ターンテーブル上のボール

問題

質量 m で半径 r の球が, 水平なターンテーブルの上を滑ることなく転がっている. その質量密度は球面対称, すなわち中心からの距離にのみに依存する. ボールの中心を通るある軸周りの慣性モーメントは I であり, ターンテーブルの軸周りの慣性モーメントを I_d と表記する. z 軸方向をターンテーブルの軸と一致するよう鉛直上向きに取る.
この問題の目的は, 実験室系でボールの運動と軌道を解析することである. この問題では, ボールが落ちないようにターンテーブルは十分な大きさであるとしてよい. 記号について, 以下の表記を使用する.

- $\hat{z}$: z 軸方向の単位ベクトル.
- Ω : ターンテーブルの角速度の大きさ.
- $\vec{\omega}$: ボールの回転軸に対する回転の角速度ベクトル.
- $\overrightarrow{R}$: ターンテーブルの回転軸に対するボールの中心の水平位置を表す位置ベクトル. $\overrightarrow{R}\cdot\hat{z}=0$.
- $\vec{v}$: 実験室系から見たボールの中心の速度ベクトル. $\vec{v}=\dot{\overrightarrow{R}}$.

また, ボールの初期位置と初期速度 $\overrightarrow{R}(0)=\overrightarrow{R}_0$ と, $\vec{v}(0)=\vec{v}_0$ はその方向と大きさが既知であるとする. ターンテーブルの初期角速度 $\Omega(0)=\Omega_0$ も既知であるとする. 必要に応じて以下で定義される定数を使って良い.

$$\alpha=\frac{I}{I+mr^2},\quad \delta=\frac{I_d}{mr^2}$$

最終的な答えは, 軸方向のクロスプロダクト（ベクトル積）, ドットプロダクト（スカラー積）, 単位ベクトルを含むベクトル式で書くことができる.

A：角速度が一定の場合 (2.7 points)

このパートでは, ターンテーブルが外力によって一定の角速度 Ω で動く場合を考える.

A.1 (0.3pt)

ボールの滑りなし条件から, ボールの速度 $\vec{v}$ を Ω, $\vec{\omega}$, r, $\overrightarrow{R}$ で表せ.

解答. ボールの接点の速度を比較する. ターンテーブル上では $\Omega\hat{z}\times\overrightarrow{R}$, ボールから見ると $\vec{v}+\vec{\omega}\times(-r\hat{z})$ なので, これらを連立して,

$$\vec{v}=\Omega\hat{z}\times\overrightarrow{R}+\vec{\omega}\times\hat{z}r. \tag{1}$$

A.2 (0.2pt)

ボールに働く摩擦力を $\vec{f}$ として, ボールの直線加速度 $\dot{\vec{v}}$ と角加速度 $\dot{\vec{\omega}}$ が従う運動方程式をそれぞれ書き下せ.

解答.

$$m\dot{\vec{v}}=\vec{f}, \tag{2}$$

$$I\dot{\vec{\omega}}=(-r\hat{z})\times\vec{f}. \tag{3}$$

A.3 (0.6pt)

A.2 の結果を整理して, ボールの加速度 $\dot{\vec{v}}$ を Ω, $\vec{v}$, r, m, I で表せ.

解答. 式 (2) を (3) に代入して,

$$I\dot{\vec{\omega}} = (-r\hat{z}) \times m\dot{\vec{v}} \tag{4}$$

両辺に $\times\hat{z}$ して

$$I\dot{\vec{\omega}} \times \hat{z} = ((-r\hat{z}) \times m\dot{\vec{v}}) \times \hat{z} = -mr\dot{\vec{v}} \tag{5}$$

式 (1) を時間微分して

$$\dot{\vec{v}} = \Omega\hat{z} \times \vec{v} + \dot{\vec{\omega}} \times \hat{z}r \tag{6}$$

これを (5) に代入すると,

$$\dot{\vec{v}} = \Omega\hat{z} \times \vec{v} - \frac{mr^2}{I}\dot{\vec{v}} \tag{7}$$

$$\dot{\vec{v}} = \frac{I}{I + mr^2}\Omega\hat{z} \times \vec{v}. \tag{8}$$

A.4 (0.4pt)

初期条件 $\overrightarrow{R_0}$, $\vec{v_0}$ に注意して, **A.3** の結果から, ボールの速度 $\vec{v}$ を Ω, $\overrightarrow{R}$, $\overrightarrow{R_0}$, $\vec{v_0}$, r, m, I で表せ.

