, (iii) $N_{S/X}|_C\in\mathcal{E}_0(C)$であり, かつ$C$の$S$中strongly 1-convexな近傍$V$として, CがVの極大コンパクト部分多様体となっているようなものが存在する. このとき, 任意の$n\geq 1, m\geq 0$に対して$u_{n,m}(C,S,X)=0$であるならば, X中Cの近傍Wとして$\mathcal{O}_X(S)|_W$が平坦なるものが存在する.* □

ここで$\mathcal{E}_0(C)$は$\mathrm{Pic}^0(C)$のねじれ元全体の集合であり, 集合$\mathcal{E}_1(C)$は

$$\mathcal{E}_1(C):=\{E\in\mathrm{Pic}^0(C)\mid \exists\alpha\in\mathbb{R}_{>0}\ \text{s.t.}\ \forall n\in\mathbb{Z}_{>0},\ d(\mathcal{O}_C,E^n)\geq(2n)^{-\alpha}\}$$

で定義される集合である (dは$\mathrm{Pic}^0(C_0)$のユークリッド距離). $\mathrm{Pic}^0(C)$中$\mathcal{E}_1(C)$はルベーグ全測度部分集合である一方で, 疎な閉集合の可算和として実現される部分集合であることが知られている. またCの次元が1である場合には, 定理1の条件(*iii*)は以下の条件と同値であることがGrauertの定理から分かる: $N_{C/S}$が負であり, かつ$N_{S/X}|_C\in\mathcal{E}_0(C)$である.

[3, Theorem 3] の代数幾何学的な状況への重要な応用の一つとして, 射影平面$\mathbb{P}^2$の9点爆発Xの反標準束K_X^{-1}が半正である (つまりK_X^{-1}のC^∞エルミート計量として半正曲率をもつものが存在する) ための十分条件の記述がある ([1] も参照). このアナロジーとして, 定理1には次のような応用がある:

Corollary 2. *$C_0\subset\mathbb{P}^3$を互いに横断的に交わる二つの二次曲面の交差とする. 互いに相異なる8点$p_1,p_2,\dots,p_8\in C_0$を固定する. 直線束$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0}\otimes\mathcal{O}_{C_0}(p_1+p_2+\cdots+p_8)$が$\mathcal{E}_0(C_0)\cup\mathcal{E}_1(C_0)$の元である場合には, $\mathbb{P}^3$の$\{p_j\}_{j=1}^8$での爆発Xの反標準束K_X^{-1}は半正である. 特に$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0}\otimes\mathcal{O}_{C_0}(p_1+p_2+\cdots+p_8)\in\mathcal{E}_1(C_0)$なる場合には, K_X^{-1}は半豊富でないが半正である.* □

* e-mail: tkoike@ms.u-tokyo.ac.jp

表 1: $\mathbb{P}^3$ の 8 点爆発 X の反標準束 K_X^{-1} の性質 ($N := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1+p_2+\cdots+p_8)$).

	N : torsion	N : non-torsion
安定固定部分 $\mathbb{B}(K_X^{-1})$	$\emptyset$ or C	C
半豊富性	半豊富	半豊富でない
飯高次元	2	1

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1+p_2+\cdots+p_8) \in \mathcal{E}_0(C_0)$ なる場合には K_X^{-1} は半豊富であり (つまり, ある自然数 $n > 0$ に対して K_X^{-n} が大域切断で生成され), ここから直ちに半正でもあることが分かることに注意する. その一方で $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)|_{C_0} \otimes \mathcal{O}_{C_0}(p_1+p_2+\cdots+p_8) \notin \mathcal{E}_0(C_0)$ なる場合には, K_X^{-1} の安定固定部分は C_0 の強変換 $C \subset X$ と一致し, (ネフだが) 半豊富ではない例となっていることが分かる.

Lesieutre・Ottem 両氏は, 十分に一般の 8 点配置に対して $\mathbb{P}^3$ の 8 点爆発 X の反標準束 K_X^{-1} が以下の性質を満たすことを示した: K_X^{-1} はネフである一方で, $(K_X^{-1}.C) = 0$ なる X の曲線 C は可算無限個である ([4], これは Totaro 氏の問題に回答を与えている). この結果と系 2 とを組み合わせることで次が分かる: 三次元射影的多様体 X 上の直線束 L として, L はネフである一方で $(L.C) = 0$ なる X の曲線 C が可算無限個であるような例が存在する (十分に一般の 8 点配置に対して $\mathbb{P}^3$ の 8 点爆発 X とその上の反標準束 $L := K_X^{-1}$ がこのような例となっている).

参考文献

[1] M. Brunella, On Kähler surfaces with semipositive Ricci curvature, Riv. Mat. Univ. Parma, **1**, 441–450 (2010).

[2] T. Koike, Toward a higher codimensional Ueda theory, to appear in Math. Z. (arXiv:1412.2354).

[3] T. Ueda, On the neighborhood of a compact complex curve with topologically trivial normal bundle, Math. Kyoto Univ., **22** (1983), 583–607.

[4] J. Lesieutre, J. C. Ottem, Curves disjoint from a nef divisor, arXiv:1410.4467.