1 補足 1 — 有理型関数について

複素平面内の領域 D について, 前回 (2019 年 10 月 28 日) の講義で, 「$f\colon D \dashrightarrow \mathbb{C}$: mero.」と板書しました. こちらについて補足します.

まず「mero.」というのは, 「meromorphic」の略で, これは日本語では「有理型（ゆうりけい)」と呼びます. 定義は “D 内に集積点を持たないような点列 $S := \{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ が存在して, f はその補集合 $D \setminus S$ 上の正則関数であり, かつ各点 p_n が**高々極**である” というものです. ここで「高々極」とは, 「除去可能特異点又は極」という意味で述べています.

次に, 矢印が点線で記述されていることについて一言補足します. これは, (次項目で述べる通り f は $\mathbb{P}^1$ への関数とは見做せる一方で) $\mathbb{C}$ への関数とは見做せないため, 点線で書いています (極に於いての値は有限確定値ではないため).

2 補足 2 — 射影直線について

集合 $\mathbb{P}^1$ を,

$$\mathbb{P}^1 := (\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\})/\sim$$

で定義します. ここで関係 “$\sim$” は,

$$(x,y) \sim (x',y') \iff \exists a \in \mathbb{C}^* \text{ such that } \begin{cases} x' = ax \\ y' = ay \end{cases}$$

によって定義されるものです ($\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, また上記で定まる “$\sim$” が確かに関係であることは各自チェックすること). この集合 $\mathbb{P}^1$ を (複素) 射影直線 (1 次元の (複素) 射影空間) と呼びます. 尚, この集合は $\mathbb{C}P^1$ や $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ などとも書かれるものですが, この講義では (例えば実射影空間などはほとんど出てこず混乱の恐れはないため) 単に $\mathbb{P}^1$ と書くことにしています.

元 $(x,y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ が定める $\mathbb{P}^1$ の元を

$$[x;y] \in \mathbb{P}^1$$

と書くことにします. この形式での元の表示を “斉次座標を用いた表示” と呼びます. 一方で, 写像

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto [z;1] \in \mathbb{P}^1$$

は定義から明らかに単射であり, またこの像の補集合は一点集合 $\{[1;0]\}$ です (簡単に分かるので, 定義に従い各自チェックしておくこと). そこで, 点 $[1;0]$ を無限遠点 “$z = \infty$” とみなすことで, **以降は $\mathbb{P}^1$ を拡張された複素平面 (リーマン球面) $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と同一視**します. 言い換えれば, 斉次座標で $[x;y]$ と表示される射影直線の点に対し

$$z := \frac{x}{y}$$

とすることで (ここで形式的に $1/0$ は ∞ とみる. 射影直線の定義から “$0/0$” のようなことは考える必要がない事にも注意) 複素数又は記号 ∞ を対応付けているということです. この $z = x/y$ を**非斉次座標**とよびます.

もちろん x と y との役割を変えて, 別の非斉次座標

$$w := \frac{y}{x}$$

を考えることもできます. $U_z := \mathbb{P}^1 \setminus \{[1;0]\}$, $U_w := \mathbb{P}^1 \setminus \{[0;1]\}$ とすると, これらは共に上記方法によって (少なくとも集合として) $\mathbb{C}$ と同一視できることが分かります. また $U_z \setminus \{[0;1]\}$ と $U_w \setminus \{[1;0]\}$ とは同一の集合であり, その上での二つの非斉次座標は明らかに関係式

$$w = \frac{1}{z}$$

を満たしています. これを座標変換関数 (貼り合わせ関数) とみることで, $\mathbb{P}^1$ は (通常の位相を持つ) 二つの複素平面 U_z 及び U_w を貼り合わせてできる実 2 次元多様体であるとみることもできます. $\mathbb{P}^1$ の位相はこの

方法を以て定めることとします. 尚, これにより確かに $\mathbb{P}^1$ は $\mathbb{C}$ の一点コンパクト化であることや, これが 2 次元球面に同相であることなどが分かります (各自で確認のこと).

最後に, 以上の説明から, 複素平面内の領域 D 上で定義された有理型関数 $f\colon D \dashrightarrow \mathbb{C}$ は, D から $\mathbb{P}^1$ への関数と見做せます (先ほどの非斉次座標 z を用いて考え, 極の行き先を $z=\infty$ と定義する). 前回 (2019 年 10 月 28 日) の講義で, 次のことを確認していました: $p \in D$ が f の極であるときには, $\lim_{z\to p} f(p) = \infty$. このことと上記位相の定義からは, この f が $\mathbb{P}^1$-値連続関数であることも従います.

3　補足 3 — 一次分数変換について

複素数体上の次数 2 の特殊線型群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の元 A を考えます. つまり A は各要素 a,b,c,d が複素数であるような 2×2 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

であって, その行列式 $ad-bc$ が 1 となっているものです. これに対して, 写像 $f_A\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ を, 斉次座標を用いて

$$f_A([x;y]) := [ax+by; cx+dy]$$

で定め, これを A に対応する**一次分数変換 (Möbius 変換)** と呼びます ($ax+by$ も $cx+dy$ も斉次多項式であることから, 任意の $\xi \in \mathbb{C}^*$ に対して $f_A([\xi x;\xi y]) = f_A([x;y])$ が分かり, ここから well-definedness が従います, 各自よくチェックしておくこと).

これは非斉次座標 $z = x/y$ を用いれば ($f_A([z;1]) = [az+b;cz+d] \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ に気を付けて),

$$f_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

とも書くことができます (ここでも形式的に $1/0$ の値は ∞ とみなしています).

具体例としては,

- A が単位行列であるとき, f_A は恒等写像.
- $c=0$ のときには, $ad=1$ であり, $f_A(z) = (a/d)z + (b/d)$ (アファイン変換).
- $a=0, b=\mathrm{i}, c=\mathrm{i}, d=0$ のときは, $f_A([x;y]) = [y;x]$, つまり $f_A(z) = 1/z$.

などが挙げられます.

最後に, 二つの元 $A, B \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して, $f_{AB} = f_A \circ f_B$ が成立することが知られています. 実際,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

として,

$$f_A \circ f_B(z) = \frac{af_B(z)+b}{cf_B(z)+d} = \frac{a\frac{pz+q}{rz+s}+b}{c\frac{pz+q}{rz+s}+d} = \frac{a(pz+q)+b(rz+s)}{c(pz+q)+d(rz+s)} = \frac{(ap+br)z+(aq+bs)}{(cp+dr)z+(cq+ds)}$$

であるためです.

ここからは, 特に $f_{A^{-1}}$ が f_A の逆写像となっていることが従います.