解答. 式 (7) の両辺を $t = 0$ から t まで t で積分すると,

$$\vec{v} - \vec{v_0} = \frac{I}{I + mr^2}\Omega\hat{z} \times (\overrightarrow{R} - \overrightarrow{R}_0) \tag{9}$$

$$\vec{v} = \frac{I}{I + mr^2}\Omega\hat{z} \times (\overrightarrow{R} - \overrightarrow{R}_0) + \vec{v_0}. \tag{10}$$

A.5 (0.5pt)

ボールの実験室系における軌跡が円になることを示せ. 初期条件 $\vec{v_0}$ と $\vec{R_0}$ が与えられたとき, その軌跡の円の中心ベクトル $\overrightarrow{R_c}$, 半径 R_t, ボールの角速度 Ω_c を求めよ.

解答. $\overrightarrow{R}$ が円運動をする時, 速度ベクトルは

$$\vec{v} = \Omega_c\hat{z} \times (\overrightarrow{R} - \overrightarrow{R_c}) \tag{11}$$

を満たすはずである. つまり,

$$\Omega_c = \frac{I}{I + mr^2}\Omega. \tag{12}$$

式 (10) と比較して, 両辺に $\times\hat{z}$ をして, 恒等式 $(\hat{z} \times \vec{A}) \times \hat{z} = \vec{A}$ を用いると,

$$-\Omega_c\hat{z} \times \overrightarrow{R}_0 + \vec{v_0} = -\Omega_c\hat{z} \times \overrightarrow{R}_c \tag{13}$$

$$\Omega_c\overrightarrow{R}_0 - \vec{v_0} \times \hat{z} = \Omega_c\overrightarrow{R}_c \tag{14}$$

なので, 中心と半径は

$$\vec{R}_c = \vec{R}_0 - \frac{I + mr^2}{I}\frac{\vec{v_0} \times \hat{z}}{\Omega} \tag{15}$$

$$R_t = \frac{I + mr^2}{I}\frac{v_0}{\Omega} \tag{16}$$

A.6 (0.7pt)

この問題では, ボールが一様な質量密度 $I = \frac{2}{5}mr^2$ を持つとする. 初期条件を $R_0 = R_t$ となるように選ぶ. ボールの $t = 0$ でのテーブル上での位置に赤い点をつける. 次にボールがこの赤い点の上を通る時刻 t_1 としてあり得るものは何か?

解答. 赤い点はターンテーブル上で原点を中心とする半径 R_0 の円を角速度 Ω で動く. 同じ向きに, ボールの中心は半径 R_0 の円を角速度 $\frac{2}{7}\Omega$ で動くので, もし中心の位置がバラバラであった場合, 2 つが初めの点で重なるのは, 赤い点が 7 周した時の $t_1 = \frac{14\pi}{\Omega}$ に起きる. しかし, 特殊なケースを考える必要がある.
(i) 2 つの円が重なっている場合, 2 つの点は同じ方向に動くので, 赤い点が相対速度 $\frac{5}{7}\Omega$ で追いかけることになる. なので, $t_1 = \frac{14\pi}{5\Omega}$ で追いつく.
(ii) 2 つの円は重なっていないが, 円の交点でたまたま重なる場合, この場合, 速度の比を考えると赤い点がその軌跡を $7x$ 周して, ボールが軌跡を $2x$ 周する. 2 つが重なるためには, これらの合計が整数周になる, つまり, $9x = n$ $(n = 1, 2, \ldots 8)$ となることで, 重なることができる. $n \geqq 9$ は, 初めの点で重なる方が早いので無視する. これを解くと, $t_1 = \frac{14\pi n}{9\Omega}$ $(n = 1, 2, \ldots 8)$ も答えとして考えられる.
以上をまとめると, 答えが

$$t_1 = \frac{14\pi n}{9\Omega}\ (n = 1, 2, \ldots 9), \frac{14\pi}{5\Omega} \tag{17}$$

となる. $\vec{R_0}$ を x 軸とすると, $\vec{R_c} - \vec{R_0}$ の x 軸となす角度は $40°, 80°, \ldots, 320°, 180°$ に対応している. これはもう数学の問題ですね.

SUM	SUM	Part A (2.7)		
		A.1	接点の速度	0.1 P.
			結果 (部分点なし)	0.2 P.
		A.2	直線加速度の方程式 (2)	0.1 P.
			回転の方程式 (3)	0.1 P.
		A.3	式 (4)	0.1 P.
			式 (6)	0.1 P.
			代入して整理 (8)	0.4 P.
		A.4	(8) を積分 (9)	0.4 P.
			初期条件を忘れた場合	0.2 P.
		A.5	Ω_c の値 (14)	0.1 P.
			R_c の表式 (15)	0.3 P.
			R_t の表式 (16)	0.1 P.
		A.6	初めの 1 点で交わるの場合の t_1	0.2 P.
			円が重なる場合の t_1	0.2 P.
			交点で重なる場合の t_1	0.3 P.
			もし $n=1,2,\ldots 8$ を列挙していなくても $n=1$ の答えで	0.2 P.

B：ターンテーブルが自由に動く場合 (3.8 points)

このセクションでは，ターンテーブルは z 軸の周りに摩擦なく自由に回転することができる．したがって，その自由な回転は，ボールの摩擦によってのみ妨げられる．初期角速度を Ω_0 とする．

B.1 (0.3pt)

ボールの運動方程式とボールの回転のトルクの方程式を連立した方程式を時間で積分して，$\vec{\omega}\times\hat{z}$ を $\vec{\omega}_0$, $\vec{v}$, $\vec{v}_0$, r, m, I で表せ．

解答. 式 (4) を時間で積分して，

$$I(\vec{\omega}-\vec{\omega}_0)=-mr\hat{z}\times(\vec{v}-\vec{v}_0) \tag{18}$$

これに $\times\hat{z}$ して，整理すると

$$\vec{\omega}\times\hat{z}=\vec{\omega}_0\times\hat{z}-\frac{mr}{I}(\vec{v}-\vec{v}_0) \tag{19}$$

B.2 (0.4pt)

B.1 の結果と滑りなし条件から, v を Ω, $\overrightarrow{R}$, Ω_0, $\overrightarrow{R_0}$, $\vec{v}_0$, および α で表せ.

解答. 式 (19) を r 倍して,

$$\vec{\omega} \times \hat{z}r = \vec{\omega}_0 \times \hat{z}r - \frac{mr^2}{I}(\vec{v} - \vec{v}_0) \tag{20}$$

で, 滑りなし条件 $\vec{v} = \Omega \times \hat{z} \times \overrightarrow{R} + \vec{\omega} \times \hat{z}r$ より, $t = 0$ と t の状況を比較して

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \hat{z} \times (\Omega\overrightarrow{R} - \Omega_0\overrightarrow{R}_0) + (\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \times \hat{z}r \tag{21}$$

(20) と (21) を組み合わせて,

$$\vec{v} - \vec{v}_0 = \hat{z} \times (\Omega\overrightarrow{R} - \Omega_0\overrightarrow{R}_0) - \frac{mr^2}{I}(\vec{v} - \vec{v}_0) \tag{22}$$

$$\vec{v} = \frac{I}{I + mr^2}\hat{z} \times (\Omega\overrightarrow{R} - \Omega_0\overrightarrow{R}_0) + \vec{v}_0 \tag{23}$$

$$= \alpha\hat{z} \times (\Omega\overrightarrow{R} - \Omega_0\overrightarrow{R}_0) + \vec{v}_0. \tag{24}$$

B.3 (0.6pt)

ターンテーブルの回転の方程式を書き下せ. 次に, **B.2** の結果を時間で微分してこれに代入せよ. その式を整理して, ターンテーブルの角加速度 $\dot{\Omega}$ を, Ω, $\overrightarrow{R}$, $\vec{v}$, r, α, δ を使って表せ.

解答. まず, 力は $-\vec{f}$ なので, 回転の方程式は

$$I_d\dot{\Omega}\hat{z} = -m\overrightarrow{R} \times \dot{\vec{v}} \tag{25}$$

次に $\dot{\vec{v}}$ について

$$\dot{\vec{v}} = \alpha\hat{z} \times (\dot{\Omega}\overrightarrow{R} + \Omega\vec{v}) \tag{26}$$

これらをまとめて, ベクトル三重積の公式より, $\overrightarrow{R} \cdot \hat{z} = 0$ を使うと

$$I_d\dot{\Omega}\hat{z} = -m\overrightarrow{R} \times (\alpha\hat{z} \times (\dot{\Omega}\overrightarrow{R} + \Omega\vec{v})) \tag{27}$$

$$= -m\alpha((\dot{\Omega}\overrightarrow{R} + \Omega\vec{v}) \cdot \overrightarrow{R})\hat{z} \tag{28}$$

$$(I_d + m\alpha R^2)\dot{\Omega} = -m\alpha(\vec{v} \cdot \overrightarrow{R})\Omega \tag{29}$$

とわかる. $I_d = mr^2\delta$ を使えば,

$$\dot{\Omega} = -\frac{\alpha(\vec{v} \cdot \overrightarrow{R})}{\delta r^2 + \alpha R^2} \cdot \Omega \tag{30}$$

B.4 (0.8pt)

B.3 の結果から, 角速度 Ω の大きさを, ボールと軸の距離 R のみの関数で表せ. 定数として, Ω_0, R_0, r, α, δ を用いて良い.

解答.

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{R}=\frac{1}{2}\frac{d(\vec{R}\cdot\vec{R})}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d(R^2)}{dt} \tag{31}$$

$$\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}=\frac{d}{dt}(\ln\Omega) \tag{32}$$

より,

$$\frac{d}{dt}(\ln\Omega)=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\ln\left(\alpha R^2+\delta r^2\right)\right) \tag{33}$$

を得る．これを両辺で積分して,

$$\ln\frac{\Omega}{\Omega_0}=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha R^2+\delta r^2}{\alpha R_0^2+\delta r^2}\right) \tag{34}$$

従って,

$$\Omega=\sqrt{\frac{\alpha R_0^2+\delta r^2}{\alpha R^2+\delta r^2}}\cdot\Omega_0 \tag{35}$$

B.5 (0.1pt)

与えられた R_0, Ω_0 に対して, $\Omega(t)$ の取りうる最大値 $\Omega_{\max}$ を求めよ．

解答. $R=0$ となる時が最大で,

$$\Omega_{\max}=\Omega_0\sqrt{1+\frac{\alpha R_0^2}{\delta r^2}} \tag{36}$$

最後に, ボールの実験室系における軌跡を求める．**B.2** の結果は, ボールの位置 $\overrightarrow{R}$ に依存する 1 つの項とそれ以外の定数項に分かれるだろう．その定数項を $\vec{v}_c$ とせよ．$\vec{v}_c$ の方向に x 軸を, y 軸を $\hat{z}\times\hat{x}$ の方向に定める．ボールの z 方向の角速度 ω_z は 0 であるとする．

B.6 (1.6pt)

系全体の角運動量 $L\hat{z}$ を書き下せ．次に, $\overrightarrow{R}=x\hat{x}+y\hat{y}$ として, 角速度 Ω を L, R, y, v_c, r, m, α, δ で書き表せ．**B.4** の結果と比較して, $R^2=x^2+y^2$ を用いて, ボールの軌跡を x, y の方程式に直せ．計算が煩雑になるので, 以下の定数を導入して式を整理するのが推奨される:

$$u_c^2=\Omega_0^2(\delta r^2+\alpha R_0^2),\quad \lambda=L/m$$

得られた軌跡の方程式がどのような図形を表すか, 可能なものを全て場合分けして示せ．

解答. 速度 $\vec{v}$ は

$$\vec{v}=\alpha\Omega\hat{z}\times\vec{R}+\vec{v}_c \tag{37}$$

であり, 全体の角運動量の z 成分は $\omega_z=0$ と合わせて

$$L\hat{z}=I_d\Omega\hat{z}+m\vec{R}\times\vec{v} \tag{38}$$

であり, これは保存される．$\vec{R}\times\vec{v}$ は,

$$\vec{R}\times\vec{v}=\vec{R}\times(\alpha\Omega\hat{z}\times\vec{R}+\vec{v}_c)=\alpha\Omega R^2\hat{z}+\vec{R}\times\vec{v}_c \tag{39}$$

式 (38) に $\cdot\hat{z}$ をして, 整理すると

$$L = I_d\Omega + m\alpha\Omega R^2 + m(\vec{R}\times\vec{v}_c)\cdot\hat{z} \tag{40}$$

$$((x\hat{x}+y\hat{y})\times(v_c\hat{x}))\cdot\hat{z} = -v_c y \tag{41}$$

より, Ω は,

$$\Omega = \frac{L+mv_c y}{I_d+\alpha m R^2} = \frac{L/m+v_c y}{\delta r^2+\alpha R^2} \tag{42}$$

と求まる. (35) と連立すると,

$$\Omega^2 = \frac{\alpha R_0^2+\delta r^2}{\alpha R^2+\delta r^2}\Omega_0^2 = \left(\frac{L/m+v_c y}{\alpha R^2+\delta r^2}\right)^2 \tag{43}$$

$$\Omega_0^2(\alpha R_0^2+\delta r^2)(\alpha R^2+\delta r^2) = (L/m+v_c y)^2 \tag{44}$$

パラメーター λ と u_c を用いて整理すると,

$$u_c^2(\alpha(x^2+y^2)+\delta r^2) = \lambda^2+2\lambda v_c y+v_c^2 y^2 \tag{45}$$

$$\alpha u_c^2 x^2+(\alpha u_c^2-v_c^2)y^2-2\lambda v_c y = \lambda^2-\delta u_c^2 r^2 \tag{46}$$

なので, y^2 の係数に注意すれば,

$$\begin{cases} \text{楕円} & \text{if} \quad \alpha u_c^2 > v_c^2 \\ \text{放物線} & \text{if} \quad \alpha u_c^2 = v_c^2 \\ \text{双曲線} & \text{if} \quad \alpha u_c^2 < v_c^2. \end{cases} \tag{47}$$

とわかる.

SUM	**Part B (3.8)**			
	SUM	**B.1**	式 (19)	**0.3 P.**
			そのほかの解法でも **B.3** まで解けている場合, 満点を与える	**0.3 P.**
		B.2	滑りなし条件を代入する	**0.2 P.**
			ω_0 などを消去する (24)	**0.2 P.**
		B.3	トルクの方程式 (25) $\vec{f}$ でもよい	**0.1 P.**
			加速度を求める (26)	**0.1 P.**
			代入して整理 (29)	**0.3 P.**
			α, δ に変換	**0.1 P.**
		B.4	Ω を移項して $d\ln\Omega$ にする (32)	**0.1 P.**
			$\vec{v}\cdot\vec{R}$ を変形する (31)	**0.2 P.**
			さらに分子に気づいて $d\ln\left(\alpha R^2+\delta r^2\right)$ に気づく (33)	**0.1 P.**
			両辺を積分する (34)	**0.2 P.**
			結果 (35)	**0.2 P.**
		B.5	結果 (36)	**0.1 P.**
			部分点なし	**0.0 P.**
		B.6	L の表式 (38)	**0.1 P.**
			$\vec{R}\times\vec{v}$ の計算 (39)	**0.2 P.**
			それを y に直すパート (40) (41)	**0.2 P.**
			Ω の表式 (42)	**0.2 P.**
			既存の Ω との連立 (44)	**0.2 P.**
			これを x, y の方程式に直す (定数を使っていなくても良い)	**0.4 P.**
			軌跡のリストアップ (47)	**0.3 P.**

C：磁場中のターンテーブルのボール (3.5 points)

最後のパートでは, 密度分布が $I=\dfrac{mr^2}{10}$ となるような状況を考える. これは, 例えば, ボールが半径の半分まで均一な密度で満たされ, 残りの部分は無視できる質量である場合に実現できる. さらに, ボールの外表面には一様な電荷面密度 $\sigma=Q/(4\pi r^2)$ の表面電荷があるとし, セットアップ全体は, 一様な磁場 $\vec{B}=B\hat{z}$ の磁場の中にある. $(B>0)$ ターンテーブルはパート A と同じように, 定数 Ω で回転する.

C.1 (0.3pt)

磁場のローレンツ力によってボールに生み出されるトルクを $\vec{\tau}$ とする．摩擦力 $\vec{f}$, $\vec{\tau}$ を用いて，ボールの加速度と回転の運動方程式を書き下せ．

解答. ボールにかかる合計の力を考えると，ボールの回転の速度の寄与は対蹠点にかかる力が打ち消し合うことから $Q\vec{v} \times B$ である．従って，

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{f} + Q\vec{v} \times \vec{B} \tag{48}$$

$$I\dot{\vec{\omega}} = (-r\hat{z}) \times \vec{f} + \tau. \tag{49}$$

C.2 (0.9pt)

磁場のトルク τ は，ある数係数 a を用いて，$\tau = aQr^2\vec{\omega} \times \overrightarrow{B}$ となることが示される．積分によって，a の値を求めよ．

解答. まず，変数 θ, ϕ を用いて，中心からの変位ベクトルを

$$\vec{r} = r(\sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}) \tag{50}$$

として表す．点 $\vec{r}$ の位置にある微小面積要素 $dS = r^2\sin\theta d\theta d\phi$ の速度は $\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}$ で，そこにおけるトルクは

$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times (\sigma r^2 \sin\theta d\theta d\phi(\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{r}) \times B\hat{z}) \tag{51}$$

で，これを積分する．$\vec{v}$ による寄与は再び対蹠点の議論より打ち消す．また，$\vec{\omega} \cdot \hat{z} = 0$ を用いると

$$\vec{r} \times ((\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \hat{z}) = \vec{\omega} \times (\vec{r} \cdot \hat{z})\vec{r} \tag{52}$$

なので，積分の式は次のように計算できる．被積分関数のベクトルの x, y 成分は対称性より消える．

$$\vec{\tau} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \vec{r} \times (\sigma r^2 \sin\theta d\theta d\phi(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times B\hat{z}) \tag{53}$$

$$= \sigma B r^2 \vec{\omega} \times \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\vec{r} \cdot \hat{z})\vec{r} \sin\theta d\theta d\phi \tag{54}$$

$$= \sigma B r^4 \vec{\omega} \times \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos\theta(\sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z})\sin\theta d\theta d\phi \tag{55}$$

$$= \sigma B r^4 \vec{\omega} \times \hat{z} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta d\theta d\phi \tag{56}$$

$$= \frac{Q}{4\pi} r^2 \vec{\omega} \times \vec{B} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} Q r^2 \vec{\omega} \times \vec{B} \tag{57}$$

より，$a = 1/3$.

C.3 (0.7pt)

運動方程式を整理して，ボールの位置 $\overrightarrow{R}$ に関して以下の微分方程式が成り立つことを示し，係数 β と γ を

求めよ.

$$\frac{d^2\overrightarrow{R}}{dt^2} - \gamma\frac{d\overrightarrow{R}}{dt} \times \hat{z} + \beta\overrightarrow{R} = 0$$

さらに, γ を β, α, Ω を使って表せ.

解答. (48), (49) から $\vec{f}$ を消去すると,

$$I\dot{\vec{\omega}} = (-r\hat{z}) \times (m\dot{\vec{v}} - Q\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{3}r^2Q\vec{\omega} \times \vec{B} \tag{58}$$

滑りなし条件の両辺に, $\times\hat{z}$ をすると

$$\vec{\omega}r = \Omega\vec{R} - \vec{v} \times \hat{z} \tag{59}$$

これを時間微分して,

$$\dot{\vec{\omega}}r = \Omega\vec{v} - \dot{\vec{v}} \times \hat{z} \tag{60}$$

これらを代入して,

$$I(\Omega\vec{v} - \dot{\vec{v}} \times \hat{z}) = (-r^2\hat{z}) \times (m\dot{\vec{v}} - Q\vec{v} \times \vec{B}) + \frac{1}{3}r^2Q(\Omega\vec{R} - \vec{v} \times \hat{z}) \times \vec{B} \tag{61}$$

$$I\Omega\vec{v} - I\dot{\vec{v}} \times \hat{z} = mr^2\dot{\vec{v}} \times \hat{z} + r^2QB\vec{v} + \frac{1}{3}r^2QB\Omega\vec{R} \times \hat{z} + \frac{1}{3}r^2QB\vec{v} \tag{62}$$

$$0 = (I + mr^2)\dot{\vec{v}} \times \hat{z} + \left(\frac{4}{3}r^2QB - I\Omega\right)\vec{v} + \frac{1}{3}r^2QB\Omega\vec{R} \times \hat{z} \tag{63}$$

両辺に $\times\hat{z}$ をして, 方程式

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} - \frac{4r^2QB - 3I\Omega}{3(I + mr^2)}\frac{d\vec{R}}{dt} \times \hat{z} + \frac{r^2QB\Omega}{3(I + mr^2)}\vec{R} = 0 \tag{64}$$

より, 題意が示され, 係数は次のように求められる.

$$\beta = \frac{r^2QB\Omega}{3(I + mr^2)} \tag{65}$$

$$\gamma = \frac{4r^2QB - 3I\Omega}{3(I + mr^2)} = \frac{4\beta}{\Omega} - \alpha\Omega \tag{66}$$

C.4 (0.9pt)

この微分方程式を解くため, $\overrightarrow{R}$ を次のように極座標の成分に分解する：

$$x(t) = \rho(t)\cos(\eta(t)), \quad y(t) = \rho(t)\sin(\eta(t))$$

新しい微分方程式が一次の時間微分の項を持たないように, 時間の関数として極角 $\eta(t)$ を求めよ. この $\eta(t)$ に対して, $\rho(t)$ の従う微分方程式を書き下し, その解の振る舞いが指数的, 調和的... などさまざまなタイプになる条件を書き下せ. この問題は解答に β と γ を用いよ.

解答. $\vec{R} = \rho\hat{r}$ として, 極座標で考える. 単位ベクトルの時間微分は,

$$\frac{d}{dt}\hat{r} = \dot{\eta}\hat{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\hat{\theta} = -\dot{\eta}\hat{r} \tag{67}$$

なので,

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{\rho}\hat{r} + \rho\dot{\eta}\hat{\theta} \tag{68}$$

$$\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = \ddot{\rho}\hat{r} + \dot{\rho}\dot{\eta}\hat{\theta} + \dot{\rho}\dot{\eta}\hat{\theta} + \rho\ddot{\eta}\hat{\theta} - \rho(\dot{\eta})^2\hat{r} = (\ddot{\rho} - \rho(\dot{\eta})^2)\hat{r} + (2\dot{\rho}\dot{\eta} + \rho\ddot{\eta})\hat{\theta} \tag{69}$$

より, 元々の方程式は,

$$\frac{d^2\overrightarrow{R}}{dt^2} - \gamma\frac{d\overrightarrow{R}}{dt} \times \hat{z} + \beta\overrightarrow{R} = 0 \tag{70}$$

$$(\ddot{\rho} - \rho(\dot{\eta})^2)\hat{r} + (2\dot{\rho}\dot{\eta} + \rho\ddot{\eta})\hat{\theta} + \gamma(\dot{\rho}\hat{\theta} - \rho\dot{\eta}\hat{r}) + \beta\rho\hat{r} = 0 \tag{71}$$

$$\ddot{\rho} + (\beta - \dot{\eta}^2 - \gamma\dot{\eta})\rho = 0 \tag{72}$$

$$(2\dot{\eta} + \gamma)\dot{\rho} + \ddot{\eta}\rho = 0 \tag{73}$$

より, 例えば,

$$\eta(t) = -\frac{\gamma}{2} + \eta(0) \tag{74}$$

とすれば角度成分に関する方程式が満たされ, 1 回微分が方程式から消える. そのとき, $\rho(t)$ は,

$$\ddot{\rho} = -\left(\beta + \frac{\gamma^2}{4}\right)\rho \tag{75}$$

となると, 方程式の解は

$$\begin{cases} \text{調和的} & \text{if} \quad \beta + \frac{\gamma^2}{4} > 0 \\ \text{線形} & \text{if} \quad \beta + \frac{\gamma^2}{4} = 0 \\ \text{指数的} & \text{if} \quad \beta + \frac{\gamma^2}{4} < 0. \end{cases} \tag{76}$$

C.5 (0.7pt)

$\rho(t)$ が線形に増加する場合を考える. 以下のような初期条件を考える:

$$x(0) = 1 \text{ m}, \quad y(0) = 0 \text{ m}, \quad v_x(0) = 1 \text{ m/s}, \quad v_y(0) = -1 \text{ m/s}$$

このとき, β, γ を求めよ. この β と γ が達成可能な Ω の値を求めよ. ボールの軌跡をスケッチし, この運動が可能になる Q の符号を定めよ.

解答. $\rho(t)$ が線形になる時, $\beta = -\frac{\gamma^2}{4}$ である. $\rho(t) = \rho_0 + bt$, $\eta(t) = -\frac{\gamma}{2}t + \eta_0$ とおけば, 初期条件より $\rho_0 = 1$ m, $\eta_0 = 0$ であり,

$$x(t) = (\rho_0 + bt)\cos\left(-\frac{\gamma}{2}t\right), \quad y(t) = (\rho_0 + bt)\sin\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \tag{77}$$

の $t = 0$ での微分係数を考えると,

$$1 \text{ m/s} = b, \quad -1 \text{ m/s} = -\rho_0\frac{\gamma}{2} \tag{78}$$

とわかるので, $\gamma = 2\,\mathrm{s}^{-1}$, つまり $\beta = -1\,\mathrm{s}^{-2}$ となる. $\gamma = \dfrac{4\beta}{\Omega} - \alpha\Omega$ に代入すると, $\alpha = 1/11$ より,

$$2 = -\frac{4}{\Omega} - \frac{1}{11}\Omega \tag{79}$$

これを解いて,

$$\Omega = (-11 \pm \sqrt{77})\,\mathrm{s}^{-1} \tag{80}$$

が得られる. 軌跡は, 時計回りに半径が増大する渦巻き. また, $\beta < 0$ で, いずれの場合も $\Omega < 0$ なので, $Q > 0$ である.

SUM	**Part C (3.5)**			
	SUM	**C.1**	ローレンツ力が $Q\vec{v} \times \vec{B}$ であることの説明	**0.1 P.**
			運動方程式 (48)	**0.1 P.**
			回転の方程式 (49)	**0.1 P.**
		C.2	$\vec{v}$ が打ち消されることに気づく	**0.1 P.**
			積分の立式	**0.3 P.**
			積分の計算	**0.5 P.**
		C.3	(58) と (61) : $\vec{f}$ と $\vec{\omega}$ を全部消去する	**0.2 P.**
			整理する (63)(64)	**0.3 P.**
			β と γ の表式	**0.1 P.**
			γ を β で表す	**0.1 P.**
		C.4	(69) の導出	**0.3 P.**
			η が線形である	**0.1 P.**
			$\eta = -\gamma/2 + \eta_0$	**0.1 P.**
			ρ の方程式	**0.2 P.**
			解の振る舞いのリストアップ (76)	**0.2 P.**
		B.5	$\rho(t)$ が線形なので $\beta = -\gamma^2/4$	**0.1 P.**
			ρ_0, b, γ を求めるシーン (77), (78)	**0.4 P.**
			Ω を方程式にして解く	**0.2 P.**
			軌跡の概形	**0.1 P.**
			Q の符号	**0.1 P.**